

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

R. STORA

## **Propriétés d'analyticité des amplitudes de réaction en théorie quantique des champs**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1969, tome 8*  
« Réédition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,  
exp. n° 8, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1969\\_\\_8\\_\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1969__8__A8_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Mars 1967

PROPRIETES D'ANALYTICITE DES AMPLITUDES DE REACTION  
EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par

R. STORA

Service de Physique Théorique  
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
BP n° 2 - 91, Gif-sur-Yvette

Les notations seront celles de [1]. On utilisera à volonté la théorie L.S.Z, la théorie de Haag Ruelle Hopp basée sur les axiomes de Wightman, ou la théorie de Haag Araki.

L'espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  est de deux façons un produit tensoriel d'espaces de Fock,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{in} = \mathcal{K}_{out}$  correspondant à la description d'assemblées de particules stables asymptotiquement libres, admettant un vecteur  $|0\rangle$  (le vide) stable par l'action d'une représentation bien connue du groupe de recouvrement du groupe de Lorentz inhomogène  $U(a,A)$ .

Les particules sont créées par l'action sur le vide d'opérateurs de création  $a_{\alpha_i}^{*in}$  en correspondance biunivoque avec les états  $|\alpha_i\rangle$  à une particule,  $a_{\alpha_i}^{out}$  et on a :

$$a_{\alpha_i}^{in} |0\rangle = 0 \quad (a_{\alpha_i} = \text{adjoint de } a_{\alpha_i}^*)$$

On a les règles de commutation canoniques :

$$\left[ \begin{matrix} a_{\alpha_i}^{in} \\ a_{\alpha_i}^{out} \end{matrix}, \begin{matrix} a_{\beta_j}^{*in} \\ a_{\beta_j}^{*out} \end{matrix} \right]_{\pm} = \langle \alpha_i | \beta_j \rangle \mathbb{1} \quad \left[ \begin{matrix} a_{\alpha_i}^{in} \\ a_{\alpha_i}^{out} \end{matrix}, \begin{matrix} a_{\beta_j}^{in} \\ a_{\beta_j}^{out} \end{matrix} \right]_{\pm} = \left[ \begin{matrix} a_{\alpha_i}^{in*} \\ a_{\alpha_i}^{out*} \end{matrix}, \begin{matrix} a_{\beta_j}^{in} \\ a_{\beta_j}^{out} \end{matrix} \right]_{\pm} = 0$$

le signe  $\pm$  étant pris suivant que la particule créée a un spin demi-entier ou entier.

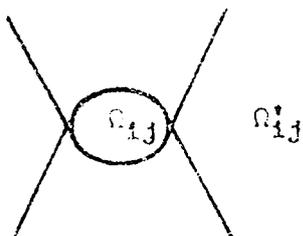
Les opérateurs  $B_i(x_i)$  sont quasi-locaux :

$$[B_i(x_i), B_j(x_j)]_{\pm} = 0 \quad \text{si } (x_i - x_j) \in [\Omega_i \text{ "+" } \Omega_j]' = \Omega'_{ij}$$

$\Omega_i$  et  $\Omega_j$  étant des ouverts aussi petits et aussi voisins que l'on veut :

$$\Omega_1 \text{ " + " } \Omega_j = \{x \mid x = y_1 - y_j, y_1 \in \Omega_1, y_j \in \Omega_j\}$$

$$\Omega_{ij}' = \{x \mid (x-y)^2 < 0, \forall y \in \Omega_{ij}\}$$



Pour simplifier on peut prendre  $\Omega_1 = \Omega_j = \Omega$ .

Les états asymptotiques  $|\alpha_1 \dots \alpha_n\rangle_{in}^{out}$  sont obtenus comme limites fortes pour  $t \rightarrow \pm \infty$  des états  $\prod_{i=1}^n B_i^{*(1)}(f_{\alpha_i}, t) |0\rangle$  avec :

$$B_i^{(1)}(f_{\alpha_i}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x_0=t} d^3x f_{\alpha_i}^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 B_i^{(1)}(x),$$

où  $f_{\alpha_i}(x) = \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \varphi_{\alpha_i}(\vec{p}) e^{-i p \cdot x}$  avec  $p^0 = \omega_p = \sqrt{p^2 + m_1^2}$

et  $\tilde{B}_i^{(1)}(p) = \tilde{B}(p) \chi_i(p)$  où  $\chi_i(p)$  est  $C^\infty$ , nulle en dehors d'un petit voisinage de  $(p_1^2 = m_1^2, p_1^0 > 0)$  et vaut 1 sur cette nappe d'hyperboloïde, et on a :

$$\langle \alpha_j | \alpha_i \rangle = \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \varphi_{\alpha_j}^*(p) \varphi_{\alpha_i}(\vec{p}) \rho_{ij}(\vec{p}),$$

avec  $\rho_{ij}(\vec{p}) = \langle 0 | B_j(0) | \vec{p}, \omega_j(p) \rangle \langle \vec{p}, \omega_i(p) | B_i^*(0) | 0 \rangle$ ,

