Recherche Coopérative sur
Programme n° 25

R. Gérard

Le problème de Riemann Hilbert sur une variété analytique complexe

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 6
« Le problème de Riemann Hilbert sur une variété analytique complexe par R. Gérard et conférence de O.E. Lanford », , exp. n° 1, p. 1-48

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__6__A1_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LE PROBLEME DE RIEMANN HILBERT
SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

par

R. GÉRARD

---oo O oo---

TABLE DES MATIERES

-oo 0 oo-

Notations et notions d'ordre général. P. II

Introduction P. IV

§ 1 La notion de classe de Riemann sur une variété analytique complexe. P. 1.1

§ 2 Etude du problème I . Classe de Riemann et fibré vectoriel sur $\hat{V}$. P. 2.7

§ 3 Etude des ramifications d'une classe de Riemann. P. 3.13

§ 4 Famille cohérente de solutions locales du problème II . P. 4.20

§ 5 Etude des prolongements à V d'une classe de fibrés sur $\hat{V}$. P. 5.27

§ 6 Etude du problème II'. Classe de Riemann et fibré vectoriel sur V . P. 6.36

§ 7 Etude du problème II . P. 7.42

§ 8 Conclusions sur le problème de Riemann Hilbert. P. 8.47

-oo 0 oo-

NOTATIONS ET NOTIONS D'ORDRE GENERAL

Nous noterons :

$\mathcal{M}(p,q,\mathbb{C})$	:	l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients complexes.
$\mathcal{M}(p,\mathbb{C}) = \mathcal{M}(p,p,\mathbb{C})$.		
$G\ell(p,\mathbb{C})$	:	le groupe linéaire complexe.

Pour toute variété analytique complexe V , nous noterons :

$\mathcal{R}(V)$	:	le revêtement universel de V ,
ψ_V	:	la projection canonique de $\mathcal{R}(V)$ sur V ,
$\pi_1(V)$		le groupe fondamental de V ,
$\mathcal{H}^{p\times q}(V)$	:	l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications holomorphes de V dans $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{C})$.
$\mathcal{H}_i^{p\times q}(V)$	:	l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{H}^{p\times p}(V)$.
$\mathfrak{M}^{p\times q}(V)$	:	l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des applications méromorphes de V dans $\mathcal{M}(p,q,C)$.
$\Omega^{p\times p}(V)$	:	l'ensemble des formes différentielles de degré 1 holomorphes sur V et à valeurs matricielles carrées d'ordre p .
$\mathfrak{J}^{p\times p}(V)$	:	l'ensemble des systèmes de Pfaff complètement intégrable de la forme $df=\omega f$ où $\omega\in\Omega^{p\times p}(V)$.

Le groupe $\pi_1(V)$ opère à gauche sur $\mathcal{R}(V)$; pour tout $Q\in\mathcal{R}(V)$ et tout $g\in\pi_1(V)$, nous noterons $g.Q$, le résultat de l'action de g

sur Q . On appellera représentation canonique de $\pi_1(V)$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(V)))$ des automorphismes de $\mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(V))$, l'application qui, à tout $g \in \pi_1(V)$ associe l'élément g^* de $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(V)))$ défini par :

$$(g^*\Phi)(Q) = \Phi(g^{-1}. Q)$$

pourtant $\Phi \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(V))$ et tout $Q \in \mathcal{R}(V)$.

Dans toute la suite D désignera un disque du plan complexe et :

$$\hat{D} = D - \{0\}$$

$$\mathcal{D} = (\hat{D})^n \times D^{m-n}$$

. (E^k désignant le produit cartésien de k exemplaires de l'ensemble E) .

INTRODUCTION

Soient V une variété analytique complexe connexe de dimension finie m et A un sous-ensemble analytique de V de codimension 1 en chacun de ses points dont les composantes irréductibles sont sans singularité et posons $\hat{V} = V-A$. Nous désignerons par $\Omega^{p\times p}(V,A)$ le sous-ensemble de $\Omega^{p\times p}(V-A)$ des formes différentielles coéfficients des systèmes de Pfaff du type de Fuchs (c.f. [1], chapitre II).

Soit $\chi_{\hat{V}}=\chi$ une représentation de $\pi_1(\hat{V})$ dans $Gl(p,\mathbb{C})$, nous dirons qu'une application $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalise la représentation χ si pour tout $g \in \pi_1(\hat{V})$,

$$g^* \Phi = \Phi\, \chi\,(g)\ .$$

Nous nous proposons essentiellement dans la suite d'étudier les problèmes suivants :

<u>Problème I</u> .

<u>Déterminer l'ensemble</u> $S_I(\chi)$ <u>des applications</u> $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ <u>réalisant la représentation</u> χ . Nous verrons (§ 2) que $S_I(\chi)$ s'identifie à l'ensemble des sections holomorphes d'un fibré analytique principal sur $\hat{V}$ de groupe $Gl(p,\mathbb{C})$.

<u>Problème II</u>.

<u>Déterminer l'ensemble</u> $S_{II}(\chi)$ <u>des applications</u> $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ <u>réalisant la représentation</u> χ <u>et vérifiant de plus</u> $d\,\Phi.\Phi^{-1} \in \Omega^{p\times p}(V,A)$.

Nous verrons (§6) qu'un certain sous-ensemble de $S_{II}(\chi)$ s'identifie aux sections holomorphes d'un fibré analytique principal $\mathcal{F}'$ sur V de groupe $Gl(p,\mathbb{C})$.

Problème III.

Trouver un système de Pfaff du type de Fuchs appartenant à $\chi^{p\times p}(V,A)$ et dont une matrice fondamentale réalise la représentation χ .

Remarque 1 . Tout élément de $S_{II}(\chi)$ donne une solution du problème III et réciproquement toute solution du problème III donne des solutions du problème II .

Remarque 2 . Par une modification de Hopf on peut toujours se ramener au cas où les composantes irréductibles de A sont en position générale car une telle modification ne change ni le groupe fondamental ni le revêtement universel de $\hat{V}$.

Nous supposerons dans la suite, sauf aux §1 et 2 , que les composantes irréductibles de A sont en position générale et sans singularité. Les problèmes analogues pour une variable sont connus sous le nom de Problème de Riemann-Hilbert et H. Rörhl en a donné la solution complète sur une surface de Riemann. [3] . Nous montrerons en particulier que le problème II a toujours une solution sur une variété de Stein contractile. Nous introduirons également dans la suite la notion de classe de Riemann, cette notion est intimement liée aux problèmes énoncés ci-dessus. Pour une surface de Riemann S, cette notion a été étudiée dans [4] par H.J.Nastold qui a obtenu des résultats analogues en ce qui concerne les relations entre classe de Riemann et sections de fibrés vectoriels holomorphes sur S . Dans ce cas, l'étude est plus facile du fait que les points de l'ensemble analytique A sont tous isolés.

Les résultats de ce mémoire ont été annoncés dans [2] .

§ 1 . LA NOTION DE CLASSE DE RIEMANN SUR UNE VARIETE ANALYTIQUE COMPLEXE.

Dans toute la suite $\mathcal{M}$ désignera $\mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ ou bien $Gl(p,\mathbb{C})$.

Définition 1.

On appelle donnée de Riemann sur une variété analytique complexe V, à valeur dans $\mathcal{M}$, la donnée d'un sous-ensemble analytique A de V de codimension 1 en chacun de ses points et d'une représentation $\chi_{\hat{V}}$ de $\pi_1(\hat{V})$ dans $\mathcal{M}$. Dire que $\chi_{\hat{V}}$ est une représentation de $\pi_1(\hat{V})$ dans $\mathcal{M}$, veut dire que :

$$\chi_{\hat{V}}(g_1 g_2) = \chi(g_1) \circ \chi(g_2) .$$

$$\chi(\mathrm{id.}) = I \text{ . (matrice unité d'ordre p)}$$

Il en résulte que si $\chi_{\hat{V}}(g)$ est inversible, on a :

$$\chi_{\hat{V}}(g^{-1}) = (\chi_{\hat{V}}(g))^{-1} .$$

Une donnée de Riemann sera notée $R(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ ou simplement $R(\chi_{\hat{V}})$ lorsqu'aucune confusion n'est possible. La représentation $\chi_{\hat{V}}$ et l'ensemble analytique A seront respectivement appelés la monodromie et l'ensemble de ramification de la donnée de Riemann $R(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$.

Définition 2.

Nous dirons qu'un élément $\Phi \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalise la représentation $\chi_{\hat{V}}$, si pour tout $\alpha \in \pi_1(\hat{V})$

$$\alpha^* \Phi = \Phi \, \chi_{\hat{V}}(\alpha) .$$

Définition 3.

On appelle classe de Riemann associée à la donnée de Riemann $R(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$, l'ensemble des éléments $\Phi \in \mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ réalisant la monodromie $X_{\hat{V}}$ de $R(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$.

Une telle classe de Riemann sera notée $\mathcal{C}(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ ou plus simplement $\mathcal{C}(X_{\hat{V}})$. On appellera également monodromie (resp. ensemble de ramification) de cette classe de Riemann la représentation $X_{\hat{V}}$ (resp. l'ensemble analytique A) .

Définition 4.

On appelle classe de Riemann d'ordre fini au point M (resp. sur A) associé à la donnée de Riemann $R(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ le sous-ensemble $\mathcal{C}^M(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ (ou $\mathcal{C}^M(X_{\hat{V}})$)(resp. $\mathcal{C}^A(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ (ou $\mathcal{C}^A(X_{\hat{V}})$)) des éléments de $\mathcal{C}(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ qui sont d'ordre fini au point M (resp. sur A). Pour la notion d'ordre fini voir [1] .

Proposition 1.

Les matrices d'une classe de Riemann d'ordre fini ou non forment un module sur l'anneau des fonctions holomorphes sur V . La vérification de cette proposition est immédiate.

Définition 5.

On appelle classe de Riemann inversible associée à la donnée de Riemann $R(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$, l'ensemble $\mathcal{C}_i(X_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ (ou simplement $\mathcal{C}_i(X_{\hat{V}})$)

<u>des éléments</u> $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ <u>réalisant la monodromie</u> $\chi_{\hat{V}}$.

La notation $\mathcal{C}_i^A(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ (ou $\mathcal{C}_i^A(\chi_{\hat{V}})$) désigne donc la classe de Riemann des éléments inversibles et d'ordre fini sur A . On a évidemment les inclusions

$$\mathcal{C}_i^A(\chi_{\hat{V}}) \subset \mathcal{C}_i(\chi_{\hat{V}}) \subset \mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}) .$$

<u>Proposition 2.</u>

<u>Si</u> Φ <u>et</u> Φ' <u>sont deux éléments de</u> $\mathcal{C}_i(\chi_{\hat{V}}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$, <u>il existe</u> $\varphi \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(\hat{V})$ <u>tel que</u> :

$$\Phi \circ \Phi'^{-1} = \varphi \circ \psi_{\hat{V}}$$

<u>Démonstration</u>.

