R. Gérard

Chapitre III

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 5
« Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe », , exp. n° 4, p. 60-84
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__5__A5_0>

CHAPITRE III

§ 1. SYSTEME DE PFAFF DU TYPE DE FUCHS.

a) Les composantes irréductibles $(A_i)_{i \in I}$ de A sont en position générale.

Soit M un point de A, il existe :

- un entier n strictement positif tel que $M \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$;
- un voisinage W de M dans V, un isomorphisme analytique Φ de D^m sur W, (D désignant le disque unité centré à l'origine du plan complexe $\mathbb{C}$), tel que :

$$\Phi^{-1}(M) = (0,0\ ,\ldots,\ 0) \in D^m \quad ,$$

et

$$\Phi^{-1}(A_i \cap W) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in D^m | x_i = 0\} \ ,$$

pour tout $i = 1,2,\ldots,n$.

Un voisinage W de cette nature sera appelé voisinage de coordonnée pour A au point M. Posons $\hat{W} = W - W \cap A$. Pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset \mathcal{R}\ (\hat{V})$, il existe une application Φ_c de $\mathcal{R}\ (\mathcal{D})$ sur c réalisant $\mathcal{R}\ (\mathcal{D})$ comme revêtement de c .

Définition 1.

Un élément $f \in \mathcal{H}^{p\times 1}\ (\mathcal{R}(\hat{V})$ est dit d'ordre fini au point M , si pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}\ (\hat{W}) \subset \mathcal{R}\ (\hat{V})$, la fonction $(f|c) \circ \Phi_c$ est d'ordre fini à l'origine de D^m.

Définition 2.

Un élément $f \in \mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit d'ordre fini sur A, si f est d'ordre fini en tout point de A.

Pour tout sous espace vectoriel E de $\mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$, nous noterons, $E_c(\hat{W})$ l'espace vectoriel des restrictions des éléments de E à la composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$ et

$$E_c(\mathcal{D}) = \{f \circ \Phi_c \mid f \in E_c(\hat{W})\} \quad .$$

Définition 3.

Un sous espace vectoriel E de $\mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$, de dimension finie p est dit faiblement singulier au point $M \in A$, s'il existe un voisinage W de coordonnée pour A au point M, tel que : pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, l'espace vectoriel $E_c(\mathcal{D})$ soit faiblement singulier à l'origine de D^m.

Remarque 1.

Les définitions 1, 2 et 3 sont indépendantes du choix de W et de l'isomorphisme Φ.

Définition 4.

Un sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit faiblement singulier au point $M \in \hat{V}$, s'il existe un voisinage W de ce point dans $\hat{V}$ tel que pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(W) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, la restriction de E à c admette une base dont la matrice associée soit inversible au point $\psi^{-1}(M) \cap c$.

Définition 5.

Un sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit faiblement singulier sur V si :

1°) E est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$,

2°) E est faiblement singulier en tout point de V.

Définition 6.

Un système de Pfaff appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(V-A)$ est dit du type de Fuchs si l'espace vectoriel de ses solutions est faiblement singulier sur V.

Remarque 2.

L'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(V-A)$ est évidemment un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{M}^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ stable par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$ et faiblement singulier en tout point de $\hat{V}$. La seule condition supplémentaire imposée à un tel système, pour qu'il soit de Fuchs est donc que son espace vectoriel de solutions soit faiblement singulier sur A.

b) Les composantes irréductibles de A ne sont plus en position générale.

Désignons par $S(A)$ le sous ensemble analytique de V constitué par les points en lesquels les composantes irréductibles $(A_i)_{i\in I}$ de A ne sont plus en position générale. Rappelons que les composantes irréductibles de A sont sans singularité.

Définition 7.

Nous appellerons modification élémentaire de (V, A) un éclatement de Hopf (V',σ,V) le long d'une composante irréductible de $S(A)$.

Définition 8.

Nous appellerons modification de Hopf de (V, A) une donnée (V^k, A^k, ι, V, A) telle que :

$$\iota = \sigma_k \circ \sigma_{k-1} \circ \dots \circ \sigma_1$$

où (V^j, σ_j, V^{j-1}) est une modification élémentaire de (V^{j-1}, A^{j-1}). Soit $\mathcal{M}od.(V,A)$ l'ensemble des modifications de Hopf de (V,A) telles que les composantes irréductibles de $\iota^{-1}(A)$ soit en position générale.

Proposition 1.

L'ensemble $\mathcal{M}od.(V,A)$ n'est pas vide.

Soit Σ une composante irréductible de $S(A)$, et soient $(A_i)_{1\leq i\leq q}$ les composantes irréductibles de A qui ne sont pas en position générale le long de Σ . D'après les propriétés des éclatements de Hopf [10] , l'ordre d'intersection de deux composantes irréductibles diminue lorsqu'on fait un éclatement le long de Σ . Il en résulte qu'à l'aide d'un nombre fini d'éclatement de Hopf $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ nous obtenons une variété V' et une application $\imath = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r$ de V' sur V telle que les composantes irréductibles de

$$\imath^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right) \subset V'$$

soient en position générale le long de $\imath^{-1}(\Sigma)$. La proposition 1 résulte immédiatement de ces considérations.

D'une manière plus générale, désignons par Σ un sous ensemble analytique de V , supposons qu'il existe une variété V' et une application analytique $\imath$ de V' sur V telle que $\imath$ soit un isomorphisme analytique de $V'-\imath^{-1}(\Sigma)$ sur $V-\Sigma$ et telle que l'ensemble analytique $\imath^{-1}(A) = A'$ ait toutes ses composantes irréductibles de codimension 1 en tout point, sans singularité et en position générale. Par exemple Σ peut-être l'ensemble analytique des points en lesquels les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale, ou encore Σ peut contenir les points singuliers des composantes irréductibles de A en supposant bien entendu l'existence de tels points singuliers ; dans ces cas l'application $\imath$ pourrait être une composition d'éclatement de Hopf le long des composantes irréductibles de Σ .