$\langle p_{ij}$  définit une mesure par  $p_{ij}(\chi) = \langle 0 | B_j(0) E_{\chi}^1 B_1^*(0) | 0 \rangle$   
 où  $E_{\chi}^1 = \int dE(p) \tilde{\chi}(p)$  avec  $\tilde{\chi}$  définie dans le voisinage de  $p^2 = m_1^2$ ,  
 de restriction  $\chi(\vec{p})$  sur  $p^2 = m_1^2$ .

I - LA FORMULE DE REDUCTION

On obtient celle-ci en utilisant la convergence faibles vers les états à une particule de  $\prod_1^n B_1^*(f_{\alpha_1}, t) | 0 \rangle$  (et non plus la convergence forte de  $\prod_1^n B_1^{(1)}(f_{\alpha_1}, t) | 0 \rangle$  :

$$\langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{m}} | s | \alpha_1 \dots \alpha_n \rangle^c = \frac{(i)^{n-m}}{(2\pi)^{3(n+m)/2}} \int dx_1 \dots dx_n \quad dx_{\underline{1}} \dots dx_{\underline{m}} \prod_{i=1}^n f_{\alpha_i}(x_i)$$

$$\prod_{i=1}^m f_{\beta_i}^*(x_{\underline{i}}) (\square_{x_1}^2 - m_1^2) \dots (\square_{x_n}^2 - m_n^2) (\square_{x_{\underline{1}}}^2 - m_{\underline{1}}^2) \dots (\square_{x_{\underline{m}}}^2 - m_{\underline{m}}^2)$$

$$\times \langle 0 | T(B_1^*(x_{\underline{1}}) \dots B_n^*(x_n) B_{\underline{1}}(x_{\underline{1}}) \dots B_{\underline{m}}(x_{\underline{m}})) | 0 \rangle^T .$$

L'esprit de la démonstration est que chaque fois qu'on développe un produit chronologique en produits tronqués, les partitions contenant des sous-ensembles de deux points apportent une contribution nulle à cause de la surabondance des opérateurs de Klein Gordon :

$$\left[ (\square_1^2 - m_1^2) (\square_j^2 - m_j^2) \times \langle 0 | T(B_1(x_1) B_j(x_j)) | 0 \rangle \right] \begin{matrix} p_1^2 = m_1^2 \\ p_j^2 = m_j^2 \end{matrix} = 0$$

mais ces termes sont réintroduits par les termes de surfaces intervenant dans

le processus de réduction :

$$\begin{aligned}
 & \langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{m}} | T(B_{\underline{1}}(x_{\underline{1}}) \dots B_{\underline{p}}(x_{\underline{p}}) a_{\underline{p+1}}^{*in} | \alpha_{\underline{p+2}} \dots \alpha_{\underline{n}} \rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx_{\underline{p+1}} f_{\alpha_{\underline{p+1}}}(x_{\underline{p+1}}) (\square_{x_{\underline{p+1}}} - m_{\underline{p+1}}^2) \langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{m}} | T(B_{\underline{1}}(x_{\underline{1}}) \dots B_{\underline{p+1}}(x_{\underline{p+1}}) \\
 & \quad | \alpha_{\underline{p+2}} \dots \alpha_{\underline{n}} \rangle + \sum_{\underline{j}=1}^{\underline{j}=\underline{m}} \langle \beta_{\underline{j}} | \alpha_{\underline{p+1}} \rangle \langle \beta_{\underline{1}} \dots \beta_{\underline{j-1}} \dots \beta_{\underline{m}} | T(B_{\underline{1}}(x_{\underline{1}}) \dots B_{\underline{p}}(x_{\underline{p}}) | \alpha_{\underline{p+2}} \dots \alpha_{\underline{n}} \rangle .
 \end{aligned}$$