Si $\Phi \in \mathcal{C}_i(\chi_{\hat{V}}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$ alors pour tout $g \in \pi_1(\hat{V})$,

$$g^*\Phi = \Phi\chi_{\hat{V}}(g)$$

et la relation $\Phi\,\Phi^{-1} = I$ entraîne

$$g^*(\Phi^{-1}) = \chi_{\hat{V}}(g)^{-1}\,\Phi^{-1}$$

et par suite

$$g^*(\Phi\,\Phi'^{-1}) = \Phi\,\Phi'^{-1} .$$

Ce qui prouve la proposition 2.

Corollaire 1.

Si $\Phi_o \in \mathcal{C}_i(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ *alors pour tout* $\Phi \in \mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$, *il existe* $\varphi \in \mathcal{H}^{p\times p}(\hat{V})$ *tel que* :

$$\Phi = (\varphi \circ \psi_{\hat{V}})\, \Phi_o$$

En effet $\Phi_o \in \mathcal{C}_i(\chi_{\hat{V}})$ entraîne que $\chi_{\hat{V}}(g)$ est inversible.

Définition 6.

Deux classes de Riemann $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ *et* $\mathcal{C}(\chi'_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ *sont dites équivalentes si les deux représentations* $\chi'_{\hat{V}}$ *et* $\chi_{\hat{V}}$ *sont semblables.*

Pour toute représentation $\chi_{\hat{V}}$ de $\Pi_1(\hat{V})$ dans $\mathcal{M}$, notons $\tilde{\chi}_{\hat{V}}$ la classe d'équivalence de cette représentation pour la relation d'équivalence qu'est la similitude. Enfin notons $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\chi}_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ l'ensemble des classes de Riemann équivalente à la classe $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$.

Théorème 1 . *Tout système de Pfaff*

$$df = \omega\, f \qquad (S)$$

appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(V-A)$ *défini une classe de représentation* $\overset{\omega}{\chi}_{\hat{V}}$ *donc une classe* $\tilde{\mathcal{C}}_i(\overset{\omega}{\chi}_{\hat{V}}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la :

Proposition 3.

Toute matrice fondamentale Φ *du système de Pfaff* (s) *définit une classe de Riemann* $\mathcal{C}_i(\overset{\Phi}{\chi}_{\hat{V}}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$ *et deux classes* de Riemann associées à deux matrices fondamentales de (s) sont équivalentes.

Démonstration.

Soit Φ une matrice fondamentale de (s) ; pour tout $g \in \pi_1(\hat{V})$, $g^*\Phi$ est encore une matrice fondamentale de (s), c'est-à-dire qu'il existe une matrice $D_g \in Gl(p,\mathbb{C})$ telle que

$$g^* \Phi = \Phi D_g \quad .$$

L'application $\chi_{\hat{V}}^{\Phi} : \pi_1(\hat{V}) \longrightarrow Gl(p,\mathbb{C})$ définie par

$$g \longrightarrow \chi_{\hat{V}}^{\Phi}(g) = D_g$$

est une représentation de $\pi_1(\hat{V})$ dans $Gl(p,\mathbb{C})$. Notons $\mathcal{C}_i(\chi_{\hat{V}}^{\Phi}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$ la classe de Riemann inversible qu'elle définit. Soit Φ' une autre matrice fondamentale de (s), nous avons

$$\Phi = \Phi' C \quad \text{où} \quad C \in Gl(p,\mathbb{C})$$

et par suite pour tout $g \in \pi_1(\hat{V})$,

$$g^* \Phi = (g^* \Phi')C$$

$$\Phi \chi_{\hat{V}}^{\Phi}(g) = \Phi' \chi_{\hat{V}}^{\Phi'}(g)\, C$$

et donc $\chi_{\hat{V}}^{\Phi}(g) = C^{-1}\,\chi_{\hat{V}}^{\Phi'}(g)\;C$,

ce qui prouve que $\mathcal{E}_i(\chi_{\hat{V}}^{\Phi}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$ et $\mathcal{E}_i(\chi_{\hat{V}}^{\Phi'}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$

sont équivalentes.

Définition 7.

La classe de la représentation $\tilde{\chi}_{\hat{V}}^{\omega}$ associée à (s) est appelée la monodromie du système (s) .

Proposition 4.

Tout élément $\Phi \in \mathcal{E}_i(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ définit un système de Pfaff $df = \omega f$ appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(\hat{V})$ et

$$\tilde{\mathcal{E}}_i(\tilde{\chi}_{\hat{V}}^{\omega}, A, Gl(p,\mathbb{C})) = \tilde{\mathcal{E}}_i(\tilde{\chi}_{\hat{V}}^{\Phi}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$$

La vérification de cette proposition est immédiate.

$$\omega = d\Phi \,.\, \Phi^{-1} \qquad \text{et} \qquad \omega \in \Omega^{p\times p}(\hat{V}) \;.$$

Proposition 5.

Etant donnée une classe de Riemann $_i(\chi_V, A, Gl(p,C))$, alors chaque élément $\Phi \in \mathcal{E}_i(\chi_{\hat{V}}, A, Gl(p,\mathbb{C}))$ possédant la propriété :

"Les colonnes de Φ engendrent un espace vectoriel faiblement singulier sur V " est la matrice fondamentale d'un système de Pfaff du type de Fuchs.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition 4 et de la définition des systèmes de Pfaff du type de Fuchs [1] .

§ 2 . ETUDE DU PROBLEME I .

Concernant le problème I nous démontrons les résultats suivants :

Théorème A_I . Il existe un fibré analytique principal $\hat{\mathcal{F}}$ sur $\hat{V}$ de groupe $Gl(p,\mathbb{C})$ et une bijection naturelle entre $S_I(X)$ et l'ensemble des sections holomorphes de $\hat{\mathcal{F}}$.

Théorème B_I . Le module $\mathcal{L}(X_{\hat{V}},A,\mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ est isomorphe à celui des sections holomorphes d'un fibré vectoriel analytique $\hat{\mathcal{F}}$ sur $\hat{V}$ de fibre $\mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ et de groupe $Gl(p,\mathbb{C})$.

En langage de classe de Riemann le théorème A_I peut s'énoncer sous la forme :

Théorème C_I . Il existe un fibré analytique principal $\hat{\mathcal{F}}$ sur $\hat{V}$ de groupe $Gl(p,\mathbb{C})$ et une bijection naturelle entre $\mathcal{L}_i(X_{\hat{V}},A,Gl(p,\mathbb{C}))$ et l'ensemble des sections holomorphes de $\hat{\mathcal{F}}$.

Démonstration du théorème A_I . C'est une démonstration classique de la théorie des fibrés [5] et [6] , rappelons rapidement son déroulement. Le groupe $\pi_1(\hat{V})$ opère à gauche sur $\mathcal{R}(\hat{V})$ par

$$g : \tilde{x} \longrightarrow g.\tilde{x}$$

($g.\tilde{x}$ désignant la composition des chemins).

A l'aide de cette opération le revêtement universel $\mathcal{R}(\hat{V})$ de $\hat{V}$ peut être considéré comme fibré analytique principal de groupe $\pi_1(\hat{V})$. De l'opération ci-dessus on déduit une opération à gauche sur les applications holomorphes de $\mathcal{R}(\hat{V})$ dans $Gl(p,\mathbb{C})$ par

$$g.\Phi(\tilde{x}) = \Phi(g.^{-1}\tilde{x}) \quad \text{pour tout} \quad \tilde{x} \in \mathcal{R}(\hat{V}) \quad \text{et} \quad g \in \pi_1(\hat{V}) .$$

D'autre part, par l'intermédiaire de la représentation $\chi_{\hat{V}}$, $\pi_1(\hat{V})$ opère à droite sur $Gl(p,\mathbb{C})$, en effet nous posons pour tout $A \in Gl(p,\mathbb{C})$ et tout $g \in \pi_1(\hat{V})$: $A.g = A.\chi_{\hat{V}}(g)$.

Ces opérations permettent de faire opérer le groupe $\pi_1(\hat{V})$ à gauche sur le produit $\mathcal{R}(\hat{V}) \times Gl(p,\mathbb{C})$ par :

$$g.(\tilde{x},A) = (g.\tilde{x},A.\chi(g)^{-1}) .$$

Nous savons alors d'après des résultats classiques de la théorie des fibrés [6] que le quotient de ce produit par les opérations de $\pi_1(\tilde{V})$ nous donne, un fibré $\hat{\mathcal{H}}$ de fibre $Gl(p,\mathbb{C})$ et de groupe $\pi_1(\tilde{V})$ que l'on peut considérer comme fibré principal de groupe $Gl(p,\mathbb{C})$. Comme le fibré $\hat{\mathcal{H}}$ est associé à $\mathcal{R}(\hat{V})$ considéré comme fibré principal de groupe $\pi_1(\hat{V})$, il résulte que le fibré $\hat{\mathcal{H}}$ <u>est à transformations coordonnées localement constantes</u>. Le théorème suivant, classique dans la théorie des fibrés [6] nous donne immédiatement le théorème A_1.

Théorème F .

Soit H un fibré analytique principal de groupe G et $\mathcal{F}$ un fibré associé à H tel que G opère à droite sur la fibre F de $\mathcal{F}$, alors les sections holomorphes de $\mathcal{F}$ sont en correspondance bijective avec les applications holomorphes Φ de H dans F vérifiant :

$$\Phi(s.x) = \Phi(x).s^{-1} \quad \text{pour tout} \quad x \in H \quad \text{et} \quad s \in G .$$

Pour obtenir le théorème B_I, il suffit dans ce qui précède de considérer le fibré associé à $\mathcal{R}\mathcal{O}(\hat{V})$ de fibre $\mathcal{M}\mathcal{O}(p,\mathbb{C})$, au lieu de prendre le fibré associé de fibre $Gl(p,\mathbb{C})$.

Soient a un point de l'ensemble analytique A et $U(a)$ un voisinage de coordonnée de a pour A. (cf. [1], chap III, §1). Notons $\hat{\mathcal{F}}_a$ la restriction de $\hat{\mathcal{F}}$ à $\hat{U}(a)=\hat{V}\cap U(a)$. La représentation

$$\chi : \pi_1(\hat{V}) \longrightarrow Gl(p,\mathbb{C})$$

induit une représentation

$$\chi_a : \pi_1(\hat{U}(a)) \longrightarrow Gl(p,\mathbb{C}) ,$$

par l'intermédiaire de l'application

$$j : \pi_1(\hat{U}(a)) \longrightarrow \pi_1(\hat{V})$$

induite par l'injection de $\hat{U}(a)$ dans $\hat{V}$.

