P. Schapira

Utilisation des hyperfonctions dans les théorèmes de dualité de la géométrie analytique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1970, tome 11
« Conférences de H. Epstein et V. Glaser, R. Gérard, J.J. Loeffel et A. Martin, P. Schapira », , exp. n° 4, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1970__11__A4_0>

UTILISATION DES HYPERFONCTIONS DANS LES THÉORÈMES DE DUALITÉ DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (*)

par P. SCHAPIRA

Introduction.

Soit W une variété analytique complexe de dimension n, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de Θ-modules sur W, K un compact de W. Nous allons démontrer qu'il existe une dualité entre les espaces $H^p(K, \mathcal{F})$ et $\mathrm{Ext}^{n-p}_{K,\Theta}(W, \mathcal{F}, \Theta^{(n)})$, ces espaces étant munis de topologies "naturelles" en général non séparées.

Ce théorème n'est pas nouveau [cf. (13, 8, 14, 10)] et se généralise d'ailleurs au cas où W est un espace analytique, mais nous voulons montrer que l'utilisation des hyperfonctions (11, 9) permet d'en donner une démonstration très simple, d'une part parce que les résolutions obtenues sont flasques, d'autre part parce que le théorème de division des hyperfonctions se déduit très facilement des théorèmes de Oka et H.Cartan

Ce théorème de dualité permet d'étendre le théorème de Sato (11) au cadre des faisceaux cohérents.

1. - Préliminaires.

Nous renvoyons à (1) pour ce qui concerne la théorie des faisceaux et à (3) pour la définition et les propriétés des espaces $\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ (Fréchet-Schwartz) et $\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ (dual de Fréchet-Schwartz).

Soit V une variété analytique réelle, dénombrable à l'infini. On désigne par $\mathcal{O}\!\mathcal{C}$ le faisceau des germes de fonctions analytiques (à valeurs complexes) et par B le faisceau des germes d'hyperfonctions (11, 9, 12).

Rappelons les faits suivants :

1) Soit W un complexifié de V. Alors V admet dans W un système fon-

(*)Cet exposé figure dans le Séminaire P. LELONG (Analyse), 10e année, 1969/70 .

damental de voisinages d'holomorphie (2) .

2) Pour tout compact K de V l'espace $\mathcal{O}(K) = \Gamma(K, \mathcal{O})$ admet une topologie naturelle du type $\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ (9) .

3) Le faisceau B est flasque et pour tout compact K de V

$$\Gamma_K(V, B) = \mathcal{O}'(K) \qquad (9)$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}$ -modules.

4) Il existe $\tilde{V}$ voisinage de V dans W, $\tilde{\mathcal{F}}$ faisceau cohérent sur $\tilde{V}$ de Θ-modules (Θ : faisceau des germes de fonctions holomorphes sur W) tel que

$$\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \big| V \quad .$$

5) Pour tout compact K de V il existe des entiers p et q et une suite exacte de faisceaux aux voisinages de K de la forme

$$\mathcal{O}^q \longrightarrow \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

6) Soit u : $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux cohérents de $\mathcal{O}$-modules. Alors Ker u et Coker u sont cohérents (4).

7) Soit $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une suite exacte de faisceaux cohérents de $\mathcal{O}$ -modules.

Pour tout compact K de V la suite

$$\mathcal{F}(K) \longrightarrow \mathcal{G}(K) \longrightarrow \mathcal{H}(K)$$

est exacte

$$(\mathcal{F}(K) = \Gamma(K, \mathcal{F})) \qquad (4)$$

8) Tout sous-$\mathcal{O}(K)$-module de type fini de $\mathcal{O}(K)^p$ est fermé dans $\mathcal{O}(K)^p$ muni de sa topologie $\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ (4) .

2. - Division des hyperfonctions.

Soit (f) une matrice de type (q, p) (q lignes, p colonnes) à coefficients dans $\mathcal{O}(V)$.