Remarquons que $\imath$ définit un isomorphisme analytique de $\mathcal{R}(\hat{V})$ sur $\mathcal{R}(\hat{V'})$ $(\hat{V'} = V' - A')$ grâce auquel nous identifierons ces deux variétés.

<u>Définition 9</u>.

<u>Un élément</u> f <u>appartenant à</u> $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ <u>est dit d'ordre fini au point</u> M <u>de</u> A <u>pour la projection</u> $\imath$ <u>s'il est d'ordre fini en tout point de</u> $\imath^{-1}(M)$.

<u>Définition 10</u>.

<u>Un sous espace vectoriel</u> E <u>de dimension finie</u> p <u>de</u> $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ <u>est dit faiblement singulier sur</u> V <u>pour la projection</u> $\imath$ <u>s'il est faiblement singulier sur</u> V' .

Définition 11.

Un système de Pfaff appartenant à $\mathcal{F}^{p\times p}(V-A)$ est dit du type de Fuchs pour la projection ι si l'espace vectoriel de ses solutions est faiblement singulier sur V' .

Remarque 3.

La notion de faiblement singulier pour un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ dépend à priori de la projection ι , nous verrons dans le paragraphe suivant que dans le cas où ι est une modification de Hopf, cette notion, donc également celle du système de Pfaff du type de Fuchs ne dépend pas de la projection ι .

§ 2. LE THEOREME DE FUCHS SUR UNE VARIETE ANALYTIQUE COMPLEXE.

Théorème 1.

Pour qu'un système de Pfaff $df = \omega f$ appartenant à $\mathcal{F}^{p\times p}(V-A)$ soit de Fuchs, il faut et il suffit que $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$.

Démonstration.

a) Les composantes irréductibles de A sont en position générale.

Soit (s) : $df = \omega f$ un système de Pfaff du type de Fuchs appartenant à $\mathcal{F}^{p\times p}(V-A)$, l'espace vectoriel E de ses solutions est un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ faiblement singulier sur V .

Comme $\omega \in \Omega^{p\times p}(V-A)$, pour montrer que $\omega \in \Omega^{p\times p}(V, A)$, il suffit d'étudier ω au voisinage des points de A.

Soit M un point de A , supposons par exemple que $M \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont les composantes irréductibles de A passant par M. Désignons par $W(M)$ un voisinage de coordonnée de M pour A , nous savons qu'il existe un isomorphisme analytique Φ de D^m sur $W(M)$ tel que :

$$\Phi^{-1}(M) = (0,0,\dots,0) \in D^m$$

et

$$\Phi^{-1}(A_i \cap W(M)) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in D^m \mid x_i = 0\}$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

En utilisant les notations du paragraphe 1 de ce chapitre, nous savons que pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{W}) \in \mathcal{R}(\hat{V})$, l'espace vectoriel $E_c(\mathcal{D})$ est faiblement singulier à l'origine de $\mathcal{D}$. Notons $H_c(\mathcal{D})$ la matrice associée à une base adaptée de $E_c(\mathcal{D})$, nous savons que (théorème 1, § 4, chap. I)

$$d(H_c(\mathcal{D})) \cdot (H_c(\mathcal{D}))^{-1} \in \Omega^{p \times p}(D^m, \Phi^{-1}(A \cap W(M))) \quad .$$

D'autre part il existe une matrice $H_c(\hat{W})$ définie et holomorphe sur c telle que

$$H_c(\mathcal{D}) = H_c(\hat{W}) \circ \Phi_c \ .$$

La forme différentielle

$$\tilde{\omega}_c = d\,H_c(\hat{W}) \circ H_c(\hat{W})^{-1}$$

est invariante par les opérations de $\pi_1(\hat{W})$, car E est invariant par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$, donc en particulier $E_c(\hat{W})$ est invariant par les opérations de $\pi_1(\hat{W})$. Il existe donc une forme différentielle ω_c holomorphe sur $\hat{W}$ et appartenant à $\Omega^{p \times p}(W, W \cap A)$ telle que :

$$\tilde{\omega}_c = \omega_c \circ \psi \quad .$$

Si c' désigne une autre composante connexe de $\psi^{-1}(\hat{W}) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, le fait que E est invariant par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$ entraine que si $H_{c'}(\mathcal{D})$ est une base adaptée à $E_{c'}(\mathcal{D})$ nous avons :

$$H_{c'}(\mathcal{D}) = H_c(\mathcal{D})\,\Delta \quad ,$$

$$\text{ou} \qquad H_{c'}(\hat{W}) = H_c(\hat{W})\,\Delta \quad , \qquad (1)$$

où Δ est une matrice constante carrée d'ordre p inversible. En effet, il existe un élément $\alpha \in \pi_1(\hat{V})$ tel que :

$$\alpha^* : \mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(\hat{V})) \to \mathcal{H}^{p \times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$$

induise un isomorphisme de $\mathcal{H}^{p \times 1}(c)$ sur $\mathcal{H}^{p \times 1}(c')$. Il en résulte que $\alpha^* H_c(\mathcal{D})$ est une matrice dont les colonnes engendrent l'espace vectoriel $E_{c'}(\mathcal{D})$ et nous avons les égalités (1).

Ces considérations entrainent que

$$\omega_c = \omega_{c'} = \omega \mid \hat{W} ,$$

et donc que

$$\omega \mid \hat{W} \in \Omega^{p \times p} (W , W \cap A) .$$

Ce résultat étant vrai pour tout point M de A nous avons :

$$\omega \in \Omega^{p \times p} (V , A) .$$

Réciproque.

