R. GÉRARD

Première partie : théorie locale Chapitre I

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 5
« Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe », , exp. n° 2, p. 1-44
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__5__A3_0>

PREMIERE PARTIE : THEORIE LOCALE

CHAPITRE I

§ 0. NOTATIONS

Dans ce chapitre nous utiliserons les notations simplifiées suivantes :

R : le revêtement universel de $\hat{D}$.

R' : le revêtement ramifié minimal prolongeant R au-dessus de l'origine de $\mathbb{C}$.

$\mathcal{R} = R^n \times D^{m-n}$.

$\mathcal{R}' = (R')^n \times D^{m-n}$.

ψ (resp. ψ') : la projection canonique de $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) sur $\mathcal{D} = (\hat{D})^n \times D^{m-n}$ (resp. D^m).

$Q_o = \psi'^{-1}(0)$.

Nous supposerons avoir choisi un point de base x_o dans D, tout point $Q \in R$ est alors la classe d'homotopie d'un lacet $\widetilde{x_o x}$ d'origine x_o et d'extrémité $x = \psi(Q)$. La fonction logarithme est définie par la formule :

$$\log. Q = \int_{\widetilde{x_o x}} \frac{dz}{z}$$

et pour toute matrice complexe A

$$Q^A = \exp. (A \log. Q) .$$

Nous avons :

$$d\, Q^A = \frac{A}{x} Q^{A-I} dx \quad \text{où} \quad x = \psi(Q) .$$

Si A est une matrice triangulaire ayant une seule valeur propre $a \neq 0$, on appelle <u>détermination principale du logarithme de</u> A et on note $\log. A$ la matrice définie par :

$$\log. A = 2\pi i \rho I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left(\frac{A}{a} - I\right)^j ,$$

ρ étant le nombre complexe défini par :

$$\exp. (2\pi i \rho) = a \quad \text{avec} \quad 0 \leq \operatorname{Re}. \rho < 1 \quad , \quad i^2 = -1 .$$

La matrice $\left(\frac{A}{a} - I\right)$ étant nilpotente, log. A est un polynôme en A vérifiant exp. (log. A) = A .

Si A est une matrice complexe régulière, il existe une matrice inversible S telle que

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & A_r \end{pmatrix} S ,$$

les matrices A_i étant triangulaires à valeur propre unique et non nulle. On pose alors :

$$\log.A = S^{-1} \begin{pmatrix} \log.A_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \log.A_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & \log.A_r \end{pmatrix} S ,$$

on vérifie encore que exp. (log. A) = A et que cette définition est indépendante de la représentation de A sous la forme $S^{-1} A' S$.

§ 1 . PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES .

A - Soit E un espace vectoriel de dimension finie q sur $\mathbb{C}$.

1 . a) Soit $G = (g_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille d'endomorphismes de E .

Définition 1.

Un sous espace vectoriel F de E est dit stable par la famille G si F est stable par g_j pour tout $j = 1,2,\ldots,n$.

Notons :

$$P_j(X) = (X - a_j^1)^{\alpha_{j,1}} (X - a_j^2)^{\alpha_{j,2}} \ldots (X - a_j^{r_j})^{\alpha_{j,r_j}}$$

le polynôme minimal de l'endomorphisme g_j .

Soient :

- $E_j^k = \mathrm{Ker}\,(g_j - a_j^k I)^{\alpha_{j,k}}$ I : identité ,

- $\mathfrak{S}_n$: l'ensemble des applications s de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

  a) $1 \leq s(j) \leq r_j \quad j = 1,2,\dots,n$

  b) $E_s = E_1^{s(1)} \cap E_2^{s(2)} \dots \cap E_n^{s(n)} \neq \{0\}$.

Définition 2.

La famille $(E_s)_{s \in \mathfrak{S}_n}$ sera appelée famille de sous espaces vectoriels adaptée à G et chaque E_s sera appelé sous espace vectoriel adapté à G .

b) Supposons les endomorphismes de la famille G deux à deux permutables.

Proposition 1.

L'espace vectoriel E est somme directe de la famille de sous espaces vectoriels $(E_s)_{s \in \mathfrak{S}_n}$. Chaque sous espace vectoriel E_s est stable par G et pour tout $j = 1,2,\dots,n$, la restriction de g_j à E_s admet $a_j^{s(j)}$ pour seule valeur propre.

Pour la démonstration voir par exemple [12] chap. IV .

Proposition 2.

Il existe une suite strictement croissante

$$E_o \subset E_1 \subset E_2 \dots \subset E_q = E$$

de sous espaces vectoriels de E stables par G .

Démonstration.

Elle se fait par récurrence sur la dimension q de E . Pour $q = 0$, la proposition est évidente ; supposons la vraie pour tout espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $q - 1$. Soient $(g_j^*)_{1 \leq j \leq n}$, les endomorphismes transposés des g_j

$$g_j^*(x^*)(x) = x^*(g_j(x))$$

pour tout $x \in E$ et tout $x^* \in E^*$ (dual de E).

Les endomorphismes g_j^* sont deux à deux permutables, ils ont donc un vecteur propre commun e^*. Désignons par N le noyau de e^*. Le sous espace vectoriel N est de dimension $q - 1$ et de plus stable par G ; il existe donc une suite strictement croissante

$$E_o \subset E_1 \subset E_2 \ldots \subset E_{q-1} = N$$

de sous espaces vectoriels de N qui satisfait aux conditions de l'énoncé pour N. Si l'on pose $E_q = E$ la nouvelle famille ainsi obtenue répond à la question pour E.

2. Définition 3.

On appelle valuation sur E, toute application φ de E dans un ensemble totalement ordonné I possédant les propriétés suivantes :

a) $\varphi(x + y) \geq \min.(\varphi(x), \varphi(y))$ pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$.

b) $\varphi(\lambda x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Remarque 1.

Les propriétés a) et b) entrainent

$$\varphi(x) \leq \varphi(0) \quad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Proposition 3.

Toute valuation φ sur E ne prend qu'un nombre fini de valeurs

$$\varphi(0) = \varphi^1 > \varphi^2 > \ldots > \varphi^s ,$$

et les sous espaces vectoriels

$$E^k = \{ x \in E \mid \varphi(x) \geq \varphi^k \}$$

forment une filtration strictement croissante de E.

Démonstration.

Pour tout $x \in E$ posons

$$E(x) = \{ y \in E \mid \varphi(y) \geq \varphi(x) \} ;$$

$E(x)$ est un sous espace vectoriel de E et $E(x) \subset E(y)$ équivaut à $\varphi(x) \geq \varphi(y)$. Par suite $E(x) = E(y)$ équivaut à $\varphi(x) = \varphi(y)$ et comme il y a au plus $q + 1$ sous espaces vectoriels $E(x)$ distincts, la valuation φ

prend un nombre fini de valeurs :

$$\varphi\ (x_1) > \varphi\ (x_2) > \ldots > \varphi\ (x_s)\ .$$

Pour tout $x \in E$ nous avons :

$$\varphi\ (x_1) \geq \varphi\ (x) \geq \varphi\ (x_s)\ .$$

Donc

$$E\ (x_s) = E \quad \text{et} \quad E\ (x_1) = E\ (0)\ .$$

En résumé la valuation φ prend un nombre fini de valeurs

$$\varphi\ (0) = \varphi^1 > \varphi^2 \quad \ldots \quad \varphi^s$$

et les sous espaces vectoriels de E définis par

$$E^k = \{\ x \in E \mid \varphi\ (x) \geq \varphi^k\ \}$$

forment une filtration strictement croissante de E .

Définition 4.

La valuation φ est dite invariante par une famille $G = (g_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'endomorphismes de E si :

$$\varphi\ (g_j\ (x)\ ) = \varphi\ (x)\ .$$

pour tout $x \in E$ et $j = 1,2,\ldots,n$.

Proposition 4.

La filtration strictement croissante de E associée à la valuation φ est alors invariante par la famille G .

3. Soit $E^1 \subset E^2 \subset \ldots \subset E^t$ une filtration strictement croissante de E .

Définition 5.

Une base $(e_j)_{1 \leq j \leq q}$ de E est dite adaptée à cette filtration si on a $e_j \in E^i$ pour tout $j \leq \dim.\ E^i$ et $1 \leq i \leq t$.

Lemme 1.

Si cette filtration est invariante par une famille $G = (g_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'endomorphismes deux à deux permutables, il existe une base de E adaptée à cette filtration et triangulant simultanément les matrices des endomorphismes g_j .

Démonstration.

Elle se fait par récurrence sur le nombre de sous espaces vectoriels de la filtration. Lorsque la filtration se réduit à un seul sous espace vectoriel $E^1 = E$, c'est la proposition 2. Supposons donc qu'il existe une base e_r adaptée à la filtration $E^1 \subset E^2 \ldots \subset E^r$ de E^r triangulant simultanément les matrices des restrictions des éléments de G à E^r et montrons qu'il existe une base de E^{r+1} ayant les mêmes propriétés. Pour cela considérons E^{r+1}/E^r et désignons par $\widetilde{G} = (\widetilde{g}_j)_{1 \leq j \leq n}$ la famille d'endomorphismes deux à deux permutables induite par G sur E^{r+1}/E^r. Il existe une base e'_{r+1} de E^{r+1}/E^r triangulant simultanément les matrices des endomorphismes de la famille $\widetilde{G}$. Soit e''_{r+1} un relèvement dans E^{r+1} de la base e'_{r+1}. De la stabilité de E^{r+1} par la famille G , résulte que $e_{r+1} = e_r \cup e''_{r+1}$ est une base de E^{r+1} répondant à la question .