On désignera encore par (f) les morphismes $\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ et $B^p \longrightarrow B^q$ définis par cette matrice. On désignera par ${}^t(f)$ la matrice transposée

THÉORÈME 1. -

Soit (f) et (g) des matrices analytiques sur V telles que la suit de faisceaux sur V :

$$\mathcal{O}^r \xrightarrow[{}^t(g)]{} \mathcal{O}^q \xrightarrow[{}^t(f)]{} \mathcal{O}^p$$

soit exacte.

Alors la suite

$$B^p \xrightarrow[(f)]{} B^q \xrightarrow[(g)]{} B^r$$

est exacte.

Démonstration.

Il suffit de voir que pour tout ouvert $\Omega \subset\subset V$ la suite :

$$B^p(\Omega) \xrightarrow[(f)]{} B^q(\Omega) \xrightarrow[(g)]{} B^r(\Omega)$$

est exacte.

Le faisceau noyau du morphisme

$${}^t(g) : \mathcal{O}^r \longrightarrow \mathcal{O}^q$$

est cohérent. Donc au voisinage de $\bar{\Omega}$ il existe un entier positif s, une matrice analytique (h) définie au voisinage de $\bar{\Omega}$ tels que la suite

$$\mathcal{O}^s \xrightarrow[{}^t(h)]{} \mathcal{O}^r \xrightarrow[{}^t(g)]{} \mathcal{O}^q \xrightarrow[{}^t(f)]{} \mathcal{O}^p$$

soit exacte.

Les suites

$$\mathcal{O}^r(\bar{\Omega}) \xrightarrow[{}^t(g)]{} \mathcal{O}^q(\bar{\Omega}) \xrightarrow[{}^t(f)]{} \mathcal{O}^p(\bar{\Omega})$$

$$\mathcal{O}^s(\partial\Omega) \xrightarrow[{}^t(h)]{} \mathcal{O}^r(\partial\Omega) \xrightarrow[{}^t(g)]{} \mathcal{O}^q(\partial\Omega)$$

sont donc des suites exactes d'espaces du type $\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ et les applications sont d'images fermées.

Par transposition on en conclut (13) que les suites :

$$\mathcal{O}^p(\bar{\Omega})' \xrightarrow[(f)]{} \mathcal{O}^q(\bar{\Omega})' \xrightarrow[(g)]{} \mathcal{O}^r(\bar{\Omega})'$$

$$\mathcal{O}^q(\partial\Omega)' \xrightarrow[(g)]{} \mathcal{O}^r(\partial\Omega)' \xrightarrow[(h)]{} \mathcal{O}^s(\partial\Omega)'$$

sont exactes.

Soit alors $T \in B^q(\Omega)$ telle que $(g)\,T = 0$.

Soit $\overline{T} \in \mathcal{O}^q(\overline{\Omega})'$ un prolongement de T.

$$(g)\,\overline{T} \in \mathcal{O}^r(\partial\Omega)'$$

et

$$(h)(g)\,\overline{T} = 0$$

donc il existe $S \in \mathcal{O}^q(\partial\Omega)'$ avec

$$(g)S = (g)\overline{T} .$$

Par suite il existe $U \in \mathcal{O}^p(\overline{\Omega})'$ avec

$$(f)U = \overline{T} - S$$

et

$$(f)U\big|\Omega = T .$$

THÉORÈME 2. -

Soit (f) une matrice (q, p) à coefficients dans $\mathcal{O}(V)$.
Soit $B_{(f)}$ le faisceau noyau du morphisme

$$(f) : B^p \longrightarrow B^q .$$

Le faisceau $B_{(f)}$ est flasque.

Démonstration.

Pour tout ouvert $\Omega \subset\subset V$ il existe une matrice (g) du type (r, q) définie au voisinage de $\overline{\Omega}$ telle que la suite

$$\mathcal{O}^r \xrightarrow[{}^t(g)]{} \mathcal{O}^q \xrightarrow[{}^t(f)]{} \mathcal{O}^p$$

soit exacte.