Nous nous donnons cette fois un système (s) de la forme $df = \omega f$ où $\omega \in \Omega^{p \times p} (V , A)$ et il s'agit de prouver maintenant que (s) est du type de Fuchs. C'est à dire que l'espace vectoriel de ses solutions est faiblement singulier sur A , car comme nous l'avons déjà fait remarquer (§ 1 remarque 2) E est faiblement singulier sur $V - A$. C'est une propriété locale, plaçons nous donc à nouveau en un point M de A , par exemple $A \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, et soit $W(M)$ un voisinage de coordonnée de M pour A . Nous utilisons ici les notations de la partie directe de la démonstration. Il existe une forme différentielle $\tilde{\omega}$ définie et holomorphe sur $\mathcal{D}$ telle que :

$$\Phi^* \omega \mid \hat{W} = \tilde{\omega} .$$

Comme $\omega \in \Omega^{p \times p} (V , A)$, nous avons $\tilde{\omega} \in \Omega^{p \times p} (\mathcal{D} , \Phi^{-1} (A \cap W))$ et par suite comme D^m est un ouvert de Stein dans $\mathbb{C}^m$,

$$\tilde{\omega} \mid \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dx_i}{x_i} + \tilde{\tilde{\omega}} ,$$

où

$$P_i \in \mathcal{H}^{p \times p} (D^m) \quad \text{pour tout } i = 1,2,\dots,n ,$$

et

$$\tilde{\tilde{\omega}} \in \Omega^{p \times p} (D^m) .$$

Mais alors le théorème 1 § 5 du chapitre I entraine que pour toute composante connexe c de $\psi^{-1} (\hat{W}) \subset \mathcal{R} (\hat{V})$ l'espace vectoriel $E_c(\mathcal{D})$ est faiblement singulier à l'origine de D^m. Ceci étant vrai en tout point M de A, le système de Pfaff considéré est du type de Fuchs.

b) Les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale.

Nous savons qu'il existe une variété V' et une application analytique ι de V' sur V tel que : $\iota \mid V' - \iota^{-1}(A)$ soit un isomorphisme analytique sur $V - A$ et tel que les composantes irréductibles de $A' = \iota^{-1}(A)$ soient en position générale. Soit alors (s) : $df = \omega f$, un système de Pfaff du type de Fuchs appartenant à $\mathcal{J}^{p \times p}(V - A)$. Comme les deux revêtements $\mathcal{R}(\hat{V})$ et $\mathcal{R}(\hat{V}')$ sont analytiquement isomorphes, on peut considérer l'espace vectoriel E des solutions de (s) comme solution du système:

$$(s) \quad df = \iota^{*} \omega f$$

appartenant à $\mathcal{J}^{p \times p}(V' - A')$. L'espace vectoriel E étant faiblement singulier sur V', il en résulte d'après a) que $\iota^{*} \omega \in \Omega^{p \times p}(V', A')$ et d'après le théorème 1 du § 3 du chapitre II, nous avons $\omega \in \Omega^{p \times p}(V, A)$.

Réciproque.

Soit :

$$(s) \quad df = \omega f$$

un système de Pfaff appartenant à $\mathcal{J}^{p \times p}(V - A)$ et tel que $\omega \in \Omega^{p \times p}(V, A)$.
Alors :

$$(s^{*}) \quad df = \iota^{*} \omega f$$

et tel que $\iota^{*} \omega \in \Omega^{p \times p}(V', A')$. Le système (s^{*}) est donc de Fuchs c'est à dire que le système (s) est du type de Fuchs.

Remarque 1.

Le théorème 1 nous montre dans le cas b) que la notion de faiblement singulier pour un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{J}^{p \times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est indépendante du choix de la modification de Hopf ι.

Théorème 2.

Tout sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{M}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ faiblement singulier sur V est l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff du type de Fuchs.

Démonstration.

Le fait que E est faiblement singulier sur $V - A$ entraine l'existence d'une base de E dont la matrice associée H vérifie $\det(H(M)) \neq 0$ pour tout point M de $\hat{V}$.

Il reste donc à vérifier que $dH\,H^{-1} \in \Omega^{p\times p}(V, A)$. Pour cela, il suffit de reprendre ce qui a été fait au cours de la démonstration du théorème 1.

Remarque 2.

Les exemples étudiés dans le paragraphe 2 du chapitre II ainsi que le théorème 1 ,nous donne les systèmes de Pfaff du type de Fuchs dans de nombreux cas utiles.

Remarque 3.

Nos résultats s'appliquent en particulier si V est une surface de Riemann et A un ensemble de points isolés de V. Ils se réduisent alors à la théorie classique de Fuchs telle qu'elle a été rappelée dans [15] compte tenu des résultats (théorème 2.9. et théorème 2.10. de [13]) de Monsieur A.H.M. Levelt, généralisés par le théorème 1 et ses corollaires du §5 du chapitre I.

§ 3. DES EXEMPLES.

A) Un exemple local. Un des buts de cet exemple est, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, de montrer, que dans le cas où les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale, il est possible de définir les notions d'ordre fini et de faiblement singulier indépendemment de toute modification. Par ailleurs, l'étude de cet exemple nous montrera que dans de nombreux autres cas concrets, on peut obtenir un résultat analogue à celui qui sera énoncé dans la proposition 1. Mais c'est surtout le procédé de l'éclatement, qu'il faut retenir pour l'étude de cas particuliers où l'ensemble analytique A a des composantes irréductibles avec singularités.

Pour tout nombre réel strictement positif r , notons :
D_r le disque du plan complexe $\mathbb{C}$ centré à l'origine et de rayon r et $\hat{D}_r = D_r - \{0\}$.

Dans ce paragraphe, nous prenons pour variété V le produit $(D_\rho)^2 (\rho > 0)$ et pour sous ensemble analytique A de V , la réunion des sous ensembles analytiques A_i $(i = 1 , 2 , 3)$ définis respectivement par les équations :
$x_1 = 0 , x_2 = 0 , x_1 = x_2$, où (x_1 , x_2) est un système de coordonnées dans $\mathbb{C}^2$.