4. Soit φ une valuation sur E invariante par une famille $G = (g_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'endomorphismes deux à deux permutables de E .

Définition 6.

On appelle base adaptée de E (à la famille G et à la valuation φ) tout ensemble ordonné (e) de vecteurs de E tel que :

a) (e) est une base de E .

b) Tout vecteur de (e) appartient à un sous espace vectoriel adapté à la famille G .

c) Tous les vecteurs de (e) appartenant à un même sous espace vectoriel adapté à G sont consécutifs et la suite de leurs valuations est décroissante.

d) Les matrices des endomorphismes g_j sont triangulaires dans la base (e) .

Lemme fondamental.

L'espace vectoriel E admet une base adaptée.

Démonstration.

Dans chaque sous espace vectoriel adapté à G , prenons une base adaptée à la filtration associée à la valuation induite par φ sur ce sous espace

vectoriel (lemme 1). La réunion de ces bases convenablement ordonnée satisfait au lemme fondamental.

Corollaire 1.

On peut écrire $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E^k$ où la famille $(E^k)_{1 \leq k \leq r}$ de sous espaces vectoriels de E est adaptée à la famille G. Alors si $(e) = (e^{k,1})_{1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq d^k}$ $(d^k = \dim. E^k)$ est une base adaptée, et si l'ordre des E^k est choisi, l'ensemble $\{\varphi(e^{1,1}), \varphi(e^{1,2}), \ldots, \varphi(e^{r,d^r})\}$ ne dépend pas du choix de cette base.

Corollaire 2.

Soient $(D_j)_{1 \leq j \leq n}$ des matrices carrées deux à deux permutables, il existe une matrice inversible S telle que, pour tout $j = 1,2, \ldots, n$

$$S D_j S^{-1} = \begin{pmatrix} D_j^1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & D_j^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & D_j^r \end{pmatrix}$$

où pour tout $k = 1,2, \ldots, r$ et tout $j = 1,2, \ldots, n$, D_j^k est une matrice triangulaire à valeur propre unique.

Corollaire 3.

Si $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une famille de matrices carrées complexes régulières et deux à deux permutables, la famille de matrices $(\log. A_j)_{1 \leq j \leq n}$ est également permutable.

5. Soient :

a)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_r \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale possédant les propriétés suivantes :

1°) Les nombres a_j sont entiers positifs,

2°) $a_i \geq a_{i+1}$ pour tout $i = 1,2, \dots ,r-1$,

b) $F = (f_{i,j})$ une matrice nilpotente triangulaire c'est à dire que

$$f_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad i \geq j$$

<u>Proposition 5</u>.

$$\begin{cases} A\,F\,A^{-1} = (c_{i,j}) \ \underline{\text{avec}} \ c_{i,j} = 0 \ \underline{\text{si}} \ i \geq j \\ \underline{\text{et}} \\ c_{i,j} = \dfrac{a_i}{a_j} f_{i,j} \ \underline{\text{si}} \ i < j \ . \end{cases}$$

La démonstration de cette proposition est immédiate. On en déduit que la fonction $x^A F x^{-A}$ est un polynôme de degré positif ou nul à coefficients matriciels constants.

B - Désignons par $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_n]$, l'algèbre des polynômes à n indéterminées et à coefficients complexes.

Soit $\mathbb{C}_r[X]$, le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes homogènes de degré r. Notons :

- d_r sa dimension.
- $(e_k^r(X))_{(k=1,2,\dots,d_r)}$ sa base canonique
- $e^r(X) = (e_1^r(X), e_2^r(X), \dots, e_{d_r}^r(X))$.

Pour tout $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$, nous noterons $e^r(t)$ la valeur de $e^r(X)$ au point t .

<u>Proposition 6</u>.

<u>Il existe</u> d_r <u>points</u> $t_1, t_2, \dots, t_{d_r}$ <u>de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>tels que</u> :

$$\text{dét.} \begin{pmatrix} e^r(t_1) \\ e^r(t_2) \\ \vdots \\ e^r(t_{d_r}) \end{pmatrix} \neq 0 \ .$$

2. LA NOTION D'ORDRE FINI A L'ORIGINE. L'ESPACE VECTORIEL $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$.

Définition 1.

Un ouvert U de $\mathcal{D}$ est dit distingué s'il possède les deux propriétés suivantes :

a) La projection de U sur le plan de coordonnée de rang j est :

1°) Pour tout $j = 1,2,\dots,n$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenu dans un secteur angulaire différent du plan tout entier et contenant 0 dans son adhérence.

2°) Pour tout $j = n+1, n+2,\dots, m$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 dans son adhérence.

b) Il existe deux constantes strictement positives H et K telles que pour tout point $(x_1, x_2 \dots x_m) \in U$ l'on ait,

$$H \leq \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq K \quad ,$$

pour tout couple (j,k) avec $j<k$.

Définition 2.

Un ouvert U de $\mathcal{R}$ est dit distingué, si la restriction de ψ à U est un homéomorphisme sur un ouvert distingué de $\mathcal{D}$.

Définition 3.

Un élément $f \in \mathcal{H}^{p\times q}(\mathcal{R})$ est dit d'ordre fini à l'origine, s'il existe un élément $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{\substack{Q \to Q_o \\ Q \in U}} \frac{f(Q)}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\lambda_j}} = 0 \;, \qquad Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m) \in \mathcal{R} \;,$$

pour tout ouvert distingué U de $\mathcal{R}$.

Désignons par $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$ le sous ensemble de $\mathcal{H}^{p\times q}(\mathcal{R})$ des éléments qui sont d'ordre fini à l'origine. Il est évident que $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}^{p\times q}(\mathcal{R})$.

Proposition 1.

Le seul élément de $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$ vérifiant (1) pour tout n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est l'élément zéro.

Démonstration.

Soit f un élément $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$ vérifiant (1) pour tout n-uple de $\mathbb{R}^n$ et soit Δ la droite complexe issue de l'origine de $\mathbb{C}^m$ définie par les équations $x_j = t\,x_j^o$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ avec $x_j^o \neq 0$. La trace de Δ sur $\mathcal{D}$ est un disque $\hat{\Delta}$ centré à l'origine auquel on a enlevé le centre. Désignons par $\mathcal{R}(\hat{\Delta})$ le revêtement universel de $\hat{\Delta}$. Pour toute composante connexe $c \subset \psi^{-1}(\hat{\Delta}) \subset \mathcal{R}$, il existe une application surjective p_c de $\mathcal{R}(\hat{\Delta})$ sur c qui réalise $\mathcal{R}(\hat{\Delta})$ comme revêtement de c. Considérons l'application $\tilde{f}_c = f_c \circ p_c$ où f_c désigne la restriction de f à c. La fonction $\tilde{f}_c$ est d'ordre fini à l'origine $o \in \Delta$ et vérifie

$$\lim_{\substack{Q \to Q_o \\ Q \in U}} \frac{\tilde{f}_c(Q)}{Q^\lambda} = 0 \qquad Q \in \mathcal{R}(\hat{\Delta})$$

pour tout λ réel et tout ouvert distingué U de $\mathcal{R}(\hat{\Delta})$.

Il en résulte que $\tilde{f}_c = 0$ et par suite $f_c = 0$ pour toute composante connexe c de $\psi^{-1}(\hat{\Delta})$. Comme le raisonnement que nous venons de faire est valable pour toute droite Δ issue de 0 dans $\mathbb{C}^m$; la fonction f est nulle.

- Considérons le sous ensemble J de $\mathbb{Z}^n$ défini par :

$$J = \Big\{ (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ tel que } 0 \le i_k - i_r \le 1 \text{ pour tout couple } (k,r) \text{ vérifiant } k \ge r \Big\}$$

Sur l'ensemble $I = J \cup \{\infty\}$ nous mettons la relation d'ordre totale définie par :

1°) dans J, $(i_1, i_2, \dots, i_n) \le (k_1, k_2, \dots, k_n)$ si $i_r \le i_k$ pour $r = 1, 2, \dots, n$.

2°) l'élément ∞ est plus grand que tout élément de J.

Pour tout $f \in \mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R}) - \{0\}$ désignons par $I(f)$ l'ensemble des éléments

$(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ de J tel que (1) soit vérifié pour tout n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\lambda_i < N_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

Proposition 2.

Pour tout $f \in \mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R}) - \{0\}$, $I(f)$ admet un élément maximal.

Soit f un élément non nul de $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$. Il existe un n-uple $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que (1) soit réalisé pour cet n-uple. Mais pour tout n-uple $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ vérifiant $\mu_i \leq \lambda_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ on a également (1). En particulier nous avons (1) pour le n-uple $(E(\lambda_1), E(\lambda_2), \ldots, E(\lambda_n))$ où $E(\lambda_i)$ désigne la partie entière de λ_i, donc également pour l'élément de I, $p = (p, p, \ldots, p)$ avec $p = \inf\limits_{1\leq i\leq n} (E(\lambda_i))$.