Il résulte alors de la démonstration du théorème 1 que pour tout fermé Z de Ω la suite

$$B^p_Z(\Omega) \xrightarrow[(f)]{} B^q_Z(\Omega) \xrightarrow[(g)]{} B^r_Z(\Omega)$$

est exacte ($B_Z(\Omega) = \Gamma_Z(\Omega, B)$) .

Soit ω un ouvert de Ω, $T \in \Gamma(\omega, B_{(f)})$.

On a la suite exacte

$$B^p_{\Omega - \omega}(\Omega) \xrightarrow[(f)]{} B^q_{\Omega-\omega}(\Omega) \xrightarrow[(g)]{} B^r_{\Omega-\omega}(\Omega)$$

Soit $\overline{T} \in B(\Omega)^p$ un prolongement de T.

$$(f)\overline{T} \in B^q_{\Omega - \omega}(\Omega)$$

$$(g)(f)\overline{T} = 0 .$$

Donc il existe $U \in B^p_{\Omega-\omega}(\Omega)$ avec

$$(f)U = (f)\overline{T}$$

$$\overline{T} - U \in \Gamma(\Omega, B_{(f)})$$

$\overline{T} - U$ sera un prolongement de T.

Le faisceau $B_{(f)}$ étant localement flasque est flasque (1).

<u>COROLLAIRE 1</u>. (théorème de division (5)).

<u>Soit</u> (f) <u>une matrice</u> (q, p) <u>à coefficients dans</u> $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(V)$. <u>Soit</u> Z <u>un fermé de</u> V <u>et</u> $T \in B^q_Z(V)$.

<u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe</u> $S \in B^p_Z(V)$ <u>vérifiant</u>

$$(f)S = T$$

<u>est que pour tout</u> $x \in V$, <u>pour toute matrice</u> (g) <u>de type</u> (1, q) <u>à coefficients analytiques au voisinage de</u> x <u>vérifiant</u>

$$(g)(f) = 0$$

on ait

$$(g)T = 0 .$$

Démonstration.

Soit Im(f) le préfaisceau image de B^p par le morphisme (f). Comme le faisceau Ker(f) est flasque le préfaisceau Im(f) est un faisceau.

L'hypothèse sur T entraîne d'après le théorème 1 que T appartient localement à l'image de (f) donc à $\Gamma_Z(V, \mathrm{Im}(f))$.

De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow B^p \xrightarrow[(f)]{} \mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0$$

résulte la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_Z(V, \mathrm{Ker}(f)) \longrightarrow B_Z^p(V) \xrightarrow[(f)]{} \Gamma_Z(V, \mathrm{Im}(f)) \longrightarrow 0$$

donc $T = (f)S, \ S \in B_Z^p(V)$.

COROLLAIRE 2.

$\forall x \in V$, B_x est un $\mathcal{O}_x$ module injectif.

Démonstration. (cf. 7).

Soit I_x un idéal de $\mathcal{O}_x$. Il faut vérifier que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{O}_x, B_x) = B_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, B_x)$$

est surjective.

Soit $(f_i)_{i=1}^p$ un système de générateurs de I_x, $(T_i)_{i=1}^p \in B_x^p$ tels que :

$$g_i \in \mathcal{O}_x \ (i = 1, \ldots, p) , \ \sum_{i=1}^p g_i f_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^p g_i T_i = 0.$$

La correspondance

$$u : f_i \longrightarrow T_i$$

définit un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I_x, B)$ et inversement .

Il suffit alors de montrer qu'il existe $S \in B_x$ tel que $f_i\, S = T_i (i=1 \dots p)$ ce qui résulte de ce que $\mathcal{O}$ est cohérent et du théorème 1.

3. - <u>Le foncteur</u> $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\cdot , B)$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}$-modules.