Pour tout élément $u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et tout nombre réel positif $r \leq \rho$, nous noterons $\mathcal{C}(u,r)$ (resp. $\hat{\mathcal{C}}(u,r)$) le sous ensemble de V défini par :

1°) si $u \in \mathbb{C}$,

$$0 \leq |x_1| < r$$

(resp. $0 < |x_1| < r$,)

et $0 \leq \left|\frac{x_2}{x_1} - u\right| < r$,

(resp. $0 < \left|\frac{x_2}{x_1} - u\right| < r$) .

2°) si $u = \infty$,

$$0 \leq |x_2| < r$$

(resp. $0 < |x_2| < r$)

et $0 \leq \left|\frac{x_1}{x_2}\right| < r$

(resp. $0 < \left|\frac{x_1}{x_2}\right| < r$) .

Pour tout $u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, notons φ_u l'isomorphisme analytique de $\mathcal{C}(u , r)$ sur $(D_r)^2$ défini par :

$$(x_1,x_2) \longrightarrow \left(x_1,\left(\frac{x_2}{x_1} - u\right)\right) \quad \text{si} \quad u \neq \infty ,$$

et

$$(x_1,x_2) \longrightarrow \left(x_2, \frac{x_1}{x_2}\right) \quad \text{si} \quad u = \infty .$$

Pour tout $u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et toute composante connexe $c(u)$ de $\psi^{-1}(\hat{\mathcal{C}}(u,r)) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$, il existe une application $\Phi_{c(u)}$ de $\mathcal{R}((\hat{D}_r)^2)$ sur $c(u)$ qui réalise $\mathcal{R}((\hat{D}_r)^2)$ comme revêtement de $c(u)$.

Définition 1.

Un élément $f \in \mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est dit d'ordre fini à l'origine de V s'il existe un nombre réel positif $r \leq \rho$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et toute composante connexe $c(u)$ de $\psi^{-1}(\mathcal{E}(u,r))$, la fonction vectorielle $(f \mid c(u)) \circ \Phi_{c(u)}$ soit d'ordre fini à l'origine de $(D_r)^2$.

Remarque 1.

Désignons par V', la variété obtenue à partir de V en faisant un éclatement de Hopf ι à l'origine. Les composantes irréductibles de $A' = \iota^{-1}(A)$ sont en position générale et la définition 1 exprime que l'élément $f \in \mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ est d'ordre fini sur $A_o = \iota^{-1}(0)$ conformément à la définition 9 du § 1 de ce chapitre.

Proposition 1.

Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie m de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ possédant les propriétés suivantes :

A) E est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{V})$.

B) Tous les éléments de E sont d'ordre fini à l'origine.

Alors pour tout $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, il existe un nombre réel positif $r(t)$ tel que la restriction de E à chaque composante connexe $c(t)$ de $\psi^{-1}(\hat{\mathcal{E}}(t,r(t))) \subset \mathcal{R}(\hat{V})$ admette une base dont la matrice associée Y vérifie :

$$(Y \circ \Phi_{c(t)})(Q) = U_t(\psi(Q)) \times Q_1^{A_1^t} \times Q_2^{A_2^t} \times Q_1^{F_1^t} \times Q_2^{F_2^t} ,$$

où

$$Q = (Q_1 , Q_2) \in \mathcal{R}((\hat{D}_r)^2) ,$$

et où les matrices A_i^t et F_i^t sont respectivement diagonale et nilpotente sous forme triangulaire et où U_t est une matrice holomorphe dans $(D_{r(t)})^2$.

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 1 § 3 du chapitre I et des considérations ci-dessus.

Remarque 2.

Pour tout t différent de $0,1$ et ∞ nous avons :

$$A_2^t = F_2^t = 0 .$$

Remarque 3.

En introduisant la variété V' et l'éclatement indiqué dans la remarque 1 , on voit facilement que cette proposition n'est rien d'autre que le théorème 1 § 3 du chapitre I appliqué à chaque point de $A_o = \tau^{-1}(0)$.

Définition 2.

Les valeurs propres de la matrice A_1^t (resp. A_2^t) sont appelées les exposants de E à l'origine sur (resp. relatif à) la sous variété $x_2 = tx_1 (t \neq \infty)$ ou $x_1 = 0$ $(t = \infty)$.

Cette notion d'exposants pour E peut être définie indépendemment de la proposition 1 et uniquement à l'aide des propriétés A et B . En effet, il suffit d'appliquer la théorie développée dans le chapitre I . D'autre part en utilisant à nouveau l'éclatement τ et la variété V' , on voit que les exposants de E à l'origine sur la sous variété $x_2 = tx_1$ $(t \neq \infty)$ ou $x_1=0$ $(t = \infty)$ ne sont rien d'autre que les exposants de E considéré comme sous espace vectoriel de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}'))$ au point de coordonnées homogène $(1,t)$ (si $t \neq \infty$) et $(0,1)$ si $t = \infty$ de la sous variété A_o , qui est une droite projective complexe. Alors vu l'ensemble de ramification des éléments de E , on voit aisément l'explication de $A_2^t = 0$ pour tout t différent de $0,1,\infty$.

Nous supposons dans la suite que la dimension de E est égale à p .

Définition 3.

L'espace vectoriel E est dit faiblement singulier à l'origine si pour tout $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la matrice $U_t(0)$ est inversible.

Cette définition concorde avec la définition donnée dans un chapitre antérieur et exprime que E , considéré comme sous espace vectoriel de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}'))$ est faiblement singulier en tout point de $\tau^{-1}(0) \subset V'$.

Supposons maintenant que E est l'espace vectoriel des solutions d'un sytème de Pfaff du type de Fuchs:

$$df = \omega f$$

appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(V,A)$.

Proposition 2.

Les exposants de E à l'origine relatif à la sous variété A_i sont les valeurs propres de la matrice $(\text{rés}_V\, \omega | A_i)(0)$ tandis que les exposants de E à l'origine sur la sous variété $x_2 = tx_1$ $(t \neq \infty)$ ou $x_1 = 0$ $(t = \infty)$ sont indépendants de t et sont les valeurs propres de la matrice

$$\sum_{i=1}^{3} (\text{rés}_V\, \omega \mid A_i)(0) \quad .$$

Cette proposition s'obtient aisément en écrivant explicitement à l'aide des coordonnées l'éclatement ι .