Ce qui précède entraine que $I(f)$ n'est pas vide et que ce n'est pas I tout entier. Alors si $I(f)$ n'avait pas d'élément plus grand que tous les autres, on pourrait construire une suite strictement croissante non majorée d'éléments de $I(f)$ et la relation (1) serait vérifiée pour tout n-uple de $\mathbb{R}^n$ ce qui contredit l'hypothèse f non nul.

Proposition 3.

L'application φ définie par

$$\varphi(f) = \text{Sup. } I(f) \quad \text{si} \quad f \neq 0$$

$$\varphi(0) = \infty$$

est une valuation sur $\mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$.

D'autre part il est facile de vérifier la :

Proposition 4.

Pour tout $\alpha \in \pi_1(\mathcal{D})$ et tout $f \in \mathcal{H}_o^{p\times q}(\mathcal{R})$

$$\varphi(\alpha^* f) = \varphi(f)$$

§ 3. ETUDE DES SOUS ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE DE $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathcal{R})$ STABLE PAR LES OPERATIONS DE $\pi_1(\mathcal{D})$. SOUS ESPACES VECTORIELS FAIBLEMENT SINGULIERS A L'ORIGINE.

1. Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie q de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathcal{R})$

stable par les opérations de $\pi_1 \ (\mathcal{D})$. Désignons par $g_1, g_2, \ldots, g_n$ les générateurs de $\pi_1 \ (\mathcal{D})$ vérifiant

$$(g_k^* \log)(Q) = \log. Q + 2\pi i \qquad \text{pour tout } Q \in R$$

Ces générateurs sont <u>deux à deux permutables</u>.

Soit $(e) = (e^{k,l})_{1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq d^k}$ une base adaptée de E.
Désignons par a_j^k la valeur propre de la restriction de l'automorphisme g_j^* à E^k (c.f. corollaire 1, page I.1 7).

<u>Définition 1.</u>

<u>Les n-uples</u> :

$$\beta^{k,l} = (\rho_1^k + \varphi_1^{k,l}, \rho_2^k + \varphi_2^{k,l}, \ldots, \rho_n^k + \varphi_n^{k,l})$$

$$1 \leq k \leq r \quad , \quad 1 \leq l \leq d^k$$

où $\qquad \exp. 2\pi i \rho_j^k = a_j^k \qquad 0 \leq \mathrm{Re}\, \rho_j^k < 1$

et $\qquad \varphi^{k,l} = \varphi(e^{k,l}) = (\varphi_1^{k,l}, \varphi_2^{k,l}, \ldots, \varphi_n^{k,l}) \in \mathbb{Z}^n$

<u>sont appelés exposants de</u> E <u>à l'origine de</u> $\mathbb{C}$.

<u>Remarque 1.</u>

Les exposants de E à l'origine sont à l'ordre près indépendants du choix de la base adaptée.

Nous allons définir maintenant un certain nombre de matrices liées au choix de la base adaptée (e) , ces matrices jouerons un rôle important dans tout le chapitre I .

a)

$$A_j^k = \begin{pmatrix} \beta_j^{k,1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_j^{k,2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \beta_j^{k,d^k} \end{pmatrix}$$

avec $\beta_j^{k,l} = \rho_j^k + \varphi_j^{k,l}$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq r$.

$$A_j = \begin{pmatrix} A_j^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_j^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_j^r \end{pmatrix}$$

b) Soient : D_j^k , la matrice de la restriction de g_j^* à E^k dans la base $(e^{k,l})_{1 \leq l \leq d^k}$ (cette matrice est triangulaire et à valeur propre unique) et D_j la matrice

$$\begin{pmatrix} D_j^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & D_j^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & D_j^r \end{pmatrix}$$

(c'est la matrice de g_j^* dans la base adaptée (e)).

c) $F_j^k = -\rho_j^k I^k + \frac{1}{2\pi i} \log. D_j^k$ où I^k est la matrice unité d'ordre d^k

$$F_j = \begin{pmatrix} F_j^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & F_j^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & F_j^r \end{pmatrix}$$

Soit $T_e = (T_e^1, T_e^2, \ldots, T_e^r)$ la matrice associée à la base adpatée (e) de F où T_e^k est pour tout $k = 1,2,\ldots, r$ la matrice associée à la base $(e^{k,l})_{1 \leq l \leq d^k}$ de E^k .

Théorème 1.

La matrice $T_e(Q)$ est de la forme :

$$T_e(Q) = U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j}$$

où U est une (p,q) - matrice holomorphe dans tout D^m.

Remarque 2.

Pour toute base (e') de E, nous avons :

$$T_{e'}(Q) = T_e(Q)\, K_{e'e}$$

où $\qquad K_{e'e} \in Gl(q,\mathbb{C})$.

Le théorème 1 résulte de la proposition que nous allons démontrer maintenant et de la règle de multiplication des matrices par blocs.

Proposition 1.

Nous avons, pour tout $k = 1, 2, \ldots, r$

$$T_e^k(Q) = U^k(M) \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j^k} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j^k}$$

où $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$, $M = \psi(Q)$ et où $U^k \in \mathcal{H}^{p\times d^k}(D^m)$.

Démonstration.

Pour simplifier l'écriture, nous supprimerons dans cette démonstration l'indice k et l'indice e.

Considérons la matrice :

$$W(Q) = T(Q) \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j}$$

et posons $\qquad E_j = \frac{1}{2\pi i} \log. D_j$ et $\tilde{A}_j = A_j - \rho_j I$

comme $\qquad F_j = -\rho_j I + E_j$, il vient :

$$W(Q) = T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-E_j} \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\tilde{A}_j}.$$

La démonstration se fait en deux étapes :

1°) Il existe une matrice U holomorphe sur $\mathcal{D}$ telle que

$$W = U \circ \psi.$$

Comme $\tilde{A}_j$ est une matrice diagonale à coefficients entiers, il suffit de montrer que la matrice H holomorphe sur $\mathfrak{R}$ définie par :

$$H(Q) = T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-E_j}$$

se factorise par ψ , c'est à dire est invariante par g_h^* pour tout $h = 1, 2, \ldots, n$. Mais pour tout h nous avons :

$$(g_h^* H)(Q) = T(Q) D_h \times \prod_{j=1}^{h} Q_j^{-E_j} \times \exp.(-2\pi i E_h) \times \prod_{j=h+1}^{n} Q_j^{-E_j} \quad ;$$

car, pour tout couple (h,j) , D_h et D_j permutent, E_j est un polynôme en D_j , et $\exp.(-2\pi i E_j) = D_j^{-1}$.

2°) <u>La matrice</u> U <u>se prolonge holomorphiquement à l'origine</u>.

Dans $\mathcal{D}$, U est développable en série de Laurent matricielle en les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dans ce développement, il n'y a aucune puissance négative des variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m$. Il en résulte que, pour prouver que U est holomorphe dans D^m , il suffit de montrer que pour une suite de nombres réels positifs $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ vérifiant :

$$0 \leq \operatorname{Re} \rho_j + 2\epsilon_j < 1 \quad ,$$

$$\lim_{Q \to Q_0} U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\rho_j + 2\epsilon_j} = 0 \quad .$$

Cette limite étant à prendre au sens de la définition 3 du § 2. Or :

$$U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\rho_j + 2\epsilon_j}$$

$$= T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-E_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\rho_j + 2\epsilon_j}$$

$$= T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{2\epsilon_j}$$

$$= \left(T(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\epsilon_j}\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\epsilon_j}\right),$$

Mais :

a) $T(Q)\times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\epsilon_j}$

$$= \left(\frac{e^1}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^1}}, \frac{e^2}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^2}}, \ldots, \frac{e^d}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^d}}\right) \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\epsilon_j}$$

$$= \left(\frac{e^1}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^1 - \epsilon_j}}, \frac{e^2}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^2 - \epsilon_j}}, \ldots, \frac{e^d}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\varphi_j^d - \epsilon_j}}\right)$$

qui tend vers zéro car

$$\varphi\,(e^h) = (\varphi_1^h\,,\, \varphi_2^h\,, \ldots,\, \varphi_n^h) = \varphi^h\;.$$

b) La fonction

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j}$$

est un polynôme de degré positif ou nul en les variables Q_j et $\log. Q_j$ $(j=1,2,\ldots n)$, en effet :

1°) La matrice F_j étant nilpotente,

$$Q_j^{-F_j} = \exp.\ (-F_j \log.\ Q_j)$$

est un polynôme de degré positif ou nul en F_j à coefficients polynômes de degré positif ou nul en les variables $\log.\ Q_j$ $(j=1,2\,,\ldots,\, n)$. Donc $\prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j}$ est un polynôme de degré positif ou nul en les variables $F_1\,, F_2\,, \ldots, F_n$, dont les coefficients sont des polynômes de degré positif ou nul en les variables $\log.\ Q_1\,,\ \log.\ Q_2\,, \ldots,\ \log.\ Q_n$.

2°) La fonction

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{n} F_j^{p_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j} \qquad (p_j \text{ entier pour tout } j)$$

est un polynôme de degré positif ou nul en les variables $Q_1\,, Q_2\,, \ldots, Q_n$ à coefficients matriciels constants. (Application répétée de la proposition 5,§1, pag 8).

Donc après multiplication par $\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\epsilon_j}$, la fonction

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\widetilde{A}_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-F_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\widetilde{A}_j}$$

tend vers zéro au sens de la définition 3 du § 2 . Les résultats de a) et b) entrainent que

$$\lim.\ U\ (M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\rho_j + 2\epsilon_j} = 0$$

Et par suite U est holomorphe dans D^m .