On a vu que pour tout compact K de V il existait une suite exacte de faisceaux au voisinage de K de la forme

$$\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

et que la suite

$$\mathcal{O}^p(K) \longrightarrow \mathcal{O}^q(K) \longrightarrow \mathcal{F}(K) \longrightarrow 0$$

était exacte.

Comme l'espace $\mathcal{O}^p(K)$ a une image fermée dans $\mathcal{O}^q(K)$ l'espace quotient $\dfrac{\mathcal{O}^q(K)}{\mathrm{Im}\, \mathcal{O}^p(K)}$ est séparé et donc du type $\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$. On munira $\mathcal{F}$ de cette topologie, qui d'après le théorème du graphe fermé ne dépendra pas de la résolution choisie.

Soit <u>FA</u> (V) la catégorie donc les objets sont les faisceaux de $\mathcal{O}$-modules et les morphismes les morphismes de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules.

Soit <u>F A C</u> (V) la sous-catégorie pleine de <u>F A</u>(V) dont les objets sont les faisceaux cohérents de $\mathcal{O}$-modules.

Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\cdot , B)$ est un foncteur contravariant de <u>F A C</u>(V) dans <u>FA</u>(V) et on a :

$$\Gamma(V, \underline{Hom}_{\mathfrak{O}}(\mathcal{F}, B) = Hom_{\mathfrak{O}}(\mathcal{F}, B)$$

Soit $\underline{GA}$ la catégorie dont les objets sont les groupes abéliens et les morphismes les morphismes de groupes.

Soit Φ une famille de supports dans V. On pose :

$$Hom_{\phi, \mathfrak{O}}(\mathcal{F}, B) = \Gamma_{\phi}(V, \underline{Hom}_{\mathfrak{O}}(\mathcal{F}, B)) \quad .$$

<u>THÉORÈME 3</u> (cf. 5).

<u>Soit</u> $\mathcal{F} \in Ob(\underline{FAC}(V))$.

1) <u>Le faisceau</u> $\underline{Hom}_{\mathfrak{O}}(\mathcal{F}, B)$ <u>est flasque et</u>

$$\Gamma_K(V, \underline{Hom}_{\mathfrak{O}}(\mathcal{F}, B)) = \mathcal{F}(K)'$$

<u>2) Le foncteur</u> $\underline{Hom}_{\mathfrak{O}}(\cdot , B)$:

$$\underline{FAC}(V) \longrightarrow \underline{FA}(V)$$

<u>est exact</u>.

3) <u>Si</u> ϕ <u>est une famille de supports dans</u> V <u>le foncteur</u> $Hom_{\phi, \mathfrak{O}}(\cdot , B)$

$$\underline{FAC}(V) \longrightarrow \underline{GA}$$

<u>est exact</u>.

<u>Démonstration</u>.

1) Soit Ω un ouvert relativement compact de V et

$$\mathfrak{O}^q \xrightarrow[{}^t(f)]{} \mathfrak{O}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

une résolution de $\mathcal{F}$ au voisinage de $\bar{\Omega}$.

La suite

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}_{\mathfrak{O}}(\mathcal{F}, B) \longrightarrow B^p \xrightarrow[(f)]{} B^q$$

est exacte. D'après le théorème 2 cela entraîne que la restriction de $\underline{Hom}_{\mathfrak{O}}(\mathcal{F}, B)$ à Ω est flasque. Donc $\underline{Hom}_{\mathfrak{O}}(F, B)$ est flasque.

Si K est un compact de Ω la suite

$$\mathfrak{A}^q(K) \longrightarrow \mathfrak{A}^p(K) \longrightarrow \mathcal{F}(K) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte d'espaces du type $\mathcal{DFS}$ donc la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(K)' \longrightarrow \mathfrak{A}^p(K)' \longrightarrow \mathfrak{A}^q(K)'$$

est exacte.