II - DEFINITION ET PROPRIETES DES EXTRAPOLATIONS ANALYTIQUES DES AMPLITUDES CONNEXES

D'après l'invariance par translation on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{P_{\underline{1}} \dots P_{\underline{n}}} \int_{p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{m}}} \langle 0 | T(B_{\underline{1}}^*(x_{\underline{1}}) \dots B_{\underline{m}}(x_{\underline{m}}) | 0 \rangle^{\tilde{T}} &= (2\pi)^4 \delta \left( \sum_{\underline{i}}^{\underline{n}} p_{\underline{i}} + \sum_{\underline{i}}^{\underline{m}} p_{\underline{i}} \right) \\
 &\times \tilde{\tau}(p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{n}}, p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{m}}) .
 \end{aligned}$$

On va montrer que  $\tilde{\tau}(p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{n}}, p_{\underline{1}} \dots p_{\underline{m}})$  coïncide, en conséquence du spectre de  $P_{\underline{\mu}}$ , par morceaux dans l'espace des  $p$  avec des distributions  $\tilde{\rho}_{\alpha}$  qui, en vertu de la commutativité presque locale, sont valeurs au bord sur les réels de fonctions holomorphes dans des tubes à bases imaginaires.

a) Les transformées de Fourier des "fonctions" de Wightman

$$\text{Soit } \tilde{W}(1 \dots n) = \langle 0 | B_{\underline{1}}(x_{\underline{1}}) \dots B_{\underline{n}}(x_{\underline{n}}) | 0 \rangle$$

$$\tilde{W}(1 \dots n) = \int dx_{\underline{1}} \dots dx_{\underline{n}} e^{-i(p_{\underline{1}} x_{\underline{1}} + \dots + p_{\underline{n}} x_{\underline{n}})} \langle 0 | B_{\underline{1}}(x_{\underline{1}}) \dots B_{\underline{n}}(x_{\underline{n}}) | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \int dx_1 \dots dx_n e^{-i[p_1(x_1-x_2)+(p_1+p_2)(x_2-x_3)+\dots+(p_1+\dots+p_{n-1})(x_{n-1}-x_n)+(p_1+\dots+p_n)x_n]} \\
 &\times \langle 0 | B_1(0) U(x_2-x_1) B_2(0) U(x_3-x_2) \dots B_{n-1}(0) U(x_n-x_{n-1}) B_n(0) | 0 \rangle \\
 &= (2\pi)^4 \delta\left(\sum_1^n p_i\right) \int d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} e^{i \sum_{i=1}^{n-1} P_i \xi_i} \langle 0 | B_1(0) U(\xi_1) B_2(0) U(\xi_2) \\
 &\dots B_{n-1}(0) U(\xi_{n-1}) | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

où on a utilisé  $B_i(x_i) = U(x_i) B_i(0) U^{-1}(x_i)$ ,

la stabilité du vide

la définition  $P_i = p_1 + \dots + p_i$ ,

on en déduit :

$$\begin{aligned}
 \text{supp } \tilde{W} &= \left( p_1 \in \{0\} \cup \bar{V}_1^+ \right) \cap \left( p_2 \in \{0\} \cup \bar{V}_2^+ \right) \cap \dots \cap \left( p_1 \in \{0\} \cup \bar{V}_1^+ \right) \\
 &\quad \cap \left( p_{n-1} \in \{0\} \cup \bar{V}_{n-1}^+ \right),
 \end{aligned}$$

où  $\{0\}$  correspond à l'état du vide,  $\bar{V}_1^{+(m,M)} = \left\{ p \mid p^0 > 0, p^2 = m_1^2 \cup p^2 \geq M_1^2 \right\}$

les masses  $m_1, M_1$  étant celles qui correspondent aux états stables et aux seuils de spectre continu pour lesquels  $\langle 0 | B_1(0) \dots B_1(0) | p \rangle \neq 0$ , qui sont calculables si on connaît le spectre de  $P_\mu$  et les règles de sélection.

b) Les transformées de Fourier des fonctions de Wightman tronquées et la commutativité locale

On montre par récurrence que le support de  $\tilde{W}^T$  est déduit du précédent en supprimant partout le  $\{0\}$  qui provient de la contribution du vide.