2. Si (e) et (e') sont deux bases adaptées de E , nous avons :

$$T_e\ (Q) = U\ (M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j} \quad \text{où} \quad U \in \mathcal{H}^{p \times q}\ (D^m)$$

$$T_{e'}\ (Q) = U'\ (M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A'_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F'_j} \quad \text{où} \quad U' \in \mathcal{H}^{p \times q}\ (D^m)$$

Mais : $(e') = (e) S$ où $S \in Gl\ (q, \mathbb{C})$;

donc,

$$T_{e'}\ (Q) = T_e\ (Q) S$$

et pour tout $j = 1,2, \ldots, n$

$$D'_j = S^{-1} D_j S \qquad\qquad A'_j = S^{-1} A_j S\ .$$

Ce qui entraine après un calcul immédiat que

$$U'(M) = U\ (M) S$$, donc :

<u>Proposition 2.</u>

<u>Les deux matrices</u> $U(M)$ <u>et</u> $U'(M)$ <u>ont même rang</u>.

<u>Définition 2.</u>

<u>Un sous espace vectoriel de dimension finie</u> q <u>de</u> $\mathcal{H}_0^{p \times 1}(\mathbb{R})$ <u>est dit faiblement singulier à l'origine si</u> :

1°) E <u>est stable par les opérations de</u> $\Pi_1(\Theta)$

2°) <u>Pour une base adaptée de</u> E , <u>la matrice</u> $U(0)$ <u>est de rang maximum</u>.

Pour tout $k = 1, 2, \ldots, r$, désignons par $(E_u^k)_{1 \leq u \leq u_k}$ la filtration strictement croissante du sous espace vectoriel adapté E^k associée à la restriction φ^k à E^k de la valuation φ . Posons :

- d_u^k = dimension de E_u^k $\quad 1 \leq u \leq u_k$,
- m_u^k = dimension E_u^k / E_u^{k-1} $\quad 1 \leq u \leq u_k$,
- E_o^k = $\{0\}$ et $m_o^k = 0$.

Nous avons

$$d_{u_k}^k = d^k = \dim. E^k \quad \text{et} \quad \sum_{s=1}^{u} m_s^k = d_u^k \ .$$

Si $(e^{k,l})_{1 \leq l \leq d^k \ ; \ 1 \leq k \leq r}$ est la base adaptée choisie,

$$\varphi(e^{k,l}) = \varphi(e^{k,d_u^k})$$

pour tout l vérifiant $d_{u-1}^k + 1 \leq l \leq d_u^k$ et tout $k = 1,2, \ldots, r$.

Nous allons introduire une notation qui nous sera utile dans la suite. Si B est la matrice d'un endomorphisme de E dans la base adaptée (e) , celle ci se présente sous la forme de blocs $(B_{k,t})_{1 \leq k \leq r \ , \ 1 \leq t \leq r}$ à d^k lignes et à d^t colonnes. Chacun de ces blocs étant lui-même à nouveau sous forme de blocs $(B_{k,t})_{m_u^k, m_v^k}$ à m_u^k lignes et m_v^k colonnes, où $1 \leq u \leq u_k$ et $1 \leq v \leq u_k$.
Nous noterons alors B^o la matrice

$$\begin{pmatrix} B^o_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B^o_{2,2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & B^o_{r,r} \end{pmatrix}$$

avec

$$B^{o}_{k,k} = \begin{pmatrix} (B_{k,k})_{m_1^k,\, m_1^k} & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & (B_{k,k})_{m_2^k,\, m_2^k} & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & (B_{k,k})_{m_{u_k}^k,\, m_{u_k}^k} \end{pmatrix}$$

Nous avons évidemment

$$A^{o} + B^{o} = (A + B)^{o}$$

$$A^{o}\, B^{o} = (AB)^{o} \quad \text{et} \quad I^{o} = I$$

Posons pour tout $j = 1,2 ,\ldots, n$

$$\tilde{L}_j = \tilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i} \log.\, D_j^{o} \quad .$$

<u>Lemme 1</u>.

<u>Les matrices</u> L_j $(j = 1,2 ,\ldots, n)$ <u>sont deux à deux permutables</u>.

Pour démontrer ce lemme il suffit de regarder la décomposition en blocs de ces matrices, donc de vérifier que les matrices

$$\tilde{L}_j^k = \tilde{A}_j^k + \frac{1}{2\pi i} \log.\, (D_j^k)^{o}$$

où $j = 1,2 ,\ldots, n$ et où k est fixé, sont deux à deux permutables. Or dans le sous espace vectoriel $\mathbf{E}^k$, nous avons la nouvelle décomposition en blocs

$$\tilde{A}_j^k = \begin{pmatrix} \tilde{A}_j^{k,1} & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_j^{k,2} & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & \tilde{A}_j^{k,u_k} \end{pmatrix}$$

avec $\quad \tilde{A}_j^{k,u} = \varphi_j^{k,d_u^k}\; I_u^k \qquad 1 \le u \le u_k \quad ,$

où I_u^k est la matrice unité d'ordre m_u^k .

D'autre part :

$$\log.(D_j^k)^o = \begin{pmatrix} \log.(D_j^k)_{m_1^k,\, m_1^k} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \log.(D_j^k)_{m_2^k,\, m_2^k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \log.(D_j^k)_{m_{u_k}^k,\, m_{u_k}^k} \end{pmatrix}.$$

Ces décompositions entrainent que pour tout k fixé et tout couple (j,l) $(1 \leq j \leq n\ ,\ 1 \leq l \leq n)$, les matrices $\tilde{A}_j^k$ et $\log.\,(D_l^k)$ sont permutables. Il en résulte que pour tout k , la famille de matrices $(\tilde{L}_j^k)$ est permutable et donc également la famille de matrices $(\tilde{L}_j)_{1 \leq j \leq n}$. Désignons par $\tilde{l}_j$ $(j=1,2 ,\dots, n)$ les endomorphismes de E (rapporté à la base adaptée (e)) définis par les matrices deux à deux permutables $\tilde{L}_j$ $(j = 1,2 ,\dots, n)$. Soit N le noyau de l'application linéaire u de E dans $\mathbb{C}^p$ défini par la matrice $U(0)$.

<u>Théorème 2</u>.

<u>Si</u> $q \leq p$ <u>et si</u> N <u>est invariant par les endomorphismes</u> $\tilde{l}_j$ $(j=1,2,\dots,n)$ <u>l'espace vectoriel</u> E <u>est faiblement singulier à l'origine</u>.

Comme $q \leq p$, il suffit de montrer que $N = \{0\}$. Supposons le contraire, N étant invariant par les endomorphismes $\tilde{l}_j$ $(j = 1,2 ,\dots, n)$, ceux-ci ont un vecteur propre commun w appartenant à N .

Si on désigne, pour tout k $(k = 1,2 ,\dots, r)$ et tout u $(u =1,\dots,u_k)$ par $\tilde{E}_u^k$ le sous espace vectoriel de E^k engendré par les vecteurs

$$(e^{k,d_{u-1}^k},\ e^{k,d_{u-1}^k+2} ,\dots,\ e^{k,d_u^k}) .$$

Nous avons :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \left(\bigoplus_{u=1}^{u_k} \tilde{E}_u^k \right) .$$

Et la famille de sous espaces vectoriels $(\widetilde{E}^k_u)_{1\leq k\leq r\ ,\ 1\leq u\leq u_k}$ est adaptée à la famille d'endomorphismes $\widetilde{I}_j$. Il en résulte, l'existence d'un couple d'indice (k,u) tel que $w\in\widetilde{E}^k_u$ donc :

$$w = \sum_{t=d^k_{u-1}+1}^{d^k_u} w^{k,t}\ e^{k,t} \quad .$$

Les valeurs propres de w pour les endomorphismes $\widetilde{I}_1,\widetilde{I}_2,\dots,\widetilde{I}_n$ sont donc respectivement

$$\beta^{k,u}_1\ ,\ \beta^{k,u}_2\ ,\dots,\ \beta^{k,u}_n$$

avec

$$\beta^{k,u}_j = \rho^k_j + \varphi^{k,d^k_u}_j \quad .$$

Désignons par v la matrice colonne des composantes de w dans la base $(e^{k,l})$ de E . Nous avons :

$$Q^{-A}\,v = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta^{k,u}_j}\ v \quad \text{et} \quad F^o_j\ v = 0 \quad \text{avec}$$

$$F^o_j = \widetilde{A}_j - A_j + \frac{1}{2\pi i}\log.\ D^o_j$$

donc :

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta^{k,u}_j}\ w = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta^{k,u}_j}\ T_e\ (Q)\ v$$

$$= U\ (M)\ Q^A\ Q^F\ Q^{-A}\ v$$

$$= U(M)\ (Q^A \exp.\ (\sum_{j=1}^{n} F_j \log.Q_j)\ Q^{-A})\ v$$

$$= U(M)\ v + (U(M) \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t\,!}\,(\sum_{j=1}^{n} Q^A F_j Q^{-A} \log.Q_j)^t)\,v \ .$$

La somme étendue à l'indice t est finie car les matrices F_j $(j=1,2,\dots,n)$ sont nilpotentes et deux à deux permutables.

$$\prod_{j=1}^{n} Q^{-\beta^{k,u}_j}\ w = U(M)\ v + (U\,(M)\,(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t\,!}\ (\sum_{j=1}^{n} (F^o_j + \omega_j\ (Q)\,)\log.\ Q_j)^t)\ v$$

où $\omega_j\ (Q)$ est un polynôme en les variables $x_1\ ,x_2\ ,\dots,\ x_n$, à coefficients matriciels et sans terme constant. On peut alors écrire :

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta_j^{k,u}} \; w = U(M)\, v + U\,(M)\, \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{t!}\, \big(\sum_{j=1}^{n} F_j^{o} \log. Q_j\big)^{t} + H\,(Q)\,\Big)\, v \quad ,$$

et comme $F_j^o\, v = 0$ pour tout j , nous avons :

$$\prod_{j=1}^{n} Q_j^{-\beta_j^{k,u}} \; w = U\,(M)v + U\,(M)\; H\,(Q)v \quad ,$$

où $H(Q)$ est un polynôme en les variables x_1 , x_2 , ... , x_n , log. Q_1 , log. Q_2 , ..., log. Q_n dont les monômes ont un degré strictement positif par rapport aux variables x_1 , x_2 , ... , x_n .