Désignons par $\hat{\mathcal{F}}'_a$ le fibré construit à l'aide du théorème A_1, à partir de $\mathcal{R}\mathcal{O}(\hat{U}(a))$ et χ_a.

Proposition 6.

Les fibrés $\hat{\mathcal{H}}_a$ et $\hat{\mathcal{H}}'_a$ sont analytiquement isomorphes.

Démonstration.

Nous avons :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{R}\mathcal{O}(\hat{V}) \times G}{\pi_1(\hat{V})} \quad \text{avec} \quad G=Gl(p,\mathbb{C}) \ ;$$

la relation d'équivalence utilisée étant : $(\tilde{x},M)$ et $(\tilde{x}',M')$ sont équivalents s'il existe $g \in \pi_1(\hat{V})$ tel que

$$(\tilde{x}',M') = (g.\tilde{x},M)\chi\ (g)^{-1}) \ ,$$

et

$$\hat{\mathcal{H}}'_a = \frac{\mathcal{R}\mathcal{O}(\hat{U}(a)) \times G}{\pi_1(\hat{U}(a))} \qquad ,$$

la relation d'équivalence utilisée étant : $(\tilde{x},M)$ et $(\tilde{x}',M')$ sont équivalents s'il existe $g \in \pi_1(\hat{U}(a))$ tel que :

$$(\tilde{x}',M') = (g.\tilde{x},A \circ \chi_a(g)^{-1}) \ .$$

D'autre part :

$$\hat{\mathcal{H}}_a = \frac{\mathcal{R}\mathcal{O}(\hat{V}) \mid \hat{U}(a) \times G}{\pi_1(\hat{V})}$$

la relation d'équivalence utilisée étant : "$(\tilde{x},M)$ et $(\tilde{x}',M')$ sont équivalents s'il existe $g \in \pi_1(\hat{V})$ tel que

$$(\tilde{x}',M') = (g.\tilde{x},A\ \chi(g)^{-1})$$ "

mais cette fois ci on se limite aux x tel que $\psi\ (\tilde{x}) \in \hat{U}(a)$.

Soit c une composante connexe par arc de $\psi^{-1}(\hat{U}(a)) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$. Cette composante est un revêtement connexe de $\hat{U}(a)$, il existe donc une application analytique p telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(\hat{U}(a)) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\psi"'] & c \arrow[d, "\psi_c = \psi|c"] \\
& \hat{U}(a)
\end{tikzcd}$$

Le diagramme suivant définit une application analytique τ de $\hat{\mathcal{H}}'_a$ dans $\hat{\mathcal{H}}_a$,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(\hat{U}(a)) \times G \arrow[r] & c \times G \arrow[r] & \psi^{-1}(\hat{U}(a)) \times G \\
(\tilde{x}, A) \arrow[r, "(p, id.)"] \arrow[dd, phantom, "q'"] \arrow[ddrr, "q \circ i \circ (p, id.)"] & (p(\tilde{x}), A) \arrow[r, "i"] & (p(\tilde{x}), A) \arrow[dd, "q"] \\
& & \\
\hat{\mathcal{H}}'_a \arrow[rr, "\tau"] & & q(p(\tilde{x}), A) \in \hat{\mathcal{H}}_a
\end{tikzcd}$$

<u>L'application τ est injective.</u>

En effet, supposons que

$$\tau(y) = \tau(z) \qquad (1)$$

où $\qquad y = q'(\tilde{y}, A) \quad \text{et} \quad z = q'(\tilde{z}, B)$.

L'égalité (1) entraîne

$$q(p(\tilde{y}), A) = q(p(\tilde{z}), B)$$

donc il existe $g \in \pi_1(\hat{V})$ tel que

$$p(\tilde{y}) = g.p(\tilde{z})$$

et

$$A \quad = B\,\chi\,(g)^{-1} \quad .$$

Mais $p(\tilde{y}) \in c$ et $p(\tilde{z}) \in c$, il existe donc un élément $\gamma \in \pi_1(\hat{U}(a))$ tel que :

$$p(\tilde{y}) = j(\gamma)p(\tilde{z}) \; .$$

Comme $\pi_1(\hat{V})$ opère sans point fixe dans $\mathcal{R}(\hat{V})$ nous avons, $g=j(\gamma)$ et par suite

$$p(\tilde{y}) = \gamma\; p(\tilde{z})$$

$$A \quad = B\,\chi_a(\gamma)^{-1}$$

c'est à dire que

$$y=z \text{ et que } \tau \text{ est injective.}$$

<u>L'application τ est surjective.</u>

Soit $z \in \hat{\mathcal{H}}_a$ alors $z=q(\tilde{y},A)$ avec $\psi(\tilde{y})=p(z) = x$.
Comme $(\tilde{y},A) \in \mathcal{R}(\hat{V})\big|(\hat{U}) \times Gl(p,\mathbb{C})$, il existe $g \in \pi_1(\hat{V})$ tel que $g\,\tilde{y} \in c$.
Alors si $\tilde{x} \in \mathcal{R}(\hat{U})$ est tel que $p(\tilde{x}) = g\,\tilde{y}$ on vérifie que :

$$z = \tau(q(\tilde{x},A\;\chi\;(g)^{-1}))$$

Il est facile de vérifier l'analyticité de τ^{-1} , ce qui entraîne la proposition 6.

§ 3 . ETUDE DES RAMIFICATIONS D'UNE CLASSE DE RIEMANN.

Dans ce paragraphe, les composantes irréductibles de A sont supposées en position générale. Soit $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}},A,\mathcal{M})$ une classe de Riemann associée à la donnée de Riemann $R(\chi_{\hat{V}},A,\mathcal{M})$. Nous allons étudier le comportement des éléments de $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}},A,\mathcal{M})$ au voisinage de A .
Soient M un point de A (par exemple $M \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ $(n \leq m)$) et $W(M)$ un voisinage de coordonnée de M pour A , c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme analytique ρ de D^m sur $W(M)$ tel que :

$$\rho^{-1}(M) \quad = \quad (0,0,;\ldots,0) \in D^m$$

$$\rho^{-1}(A_k \cap W(M)) = \{ (x_1,x_2,\ldots,x_m) \in D^m \mid x_k=0 \}$$

pour tout $k=1,2,\ldots,n$.

Pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}(M)) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, il existe une application ρ_c de $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ sur c réalisant $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ comme revêtement de c . Comme $\pi_1(V)$ opère transitivement sur les feuilles de $\mathcal{R}(\hat{V})$, il suffit d'étudier la restriction de chaque élément $\Phi \in \mathcal{C}(\chi_{\hat{V}},A,\mathcal{M})$ à une seule composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}(M))$.
Notons j l'application de $\pi_1(\hat{W}(M))$ dans $\pi_1(\hat{V})$ induite par l'injection canonique de $\hat{W}(M)$ dans $\hat{V}$; remarquons que cette application n'est en général ni injective ni surjective. La représentation $\chi_{\hat{V}} : \pi_1(\hat{V}) \longrightarrow \mathcal{M}$ induit une représentation $\chi_{\hat{W}}$ de $\pi_1(\hat{W}(M))$ dans $\mathcal{M}$ de la manière suivante :

$$\chi_{\hat{W}}(\alpha_{\hat{W}}) = \chi_{\hat{V}}(j(\alpha_{\hat{W}})) \qquad \text{pour tout} \quad \alpha_{\hat{W}} \in \pi_1(\hat{W}(M)) \ .$$

Le groupe fondamental de $\hat{W}(M)$ est isomorphe à celui de $\mathcal{D}$ qui lui est abélien libre de type fini. Soient $g_1, g_2, \ldots, g_n$ des générateurs de $\pi_1(\mathcal{D})$ possédant les propriétés suivantes :

$$g_k^*(\log . Q_j) = \log . Q_j \qquad \text{pour tout} \quad j \neq k$$

avec $j=1,2,\ldots,n$ et $k=1,2,\ldots,n$.

$$g_k^*(\log . Q_k) = \log . Q_k + 2\pi i \qquad \text{pour tout} \quad k=1,2,\ldots,n \ ,$$

où $Q=(Q_1,Q_2,\ldots,Q_m) \in \mathcal{R}(\mathcal{D})$.

Il en résulte que la représentation $\chi_{\hat{W}}$ est entièrement déterminée par la donnée de n matrices deux à deux permutables,

$$G_1^M \ , \ G_2^M \ , \ldots , \ G_n^M$$

appartenant à $\mathcal{M}$. Résumons la situation ainsi décrite dans la

Proposition 7.

Pour tout $M \in A$, il existe un voisinage $W(M)$ tel que pour tout $\Phi \in \mathcal{L}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ et toute composante connexe c de $\psi^{-1}(W(M))$ on ait :

$$\Phi_c^M = \Phi \circ \rho_c \in \mathcal{H}^{p \times p}(\mathcal{R}(\mathcal{D}))$$

et

$$g_k^* \Phi_c^M = \Phi_c^M \ G_k^M \quad \text{pour tout} \quad k=1,2,\ldots,n \ .$$

Définition 8 .

Le sous-ensemble des éléments Φ_c de $\mathcal{C}(\chi_{\hat{W}}, A \cap W, \mathcal{M})$ pour lesquels, il existe $\Phi \in \mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$ tel que

$$\Phi \big| c = \Phi_c$$

est appelé classe de Riemann locale au point M relative à c associée à $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$.

Entreprenons maintenant l'étude d'une classe de Riemann locale associée à $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$; pour ce faire, nous allons étudier la classe de Riemann $\mathcal{C}(\chi_{\hat{W}}, A \cap W(M), \mathcal{M})$ qui contient toute classe de Riemann locale au point M associée à $\mathcal{C}(\chi_{\hat{V}}, A, \mathcal{M})$. En d'autres termes, il suffit d'étudier la classe $\mathcal{C}(\chi_{\mathcal{D}}, \rho^{-1}(A), \mathcal{M})$ où $\chi_{\mathcal{D}}$ est la représentation déduite de $\chi_{\hat{W}}$ par l'isomorphisme ρ . Pour simplifier l'écriture cette classe de Riemann sera notée $\mathcal{C}(\mathcal{D})$.

La représentation $\chi_{\mathcal{D}}$ est définie par les images G_k $(k=1,2,\dots,n)$ des n générateurs de $\pi_1(\mathcal{D})$ choisis comme nous l'avons indiqué ci-dessus.

Proposition 8 .