Cette dernière proposition permet de définir la notion d'exposants dans le cas général. En effet dans le cas où les composantes irréductibles de A sont en position générale, cette notion peut-être définie à l'aide de la théorie développée dans le chapitre I ; dans l'autre cas, il suffit d'introduire cette notion à l'aide des résidus comme le suggère la proposition 3 .

Il est également immédiat que la proposition 2 se généralise à des situations plus complexes que celle qui à été étudiée dans ce paragraphe.

B) Un exemple global sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Désignons : par $x_o, x_1, \ldots, x_n$, un système de coordonnées homogènes de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$; pour tout $i = 0,1,\ldots,n$, par A_i la sous variété hyperplane définie par $x_i = 0$. Soient $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ les ouverts de coordonnées de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ définis respectivement par $x_i \neq 0$. L'ouvert U_i s'identifie à $\mathbb{C}^n(y_o, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ par l'isomorphisme analytique défini par les égalités :

$$y_k = \frac{x_k}{x_i} \qquad k = 0,1,\ldots,n \quad \text{et} \quad k \neq i \ .$$

Nous poserons $\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \{A = \bigcup_{i=o}^{n} A_i\}$.

Nous nous proposons ici, d'étudier les sous espaces vectoriels E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C})))$ possédant les propriétés suivantes :

1°) E est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$.

2°) Tous les éléments de E sont d'ordre fini aux points

$$a_i = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \ldots A_n \quad (i = 0,1,\ldots,n) .$$

3°) E admet une base (e) vérifiant

$$(\text{dét. } T_e)(Q) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad Q \in \mathcal{R}\,(\hat{\mathbb{P}}_n\,(\mathbb{C})) .$$

Désignons, pour tout $i = 0,1,\ldots,n$ et toute composante connexe c_i de $\psi^{-1}(\hat{U}_i) \subset \mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ par $E\,|\,c_i$, l'espace vectoriel, également de dimension p , des restrictions des éléments de E à c_i . Comme $E\,|\,c_i \subset \mathcal{H}_0^{p\times 1}(\mathcal{R}(\hat{U}_i))$, on peut parler des exposants de $E\,|\,c_i$ au point a_i . Mais comme d'autre part $\pi_1\,(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ opère transitivement sur $\mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ et que, à chaque élément de $\pi_1\,(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ est associé un automorphisme de E , les exposants de $E\,|\,c_i$ sont égaux à ceux de $E\,|\,d_i$ pour toute autre composante connexe d_i de $\psi^{-1}(\hat{U}_i)$. Il est donc légitime de parler des exposants de E aux points a_i .

Notons β_i^1 , β_i^2 ,..., β_i^p les exposants de E au point a_i , chacun de ces exposants étant répété autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité. Nous savons que pour tout i et tout j

$$\beta_i^j = (\beta_{i,0}^j\,,\ \beta_{i,1}^j,\ldots,\beta_{i,i-1}^j,\beta_{i,i+1}^j\ ,\ldots,\ \beta_{i,n}^j) .$$

Posons :

$$\beta_{i,l} = \sum_{j=1}^{p} \beta_{i,l}^j \qquad i \neq l \ ,$$

$$\gamma_{k,h} = \sum_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{n} \beta_{k,l} + \beta_{h,k} \ ,$$

$$\Sigma = \sum_{\substack{i,l \\ i\neq l}} \beta_{i,l} .$$

Alors :

<u>Proposition 3</u>.

<u>Pour tout couple</u> (i,l) <u>avec</u> $i \neq l$, <u>les nombres</u> $\beta_{i,l}$ <u>sont entiers et pour tout couple</u> (k,h) <u>avec</u> $k \neq h$ <u>nous avons</u> $\gamma_{k,h} \leq 0$.

Corollaire 1. $\Sigma \leq 0$.

Démonstration.

Soit $T_e \in \mathcal{M}^{p\times p}(\mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C})))$ la matrice associée à une base (e) de E telle que $(\text{dét } T_e)(Q) \neq 0$ pour tout $Q \in \mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$. Pour tout $i = 0,1,\ldots,n$ et toute composante connexe c_i de $\psi^{-1}(\hat{U}_i)$, l'espace vectoriel $E|c_i$ vérifie les conditions d'application du théorème 1 du § 3 chap. I. Cet espace vectoriel est donc engendré par les colonnes d'une matrice T_i vérifiant :

$$T_i(Q) = W_i\left(\frac{x_o}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{A_{i,j}} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{F_{i,j}} ,$$

où $\qquad W_i \in \mathcal{M}^{p\times p}(U_i)$.

Nous avons :

$$\text{dét. } T_i(Q) = \text{dét. } W_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{\beta_{i,j}} .$$

La fonction dét. W_i étant holomorphe sur U_i , elle peut s'écrire

$$\text{dét. } W_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{\lambda_{i,j}} \varphi_i ,$$

où les nombres $\lambda_{i,j}$ sont entiers positifs ou nuls et où φ_i est une fonction holomorphe sur U_i ne s'annulant plus identiquement sur $x_j = 0,(j=0,1,\ldots,n$ et $j \neq i)$.