Posons $U^*(M) = U\,(M) - U\,(0)$, alors comme $U\,(0)v = 0$

$$w = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u}} \; (U^*\,(M)v + U\,(M)\; H\,(Q)v\;)\;.$$

Nous avons fait l'hypothèse $N \neq \{0\}$ et nous avons introduit le vecteur w , si nous montrons que la valuation $\varphi\,(w)$ de w est différente de φ^{k,d_u^k} , nous aurons la contradiction cherchée.

Le n-uple φ^{k,d_u^k} est de la forme

$$\underbrace{(q, q\; ,\ldots,\; q\;,}_{t\ \text{fois}}\; \underbrace{q+1\;,\; q+1\;,\ldots,\; q+1)}_{n-t\ \text{fois}}$$

avec $1 \leq t \leq n$ et $q = \varphi_j^{k,d_u^k}$ si $1 \leq j \leq t$.

Considérons un n-uple $= (\lambda_1\;, \lambda_2\;,\ldots,\; \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\lambda_j < q \qquad \text{pour} \quad j < t$$

$$\lambda_j < q+1 \quad \text{pour} \quad j < t$$

$$q < \lambda_t < q+1$$

et montrons que :

$$\lim_{\substack{Q \to Q_o \\ Q \in U}} \; \frac{w}{\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\lambda_j}} = 0 \quad ,$$

ce qui entrainera que $\varphi(w) \neq \varphi^{k,d_u^k}$. Pour établir ce résultat, nous allons étudier les deux expressions :

$$\mathcal{A} = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u} - \lambda_j} U^*(M)\, v$$

$$\mathcal{B} = \left(\prod_{j=1}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u} - \lambda_j}\right) U(M)\, H(Q)\, v \quad .$$

1°) <u>Etude de</u> $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u} - \lambda_j}\right) \times \left(Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t}\right) U^*(M)\, v \ ,$$

or $\qquad \beta_j^{k,u} = \varphi_j^{k,d_u^k} + \rho_j^k \quad$ avec $\quad 0 \leq \mathrm{Re}.\, \rho_j^k < 1$

et $\qquad \lambda_j < \varphi_j^{k,d_u^k} \quad ,$

il en résulte que la première parenthèse figurant dans $\mathcal{A}$ tend vers zéro lorsque Q tend vers Q_o en restant dans un ouvert distingué de $\mathfrak{R}$. Nous allons montrer maintenant qu'il en est de même du deuxième facteur.

Posons : $\quad x^s = x_1^{s_1}\, x_2^{s_2}, \dots, x_m^{s_m}$ où $s_j \in \mathbb{N}$ pour tout j.

$$|x|^s = |x_1|^{s_1}\, |x_2|^{s_2} \dots |x_m|^{s_m}$$

$$a_s = a_{s_1, s_2, \dots, s_m} \quad .$$

La série $\qquad U(M) = \sum_{s \in N^m} a_s\, x^s$

converge normalement dans un voisinage d'un polydisque fermé $\Delta^m \subset D^m$ avec

$$\Delta = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \delta \,\} \quad .$$

Comme les limites sont à prendre pour Q variant dans un ouvert distingué de $\mathfrak{R}$, il existe deux constantes strictement positives h et k telles que :

$$h \leq \frac{|x_j|}{|x_t|} \leq k \qquad \text{si} \quad j < t$$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{|x_j|}{|x_t|} \leq \frac{1}{h} \qquad \text{si} \quad t < j \leq m \quad .$$

Posons : $\quad K = \text{Sup}\ \{k\ ,\ \frac{1}{h}\ ,\ 1\}$.

Il en résulte que :

$$\| Q_t^{\beta^{k,u} - \lambda_t} U^*(M) \| \leq |Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t + \alpha_t}| L(K\ |x_t|) \ ,$$

où α_t est un entier strictement positif et où L est une fonction bornée au voisinage de l'origine.

Comme : $\quad \varphi_t^{k,d_u^k} < \lambda_t < \varphi_t^{k,d_u^k} + 1$

$$0 \leq \text{Re}\ \rho_t^k < 1 \quad ,$$

nous avons : $\quad \text{Re.}\ (\beta_t^{k,u} - \lambda_t + \alpha_t) > 0$

et par suite : $\quad \text{Lim.} \left| Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t + \alpha_t} \right| = 0 \quad .$

Ce qui entraine que $\mathcal{A}$ tend vers zéro lorsque Q tend vers Q_o en restant dans un ouvert distingué de $\mathcal{R}$.

2°) <u>Etude de</u> $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} Q_j^{\beta_j^{k,u} - \lambda_j} , \times (Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} U\ (M)\ H\ (Q)\ v\ ) \ .$$

Le premier facteur tend vers zéro, nous l'avons vu dans le 1°) . Le deuxième facteur peut s'écrire :

$$U\ (M)\ Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} H\ (Q)\ v \ .$$

La matrice colonne v étant à coefficient constants, il suffit d'étudier l'expression $$Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} H(Q)\ .$$

or cette matrice est combinaison linéaire finie à coefficients matriciels constants d'expressions de la forme :

$$Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \prod_{j=1}^{n} \log.^{\gamma_j} Q_j$$

où les nombres α_j , γ_j sont des entiers, l'un au moins des α_j n'étant pas nul. Or une telle expression tend vers zéro lorsque Q tend vers Q_o en restant dans un ouvert distingué de $\mathcal{R}$; en effet il suffit de voir qu'une expression de la forme

$$Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} x_h^{\alpha_h} \prod_{j=1}^{n} \log.^{\lambda_j} Q_j \qquad \alpha_h > 0$$

tend vers zéro. Mais si K a la même signification que ci-dessus nous avons :

$$\left|Q_t^{\beta_t^{k,u} - \lambda_t} x_h^{\alpha_h} \prod_{j=1}^{n} \log.^{\gamma_j} Q_j\right| \le K^{\alpha_h} |x_t|^{\mathrm{Re.}(\rho_t^k + \varphi_t^{k,d_u^k} - \lambda_t + \alpha_h)} \left|\prod_{j=1}^{n} \log.^{\gamma_j} Q_j\right|$$

avec

$$\mathrm{Re.}\ (\rho_t^k + \varphi_t^{k,d_u^k} - \lambda_t + \alpha_h) > 0$$

et cette expression tend vers zéro lorsque Q tend vers Q_o en restant dans un ouvert distingué de $\mathcal{R}$. Ce qui montre le théorème 2.

§ 4. SYSTEME DE PFAFF ASSOCIÉ A UN SOUS ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE p DE $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathcal{R})$ FAIBLEMENT SINGULIER A L'ORIGINE.

Théorème 1.

Tout sous espace vectoriel E de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathcal{R})$ de dimension finie **p** , faiblement singulier à l'origine est l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff complètement intégrable de la forme :

$$df = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{P_j\ (x_1,x_2,\dots,x_m)}{x_j}\ dx_j + \sum_{j=n+1}^{m} P_j\ (x_1,x_2,\dots,x_m)\ dx_j\right) f$$

<u>où pour tout</u> $j = 1,2,\dots,m$; P_j <u>est une matrice carrée d'ordre</u> p <u>méromorphe sur</u> D^m <u>et holomorphe à l'origine de</u> $\mathbb{C}^m$.

<u>Corollaire 1</u>.

<u>Les exposants de</u> E <u>sont donnés par les valeurs propres des matrices</u> $P_j(0)$ $(j = 1,2,\dots,n)$, <u>de manière plus précise, on a pour tout</u> $j = 1,2,\dots,n$:

$$P_j(0) = U(0)\,(\tilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i}\ \log.\ D_j^o\,)\,U(0)^{-1}$$

(Les notations sont celles des paragraphes 2 et 3) .

<u>Démonstration du théorème 1.</u>

Si (e) est une base adaptée de E nous avons :

$$T_e(Q) = U(M)\prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j}$$

avec $U \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$ et dét. $U(0) \neq 0$.