Il semble à première vue que la définition des  $\tilde{W}^T$  soit bien torturée pour neutraliser les contributions du vide. Le point est cependant que cette façon de le faire respecte les propriétés de commutativité locale :

$$\begin{aligned} & \langle 0 | B_1(x_1) \dots B_i(x_i) B_{i+1}(x_{i+1}) \dots B_n(x_n) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | B_{i+1}(x_{i+1}) \dots B_i(x_i) B_1(x_1) \dots B_n(x_n) | 0 \rangle \quad x_i - x_{i+1} \in (\Omega + \Omega)^t \end{aligned}$$

et aussi, dans les mêmes conditions :

$$\begin{aligned} & \langle 0 | B_1(x_1) \dots B_i(x_i) B_{i+1}(x_{i+1}) \dots B_n(x_n) | 0 \rangle^T \\ &= \langle 0 | B_{i+1}(x_{i+1}) \dots B_i(x_i) B_1(x_1) \dots B_n(x_n) | 0 \rangle^T . \end{aligned}$$

A remarquer que, en vertu du fait que les états de masses  $m_1$  correspondent à une mesure de Dirac  $\delta(p_1^0) \delta(p_1^2 - m_1^2)$  dans le spectre, les fonctions de Wightman "amputées" par application des opérateurs de Klein-Gordon  $(\square_{x_1} - m_1^2)$  ont des propriétés de spectre analogues aux précédentes, où :

$$\bar{V}^+(m, M) \text{ est remplacé par } \bar{V}^+(M) = \left\{ p \mid p^0 > 0, p^2 \geq M^2 \right\} .$$

c) Les fonctions retardées généralisées

A la fonction à n points  $\langle 0 | T(B_1(x_1) \dots B_n(x_n)) | 0 \rangle^T$  on associe

l'espace  $S^n$  d'éléments  $\underline{S} = (S_1 \dots S_n)$  ; on considère dans l'hyperplan

$$\sum_{i=1}^n S_i = 0 \text{ la triangulation effectuée par les plans } S_I = \sum_{i \in I} S_i = 0$$

I sous-ensemble quelconque de  $(1 \dots n)$  . (Remarquer que  $S_I = 0$  et  $S_{\mathbb{C}I} = 0$

déterminent le même hyperplan dans  $\sum_{i=1}^n S_i = 0$  .

Soit  $\gamma_\alpha$  un polyèdre ouvert de cette triangulation tel que dans  $\gamma_\alpha$  tout  $S_I$  admette un signe défini. A  $\gamma_\alpha$  on associe :

$$r_\alpha(x_1 \dots x_n) = \sum_{P(1 \dots n)} \left[ \pm \theta_{\pm}(x_{P(1)}^0 - x_{P(2)}^0) \right] \dots \left[ \pm \theta_{\pm}(x_{P(n-1)}^0 - x_{P(n)}^0) \right]$$

$$|0 \mid B_{P(1)}(x_{P(1)}) \dots B_{P(n)}(x_{P(n)}) \mid 0 \rangle^{(T)} ,$$

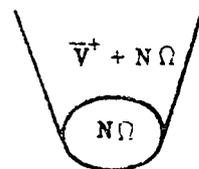
où on écrira  $\pm \theta_{\pm}(x_{P(i)}^0 - x_{P(i+1)}^0)$  suivant que  $S_{P(1)} + \dots + S_{P(i)}$  est positif ou négatif dans  $\gamma_\alpha$

$$\left( \theta_+(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} ; \theta_-(t) = 1 - \theta_+(t) \right) .$$

On montre alors que  $r_\alpha$  est indépendante du fait qu'on utilise les fonctions de Wightman ou les fonctions de Wightman tronquées.

La condition de localité permet de montrer que le support de  $r_\alpha$  est à l'intérieur de :

$$\sum_{\underline{S} \in \gamma_\alpha} S_i x_i \in \bar{V}^+ + N \Omega$$



N étant un entier dépendant de n ; sa transformée de Fourier  $\tilde{r}_\alpha$  est par conséquent prolongeable en une fonction de  $p_1 \dots p_n$ , définie sur l'hyperplan  $p_1 + \dots + p_n = 0$ , holomorphe dans le tube à base imaginaire.

$$\text{Im } p_i = \sum_{\lambda} \mu_{\lambda} S_i^{\lambda} ,$$

où les  $S_i^{\lambda}$  sont des vecteurs de S, portés par les frontières de dimension 1 de  $\gamma_\alpha$ , les  $\mu_{\lambda}$  variant librement dans  $V^+$ .