Comme les colonnes de $T_e|c_i$ constituent également une base de $E|c_i$; nous avons :

$$T_e|c_i = T_i \ K_i ,$$

où K_i est une matrice complexe régulière. Il en résulte que pour tout couple de composantes connexe c_h et c_k $(h \neq k)$ vérifiant $c_h \cap c_k \neq \emptyset$ nous avons :

$$T_h = T_k \ K_{h,k} ,$$

où $K_{h,k}$ est une matrice complexe régulière. C'est à dire que :

$$\text{dét. } T_h(Q) = \text{dét.} T_k(Q) \ \ \text{dét.} K_{h,k} \ .$$

Alors, en posant :

$$A = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq h}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_k}\right)^{\lambda_{k,j}} \varphi_h \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq h}}^{n} Q_j^{\beta_{h,j}} ,$$

$$B = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_k}\right)^{\lambda_{k,j}} \varphi_k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} Q_j^{\beta_{k,j}} \quad \text{dét. } K_{h,k} ,$$

nous avons :

$$(1) \quad A = B \ .$$

Si g_j ($j=0,1,\ldots,n$ et $j \neq i$) désigne les générateurs de $\pi_1(\hat{U}_i)$ choisi comme dans le § 3 du chapitre I page 12, nous avons :

$$g_k^*(B) = B \ ,$$

$$g_k^*(A) = A \ \ \exp.\ 2\pi i \beta_{h,k} \ .$$

Ce qui entraine que pour tout couple (h,k) avec $h \neq k$, les nombres $\beta_{h,k}$ sont entiers. L'égalité (1) donne alors :

$$(2) \quad \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq h}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_h}\right)^{\lambda_{h,j} + \beta_{h,j}} \varphi_h = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{x_j}{x_k}\right)^{\lambda_{k,j} + \beta_{k,j}} \varphi_k \quad \text{dét. } K_{h,k} \ .$$

C'est à dire que :

$$\lambda_{h,j} + \beta_{h,j} = \lambda_{k,j} + \beta_{k,j}$$

pour tout $j = 0,1,\ldots,n$ avec $j \neq h$ et $j \neq k$; car φ_h et φ_k ne s'annullent pas identiquement sur les hyperplans de coordonnées $x_j = 0$ ($j \neq h$ et $j \neq k$).
Posons : $\alpha_j = \lambda_{h,j} + \beta_{h,j}$, l'égalité (2) donne alors :

$$(3)\quad \prod_{\substack{j=0\\ j\neq h}}^{n} y_j^{\alpha_j}\ \varphi_h^* = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k\\ j\neq h}}^{n} \left(\frac{y_j}{y_k}\right)^{\alpha_j} \left(\frac{1}{y_k}\right)^{\alpha_h} \varphi_k^* \quad \text{dét. } K_{h,k} \ ,$$

où :

$$y_j = \frac{x_j}{x_h} \quad j = 0,1 ,\dots, n \ \text{ et } \ j \neq h \ ,$$

$$\varphi_h^* = \varphi_h\,(y_o, y_1, \dots, y_{h-1}\ ,\ y_{h+1}\ ,\dots,\ y_n) \ ,$$

$$\varphi_k^* = \varphi_k\,\left(\frac{y_o}{y_k}\ ;\ \frac{y_1}{y_k}\ ,\dots,\ \frac{y_{h-1}}{y_k},\ \frac{1}{y_k}\ ,\ \frac{y_{h+1}}{y_k},\dots,\frac{y_{k-1}}{y_k},\frac{y_{k+1}}{y_k}\ ,\dots,\frac{y_n}{y_k}\right)$$

(si $h < k$) .

En d'autres termes :

$$(4) \qquad \varphi_h^* = (y_k)^{-\sum_{j=0}^{n} \alpha_j}\ \varphi_k^* \ \text{ dét. } K_{h,k} \ .$$

Comme φ_h^* et φ_k^* sont holomorphes cette égalité entraine que

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \leq 0 \ .$$

Les nombres $\lambda_{h,j}$ étant positifs où nuls, on a :

$$\gamma_{k,h} = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \beta_{k,j} + \beta_{h,k} \leq 0 \ .$$

Alors

$$(n+1) \sum_{\substack{k,h\\ k\neq h}} \beta_{k,h} = \sum_{\substack{h,k\\ h\neq k}} \gamma_{k,h} \leq 0 \ .$$

Ce qui implique que $\Sigma \leq 0$. La proposition et son corollaire sont donc entièrement démontrés.

Théorème 1.

Si $\Sigma = 0$, E est l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff complètement intégrable de Fuchs de la forme :

$$(s)\ df = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \frac{dx_j}{x_j}\right) f \qquad \text{où } \mathcal{A}_j \in \mathcal{M}(p,\mathbb{C}) \text{ pour tout } j.$$

Réciproquement l'espace vectoriel E des solutions d'un système de la forme (s) vérifient les conditions 1°), 2°), 3°) et $\Sigma = 0$.

Corollaire 2.

Si $\Sigma = 0$, les composantes de rang k des exposants de E aux points a_i $(i \neq k)$ sont toutes égales et sont les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}_k$.

Ce corollaire est une conséquence immédiate de la définition des exposants et du corollaire 1 du théorème 1 du §4 du chapitre 1.

Corollaire 3.

Les solutions d'un système (s) s'expriment à l'aide des fonctions élémentaires.

Démonstration du théorème 1.

a) La condition $\Sigma = 0$ entraine

$$\sum_{\substack{k,h \\ k\neq h}}^{n} \beta_{k,h} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{h\neq k} \gamma_{k,h} = 0$$

ou encore

$$\sum_{\substack{h,k \\ h\neq k}} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \beta_{k,j} + \beta_{h,k}\right) = 0 \quad .$$

Un calcul élémentaire nous donne

$$\sum_{\substack{h,k \\ h\neq k}} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \lambda_{k,j} + \lambda_{h,k} = \sum_{\substack{h,k \\ h\neq k}} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\right) ,$$

le second membre de cette égalité étant négatif ou nul et les nombres $\lambda_{i,j}$

positifs ou nuls, nous avons pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$, $\lambda_{i,j} = 0$ ainsi que :

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 0 \ .$$

Il en résulte alors de l'égalité (4) que les fonctions φ_i sont constantes, en d'autres termes, pour tout $i = 0,1,\ldots, n$, la fonction dét. W_i ne s'annule pas sur U_i , c'est à dire que $V \mid c_i$ est faiblement singulier au point a_i. Il est par suite solution d'un système de Pfaff complètement intégrable de la forme $df = \Omega_i f$ où :

$$\Omega_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} P_{i,j} \left(\frac{x_o}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}$$

avec $P_{i,j} \in \mathcal{H}^{p\times p}(U_i)$.