Désignons par B , le sous ensemble analytique de D^m défini par dét. $U(M) = 0$, il existe un polydisque $D'^m \subset D^m$ tel que $B \cap D'^m = \emptyset$.
La forme différentielle

$$\omega = (d\,T_e)\,(T_e)^{-1}$$

est uniforme et nous avons sur

$$\omega(Q) = d\,U \times U^{-1} + U(\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{dx_j}{x_j} + \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} (\sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{x_j} dx_j) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j})\,U^{-1} .$$

Comme :

a) La forme différentielle $d\,U\,U^{-1}$ est méromorphe sur D^m et holomorphe sur D'^m ;

b) La fonction matricielle

$$\mathcal{A}_h(Q) = A_h + \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \times F_h \times \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j}$$

est pour tout $h = 1,2,\dots,n$, holomorphe sur D^m ; en effet, utilisant la décomposition en blocs des matrices A_j et F_h (c.f. page I.3.13), il suffit de prouver que les matrices

$$A_h^k + \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j^k} \times F_h^k \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-A_j^k} \quad , \quad h = 1,2,\dots,n \; ; \; k = 1,2,\dots,r$$

sont holomorphes sur D^m. Mais (cf. page I.3.16) ces fonctions matricielles sont des polynômes en les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ à coefficients matriciels constants.

Il en résulte que les fonctions matricielles

$$P_j(x_1,x_2,\dots,x_m) = x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} U^{-1} + U' \mathcal{A}_j(Q))\ U^{-1})$$

$$(j = 1,2,\dots,n)$$

et

$$P_j(x_1,x_2,\dots,x_m) = \frac{\partial U}{\partial x_j} U^{-1} \quad ,$$

$$(j = n+1, n+2,\dots,m)$$

sont méromorphes sur D^m et holomorphes sur D'^m.

Démonstration du corollaire.

Nous avons pour $j = 1,2,\dots,n$

$$P_j(x_1, x_2,\dots,x_m) = x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} U^{-1} + U\,(A_j + \prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t} \times F_j \times \prod_{t=1}^{n} Q_t^{-A_t})U^{-1}$$

donc

$$P_j(0) = U(0)\,(A_j + (\prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t} \times F_j \times \prod_{t=1}^{n} Q_t^{-A_t})(0))\,U^{-1}(0) .$$

Si on considère la décomposition en blocs des matrices A_j et F_j associées aux sous espaces vectoriels adaptés E^k , nous sommes amenés à étudier les matrices :

$$(A_j^k + \prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t^k} \times F_j^k \times \prod_{t=1}^{n} Q_t^{-A_t^k})\ (0)\ .$$

Si on utilise maintenant la décomposition en blocs des matrices A_j^k et F_j^k , associée pour tout k , à la filtration de E^k déduite de la valuation φ^k , nous avons :

$$A_j^k = \begin{pmatrix} A_j^{k,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_j^{k,2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A_j^{k,u_k} \end{pmatrix} ,$$

$$F_j^k = \begin{pmatrix} (F_j^k)_{m_1^k, m_1^k} & (F_j^k)_{m_1^k, m_2^k} & \cdots & (F_j^k)_{m_1^k, m_{u_k}^k} \\ 0 & (F_j^k)_{m_2^k, m_2^k} & \cdots & (F_j^k)_{m_2^k, m_{u_k}^k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & (F_j^k)_{m_{u_k}^k, m_{u_k}^k} \end{pmatrix} .$$

D'où résulte vu l'expression des $A_j^{k,u}$ (multiple de la matrice unité de même ordre, le facteur étant un exposant de E) que

$$(\prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t^k}\ F_j^k \prod_{t=1}^{n} Q^{-A_t^k})\ (0) = (F_j^k)^o\ .$$

Comme

$$(F_j^k)_{m_u^k, m_u^k} = -\rho_j^k\ I_u^k + \frac{1}{2\pi i}\ (\log.\ D_j^k\ )_{m_u^k, m_u^k}$$

I_u^k désignant la matrice unité d'ordre m_u^k .

Nous avons :

$$A_j^k + \left(\prod_{t=1}^{n} Q_t^{A_t^k} \times F_j^k \times \prod_{t=1}^{n} Q_t^{-A_t^k}\right)(0)$$

$$= \tilde{A}_j^k + \frac{1}{2\pi i}(\log. D_j^k)^o \quad \text{avec} \quad \tilde{A}_j^k = A_j^k - \rho_j^k I_u^k .$$

Mais vu la définition du logarithme d'une matrice et les propriétés de l'opération o ;

$$P_j(0) = U(0)\left(\tilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i}\log.(D_j)^o\right)U(0)^{-1} .$$

Ce qui prouve le corollaire.

§ 5. ETUDE DES SOUS ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE DE $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(\mathbb{R})$ FAIBLEMENT SINGULIERS A L'ORIGINE.

1. Considérons l'algèbre sur $\mathbb{C}$ qu'engendrent les opérateurs

$$\theta_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$\theta_o = \text{id.}$$

Cette algèbre est identique à l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[\theta] = \mathbb{C}[\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n]$. Nous notons (cf. page I.1. 8) :

a) Θ_{d_r} l'application de $\mathcal{H}^{1\times 1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}^{d_r\times 1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Theta_{d_r} f = \begin{pmatrix} e_1^r(\theta) f \\ e_2^r(\theta) f \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{d_r}^r(\theta) f \end{pmatrix} \text{si } r > 0 \quad \text{et} \quad \Theta_{d_o} f = f .$$

b) Θ^{d^q} l'application de $\mathcal{H}^{1\times 1}(\mathfrak{R})$ dans $\mathcal{H}^{d^q\times 1}(\mathfrak{R})$ $\left(d^q = \sum_{i=0}^{q} d_r\right)$ définie par :

$$\Theta^{d^q} = \begin{pmatrix} \Theta_{d_o} \\ \Theta_{d_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Theta_{d_q} \end{pmatrix} .$$

Définition 1.

On appelle opérateur d'ordre s extrait de Θ^{d^q}, toute application Θ^s de $\mathcal{H}^{1\times 1}(\mathfrak{R})$ dans $\mathcal{H}^{s\times 1}(\mathfrak{R})$ obtenue en prenant seulement s lignes de l'opérateur Θ^{d^q}.

Définition 2.

Un opérateur d'ordre s extrait de Θ^{d^q} est dit privilégié, s'il contient la première ligne de Θ^{d^q}.

Proposition 1.

Tout opérateur extrait de Θ^{d^q}, permute avec les endomorphismes g^* pour tout $g \in \pi_1(\;)$.

Proposition 2.

Si E est un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{1\times 1}(\mathfrak{R})$, alors tout opérateur privilégié Θ^s extrait de Θ^{d^q}, réalise un isomorphisme de E sur un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}^{s\times 1}(\mathfrak{R})$.

Le fait que θ_o est une ligne de Θ^s entraine immédiatement cette proposition.

Remarque 1.

Si l'opérateur extrait n'est pas privilégié, il ne réalise pas en général un isomorphisme ; en effet considérons l'espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ engendré par les deux fonctions $f_1 = x_1 - x_2$ et $f_2 = x_1 + x_2$. L'opérateur non privilégié $\theta_2 = x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$ ne réalise pas un isomorphisme de E sur $\theta_2(E)$ car $\theta_2(E)$ est engendré par les deux fonctions $g_1 = -x_2$ et $g_2 = x_2$ qui ne sont pas $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

2. Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie p de $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(\mathfrak{R})$ faiblement singulier à l'origine.

Théorème 1.

L'application $\Theta^{d^{p-1}}$ réalise un isomorphisme de E sur un sous espace vectoriel E' de dimension p de $\mathcal{H}_o^{c^{p-1}\times 1}(\mathfrak{R})$ possédant les propriétés suivantes :

a) E' est faiblement singulier à l'origine ,

b) E et E' ont même ensemble d'exposants.

Corollaire 1.

Il existe au moins un opérateur privilégié Θ^p , d'ordre p , extrait de $\Theta^{d^{p-1}}$, réalisant un isomorphisme de E sur un sous espace vectoriel de dimension p de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\mathfrak{R})$, possédant les propriétés a) et b) .

Corollaire 2.

E est l'espace vectoriel des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable de la forme :

$$d(\Theta^p f) = \omega(\Theta^p f) ,$$

où

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{x_j} dx_j + \sum_{j=n+1}^{m+1} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_j$$

et où pour tout $j = 1,2,\ldots, m$, $P_j \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$, et Θ^p est un opérateur privilégié d'ordre p , extrait de $\Theta^{d^{p-1}}$.

Remarque 2.

Le système obtenu, est formé par un certain nombre d'équations aux dérivées partielles qui ne sont pas en général indépendantes. C'est à dire que très souvent il est possible d'en supprimer quelques unes sans pour autant changer l'espace vectoriel des solutions. La détermination du nombre minimum d'équations nécessaires est dans le cas général un problème difficile.

Démonstration du théorème 1.

Soit (e) une base adaptée de E, nous avons :

$$(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_p) = U(M)\, Q^A\, Q^F \quad ,$$

avec

$$Q^A = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \quad , \quad Q^F = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j} \; .$$

Calculons :

$$\theta_j((e)) = (\theta_j e_1, \theta_j e_2, \ldots, \theta_j e_p) = \theta_j(U(M))Q^A Q^F + U(M)(A_j + Q^A F_j Q^{-A})Q^A Q^F$$

$$= U_j(M)\, Q^A\, Q^F \quad ,$$

où $\qquad U_j(M) \in \mathcal{H}^{1\times p}(D^m)$

et $\qquad U_j(0) = U(0)\,\tilde{L}_j$ avec $\tilde{L}_j = \tilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i}\log .D_j^o$.