L'ensemble $\mathcal{C}_i^o(\mathcal{D})$ n'est pas vide car il contient l'élément

$$\Phi_o = \prod_{k=1}^{n} (Q_k)^{\frac{1}{2\pi i} \log . G_k}$$

Démonstration.

Il suffit évidemment de prouver que Φ_o appartient $\mathcal{H}_i^{p\times p}(\mathcal{R}_o(\mathcal{D}))$ et qu'elle est d'ordre fini au point $0 \in D^m$. Il est clair que Φ_o est holomorphe sur $\mathcal{R}_o(\mathcal{D})$. D'autre part, les matrices G_k étant deux à deux permutables nous avons :

$$g_k^* \Phi_o = \Phi_o G_k \quad \text{pour tout} \quad k = 1,2,\ldots,n .$$

Par ailleurs il est également évident que Φ_o est inversible sur $\mathcal{R}_o(\mathcal{D})$ et qu'elle est d'ordre fini à l'origine.(c.f. démonstration de la proposition 3 du § 6 du chapitre I de [1]).

Proposition 9.

Si $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ et $\Phi' \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$, alors il existe $\varphi' \in \mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D})$ telle que

$$(1) \qquad \Phi' . \Phi^{-1} = \varphi' \circ \psi \qquad \text{où} \quad \psi = \psi_{\mathcal{D}}$$

Cette proposition est la proposition 2 du §1 appliquée à la classe locale considérée.

Corollaire 2.

Etant donnée $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$, l'application $\tilde{\Phi}$ de $\mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ dans $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D})$ qui à $\Phi' \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ associe la matrice $\varphi' \in \mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D})$ définie par (1) est une bijection.

Proposition 10.

Pour qu'un élément $\Phi \in \mathcal{L}_i(\mathcal{D})$ appartienne à $\mathcal{L}_i^o(\mathcal{D})$ il faut et il suffit que la restriction de l'application $\tilde{\Phi}$ à $\mathcal{L}^o(\mathcal{D})$ soit à valeurs dans $\mathcal{M}^{p\times p}(\mathcal{D})$.

Démonstration.

Supposons que $\Phi \in \mathcal{L}_i^o(\mathcal{D})$, et soit $\Phi' \in \mathcal{L}^o(\mathcal{D})$ alors

$$\tilde{\Phi}(\Phi') = \varphi'$$

est telle que

$$\Phi' = (\varphi' \circ \psi) . \Phi$$

donc $$(\varphi' \circ \psi) = \Phi' . \Phi^{-1}$$

Comme $\Phi'.\Phi^{-1}$ est holomorphe sur $\mathcal{D}$ elle est d'ordre fini à l'origine, (car Φ et Φ' le sont) la matrice φ' a donc au plus une singularité polaire sur A.

Réciproque.

Supposons que $\tilde{\Phi}$ soit une application de $\mathcal{L}^o(\mathcal{D})$ dans $\mathcal{M}^{p\times p}(\mathcal{D})$. Nous avons donc pour tout $\Phi' \in \mathcal{L}^o(\mathcal{D})$

$$\tilde{\Phi}(\Phi') = \varphi' \in \mathcal{M}^{p\times p}(\mathcal{D})$$

$$\Phi' = (\varphi' \circ \psi) . \Phi$$

en particulier on a ce résultat pour la matrice Φ_o de la proposition 8, c'est-à-dire :

$$\Phi = (\varphi_o \circ \psi)^{-1} . \Phi_o .$$

Ce qui prouve que Φ est d'ordre fini à l'origine.

Remarque 3.

Si $\Phi \in \mathcal{C}_i^o(\mathcal{D})$ alors $\tilde{\Phi}$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}_o(\mathcal{D})$ sur $\mathcal{M}^{p\times p}(\mathcal{D})$.

Corollaire 3.

Pour qu'une matrice $\Phi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ appartienne à $\mathcal{C}^o(\mathcal{D})$, il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathcal{M}^{p\times p}(\mathcal{D})$ telle que :

$$\Phi = (\varphi \circ \psi) . \Phi_o$$

Définition 9.

Deux matrices Φ_1 et Φ_2 appartenant à $\mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ sont dites équivalentes si $\tilde{\Phi}_1(\Phi_2)$ (donc également $\tilde{\Phi}_2(\Phi_1)$) est holomorphe inversible dans D^m .

Définition 10.

Soit $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$, nous dirons qu'un élément $\Phi' \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ est Φ-holomorphe (resp. Φ-holomorphe inversible) au point $Q_o \in \mathcal{R}'(\mathcal{D})$, s'il existe $\varphi' \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$ (resp. $\mathcal{H}_i^{p\times p}(D^m)$) telle que

$$\Phi' = (\varphi' \circ \psi) \Phi .$$

Proposition 11.

Si Φ_1 et Φ_2 sont deux éléments équivalents alors toute matrice $\Phi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ qui est Φ_1-holomorphe (resp. Φ_1-holomorphe inversible) au point Q_o est également Φ_2-holomorphe (resp. Φ_2-holomorphe inversible) au point Q_o et inversement.

Démonstration.

Soit $\Phi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ et supposons que Φ soit Φ_1-holomorphe (resp. Φ_1-holomorphe inversible) au point Q_o. Il existe donc $\varphi \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$ (resp. $\mathcal{H}_i^{p\times p}(D^m)$) telle que :

$$\Phi = (\varphi \circ \psi).\Phi_1$$

comme Φ_1 et Φ_2 sont équivalentes nous avons

$$\Phi_1 = (\rho \circ \psi).\Phi_2 \text{ avec } \rho \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(D^m).$$

Mais alors

$$\Phi = ((\varphi.\rho)\circ \psi).\Phi_2$$

avec $\varphi.\rho \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$ (resp. $\mathcal{H}_i^{p\times p}(D^m)$)

Ce qui prouve que Φ est Φ_2-holomorphe (resp. Φ_2-holomorphe inversible) au point Q_o. Donc : pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ la notion de Φ-holomorphie ne dépend que de la classe d'équivalence de Φ.

Proposition 12.

Si Φ_1 et Φ_2 sont deux éléments de $\mathcal{C}_i(\mathcal{D})$ et s'il existe un élément $\Phi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ holomorphe inversible par rapport à Φ_1 et Φ_2 alors Φ_1 et Φ_2 sont équivalentes.

La vérification de cette proposition est immédiate.

§ 4 . FAMILLE COHERENTE DE SOLUTIONS LOCALES DU PROBLEME II.

Soit a un point de A et $U(a)$ un voisinage coordonnée de a pour A ; la représentation χ induit une représentation $\chi_{\hat{U}(a)}$ de $\pi_1(\hat{U}(a))$ dans $Gl(p,\mathbb{C})$ par l'intermédiaire de l'application naturelle

$$j : \pi_1(\hat{U}(a)) \longrightarrow \pi_1(\hat{V})$$

Lemme 1.

Pour tout $a \in A$, il existe un voisinage $U(a)$ de a dans V tel que $S_{II}(\chi_{\hat{U}(a)}) \neq \emptyset$.

En effet la matrice Φ_o définie dans le proposition 8 du § 3 est un élément de $S_{II}(\chi_{\hat{U}(a)})$.

Remarque 4.

Comme $S_I(\chi_{\hat{U}}) \subset S_{II}(\chi_{\hat{U}})$ nous avons également $S_I(\chi_{\hat{U}}) \neq \emptyset$.

Définition 11.

Tout couple formé par un ouvert $U(a)$ et un élément de $S_{II}(\chi_{\hat{U}(a)})$ est appelé une solution locale au point a du problème II.

Nous parlerons également de solutions locales au point a du problème I.

Soit alors $c_{\hat{U}(a)}$ une composante connexe de $\psi_{\hat{V}}^{-1}(\hat{U}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, il existe une application $p_{c_{\hat{U}}}$ de $\mathcal{R}(\hat{U})$ sur $c_{\hat{U}}$ telle que si $\psi_{\hat{U}}$ désigne la projection canonique de $\mathcal{R}(\hat{U})$ sur $\hat{U}$, l'on ait :

$$\psi_{\hat{U}} = \psi_{\hat{V}} \circ p_{c_{\hat{U}}} \quad .$$

De plus, si $\mathcal{A}_{\hat{U}} \in S_{II}(X_{\hat{U}})$, il existe une application $\mathcal{A}_{C_{\hat{U}}}$ de $C_{\hat{U}}$ dans $Gl(p,\mathbb{C})$ telle que :

$$\mathcal{A}_{\hat{U}} = \mathcal{A}_{C_{\hat{U}}} \circ p_{C_{\hat{U}}}$$

Les résultats du § 3 entraînent immédiatement les résultats suivants :

Proposition 13.

Si $\Phi \in S_I(X)$ et si $\mathcal{A}_{\hat{U}} \in S_{II}(X_{\hat{U}})$ alors

$$\Phi\circ(\mathcal{A}_{C_{\hat{U}}})^{-1} \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(\hat{U})$$

pour toute composante connexe $C_{\hat{U}}$ de $\psi_{\hat{V}}^{-1}(\hat{U}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$.

Si $\Phi \in S_{II}(X)$ alors $\Phi\circ(\mathcal{A}_{C_{\hat{U}}})^{-1}$ admet au plus une singularité polaire au point a .

Si $\mathcal{A}_{\hat{U}}$ et $\mathcal{A}'_{\hat{U}}$ sont deux éléments de $S_{II}(X_{\hat{U}})$, il existe $W_U \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(\hat{U})$ telle que :

$$\mathcal{A}_{\hat{U}} = W_{\hat{U}} \mathcal{A}'_{\hat{U}}$$

Définition 12.

Nous dirons que $\mathcal{A}_{\hat{U}} \in S_{II}(X_{\hat{U}})$ (resp. $S_I(X_{\hat{U}})$) et $\mathcal{A}'_{\hat{U}} \in S_{II}(X_{\hat{U}})$ (resp. $S_I(X_{\hat{U}})$) sont équivalents si $W_{\hat{U}}$ est la restriction à $\hat{U}$ d'un élément de $\mathcal{H}_i^{p\times p}(U)$.

Définition 13.

On appelle famille cohérente de solutions locales du problème II, la donnée d'un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a\in A}$ de A par des *ouverts de* V *et d'une famille* $\{\mathcal{A}_a\}_{a \in A}$ *d'applications ayant les propriétés suivantes :*

1°) *Pour tout* $a \in A$, $\mathcal{A}_a \in S_{II}(X_{\hat{U}_a})$

2°) *Si* $U_a \cap U_b \neq \emptyset$

$$\mathcal{A}_{c_a}(\mathcal{A}_{c_b})^{-1} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}\,(U_a \cap U_b)$$

pour toutes composantes connexes c_a et c_b *respectivement de* $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$ *et* $\psi^{-1}(\hat{U}_b)$ *vérifiant* $c_a \cap c_b \neq \emptyset$.