Considérons la forme différentielle $\Omega = d\,T(Q)\,T(Q)^{-1}$, elle est holomorphe sur $\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C})$ et on a pour tout $i = 0,1,\ldots,n$

$$\Omega \mid \hat{U}_i = \Omega_i \in \Omega^{p\times p}(U_i, A \cap U_i) \ .$$

Donc :

$$\Omega \in \Omega^{p\times p}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), A) \ ,$$

c'est à dire

$$\Omega = \sum_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j \frac{dx_j}{x_j} \quad \text{où pour tout } j\ , \quad \mathcal{A}_j \in \mathcal{M}(p,\mathbb{C}) \ .$$

Ce qui prouve la partie directe du théorème 1.

b) La restriction de la forme différentielle Ω à l'ouvert de coordonnée U_i s'écrit :

$$\Omega_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \mathcal{A}_j \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}$$

et le théorème 1 du § 5 du chapitre I entraîne que l'espace vectoriel V des solutions d'un système de la forme (s) est stable par les opérations de $\pi_1(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ et que tous ces éléments sont d'ordre fini aux points a_i . D'autre part, pour tout i et toute composante connexe c_i de $\psi^{-1}(\hat{U}_i) \subset \mathcal{R}(\hat{\mathbb{P}}_n(\mathbb{C}))$ l'espace vectoriel des restrictions de V à c_i est faiblement singulier au point a_i . Il en résulte que $V|c_i$ est engendré par les colonnes d'une matrice $T_i(Q)$ de la forme :

$$W_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{A_{i,j}} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{F_{i,j}}$$

où $W_i = W_i(y_o, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ est une matrice holomorphe sur U_i .
La fonction dét. $T_i(Q)$ est solution du système différentiel

$$dg = (\text{trace } \Omega_i)\, g$$

où

$$\text{trace } \Omega_i = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{\text{trace } \mathcal{A}_j}{y_j}\, dy_j \quad .$$

Or pour tout $i = 0,1,\ldots,n$, $A_{i,j}$ et $\mathcal{A}_j$ ont même valeurs propres donc trace $A_{i,j}$ = trace $\mathcal{A}_j$, ce qui entraine que pour tout i , $dW_i = 0$ donc $W_i = C^{te}$. Il en résulte que pour tout couple (i,j) $(i\neq j)$ $\lambda_{i,j} = 0$ et $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 0$ et par suite $\Sigma = 0$. La réciproque du théorème 1 est donc démontrée.

<u>Démonstration du corollaire 3.</u>

La condition de complète intégrabilité d'un système (s) entraine la permutabilité deux à deux des matrices $\mathcal{A}_j$ $(j = 0,1,\ldots,n)$. Pour étudier l'espace vectoriel des solutions d'un système (s) , considérons le système (s_o) obtenu par restriction à l'ouvert de coordonnée U_o :

$$(s_o) \quad df = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \frac{dy_j}{y_j}\right) f \quad .$$

Le changement de variables défini par

$$y_j = \exp.\, t_j \text{ , } j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n \ ;$$

transforme (s_o) en

$$(s') \quad df = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \, dt_j\right) f \quad ,$$

qui est un système complètement intégrable à coefficients constants dont on connait explicitement les solutions [14] .

Le corollaire 2 est alors une conséquence immédiate de la forme explicite des solutions du système (s') .

C) Système de Pfaff de Fuchs associé à la fonction hypergéométrique F_1.

Nous savons que les fonctions hypergéométriques à deux variables sont définies sur le revêtement universel du plan projectif complexe auquel on a enlevé un certain nombre de sous variétés algébriques. Dans le cas des fonctions hypergéométriques à deux variables générales, la détermination des sous variétés de ramification est compliquée. Nous nous limiterons ici au cas de la fonction hypergéométrique F_1 , ce que nous allons énoncer peut l'être en changeant l'ensemble de ramification pour les fonctions hypergéométriques F_2 et F_3 . Pour la théorie classique des fonctions hypergéométriques nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [1] .

Soient :

$V = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ le plan projectif complexe muni des coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3) .

$A = \bigcup_{i=1}^{6} A_i$ où les A_i sont les sous variétés de V définies respectivement par les équations $x_1 = 0, x_2=0, x_3=0$, $x_2=x_3$, $x_3=x_1$, $x_1=x_2$.

$\hat{V} = \hat{\mathbb{P}}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - A$.

Le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par la fonction F_1 , s'écrit dans $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées x et y sous la forme :

$$
(S_1)\begin{cases}
x(1-x)(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)\,x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)\,xy + \beta' y\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} - \beta\, y\,(1-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \alpha\beta\,(x-y)z = 0 \\[2ex]
y(1-y)(y-x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\gamma(y-x) - (\alpha+\beta'+1)\,y^2 + (\alpha+\beta'-\beta+1)\,xy + \beta\, x\right)\dfrac{\partial z}{\partial y} - x(1-x)\dfrac{\partial z}{\partial x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \alpha\beta\,(y-x)z = 0 \\[2ex]
(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \beta'\dfrac{\partial z}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0
\end{cases}
$$

Proposition 4.

L'application :

$$
\sim \; : \; z \longrightarrow \tilde{z} = \begin{pmatrix} z \\ x\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ y\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}
$$

transforme le système (S_1) en un système de Pfaff du type de Fuchs, prolongeable en un système de même nature appartenant à $\mathcal{J}^{3\times 3}(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - A)$.