Nous savons que les matrices $\tilde{L}_j$ sont deux à deux permutables. Montrons maintenant, que pour tout n-uple d'entiers positifs ou nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, il existe une fonction $U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \in \mathcal{H}^{1\times p}(D^m)$ telle que :

$$(\theta_1^{\alpha_1}\, \theta_2^{\alpha_2} \ldots \theta_n^{\alpha_n})((e)) = U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(M)\, Q^A\, Q^F \tag{2}$$

avec

$$U^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(0) = U(0)\, \tilde{L}_1^{\alpha_1}\, \tilde{L}_2^{\alpha_2} \ldots \tilde{L}_n^{\alpha_n} \; . \tag{3}$$

Ces formules se démontrent par récurrence ; sachant que les opérateurs θ_j permutent, il suffit de montrer (2) et (3) en supposant que :

$$(\theta_1^{\alpha_1 - 1}\, \theta_2^{\alpha_2} \ldots \theta_n^{\alpha_n})((e)) = U^{\alpha_1-1,\alpha_2\ldots\alpha_n}(M)\, Q^A\, Q^F \quad , \tag{2'}$$

$$U^{\alpha_1-1,\alpha_2\ldots\alpha_n}(M) \in \mathcal{H}^{1\times p}(D^m) \quad ,$$

(3') $$U^{\alpha_1-1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(0) = U(0)\,\tilde{L}_1^{\alpha_1-1}\,\tilde{L}_2^{\alpha_2}\dots\tilde{L}_n^{\alpha_n} \ .$$

De (2') on **déduit :**

$$(\theta_1^{\alpha_1}\,\theta_2^{\alpha_2}\dots\theta_n^{\alpha_n})((e)) = \theta_1(U^{\alpha_1-1,\alpha_2\dots\alpha_n}(M))Q^A\,Q^F + U^{\alpha_1-1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(M)(A_1+Q^AF_1Q^{-A})Q^AQ^F$$
$$= U^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(M)\,Q^A\,Q^F$$

avec
$$U^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(M) \in \mathcal{M}^{1\times p}(D^m) \ ,$$

et à l'aide de (3') ,
$$U^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(0) = U^{\alpha_1-1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(0)\,\tilde{L}_1$$
$$= U(0)\,\tilde{L}_1^{\alpha_1-1}\tilde{L}_2^{\alpha_2}\dots\tilde{L}_n^{\alpha_n}\,\tilde{L}_1$$
$$= U(0)\,\tilde{L}_1^{\alpha_1}\,\tilde{L}_2^{\alpha_2}\dots\tilde{L}_n^{\alpha_n} \ .$$

Ce qui prouve les formules (2) et (3) . Ces formules entrainent alors

(4) $$\Theta^{d^{p-1}}((e)) = \mathcal{U}(M)\,Q^A\,Q^F$$

où $$\mathcal{U}(M) \in \mathcal{M}^{d^{p-1}\times p}(D^m).$$

Il reste à prouver que le rang de $\mathcal{U}(0)$ est maximum c'est à dire p . Pour cela nous allons montrer que le noyau de l'application linéaire u de E dans $\mathbb{C}^{d^{p-1}}$ définie par la matrice $\mathcal{U}(0)$ se réduit à $\{0\}$. Si $\tilde{l}_j$ $(j=1,2,\dots,n)$ désignent les endomorphismes de E définis par les matrices $\tilde{L}_j$, nous avons :

<u>Lemme 1</u>.

N <u>est invariant par la famille d'endomorphismes</u> $(\tilde{l}_j)_{1\leq j\leq n}$.

Le résultat a) du théorème 1 est une conséquence immédiate de ce lemme et du théorème 2 du § 3 (page I.3.20).

La formule (4) et le fait que si (e) est une base adaptée de E , $\Theta^{d^{p-1}}((e))$ est une base adaptée de E' entrainent que E et E' ont même ensemble d'exposants.

Démonstration du lemme1.

Soit v un élément non nul de N, nous désignerons également par v la matrice colonne des composantes de v dans la base (e), nous avons :

$$\mathcal{U}(0)\, v = 0 .$$

En d'autres termes, si pour tout n-uple d'entiers positifs ou nuls $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ on pose

$$H_s^{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_n}(v) = U(0)\left(\prod_{j=1}^{n} \widetilde{L}_j^{j}\right) v$$

où $$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j ,$$

nous avons alors, pour tout $s = 1,2,\dots, p-1$ et tout n-uple $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ d'entiers positifs ou nuls vérifiant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = s$:

$$H_s^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(v) = 0 .$$

Pour montrer que N est invariant par la famille d'endomorphismes deux à deux permutables $(\widetilde{L}_j)_{1\le j\le n}$, il suffit de montrer que l'on a également

$$H_p^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(v) = 0$$

pour tout n-uple d'entiers positifs ou nuls $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ vérifiant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = p$.
Si $(t_j)_{1\le j\le n}$ désignent n nombres complexes quelconque, le théorème de Cayley-Hamilton appliqué à l'endomorphisme $\sum_{j=1}^{n} t_j \widetilde{L}_j$ entraine que

$$U(0)\left(\sum_{j=1}^{n} t_j \widetilde{L}_j\right)^p v = 0$$

C'est à dire que

$$\sum t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n}\, U(0)\, \widetilde{L}_1^{\alpha_1} \widetilde{L}_2^{\alpha_2} \dots \widetilde{L}_n^{\alpha_n}\, v = 0 \tag{5}$$

la somme étant étendue à tous les n-uples $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$ vérifiant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = p$.
Nous supposerons que les monômes en $t_1,t_2,\dots,t_n$ dans la somme ci-dessus, sont rangés dans l'ordre indiqué pour la base canonique de $\mathbb{C}_p[t_1,t_2,\dots,t_n]$.

D'après la proposition 6 du § 1 (page 8) il existe d_p points de $\mathbb{C}^n$, $t^1, t^2, \ldots, t^{d_p}$ tels que

$$\text{dét.} \begin{pmatrix} e^p(t^1) \\ e^p(t^2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^p(t^{d_p}) \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Et en écrivant la formule (5) pour tous ces points, on obtient un système linéaire à d_p équations à coefficients dans $\mathbb{C}$, en les inconnues matricielles $U(0)\, \tilde{L}_1^{\alpha_1} \tilde{L}_2^{\alpha_2} \ldots \tilde{L}_n^{\alpha_n} v$. Le déterminant de ce système n'étant pas nul on en conclut que :

$$U(0)\, \tilde{L}_1^{\alpha_1} \tilde{L}_2^{\alpha_2} \ldots \tilde{L}_n^{\alpha_n} v = 0$$

pour tout n-uples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de $\mathbb{N}^n$ vérifiant $\sum_{j=1}^{n} \alpha_1 = p$. En d'autres termes le noyau N de u est invariant par la famille d'endomorphismes $(\tilde{L}_j)_{1 \leq j \leq n}$.

Démonstration du corollaire 1.

Comme E est faiblement singulier à l'origine, la première ligne de $\mathcal{U}(0)$ n'est pas nulle, il est donc possible d'extraire de $\mathcal{U}(0)$ une matrice carrée $\mathcal{U}_p(0)$ d'ordre et de rang p, contenant la première ligne de $\mathcal{U}(0)$. Soit Θ^p l'opérateur privilégié extrait de $\Theta^{d^{p-1}}$ et obtenu en prenant les lignes canoniquement associées aux lignes de $\mathcal{U}_p(0)$. L'espace vectoriel E'' engendré par $\Theta^p((e))$ répond à la question, en effet, $\Theta^p((e))$ est une base adaptée de E'' et comme :

$$\Theta^p((e)) = \mathcal{U}_p(M) Q^A Q^F ,$$

l'espace vectoriel E'' est faiblement singulier à l'origine et a même ensemble d'exposants que E.

Le corollaire 2 est une conséquence immédiate du corollaire 1 et du théorème 1 du § 4 (page 25).

§ 6. ETUDE DE CERTAINS SYSTÉMES DE PFAFF COMPLETEMENT INTEGRABLES.

On se propose, dans ce paragraphe, d'étudier les systèmes de Pfaff complètement intégrables de la forme :

$$(s) \qquad df = \omega f$$

avec

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j(x_1, x_2, \dots, x_m)}{(x_1)^{k_1^j}(x_2)^{k_2^j}\dots(x_n)^{k_n^j}} dx_j \qquad (m \geq n)$$

où pour tout $j=1,2,\dots,m$, $P_j \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$ et où les nombres k_i^j sont entiers positifs ou nuls.

1. Nous avons :

Proposition 1.

L'ensemble des solutions de (s) forment un sous espace vectoriel E de dimension finie p de $\mathcal{H}^{p\times 1}(\mathcal{R})$ invariant par les opérations de $\pi_1(\mathcal{D})$.