Définition 14.

Deux familles cohérentes de solutions locales $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_a\}_{a \in A}$ *et* $\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}'_a\}_{a \in A}$ *sur le même recouvrement* $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ *sont dites équivalentes si* $\mathcal{A}_a$ *est équivalente à* $\mathcal{A}'_a$ *pour tout* $a \in A$.

Lemme 2.

Il existe une famille cohérente de solutions locales du problème II.

Démonstration.

Pour tout $a \in A$, désignons par $U(a)$ un voisinage coordonnée de a pour A , nous savons (§3) que $\pi_1(\hat{U}_a)$ est abélien libre et qu'il existe un nombre fini de générateurs $g_1^a, g_2^a, \ldots, g_{n_a}^a$ de $\pi_1(\hat{U}_a)$ tels que :

$$(g_k^a)^* \log . Q_j \quad = \quad \log . G_j \qquad \text{si} \quad j \neq k \, .$$

$$\text{avec} \quad k \quad = \quad 1,2,\dots,n_a \quad \text{et} \quad j = 1,2,\dots,n_a$$

$$(g_k^a)^* \log . Q_k \quad = \quad \log . Q_k + 2\pi i$$

$$\text{où} \quad k \quad = \quad 1,2,\dots,n_a \, .$$

(Nous identifions implicitement $\hat{U}_a$ avec $\mathcal{D}$).

La représentation $\chi_{\hat{U}_a}$ est entièrement déterminée par la donnée des images $G_1^a, G_2^a, \dots, G_{n_a}^a$ des générateurs $g_1^a, g_2^a, \dots, g_{n_a}^a$ de $\pi_1(\hat{U}_a)$. Les matrices $G_1^a, G_2^a, \dots, G_{n_a}^a$ sont inversibles et deux à deux permutables.

On peut supposer que dans U_a les composantes irréductibles A_k^a $(k=1,2,\dots,n_a)$ de $A \cap U_a$ sont définies respectivement par les équations :

$$f_k^a = 0 \, ,$$

où les f_k^a $(k=1,2,\dots,n_a)$ sont des fonctions holomorphes dans U_a , irréductibles et tel que pour tout k , le germe de f_k^a en tout point de A_k^a engendre l'idéal associé au germe d'ensemble analytique défini par A_k^a en ce point.

Pour tout $k = 1,2,\dots,n_a$ la fonction matricielle

$$F_k^a = (f_k^a)^{\frac{1}{2\pi i} \log . G_k^a}$$

est holomorphe inversible sur $\mathcal{R}(\hat{U}_a)$.

Pour tout $k=1,2,\dots,n_a$ et $j=1,2,\dots,n_a$, nous avons :

$$(g_j^a)^* F_k^a = F_k^a \quad \text{si} \quad j \neq k$$

et
$$(g_k^a)^* F_k^a = F_k^a \, G_k^a$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{A}_{c_a} = \prod_{k=1}^{n_a} F_k^a$$

réalise la représentation $\chi_{\hat{U}_a}$.

On vérifie alors facilement que

$$d(\mathcal{A}_{c_a}) \cdot \mathcal{A}_{c_a}^{-1} \in \Omega^{p \times p}(U_a, A \cap U_a) ,$$

c'est à dire que

$$\mathcal{A}_{c_a} \in S_{II}(\chi_{\hat{U}_a}) .$$

Considérons maintenant une composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$. La variété $\mathcal{R}(\hat{U}_a)$ est un revêtement de c_a ; comme $\mathcal{A}_{c_a}$ réalise $\chi_{\hat{U}_a}$, on voit facilement que $\mathcal{A}_{c_a}$ se factorise par ψ_{c_a} (projection de $\mathcal{R}(\hat{U}_a)$ sur c_a) . On peut donc considérer $\mathcal{A}_{c_a}$ comme étant définie sur c_a , c'est ce que nous ferons dans la suite sans introduire d'inutiles complications de notations. Montrons maintenant que la donnée :

1°) du recouvrement $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a \in A}$ de A par des ouverts de V choisis comme ci-dessus.

2°) de la famille de solutions locales du problème II : $\mathcal{O}_b = \{\mathcal{O}_{c_a}^{b}\}_{a \in A}$ constitue une famille cohérente de solutions locales du problème II.

Soient : a et b deux points de A tels que $U_a \cap U_b \neq \emptyset$; c_a et c_b des composantes connexes respectivement de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$ et de $\psi^{-1}(\hat{U}_b)$ vérifiant $c_a \cap c_b \neq \emptyset$.

Nous avons avec les notations indiquées ci-dessus :

$$\mathcal{O}_{c_a}^{b} = \prod_{k=1}^{n_a} (f_k^a)^{\frac{1}{2\pi i} \log . G_k^a}$$

$$\mathcal{O}_{c_a}^{b} = \prod_{k=1}^{n_b} (f_k^b)^{\frac{1}{2\pi i} \log . G_k^b} .$$

Et en supposant par exemple que $n_b \leq n_a$, nous savons, vu le choix des f_k^a et f_k^b, qu'il existe une application μ définie sur une partie L de $\{1,2,\dots,n_b\}$ dans $\{1,2,\dots,n_a\}$ telle que :

$$f_j^b = K_{ba}^{j,\mu(j)} \quad f_j^a \qquad \text{sur } U_a \cap U_b$$

où $K_{ba}^{j,\mu(j)}$ est une fonction holomorphe inversible sur $U_a \cap U_b$.

Il en résulte :

1°) que $G_j^b = G_{\mu(j)}^a$ car les représentations $\chi_{\hat{U}_a}$ et $\chi_{\hat{U}_b}$ sont induites par la même représentation χ de $\Pi_1(\hat{V})$ dans $Gl(p,\mathbb{C})$.

2°) que la matrice

$$\mathcal{O}_{c_a}^{b} \cdot \mathcal{O}_{c_b}^{b\,-1}$$

est holomorphe inversible sur $U_a \cap U_b$, car les familles de matrices $G_j^a (j=1,2,\dots,n_a)$ et $G_j^b (j=1,2,\dots,n_b)$ sont deux familles de matrices deux à deux permutables.

Le lemme 2 est ainsi démontré.

Définition 15.

Une solution Φ du problème I est dite holomorphe inversible sur A pour la famille cohérente $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_a\}_{a \in A}$ de solutions locales du problème II sur le recouvrement $\mathcal{U} = (U_a)_{a \in A}$ si pour tout $a \in A$ et toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$, $\Phi \circ (\mathcal{A}_{c_a})^{-1}$ est la restriction à $\hat{U}_a$ d'une matrice holomorphe inversible sur U_a.

Remarque 5.

Si on a la propriété ci-dessus pour une composante connexe de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$, on l'a pour toutes les autres. Les propositions 11 et 12 du §3 entraînent :

Proposition 14.

S'il existe $\Phi \in S_I(X)$ holomorphe inversible par rapport à deux familles cohérentes de solutions locales du problème II : $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ relatives au même recouvrement, alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont équivalentes. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont équivalentes alors toute matrice $\Phi \in S_I(X)$ qui est holomorphe par rapport à l'une l'est par rapport à l'autre.

Les considérations ci-dessus nous conduisent à l'étude du :

Problème II'.

Déterminer le sous-ensemble $S'_{II}(\chi,\mathcal{A}^0)$ de $S_{II}(\chi)$ des applications holomorphes inversibles sur A pour une famille cohérente de solutions locales $\mathcal{A}^0$.

Nous verrons dans le paragraphe 6 que cet ensemble $S'_{II}(\chi,\mathcal{A}^0)$ s'identifie aux sections holomorphes d'un certain fibré vectoriel sur V prolongeant $\hat{\mathcal{F}}$.

§ 5 . ETUDE DES PROLONGEMENTS A V DU FIBRE $\hat{\mathcal{F}}$.

Rappelons que les composantes irréductibles de A sont en position générale et sans singularité.

A). Prolongement local de $\hat{\mathcal{F}}$ au voisinage de l'ensemble analytique A .

Pour tout point M de A , nous appelerons voisinage épointé de M tout ensemble $\hat{U}(M)$ de la forme $U(M)-U(M)\cap A$ où $U(M)$ est un voisinage de M dans V et nous noterons $\chi_{\hat{U}(M)}$ la représentation induite par χ sur $\hat{U}(M)$.

Soit a un point de $A, W(a)$ un voisinage de coordonnée de a pour A . Notons $\hat{\mathcal{F}}_{\hat{W}(a)}$ le fibré induit par $\hat{\mathcal{F}}$ sur $\hat{W}(a)$. Ce fibré est analytique principal de groupe $Gl(p,\mathbb{C})$.

Dans toute la suite nous noterons

$$\hat{\mathcal{U}} = \{U_i\}_{i \in I} \qquad \text{et} \qquad \hat{h} = \{\hat{h}_{i,j}\}_{i \in I, j \in I}$$

respectivement le recouvrement de $\hat{V}$ et le cocycle associé définissant $\mathcal{R}\mathcal{O}(V)$ comme fibré principal localement trivial. Enfin $\hat{g} = \{\hat{g}_{i,j}\}_{i \in I\ ,\ j \in I}$ désignera l'image par χ du cocycle $\hat{h}$. Rappelons que c'est le cocycle $\hat{g}$ qui définit $\hat{\mathcal{F}}$. Enfin pour simplifier l'écriture nous écrirons :

$$U_{i,j} \quad \text{à la place de} \quad U_i \cap U_j$$

et

$$U_{i,j,k} \quad \text{à la place de} \quad U_i \cap U_j \cap U_k \ .$$

<u>Lemme 3.</u>

<u>A toute section holomorphe du fibré principal de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur un voisinage épointé de</u> a <u>est associé un prolongement $\mathcal{F}_a$ de $\hat{\mathcal{F}}_a$ au point</u> a . <u>Réciproquement tout prolongement $\mathcal{F}_a$ de $\hat{\mathcal{F}}_a$ au point</u> a <u>s'obtient à partir d'une section holomorphe de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur un voisinage épointé</u> $\hat{U}(a)$ <u>du point</u> a . <u>De plus,</u>

1°) <u>si</u> $\hat{\sigma}_a^1$ <u>et</u> $\hat{\sigma}_a^2$ <u>sont deux sections holomorphes de</u> $\hat{\mathcal{F}}_a$ <u>sur</u> $\hat{U}(a)$, <u>il existe</u> $\hat{\tau} \in \mathcal{H}\mathcal{O}_i^{p \times p}(\hat{U}(a))$ <u>tel que</u>

$$(1) \quad \hat{\sigma}_a^1 = \hat{\tau}\,\hat{\sigma}_a^2 \quad \text{sur} \quad \hat{U}(a)\ .$$