Comme il en est de même de la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma_K(V, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}, B)) \longrightarrow \Gamma_K(V, B^p) \longrightarrow \Gamma_K(V, B^q)$$

on a

$$\Gamma_K(V, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}, B)) = \mathcal{F}(K)'$$

2) D'après (1 ,p. 266) on a :

$$\forall x \in V$$

$$(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}, B))_x = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_x}(\mathcal{F}_x, B_x)$$

Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.

3) Soit

$$\mathcal{F} \xrightarrow[u]{} \mathcal{G} \xrightarrow[u]{} \mathcal{H}$$

une suite exacte dans $\underline{F\ A\ C}(V)$. En remplaçant $\mathcal{F}$ par Ker u et $\mathcal{H}$ par Im v on peut supposer la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

exacte.

La suite

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{H}, B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{G}, B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}, B) \longrightarrow 0$$

est alors exacte et le théorème résulte de ce que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{H}, B)$ est flasque.

4) <u>Résolutions sur une variété complexe.</u>

A partir de maintenant nous placerons notre étude dans une variété W analytique complexe de dimension (complexe) n, dénombrable à l'infini.

En considérant la structure de variété analytique réelle de W on peut définir les faisceaux $\mathfrak{A}$ et B sur W. On désigne par $\Theta^{(p)}$ le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré p ($\Theta^{(o)} = \Theta$), par $\mathfrak{A}^{(p,q)}$ (resp. $B^{(p,q)}$) le faisceau des formes différentielles de bidegré (p, q) en $(dz, d\bar{z})$ à coefficients dans $\mathfrak{A}$ (resp. B) et par $\bar{\partial}$ l'opérateur de différentiation extérieure en $d\bar{z}$.

THÉORÈME 4 (cf. 6, 12).

On a les deux suites exactes de faisceaux sur W :

(1) $0 \longrightarrow \Theta^{(p)} \longrightarrow \mathfrak{A}^{(p,q)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \mathfrak{A}^{(p,n)} \longrightarrow 0$

(2) $0 \longrightarrow \Theta^{(n-p)} \longrightarrow B^{(n-p,o)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots B^{(n-p,n)} \longrightarrow 0$.

La résolution (2) est une résolution flasque, donc molle, du faisceau $\Theta^{(n-p)}$.

Soit $\mathcal{E}^{(n,n)}$ le faisceau des formes différentielles de degré (n, n) à coefficient C^{∞}. Il résulte du théorème de DOLBEAULT que si $T \in \Gamma_c(W, B^{(n,n)})$ (c : famille des compacts de W) il existe $S \in \Gamma_c(W, \mathcal{E}^{(n,n)})$ dont la classe dans $H^n_c(W, \Theta^{(n)})$ est celle de T.

On pose :

$$\int_W T = \int_W S$$

Si K est un compact de W, les espaces $\Gamma(K, \mathfrak{A}^{(p,q)})$ et $\Gamma_K(W, B^{(n-p,n-q)})$ sont alors des espaces $\mathcal{DFS}$ et $\mathcal{FS}$ en dualité par

$$(f, T) \longrightarrow \int_W f \wedge T$$

THÉORÈME 5

Soit K un compact de W, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de Θ-modules.

1) $\mathrm{Hom}_{\Theta}(\mathcal{F}, B^{(p,q)}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F} \otimes_{\Theta} \mathfrak{A}, B^{(p,q)})$.

2) Les espaces $\Gamma(K, \mathcal{F} \otimes_{\Theta} \mathfrak{A}^{(p,q)})$ et $\mathrm{Hom}_{K,\Theta}(W, \mathcal{F}, B^{(n-p,n-q)})$ sont des espaces

$\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ et $\mathcal{D}.\mathcal{S}.\mathcal{S}.$ en dualité .