Utilisant de façon répétée l'identité  $-\theta_- = \theta_+ - 1$ , on a l'identité :

$$\begin{aligned} r_\alpha(x_1 \dots x_n) = & - \sum_{[i | S_i < 0 \text{ ds } \gamma_\alpha]} \langle 0 | B_1(x_1) C_i(x_1 \dots \hat{x}_1 \dots x_n) | 0 \rangle^T + \sum_{[ij | S_i + S_j < 0 \text{ ds } \gamma_\alpha]} \langle 0 | T(B_1(x_1) B_j(x_j)) \\ & \times C_{ij}(x_1 \dots \hat{x}_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n) | 0 \rangle^T + \dots + \sum_{[i_1 \dots i_p | S_{i_1} + \dots + S_{i_p} < 0 \text{ ds } \gamma_\alpha]} \langle 0 | T[B_{i_1}(x_{i_1}) \dots B_{i_p}(x_{i_p})] \\ & \times C_{i_1 \dots i_p}(x_1 \dots \hat{x}_{i_1} \dots \hat{x}_{i_2} \dots \hat{x}_{i_p} \dots x_n) | 0 \rangle^T + \langle 0 | T B_1(x_1) \dots B_n(x_n) | 0 \rangle^T \end{aligned}$$

où les  $C_{i_1 \dots i_p}$  sont des opérateurs à p points. La condition spectrale implique que :

$$\tilde{\rho}_\alpha(p) = \tilde{\tau}(p) \quad \text{dans} \quad \left( I | S_I < 0 \text{ ds } \gamma_\alpha \right) \left\{ p \mid \left( p_I = \sum_{i \in I} p_i \right) \notin \bar{V}^+(m_I, M_I) \right\} .$$

La communication de deux tubes adjacents (correspondant à  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ , telles que toutes les  $S_j$  aient même signe dans  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$  à l'exception de  $S_I$ )

s'obtient à nouveau via la condition spectrale par l'identité :

$$r_\alpha - r_\beta = \langle 0 | C_I C_{\mathbb{C}I} - C_{\mathbb{C}I} C_I | 0 \rangle ,$$

où  $C_I$  et  $C_{\mathbb{C}I}$  sont des opérateurs à points pris dans  $I$ ,  $\mathbb{C}I$  respectivement, d'où coïncidence des valeurs au bord de  $\tilde{\rho}_\alpha$ ,  $\tilde{\rho}_\beta$  sur la frontière

$$\text{Im } p_I = \sum_{S^\lambda \in (S_I = 0)} \mu_\lambda S_I^\lambda$$

commune aux deux tubes de définition, pour  $(\text{Re } p_I)^2 \neq m_I^2$ ,  $(\text{Re } p_I)^2 < M_I^2$  ; d'où, par le théorème de l'edge of the wedge, l'existence d'une continuation analytique commune à  $\tilde{\rho}_\alpha$ ,  $\tilde{\rho}_\beta$  dans un voisinage complexe du tube aplati

$$\text{Im } p_i = \sum_{\substack{S^\lambda \in \{S_I = 0\} \\ S^\lambda \in \bar{\gamma}_\alpha \cap \bar{\gamma}_\beta}} \mu_\lambda S_I^\lambda \quad \text{au-dessus de } (\text{Re } p_I)^2 \neq m_I^2, < M_I^2 .$$

On a enfin les identités entre valeurs aux bords de quatre fonctions adjacentes caractérisées par quatre cellules  $\gamma_{\pm\pm}$  où tous les  $S_K$  ont mêmes signes sauf  $S_I$ ,  $S_J$  qui sont  $\gtrless 0$  respectivement dans  $\gamma_{\pm\pm}$ , avec la condition  $I \not\subset J$ ,  $I \not\subset \mathbb{C}J$ ,  $J \not\subset I$ ,  $J \not\subset \mathbb{C}I$ . Alors, on a l'identité :

$$r_{++} - r_{+-} - r_{-+} + r_{--} = 0 ;$$

par suite, la somme avec les signes adéquats des valeurs aux bords de  $\rho_{\pm\pm}$  sur :

$$\text{Im } p_i = \sum_{\substack{s^\lambda \in \{s_i = s_j = 0\} \\ s^\lambda \in \bigcap_{\pm} \bar{Y}_{\pm\pm}}} \mu_\lambda s_i^\lambda ,$$

est identiquement nulle.

---

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - R. STORA - Théorie des collisions et théorie quantique des champs -  
Conférences à la réunion de la R.C.P. n° 25 - Strasbourg, novembre 1966.
  
- [2] - H. ARAKI - Einführung in die Axiomatisch, Quantenfeld theorie,  
Zurich E.T.H. 1961 , notes miméo.