2°) <u>s'il existe</u> $\tau \in \mathcal{H}\mathcal{O}_i^{p \times p}(U(a))$ <u>telle que</u>

$$(2) \quad \hat{\tau} = \tau \,|\, \hat{U}(a)\ ,$$

<u>les deux prolongements de $\hat{\mathcal{H}}_a$ associés à σ_a^1 et σ_a^2 sont équivalents et réciproquement.</u>

<u>Démonstration.</u>

Soit $\hat{\sigma}_a$ une section holomorphe de $\hat{\mathcal{H}}_a$ sur un voisinage épointé $\hat{U}(a)$ de a, cette section est définie dans le recouvrement $\hat{\mathcal{U}}$ par la donnée des matrices $(\hat{\sigma}_{a,i})_{i \in I}$ holomorphes inversibles sur $U_i \cap \hat{U}(a)$ vérifiant :

$$\hat{\sigma}_{a,j} = \hat{\sigma}_{a,i}\hat{g}_{i,j} \quad \text{sur} \quad U_{i,j} \cap \hat{U}(a) .$$

Pour obtenir un prolongement de $\hat{\mathcal{H}}_a$ au voisinage de a, il suffit de prolonger l'atlas $\{\hat{\mathcal{U}}, \hat{g}_{i,j}\}$, ceci se fait de la manière suivante Au recouvrement $\hat{\mathcal{U}}_a = \{U_i \cap \hat{U}(a)\}_{i \in I}$ de $\hat{U}(a)$, on ajoute l'ouvert $U_{(a)} = U(a)$ pour obtenir un recouvrement $\mathcal{U}_a = \{U_i \cap \hat{U}(a)\}_{i \in I \cup \{a\}}$ de $U(a)$. Aux transformations coordonnées $g_{i,j} = \hat{g}_{i,j}|U_{i,j} \cap \hat{U}(a)$, on ajoute les matrices

$$g_{a,i} = \hat{\sigma}_{a,i} \quad \text{holomorphes inversibles sur} \quad \hat{U}(a) \cap U_i \quad \text{et}$$

$$g_{a,a} = \text{identité} \; ; \; g_{i,a} = (\sigma_{a,i})^{-1} \quad \text{sur} \quad U_{i,a} .$$

On vérifie alors facilement que pour tout i,j,k appartenant à $I \cup \{a\}$

$$g_{i,j} \cdot g_{j,k} = g_{i,k} \quad \text{sur} \quad U_{i,j,k} .$$

Ce qui prouve qu'à la section holomorphe $\hat{\sigma}_a$ de $\hat{\mathcal{H}}_a$ est associée un prolongement du fibré $\hat{\mathcal{H}}'_a$ au voisinage du point a.

Réciproquement soit $\mathcal{H}'_a$ un prolongement de $\hat{\mathcal{H}}_a$ au voisinage du point a. Comme le fibré principal $\mathcal{H}'_a$ est localement trivial, il existe un voisinage $U(a)$ de a dans V tel que $p^{-1}(U(a)) \subset \mathcal{H}'_a$ (p désignant la projection de $\mathcal{H}'_a$ sur $U(a)$) soit trivial c'est-à-dire qu'il existe une section holomorphe σ_a sur $U(a)$ du fibré principal $\mathcal{H}'_a$. Mais alors $\hat{\sigma}_a = \sigma_a \big| \hat{U}(a)$ est une section holomorphe de $\hat{\mathcal{H}}'_a$ sur $\hat{U}(a)$.

Soient maintenant $\hat{\sigma}^1_a$ et $\hat{\sigma}^2_a$ deux sections holomorphes de $\hat{\mathcal{H}}'_a$ sur le voisinage épointé $\hat{U}(a)$ de a. La section $\hat{\sigma}^1_a$ (resp. $\hat{\sigma}^2_a$) est définie par la donnée des matrices $\hat{\sigma}^1_{a,i}$. (resp. $\hat{\sigma}^2_{a,i}$) holomorphes inversibles sur $U_i \cap \hat{U}(a)$ et nous avons : sur l'ouvert $U_{i,j}$ ($i \in I$ et $j \in I$)

$$\hat{\sigma}^1_{a,j} = \hat{\sigma}^1_{a,i} \; g_{i,j} \; (\text{resp. } \hat{\sigma}^2_{a,j} = \hat{\sigma}^2_{a,i} \, g_{i,j}) .$$

Ce qui entraîne :

$$(\hat{\sigma}^2_{a,i})^{-1} \cdot (\hat{\sigma}^2_{a,j}) = g_{i,j} = (\hat{\sigma}^1_{a,i})^{-1} \cdot (\hat{\sigma}^1_{a,j}) .$$

Nous avons donc pour tout i et tout j appartenant à I :

$$\sigma^1_{a,i} \cdot (\sigma^2_{a,i})^{-1} = \sigma^1_{a,j} \cdot (\sigma^2_{a,j})^{-1} = \hat{\tau}$$

où $\hat{\tau} \in \mathcal{H}\mathcal{O}_i^{p \times p}(\hat{U}(a))$.

Nous utiliserons le résultat suivant de la théorie des fibrés.

Proposition F.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux fibrés holomorphes, de même base, de même fibre, de même groupe $Gl(p,\mathbb{C})$ et ayant de plus les mêmes ouverts de trivialisation locale et dont les transformations coordonnées sont respectivement $g^1_{i,j}$ et $g^2_{i,j}$. Alors ces deux fibrés sont équivalents si et seulement s'il existe pour tout $j \in I$ une application holomorphe $\lambda_j : U_j \longrightarrow Gl(p,\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in I$ et $j \in I$

$$(1) \quad \lambda_j g^2_{i,j} = g^1_{j,i}\, \lambda_i \quad \underline{\text{sur}} \quad U_{i,j}$$

Supposons qu'il existe $\tau \in \mathcal{H}\mathcal{O}^{p \times p}_i(U(a))$ tel que :

$$\tau | \hat{U}(a) = \hat{\tau} .$$

Alors pour montrer l'équivalence des deux fibrés $\mathcal{F}^1_a$ et $\mathcal{F}^2_a$ associés aux sections $\hat{\sigma}^1_a$ et $\hat{\sigma}^2_a$ de $\hat{\mathcal{F}}_a$ nous utilisons la proposition F en posant : pour tout $i \in I$ λ_i = identité et

$$\lambda_a = \tau .$$

Réciproquement supposons que les deux fibrés $\mathcal{F}^1_a$ et $\mathcal{F}^2_a$ sont équivalents, les sections $\hat{\sigma}^1_a$ et $\hat{\sigma}^2_a$ ayant servi à les définir vérifient

$$\hat{\sigma}^1_a = \hat{\tau}\, \hat{\sigma}^2_a \quad \text{où} \quad \hat{\tau} \in \mathcal{H}\mathcal{O}^{p \times p}_i(\hat{U}(a)) .$$

Il reste à montrer qu'il existe $\tau \in \mathcal{H}\mathcal{O}^{p \times p}_i(U(a))$ tel que :

$$\tau | \hat{U}(a) = \hat{\tau}$$

Nous savons que pour tout $i \in I$ il existe λ_i appartenant à $\mathcal{H}\mathcal{O}^{p \times p}_i(U(a))$

tel que pour tout $i \in I$ et $j \in I$ $\lambda_j g^2_{j,i} = g^1_{j,i} \lambda_i$ sur $U_{i,j}$.
Mais si i et j appartienne à I l'égalité

$$g^2_{j,i} = g^1_{j,i}$$

entraîne que pour tout $i \in I$, λ_i = identité. Sur $U_{i,a}$ nous avons :

$$\lambda_a \; g^2_{a,i} = g^1_{a,i} \; \lambda_i \quad \text{où} \quad \lambda_a \in \mathcal{H}\mathcal{O}_i^{p \times p}(U(a))$$

Comme

$$g^2_{a,i} = \hat{\sigma}^2_{a,i} \qquad g^1_{a,i} = \hat{\sigma}^1_{a,i}$$

nous avons sur $U_{a,i}$

$$\lambda_a \; \hat{\sigma}^2_{a,i} = \hat{\sigma}^1_{a,i}$$

et vu la relation qui existe entre ces deux sections :

$$\lambda_a = \hat{\tau} \quad \text{sur} \quad U_{a,i}$$

En d'autres termes, il existe $\tau \in \mathcal{H}\mathcal{O}_i^{p \times p}(U(a))$ tel que :

$$\tau \,\big|\, \hat{U}(a) = \hat{\tau} \, .$$

Ce qui prouve le lemme 3 .

Lemme 4.

Pour tout voisinage épointé $\hat{U}(a)$ de a, il existe une bijection entre $\mathcal{C}_i(X_{\hat{U}(a)}, A \cap U(a), Gl(p,\mathbb{C}))$ et l'ensemble des sections holomorphes de $\hat{\mathcal{F}}_a$.

Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème F et du fait que $\hat{\mathcal{H}}_a$ est isomorphe à

$$\mathcal{H}'_a = \frac{\mathcal{R}\mathcal{O}(\hat{U}(a)) \times Gl(p,\mathbb{C})}{\pi_1(\hat{U}(a))}$$

Corollaire 4.

Comme $\mathcal{C}_i(X_{\hat{U}(a)}, A \cap U(a), Gl(p,\mathbb{C})) \neq \emptyset$, il existe en tout point $a \in A$ un prolongement local de $\hat{\mathcal{H}}$ en ce point.

B). Recollement des prolongements locaux.

Pour assurer le recollement des prolongements locaux définis ci-dessus, il suffit de montrer que pour tout $a \in A$ et $b \in A$ tels que les voisinages associés vérifient $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, il existe une matrice $g_{a,b}$ holomorphe inversible sur $U_a \cap U_b$ telle que

$$g_{i,j} g_{j,k} = g_{i,k} \quad \text{sur} \quad U_{i,j,k}$$

pour tout i,j,k appartenant à $I \cup A$.

Lemme 5.

Si $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, alors pour que les deux prolongements locaux $\mathcal{F}_a$ et $\mathcal{F}_b$ se recollent il faut et il suffit qu'il existe une matrice $g_{a,b} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U_{a,b})$ telle que pour tout $i \in I$

$$\hat{\sigma}_{a,i} = g_{a,b}\, \hat{\sigma}_{b,i} \quad \underline{\text{sur}} \quad U_{a,b,i}$$

où $\hat{\sigma}_a$ (resp. $\hat{\sigma}_b$) désigne la section sur $\hat{U}_a$ de $\hat{\mathcal{F}}_a$ (resp. sur $\hat{U}_b$ de $\hat{\mathcal{F}}_b$) ayant permis de définir $\mathcal{F}_a$ (resp. $\mathcal{F}_b$). Ce lemme est une simple vérification.