1) Cela est classique

2) Soit

$$\mathcal{O}\!\mathcal{C}^{j} \longrightarrow \mathcal{O}\!\mathcal{C}^{i} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\theta} \mathcal{O}\!\mathcal{C} \longrightarrow 0$$

une résolution libre de $\mathcal{F} \otimes_{\theta} \mathcal{O}\!\mathcal{C}$ au voisinage de K .

Les suites

$$\Gamma(K, \mathcal{O}\!\mathcal{C}^{(p,q)})^{j} \longrightarrow \Gamma(K, \mathcal{O}\!\mathcal{C}^{(p,q)})^{i} \longrightarrow \Gamma(K, \mathcal{F} \otimes_{\theta} \mathcal{O}\!\mathcal{C}^{(p,q)}) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X,\mathcal{O}\!\mathcal{C}}(W, \mathcal{F} \otimes_{\theta} \mathcal{O}\!\mathcal{C}, B^{(n-p,n-q)}) \longrightarrow \Gamma_K(W, B^{(n-p,n-q)})^{i} \longrightarrow \Gamma_K(W, B^{(n-p,n-q)})^{j}$$

sont exactes. Le théorème en résulte .

THEOREME 6 .

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur W . La suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\theta} \mathcal{O}\!\mathcal{C}^{(o,o)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\theta} \mathcal{O}\!\mathcal{C}^{(o,1)} \longrightarrow 0$$

est exacte .

Démonstration .

Le théorème est de type local. On peut supposer que $\mathcal{F}$ admet une résolution libre :

$$0 \longrightarrow \theta^{\alpha p} \longrightarrow \dots \longrightarrow \theta^{\alpha 1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \theta^{\alpha_p} \arrow[r] \arrow[d] & \theta^{\alpha_p} \otimes_\theta \mathfrak{A}^{(o,\, o)} \arrow[r, "\partial"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \theta^{\alpha_1} \arrow[r] \arrow[d] & \theta^{\alpha_1} \otimes_\theta \mathfrak{A}^{(o,\, o)} \arrow[r, "\partial"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \otimes_\theta \mathfrak{A}^{(o,\, o)} \arrow[r, "\partial"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les colonnes de ce diagramme sont exactes car $\mathfrak{A}$ est plat sur θ et toutes les lignes au dessus de la dernière sont exactes d'après le théorème 4.

On en conclut que la dernière ligne est exacte.

5. - Dualité.

Nous appellerons espace du type $\mathcal{Q}\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ (resp. $\mathcal{Q}.\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$) un espace vectoriel topologique (non nécessairement séparé) qui est le quotient de deux espaces du type $\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ (resp. $\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$) .

LEMME 1 (cf. 13, 8, 10).

Soit

$$E \xrightarrow[u]{} F \xrightarrow[v]{} G$$

un complexe d'espaces vectoriels du type $\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ et soit

$$G' \xrightarrow[v']{} F' \xrightarrow[u']{} E'$$

le complexe transposé.

Posons $H = \dfrac{\text{Ker } v}{\text{Im } u}$ (c'est un espace $\mathcal{Q}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$) et $H' = \dfrac{\text{Ker } u'}{\text{Im } v'}$ (c'est un espace $\mathcal{Q}.\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$).

Alors la dualité entre F et F' induit une forme bilinéaire sur $H \times H'$ qui fait du séparé de H' (resp. H) le dual du séparé de H (resp. H').

La démonstration est laissée au lecteur.

THÉORÈME 7 (cf. 8, 10).

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de Θ-modules sur W, variété analytique complexe de dimension n. Soit K un compact de W.

Pour tout entier $p \geqslant 0$ il existe une topologie naturelle du type $\mathcal{Q}.\mathcal{D}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ sur $H^p(K,\mathcal{F})$, une topologie naturelle du type $\mathcal{Q}.\mathcal{F}.\mathcal{S}.$ sur $\text{Ext}^{\,n-p}_{K,\Theta}(W, \mathcal{F}, \Theta^{(n)})$ et une forme bilinéaire sur le produit

$$H^p(K, \mathcal{F}) \times \text{Ext}^{\,n-p}_{K,\Theta}(W, \mathcal{F}, \Theta^{(n)})$$

qui fait du séparé de l'un de ces espaces le dual fort du séparé de l'autre.