Démonstration :

En posant :

$$
p = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\ ,\quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\ ,\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ ;
$$

le système (S_1) nous donne :

$$
\begin{aligned}
r &= a_1\, p + a_2\, q + a_3\, z \\
t &= b_1\, p + b_2\, q + b_3\, z \\
s &= c_1\, p + c_2\, q + c_3\, z
\end{aligned}
$$

où

$$a_1 = \frac{-\gamma}{x\,(1-x)} + \frac{(\alpha+\beta+1)x}{(1-x)(x-y)} - \frac{(\alpha+\beta-\beta'+1)\,y}{(1-x)(x-y)} - \frac{\beta'\,y}{x(1-x)(x-y)} ,$$

$$a_2 = \frac{\beta\,y\,(1-y)}{x(1-x)(x-y)} , \qquad a_3 = \frac{\alpha\,\beta}{x(1-x)} ,$$

$$b_1 = \frac{\beta' x(1-x)}{y(1-y)(y-x)} , \qquad b_3 = \frac{\alpha\,\beta'}{y(1-y)} ,$$

$$b_2 = -\frac{\gamma}{y(1-y)} + \frac{(\alpha+\beta'+1)y}{(1-y)(y-x)} - \frac{(\alpha-\beta+\beta'+1)x}{(1-y)(y-x)} - \frac{\beta\,x}{y(1-y)(y-x)} ,$$

$$c_1 = \frac{\beta'}{x-y} , \qquad c_2 = -\frac{\beta}{x-y} , \qquad c_3 = 0 .$$

En notant $\theta_1 z = x\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\theta_2\, z = y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, nous obtenons :

$$d\tilde{z} = d\begin{pmatrix} z \\ \theta_1 z \\ \theta_2 z \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ x\,a_3 & \frac{1}{x}+a_1 & \frac{a_2\,x}{y} \\ y\,c_3 & \frac{yc_1}{x} & c_2 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y} \\ x\,c_3 & c_1 & c_2\frac{x}{y} \\ b_3 y & \frac{y\,b_1}{x} & \frac{1}{y}+b_2 \end{pmatrix} dy\right] \begin{pmatrix} z \\ \theta_1 z \\ \theta_2 z \end{pmatrix} .$$

En utilisant les égalités suivantes :

$$x\,a_3 = \frac{\alpha\,\beta}{1-x} , \quad \frac{1}{x} + a_1 = \frac{1}{x}\,(1-\gamma+\beta') + \frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{1-x} - \frac{\beta'}{x-y}$$

$$\frac{a_2 x}{y} = \frac{\beta}{1-x} + \frac{\beta}{x-y} , \qquad y\,c_3 = 0 , \qquad \frac{yc_1}{x} = -\frac{\beta'}{x} + \frac{\beta'}{x-y} , \quad c_2 = -\frac{\beta}{x-y} ;$$

et

$$x\, c_3 = 0 \quad , \quad c_1 = \frac{\beta'}{x-y} \quad , \quad c_2 \frac{x}{y} = -\frac{\beta}{y} - \frac{\beta}{x-y} \quad ,$$

$$b_3 y = \frac{\alpha\beta'}{1-y} \quad , \quad \frac{y\, b_1}{x} = \frac{\beta'}{1-y} + \frac{\beta'}{y-x} \quad ,$$

$$\frac{1}{y} + b_2 = \frac{1}{y}(1-\gamma+\beta) + \frac{1}{1-y}(\alpha+\beta'+1-\gamma) - \frac{\beta}{y-x} \quad ;$$

nous obtenons :

$$(\widetilde{S}_1)\quad d\tilde{z} = \left(A_1 \frac{dx}{x} + A_2 \frac{dy}{y} + A_4 \frac{d(x-y)}{x-y} + A_5 \frac{dy}{y-1} + A_6 \frac{dx}{x-1}\right) \tilde{z}$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma+\beta' & 0 \\ 0 & -\beta' & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1-\gamma+\beta \end{pmatrix} \quad ,$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta' & \beta \\ 0 & \beta' & -\beta \end{pmatrix} \quad , \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta' & -\beta' & \gamma-\alpha-\beta'-1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & \gamma-\alpha-\beta-1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Si nous désignons par x_1, x_2, x_3 des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, le système $(\widetilde{S}_1)$ se transforme en posant :

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad , \quad y = \frac{x_1}{x_3}$$

en le système de Pfaff du type de Fuchs sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$:

$$(\widetilde{S}_1) : \quad d\tilde{z} = \left(\sum_{i=1}^{z} A_i \frac{dx_i}{x_i} + A_4 \frac{d(x_1-x_2)}{x_1-x_2} + A_5 \frac{d(x_2-x_3)}{x_2-x_3} + A_6 \frac{d(x_1-x_3)}{x_1-x_3}\right) \tilde{z}$$

où

$$A_3 = - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{6} A_i \quad .$$

Soit $\mathfrak{F}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}^{3\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$ des solutions de (S_1) .

Corollaire 4.

L'application $\sim$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{F}_1$ sur un sous-espace vectoriel $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ de dimension 3 sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{H}^{3\times 1}(\mathcal{R}(\hat{V}))$, faiblement singulier sur V.

L'espace vectoriel $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ sur $\mathbb{C}$ des solutions du système de Pfaff du type de Fuchs $(\tilde{S}_1)$ est de dimension 3 et faiblement singulier sur V (il est solution d'un système de Fuchs). D'autre part l'indépendance linéaire est conservée par l'application $\sim$ ce qui entraine que $\mathfrak{F}_1$ est isomorphe à $\tilde{\mathfrak{F}}_1$.

Remarques.

Il est possible de donner une démonstration directe du corollaire, la proposition 4 devenant alors une conséquence immédiate de celui-ci.

Les résultats du chapitre I ainsi que ceux de A permettent de donner la description des matrices fondamentales de solutions du système de Pfaff $(\tilde{S}_1)$, en particulier, on a explicitement les exposants (ce sont les valeurs propres des matrices $A_i (i = 1,2,\ldots,6)$. Ces résultats améliorent ceux que M. Erdelyi a obtenu dans [3] .

L'étude générale des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}^{3\times 3}(\mathcal{R}(\hat{V}))(\hat{V}=P_2(\mathbb{C})-A)$ faiblement singulier sur V qui utilise également les résultats de ce travail fera l'objet d'une publication ultérieure en commun avec Monsieur A.H.M. Levelt.