Désignons par $\mathcal{H}_a$ (resp $\mathcal{H}_b$) l'image de σ_a (resp. σ_b) par la bijection donnée dans le lemme 4.

Lemme 6.

Pour qu'il existe $g_{a,b} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U_{a,b})$ *vérifiant pour tout* $i \in I$

$$\hat{\sigma}_{a,i} = g_{a,b}\, \hat{\sigma}_{b,i}$$

Il faut et il suffit qu'il existe $g_{a,b} \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U_{a,b})$ *tel que* :

$$\mathcal{A}_a = g_{a,b}\, \mathcal{A}_b$$

Ce lemme se vérifie facilement en utilisant la bijection du lemme 4 et le théorème F .

Mais alors l'existence d'une famille cohérente de solutions locales du problème II entraîne

Théorème 2.

Il existe un fibré $\mathcal{F}$ *sur* V *tel que*

$$\mathcal{F} \,|\, \hat{V} = \hat{\mathcal{F}}$$

Donc à toute famille cohérente $\mathcal{A}$ de solutions locales du problème II est associé un fibré holomorphe $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ sur V tel que

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) \,|\, \hat{V} = \hat{\mathcal{F}}$$

D'autre part les considérations sur les familles cohérentes de solutions locales et les résultats ci-dessus entraînent :

Corollaire 5.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux familles cohérentes de solutions locales équivalentes du problème II , les deux fibrés $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{F}(\mathcal{A}')$ sont équivalents.

Nous avons un résultat analogue concernant le fibré $\hat{\mathcal{F}}'$.

Théorème 2'.

Il existe un fibré ' sur V tel que

$$\mathcal{F}' \big| \hat{V} = \hat{\mathcal{F}}'$$

Ce théorème se démontre comme le théorème 2 , en utilisant cette fois au voisinage de tout point a de A le fibré principal $\hat{\mathcal{P}}'_a$ associé à $\hat{\mathcal{F}}'_a$. On a également le corollaire ci-dessus pour le fibré $\hat{\mathcal{F}}'$ et ses prolongements.

§ 6 . ETUDE DU PROBLEME II'.

Les notations de ce paragraphe sont celles des deux paragraphes précédents. On se propose ici d'étudier le :

Problème II'.

Déterminer le sous-ensemble $S'_{II}(X, \mathcal{A})$ de $S_I(X)$ des applications holomorphes inversibles sur A pour la famille cohérente de solutions locales $\mathcal{A}$.

Remarque 6.

Comme la notion d'holomorphie pour un élément de $S_I(\chi)$ par rapport à une famille cohérente de solutions locales $\mathcal{A}$ ne dépend pas que de sa classe d'équivalence $\tilde{\mathcal{A}}$, l'ensemble $S'_{II}(\chi, \mathcal{A})$ ne dépend que de $\tilde{\mathcal{A}}$ et pour cette raison il sera noté $S'_{II}(\chi, \tilde{\mathcal{A}})$. Nous avons :

Théorème $A_{II'}$

Il existe un fibré $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{A}})$ sur V et un seul à une isomorphie près tel que :

1°) $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{A}}) \big| \hat{V} = \hat{\mathcal{F}}$

2°) il existe une bijection naturelle entre $S'_{II}(\chi, \tilde{\mathcal{A}})$ et l'ensemble des sections holomorphes du fibré $\hat{\mathcal{F}}$.

Existence.

A l'élément $\mathcal{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ est associé un fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ sur V tel que $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \big| \hat{V} = \hat{\mathcal{F}}$.

Montrons que ce fibré possède la propriété 2 du théorème $A_{II'}$.

Soit Φ un élément de $S'_{II}(\chi, \tilde{\mathcal{A}})$. Pour tout $a \in A$ et toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$, nous avons :

$$\Phi \big| c_a = W_a \mathcal{A}_a \quad \text{où} \quad W_a \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(U_a)$$

Comme Φ est solution du problème I, il lui est associé une section $\hat{\sigma}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ définie par la collection $(\hat{\sigma}_i)_{i \in I}$ où pour tout i, $\hat{\sigma}_i$ est une application holomorphe de U_i dans $Gl(p,C)$ telle que pour tout $i \in I$ et $j \in I$ l'on ait :

$$\hat{\sigma}_j = \hat{\sigma}_i g_{i,j}$$

Montrons maintenant que l'hypothèse $\Phi \in S'_{II}(X,\tilde{\mathcal{A}})$ entraîne que $\hat{\sigma}$ se prolonge en une section holomorphe de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. La section $\hat{\sigma}$ définit une section $\hat{\sigma}_a$ de $\hat{\mathcal{F}}_a$ sur $\hat{U}_a$; celle ci est bien définie par la restriction de Φ à c_a car on passe d'une composante connexe de $\psi^{-1}(\hat{U}_a)$ à une autre par une opération de $\pi_1(\hat{V})$.

Posons, pour tout $i \in I$ et $a \in A$

$$\sigma_a^i = \sigma_i \quad \text{sur} \quad U_{i,a}$$

$$\sigma_a^a = W_a \quad \text{sur} \quad U_a \quad .$$

Ces matrices définissent une section σ_a de $\mathcal{F}_a$ sur U_a , en effet pour tout i et j appartenant à $I \cup \{a\}$ nous avons :

$$(1) \quad \sigma_a^j = \sigma_a^i \, g_{i,j} \quad \text{sur} \quad U_{i,j,a}$$

car

1°) si $i \in I$ et $j \in I$ la relation (1) est évidente

2°) si $i=a$ et $j \in I$, l'égalité (1) se réduit à

$$\sigma_a^j = \sigma_a^a \, g_{a,j} = W_a g_{a,j} = W_a \, \tau_a^j$$

où τ_a^j est la section définie par $\mathcal{A}_a$ (celle qui permet le prolongement local au point a cf. §5). Mais alors comme

$$\Phi \Big| c_a = W_a \mathcal{A}_a$$

l'égalité ci-dessus est vérifiée.

3°) Si $j=a \in A$ et $i \in I$ la vérification se fait comme dans le 2°).

4°) Si $i=j=a \in A$ la relation (1) se réduit à

$$\sigma_a^a = \sigma_a^a \quad \text{car} \quad g_{a,a} = \text{identité.}$$

La donnée de la collection $\{\sigma_i\}_{i \in I \cup A}$ et du recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I \cup A}$ définit une section holomorphe du fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. En effet pour qu'il en soit ainsi, il suffit de vérifier que pour tout $i \in I \cup A$ et tout $j \in I \cup A$ nous avons :

$$\sigma_j = \sigma_i \, g_{i,j} \quad \text{sur} \quad U_{i,j}$$

Mais vu les considérations ci-dessus, il suffit de vérifier cette relation pour $i=b \in A$ et $j=a \in A$.

Avec ces notations nous avons à vérifier que

$$\sigma_b = \sigma_a \, g_{a,b} \quad \text{sur} \quad U_{a,b}$$

C'est-à-dire que l'on doit avoir

$$W_b = W_a \, g_{a,b} \quad \text{sur} \quad U_{a,b} \quad \text{ou sur}$$

$\psi^{-1}(U_{a,b}) \cap c_a = \psi^{-1}(U_{a,b}) \cap c_b$

Or celle ci est vérifiée vu la définition de $g_{a,b}$ (cf.§5) et la relation

$$W_b = W_a \, \mathcal{A}_a \, (\mathcal{A}_b)^{-1}$$

Donc toute solution du problème II' donne une section holomorphe du fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A})$.

<u>Réciproque</u>.

Soit σ une section holomorphe de $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, alors $\hat{\sigma} = \sigma \Big| \hat{V}$ est une section holomorphe de $\hat{\mathcal{F}}$, à cette section est associée une solution Φ du problème I . Il reste à vérifier que cette solution Φ est holomorphe inversible sur A pour la famille cohérente de solutions locales $\mathcal{A}$. Pour tout $a \in A$, la section σ est définie sur U_a par une matrice holomorphe inversible σ_a . Mais comme pour toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$. On a :

$$\Phi \Big| c_a = W_a \mathcal{A}_a \quad \text{où} \quad W_a \in \mathcal{H}_i^{p \times p}(\hat{U}_a)$$

Il résulte que $\hat{\sigma}_a = \sigma_a \Big| \hat{U}_a$ est la section de $\hat{\mathcal{F}}_a$ associée à l'application $W_a \mathcal{A}_a$ et cette section se prolonge au fibré $\mathcal{F}_a$ à l'aide de la matrice holomorphe inversible σ_a sur U_a .

Nous avons pour tout $i \in I$ et $a \in A$:

$$\sigma_i = \sigma_a \, g_{a,i} \quad \text{sur} \quad U_{a,i}$$

c'est-à-dire que :

$$W_a \mathcal{A}_a \Big| \psi^{-1}(U_{a,i}) \cap c_a = \sigma_a \mathcal{A}_a \Big| \psi^{-1}(U_{a,i}) \cap c_a$$

En d'autres termes, pour tout $i \in I$

$$W_a = \sigma_a \quad \text{sur} \quad U_{a,i}$$

En particulier

$$W_a = \sigma_a \quad \text{sur} \quad \hat{U}_a$$

Ce qui prouve que W_a est la restriction à $\hat{U}_a$ d'une matrice holomorphe inversible sur $U_{a'}$, ceci étant valable pour tout $a \in A$ l'application Φ est holomorphe inversible sur A pour la famille cohérente de solutions locales $\mathcal{A}$.

L'unicité du fibré à une isomorphie près résulte du fait que deux familles cohérentes de solutions locales équivalentes donnent des fibrés isomorphes et que la notion d'holomorphie ne dépend que des classes d'équivalence de familles cohérentes de solutions locales.

A côté du théorème $A_{II'}$, on peut également énoncer un théorème concernant le fibré $\hat{\mathcal{F}}'$. Notons $\mathcal{A}^{\circ}$ la famille cohérente de solutions locales du problème II construite dans le lemme 2 du paragraphe 4 .

<u>Théorème</u> $B_{II'}$.

<u>Il existe un fibré</u> $\mathcal{F}'(\tilde{\mathcal{A}}^{\circ})$ <u>sur</u> V <u>et un seul à une isomorphie près tel que</u> :

1°) $\mathcal{F}'(\tilde{\mathcal{A}}^{\circ}) \Big|_{\hat{V}} = \hat{\mathcal{F}}'$

2°) <u>Il existe un isomorphisme entre le module</u> $\mathcal{L}^A(X,A,\mathcal{M}(p,C))$ <u>et le module des sections méromorphes de</u> $\mathcal{F}'(\tilde{\mathcal{A}}^{\circ})$ <u>ayant au plus une singularité polaire sur</u> A .