Démonstration.

Les faisceaux $\mathcal{F} \otimes_{\Theta} \mathfrak{A}^{p,q}$ sont des faisceaux cohérents de $\mathfrak{A}$-modules : d'après le théorème B et le théorème de GRAUERT, $H^i(K, \mathcal{F} \otimes_{\Theta} \mathfrak{A}^{p,q}) = 0$ $(i > 0)$ et par suite $H^p(K, \mathcal{F})$ est isomorphe au p-ème groupe de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \Gamma(K, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(K, \mathcal{F} \otimes_{\Theta} \mathfrak{A}^{(0,0)}) \xrightarrow[\partial]{} \cdots \longrightarrow 0$$

De même $\mathrm{Ext}^{n-p}_{K,\Theta}(W, \mathcal{F}\ \Theta^{(n)})$ est isomorphe au (n - p)-ième groupe de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K,\Theta}(\mathcal{F}, \Theta^{(n)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K,\Theta}(\mathcal{F}, B^{(n,0)}) \xrightarrow[\partial]{} \cdots\cdots \longrightarrow 0$$

Pour le voir il faut vérifier que $\mathrm{Ext}^{i}_{K,\Theta}(\mathcal{F}, B^{(p,q)}) = 0 \quad i > 0$.

Il résulte du théorème 4 et de ce que $\mathfrak{A}$ est plat sur Θ que ce groupe est égal à $\mathrm{Ext}^{i}_{K,\mathfrak{A}}(\mathcal{F} \otimes_{\Theta} \mathfrak{A}, B^{(p,q)})$.

Soit alors

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}^{\alpha_r} \longrightarrow \cdots \quad \mathfrak{A}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

une résolution libre de $\mathcal{F}$ au voisinage de K. On en déduit des petites suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{1} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}^{\alpha_r} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\alpha_{r-1}} \longrightarrow \mathcal{F}^{r-2} \longrightarrow 0$$

Comme le foncteur $\mathrm{Hom}_{K,\mathfrak{A}}(\ \cdot\ , B^{(p,q)})$ est exact sur F A C on voit par récurrence qu'il suffit de vérifier que $\mathrm{Ext}^{i}_{K,\mathfrak{A}}(W, \mathfrak{A}^{\alpha}, B^{(p,q)}) = 0 \quad (i > 0)$.

Mais ce dernier groupe n'est autre que $H^{i}_{K}(W, B^{(p,q)})^{\alpha}$ qui est nul pour $i > 0$ car $B^{(p,q)}$ est un faisceau flasque.

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1 (compte-tenu du théorème 5).

6. - Généralisation de la théorie de SATO.

THÉORÈME 8.

Soit V une variété analytique réelle de dimension n, dénombrable à l'infini, W un complexifié de V, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de Θ-modules sur W.

Les groupes $\mathrm{Ext}^{i}_{V}(W, \mathcal{F}, \Theta^{(n)})$ sont nuls pour $i \neq n$ et on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^{n}_{V}(W, \mathcal{F}, \Theta^{(n)}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(V, \mathcal{F}|V, B)$$

où $\mathcal{O}$ (resp. B) désigne le faisceau des germes de fonctions analytiques (resp. d'hyperfonctions) sur V.

Démonstration.

Pour tout compact K de V et pour tout $i > 0$ on a $H^i(K, \mathcal{F}) = 0$, donc d'après le théorème 7 $\mathrm{Ext}^i_{K,\theta}(W, \mathcal{F}, \theta^{(n)}) = 0 \quad i \neq n$.

De plus $\mathrm{Ext}^n_{K,\theta}(W, \mathcal{F}, \theta^{(n)}) = (\Gamma(K, F))' = \mathrm{Hom}_{K,\mathcal{O}}(V, \mathcal{F}|V, B)$ d'après le théorème 3.