3°) <u>Il existe une bijection entre le sous-ensemble de</u> $\mathcal{L}^A(X,A,\mathcal{M}(p,C))$ <u>des éléments holomorphes inversibles sur</u> A <u>pour</u> $\tilde{\mathcal{A}}^{\circ}$ <u>et les sections holomorphes de</u> $\mathcal{F}'(\tilde{\mathcal{A}}^{\circ})$.

Ce théorème donne donc une interprêtation très simple de la notion de classes de Riemann, il est bien entendu possible d'énoncer des résultats analogues concernant $\mathcal{C}(\chi, A, \mathcal{M})$ et $\mathcal{C}_i^A(\chi, A, \mathcal{M}(p, C))$.

§ 7 . ETUDE DU PROBLEME II.

Rappelons l'énoncé de ce problème :

Problème II . Déterminer l'ensemble $S_{II}(\chi)$ des applications $\Phi \in \mathcal{H}_i^{p\times p}(\mathcal{R}(V))$ réalisant la représentation χ et qui vérifie de plus $d\,\Phi\Phi^{-1} \in \Omega^{p\times p}(V,A)$.

La condition $\Phi\Phi^{-1} \in \Omega^{p\times p}(V,A)$ peut être remplacé par la suivante :

"Les colonnes de Φ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(V))$ faiblement singulier sur A ."

Notons $\mathcal{A}^{\circ}$ la famille cohérente de solutions locales du problème II construite dans le lemme 2 du § 4 et $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\circ})$ le fibré sur V qui lui est associé. Nous avons :

Théorème A_{II}.

Il existe une injection de $S_{II}(\chi)$ dans l'ensemble des sections méromorphes sans singularité sur $\hat{V}$ du fibré $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\circ})$.

Ce théorème résulte du théorème B_{II}, du § 6 car toute matrice Φ vérifiant $d\,\Phi\Phi^{-1} \in \Omega^{p\times p}(V,A)$ est d'ordre fini sur A.

Soit a un point de A et $U(a)=U_a$ le voisinage de a choisi comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 6. Nous noterons $\mathfrak{S}_{\hat{U}_a}$ l'ensemble des applications holomorphes de U_a dans $Gl(p,\mathbb{C})$ de la forme :

$$W_a \prod_{j=1}^{n_a} Q_j^{A_j^a} K_a$$

où

$$W_a \in \mathcal{H}\mathcal{O}_i^{p\times p}(U(a))$$

K_a est une matrice complexe régulière

A_j^a est pour tout $j=1,2,\ldots,n_a$ une matrice diagonale à coefficients entiers, telle que

$$\prod_{j=1}^{n_a} (f_j^a)^{A_j^a} K_a (\chi_{\hat{U}(a)}(g_k))K_a^{-1} \prod_{j=1}^{n_a} (f_j^a)^{-A_j^a} \in \mathcal{H}\mathcal{O}^{p\times p}(U(a)) .$$

Enfin notons $\mathfrak{S}$ l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ telle que pour tout $a \in A$, il existe un voisinage $U(a)$ de a dans V tel que

$$\sigma \big| \hat{U}(a) \in \mathfrak{S}_{\hat{U}(a)}$$

<u>Théorème</u> B_{II}.

<u>Il existe une bijection entre</u> $S_{II}(X)$ <u>et l'ensemble des sections de</u> $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ <u>appartenant à</u> $\mathfrak{S}$.

<u>Démonstration</u>.

Dans cette démonstration nous utiliserons les résultats de [1] (Chap. I).

Soit Φ un élément de $S_{II}(\chi)$, nous savons que Φ est une solution du problème I, il lui est donc associée une section σ du fibre $\hat{\mathcal{H}}$.

Comme Φ engendre un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(V))$ de dimension finie p et faiblement singulier sur A, il existe pour tout $a \in A$ un voisinage $U(a)$ dans V tel que pour toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}(a))$ de $\mathcal{R}(V)$ l'on ait :

$$\Phi \Big| c_a = W_a \prod_{j=1}^{n_a} Q_j^{A_j^a} \prod_{j=1}^{n_a} Q_j^{F_j^a} K_a \quad \text{où} \quad K_a \in Gl(p,\mathbb{C})$$

(cf. I, nous utilisons une base adaptée pour engendrer E). Nous supposerons dans la suite que le voisinage $U(a)$ est choisi tel qu'il joue le rôle du voisinage U_a des paragraphes précédants. Pour simplifier l'écriture nous poserons dans la suite pour tout $B_1, B_2, \ldots, B_{n_a}$

$$Q^B = \prod_{j=1}^{n_a} Q_j^{B_j} .$$

Nous savons que la matrice

$$Q^{A^a} \cdot Q^{F^a}$$

réalise la représentation $\chi_{\hat{U}(a)}$.

D'autre part, pour tout $i=1,2,\ldots,n_a$, nous avons :

$$A_j^a = \tilde{A}_j^a + \bar{A}_j^a$$

où $\bar{A}^a_j$ est une matrice diagonale décomposée en blocs dont chacun est un multiple de l'identité.

A^a_j est une matrice diagonale à coefficients entiers ayant certaines propriétés (cf. [1], Chap.I) . Nous savons que :

$$\bar{A}^a_j + F^a_j = \frac{1}{2\pi i} \log . D^a_j$$

donc

$$\Phi \Big|_{C_a} = W_a \cdot Q^{\tilde{A}^a} \times Q^{\frac{1}{2\pi i} \log . D^a}$$

Du fait que Φ réalise $\chi_{\hat{U}(a)}$, on en déduit que pour tout $j=1,2,\ldots,n_a$

$$D^a_j K_a = K_a G^a_j$$

D'autre part, comme Φ est solution du problème II en se référant à ce qui a été fait dans [1] (Chap. I) , on voit que pour tout $j=1,2,\ldots,n_a$

$$Q^{A^a} D^a_j Q^{-A^a}$$

est holomorphe sur $U(a)$.

Mais alors en revoyant la décomposition en blocs de ces matrices telle qu'elle a été utilisée dans [1](Chap.I,§3), on en déduit que

$$Q^{\tilde{A}^a} D^a_j Q^{-\tilde{A}^a}$$

est holomorphe sur $U(a)$.

Donc :

$$Q^{A^a} \times K_a \times G^a_j \times K_a^{-1} \times Q^{-A^a} = Q^{A^a} \times K_a \times \chi_{\hat{U}(a)}(g^a_j) \times K_a^{-1} \times Q^{-A^a}$$

est holomorphe sur $U(a)$.

Nous avons donc :

$$\Phi \big| c_a = W_a \times Q^{\tilde{A}^a} \times Q^{\frac{1}{2\pi i} \log . D_j^a}$$

$$= W_a \, Q^{\tilde{A}^a} K_a \, \mathcal{A}_a^{\circ}$$

Mais, alors si on revoit comment on a prolongé à $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\circ})$ la section $\hat{\sigma}$, on constate que pour faire ce prolongement on prend :

$$\sigma_a = W_a \, Q^{\tilde{A}^a} K_a$$

Ce qui prouve la partie directe du théorème B_{II}.

La réciproque est facile. Soit σ une section de $\mathcal{F}(\mathcal{A}^{\circ})$ appartenant à $\mathfrak{S}$, alors

(1) $\sigma_a = W_a \, Q^{\tilde{A}^a} K_a$ sur U_a

et reprenant les calculs ci-dessus, on voit que si Φ est la solution du problème I associée à la section $\hat{\sigma} = \sigma \big| \hat{V}$ de $\hat{\mathcal{F}}$, celle-ci vérifie pour tout $a \in A$ et toute composante connexe c_a de $\psi^{-1}(\hat{U}_a) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{O}}(\hat{V})$.

$$d(\Phi \big| c_a)(\Phi \big| c_a)^{-1} \in \Omega^{p \times p}(U_a, A \cap U_a)$$

et donc :

$$d\, \Phi . \Phi^{-1} \in \Omega^{p \times p}(V, A) \; .$$

Remarquons que nous avons supposé implicitement que l'ouvert U_a est celui que l'on ajoute au recouvrement $\hat{\mathcal{U}}$ de $\hat{V}$ pour faire le prolongement de $\hat{\mathcal{F}}'$ au point a et que sur cet ouvert l'on a également (1) , on peut toujours supposer qu'il en est ainsi.

§ 8 . CONCLUSIONS SUR LE PROBLEME DE RIEMANN HILBERT SUR UNE VARIETE ANALYTIQUE COMPLEXE.

Dans le cas où V est une surface de Riemann, H. Röhrl a donné une solution complète de ce problème.

Si V est une variété de Stein contractile alors chaque fibré $\mathcal{F}'(\mathcal{A})$ admet une section continue et donc une section holomorphe d'après un théorème de H. Grauert [7] . Il en résulte que $S'_{II}(\chi) \neq \emptyset$, ce qui veut dire que le problème de Riemann Hilbert admet toujours une solution sur une variété de Stein contractile.

Il en est de même si V n'est plus contractile mais si un des fibrés $\mathcal{F}'(\mathcal{A})$ admet une section continue.

Il reste un cas intéressant à étudier c'est celui où V est un espace projectif complexe ; on a quelques résultats dans ce sens concernant le plan projectif complexe et le problème de Riemann Hilbert lié aux fonctions hypergéométriques.[8] .

BIBLIOGRAPHIE

-o-o-o-o-o-o-

[1] R. GÉRARD — Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe (Thèse) à paraître dans le Journal de Mathématique.

[2] R. GÉRARD — C.R.Acad.Sci. Paris t. 264 pp. 1133-1136 (19 juin 1967) .

[3] H. RÖHRL — Das Riemann Hilbert Problem der Theorie des linearen Differentialgleichungen. Math. Ann. Bd. 133(1957) .

[4] H.J.NASTOLD — Uber meromorphen Schnitte complex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannschen Klassen. Math. Zeitschr. Bd 69(1958).

[5] N. STEENROD — The topology of fibre bundles. Princeton University Press 1951 .

[6] H. CARTAN — Séminaire E.N. 2ème année 1949-1950. Espaces fibrés et homotopie.

[7] H. GRAUERT — Analytischer Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. Math.Ann. Bd 135(1958)

[8] E. PICARD — Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques. Ann. de l'Ecole Normale Supérieure. 2ème série t. X (1881) et C.R.Acad.Sci. t. XC, (1880), p. 1267.

---oo 0 oo---