Soit ω un ouvert relativement compact de V. On a les suites exactes

$$\mathrm{Ext}^i_{\partial\omega} \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\bar{\omega}} \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\omega} \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}_{\partial\omega}$$

(on écrit Ext^i_Z pour $\mathrm{Ext}^i_{Z,\theta}(W, \mathcal{F}, \theta^{(n)})$.

Comme l'application

$$\mathrm{Ext}^n_{\partial\omega} \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\bar{\omega}}$$

est isomorphe à l'application

$$(\Gamma(\partial\omega, \mathcal{F}))' \longrightarrow (\Gamma(\bar{\omega}, \mathcal{F}))'$$

qui est injective (pour le voir on prend une résolution libre de $\mathcal{F}|V$ au voisinage de $\bar{\omega}$), les groupes $\mathrm{Ext}^i_{\omega}(W, \mathcal{F}, \theta^{(n)})$ sont nuls pour $i < n$, $\omega \subset\subset V$ (et pour $i > n$ c'est évident d'après le théorème 6).

Un argument classique (cf. 1 ou 12, théorème B 36) montre alors que $\mathrm{Ext}^i_V(W, \mathcal{F}, \theta^{(n)}) = 0 \quad i < n$, et que le préfaisceau

$$\omega \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\omega}(W, \mathcal{F}, \theta^{(n)})$$

est un faisceau.

Ce faisceau est flasque car si ω est un ouvert de V on a la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^n_V \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\omega} \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_{V-\omega} = 0 \quad .$$

Comme ce faisceau flasque a ses sections à support compact isomorphes à celles du faisceau flasque

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}|V, B)$, il lui est isomorphe.

On peut aussi énoncer le théorème 8 ainsi :

Il existe un isomorphisme (canonique)

$$\mathrm{Hom}_{\theta,V}(\mathcal{F}|V, \underline{H}^n_V(W, \theta^{(n)}) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\theta,V}(W, \mathcal{F}, \theta^{(n)}).$$

B I B L I O G R A P H I E

1. - GODEMENT (R.). - Théorie des faisceaux . Hermann, Paris, 1964.

2. - GRAUERT (H.). - On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds. Ann. of Math. , Série 2, t. 69, p. 460-472, 1958.

3. - GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. Soc. Mat. São-Paulo, 1964.

4. - HÖRMANDER (L.). - Introduction to complex analysis in several variables. Van Norstrand, 1966.

5. - KANTOR (J.-M.) et SCHAPIRA (P.). - Hyperfonctions associées aux faisceaux analytiques cohérents . Anaïs da Acad. Brasil da Sciencias (A paraître).

6. - KOMATSU (H.). - Resolutions by hyperfonctions of sheaves of solutions of partial differential equations with constant coefficients. Math. Annalen, t. 176, p. 77-86, 1968.

7. - MALGRANGE (B.). - Idéaux de fonctions différentiables. Tata Institute, Bombay, 1966.

8. - MALGRANGE (B.). - Séminaire de géométrie analytique, Orsay, 1968.

9. - MARTINEAU (A.). - Les hyperfonctions de M.SATO. Sém. Bourbaki, 15e année, n° 214 1960-1961.

10. - RAMIS (J.-P.) et RUGET (G.). - Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe. (A paraître).

11. - SATO (M.). - Theory of hyperfunctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, I et II, t. 8, p. 139-193 et p. 387-437, 1959-1960.

12. - SCHAPIRA (P.). - Théorie des hyperfonctions. Lecture Notes in Math. 126, Springer, 1970.

13. - SERRE (J.-P.). - Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv., t. 29, p. 9-26, 1955

14. - SUOMINEN . - Duality for coherent sheaves on analytic manifolds. Ann. Acad. Scient Fennical. Helsinki, 1968.