Par le changement de variables :

$$x_j = \exp. t_j \quad \text{si} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_j = t_j \quad \text{si} \quad j = n+1, n+2, \dots, m;$$

le système (s) se transforme en le système complètement intégrable (s') $df' = \omega' f'$ avec

$$\omega' = \sum_{j=1}^{m} P'_j(t_1, t_2, \dots, t_m)\, dt_j \text{ où, } P'_j(t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$$

et où $\mathcal{D}'$ désigne le produit $\Delta_1 \times \Delta_2 \times \dots \times \Delta_m$ avec,

si $j = 1,2,\dots,n$,

$$\Delta_j = \{t_j = u_j + iv_j \in \mathbb{C} \mid u_j < \log. r\} \quad (r \text{ rayon de } D)$$

et

$$\Delta_j = D \quad \text{si} \quad j = n+1, n+2, \dots, m.$$

Démonstration de la proposition 1.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre des variables. Désignons par :

- $\widetilde{\Delta}_k$ le produit $\Delta_{k+1} \times \Delta_{k+2} \dots \times \Delta_m$,

- M_k le point $(t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_m)$ de $\widetilde{\Delta}_k$

et considérons le système linéaire

$$(s_1') \quad \frac{dY}{dt_1} = P_1' (t_1, M_1) Y \quad .$$

Nous savons que :

1°) Si a est un vecteur de $\mathbb{C}^p$, il existe une solution et une seule $Y(t_1, M_1, a)$ du système (s_1') qui pour $t_1 = t_1^o$ prend la valeur a , et cette solution est holomorphe en a.

2°) La solution déterminée au 1°) est pour M_1 fixé, holomorphe sur Δ_1 .

3°) La solution déterminée au 1°) est holomorphe en M_1 sur $\widetilde{\Delta}_1$.

Il en résulte que si $e(M_1)$ est un vecteur holomorphe sur $\widetilde{\Delta}_1$, il existe une solution $Y(t_1, M_1, e(M_1))$ de (s_1') et une seule, prenant la valeur $e(M_1)$ pour $t_1 = t_1^o$ et de plus cette solution est holomorphe sur Δ_1 en la variable t_1 et sur $\widetilde{\Delta}_1$ en la variable M_1 , elle est donc holomorphe sur $\mathcal{D}' = \Delta_1 \times \widetilde{\Delta}_1$.

Soit maintenant $e(M_1) = (e_j(M_1))_{1 \leq j \leq p}$, un système de p vecteurs holomorphes sur $\widetilde{\Delta}_1$ et linéairement indépendants, (un tel système existe) ; désignons par :

1°) $Y_j(t_1, M_1) (1 \leq j \leq p)$ la solution de (s_1') holomorphe sur Δ_1 prenant la valeur $e_j(M_1)$ pour $t_1 = t_1^o$;

2°) $E(t_1, M_1)$ le système de vecteurs $(Y_j(t_1, M_1))_{1 \leq j \leq p}$, et $T_1(t_1, M_1)$ la matrice associée à ce système de vecteurs , $T_1(t_1, M_1) \in \mathcal{H}^{p \times p} (\mathcal{D}')$.

Alors T_1 est une matrice fondamentale de solutions du système (s'_1) , ce qui entraine que les solutions de (s'_1) forment un sous espace vectoriel de dimension p de $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$.

Supposons maintenant que le système :

$$(s'_q) : \frac{\partial Y}{\partial t_k} = P'_k Y \quad k = 1 , 2 , \ldots , q \ ,$$

admette une matrice fondamentale de solutions $T_q(t_1 , t_2 , \ldots , t_q , M_q)$ appartenant à $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$, montrons que le système (s'_{q+1}) admet également une matrice fondamentale de solutions $T_{q+1}(t_1 , t_2 , \ldots , t_{q+1} , M_{q+1})$ appartenant à $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$. La démonstration qui va suivre n'est rien d'autre que celle du théorème de Frobénius dans le cas linéaire. Toute solution de (s'_q) est de la forme $T_q(t_1,\ldots,t_q,M_q) \cdot C(M_q)$, pour avoir les solutions de (s'_{q+1}) , il suffit d'écrire que cette matrice vérifie le système

$$\frac{\partial Y}{\partial t_{q+1}} = P'_{q+1} \ Y \ .$$

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial C(M_q)}{\partial t_{q+1}} = (T_q)^{-1} \left(- \frac{\partial T_q}{\partial t_{q+1}} + P'_{q+1} T_q\right) C(M_q) \ .$$

La condition de complète intégrabilité du système (s') $(d\omega' = \omega' \wedge \omega')$, entraine comme on le voit facilement que

$$K = (T_q)^{-1} \left(- \frac{\partial T_q}{\partial t_{q+1}} + P'_{q+1} \ T_q \right) \ ,$$

est une matrice $K(t_{q+1} , M_{q+1})$ appartenant à $\mathcal{H}^{p\times p}(\Delta_{q+1} \times, \ldots, \Delta_m)$.
La matrice $C(M_q)$ est solution du système :

$$\frac{\partial Z}{\partial t_{q+1}} = K \ Z$$

et ce système admet une matrice fondamentale de solutions $R_{q+1} \in \mathcal{H}^{p\times p}(\Delta_{q+1} \times \ldots \Delta_m)$.
Il en résulte que $T_{q+1} = T_q \cdot R_{q+1}$ est une matrice fondamentale de solutions

de (s'_{q+1}) appartenant à $\mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D}')$.

Vu les hypothèses de récurrence et le changement de variables que nous avons fait, la première partie de la proposition 1 est démontrée. La deuxième partie de la proposition est évidente.

Proposition 2.

Pour toute matrice fondamentale Φ de solutions de (s), nous avons :

$$\Phi(Q) = H(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{S_j}$$

où pour tout $j=1, 2, \ldots, n$, $S_j \in \mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ et $H \in \mathcal{H}^{p\times p}(\mathcal{D})$.

Démonstration.

Soit Φ une matrice fondamentale de solutions de (s), pour tout $j=1, 2, \ldots, n$, nous avons :

$$g_j^* \Phi = \Phi D_j \quad \text{où} \quad D_j \in Gl(p,\mathbb{C})$$

Posons : $C_j = \frac{1}{2\pi i} \log. D_j$, les endomorphismes g_j^* $(j=1,2,\ldots,n)$ étant deux à deux permutables, il en est de même des matrices D_j, par suite il existe une matrice inversible S telle que pour tout $j = 1,2,\ldots,n$

$$D_j = S^{-1} \begin{pmatrix} D_j^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & D_j^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & D_j^r \end{pmatrix} S$$

Les matrices D_j^k étant triangulaires à valeur propre unique (cf.§ 1). Nous avons évidemment pour tout k et tout couple (j,l)

$$D_j^k \; D_l^k = D_l^k \; D_j^k \quad ,$$

ce qui entraine par un calcul immédiat que

$$C_j \; C_l = C_l \; C_j \quad \text{pour tout couple } (j,l) .$$

La matrice :

$$H(Q) = \Phi(Q) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{-C_j}$$

est donc holomorphe sur $\mathcal{D}$.

Définition 1.

Nous dirons que l'origine est un point singulier régulier pour (s) , si pour une matrice fondamentale Φ , la matrice H est méromorphe sur D^m .

Remarque 1.

Cette notion est indépendante du choix de la matrice fondamentale.

Proposition 3.

Si l'origine est un point singulier régulier de (s) alors E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(\Omega)$.

Démonstration.

La matrice H étant méromorphes dans D^m , il existe des entiers positifs $q_1, q_2, \dots, q_n$ telle que

$$H(x_1,x_2,\dots,x_m) \prod_{j=1}^{n} x_j^{q_j}$$

soit holomorphe dans D^m . La matrice $\Phi(Q)$ s'écrit alors

$$\Phi(Q) = H'(x_1,x_2,\dots,x_m) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{C_j - q_j I}$$

où $H' \in \mathcal{H}^{p\times p}(D^m)$.

Pour obtenir le résultat annoncé, il reste à vérifier qu'il existe un élément $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{\substack{Q\to Q_o \\ Q\in U^o}} \frac{\Phi(Q)}{\prod_{j=1}^{n} Q^{\lambda_j}} = 0 \quad ,$$

pour tout ouvert distingué U de Ω .

Et pour cela, il suffit de montrer que pour toute matrice constante B, il existe un nombre réel λ tel que :

$$\lim_{\substack{Q\to Q_o \\ Q\in U}} \frac{Q^B}{Q^\lambda} = 0 \quad \text{pour tout ouvert ditingué } U .$$

Ce résultat restant vrai pour toute matrice semblable à B (avec la même valeur de λ) ; il suffit de le montrer dans les cas où B est diagonale ou nilpotente sans forme triangulaire. Or, dans ces deux cas le résultat est évident.

2. Définition 2.

Nous dirons que l'origine est un point singulier de première espèce pour (s), si pour tout $i = 1;2,\ldots,n$ et tout $j = 1,2,\ldots,m$ on a :

$$0 \leq k_i^j \leq 1 .$$

Proposition 4.

Si l'origine est un point singulier de première espèce pour (s) alors c'est un point singulier régulier.

Nous avons :

$$\Phi\ (Q) = H\ (M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{C_j} \quad ,$$

du théorème 2.1 page 111 de (2), il résulte que si on fixe n-1 des variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$ et les variables $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_m$; la matrice $H(Q)$ considérée comme fonction de la variable restante a au plus une gularité polaire à l'origine. La fonction $H(Q)$ est dans $\mathcal{D}$ développable en série de Laurent à coefficients matriciels :

$$H(Q) = H(x_1,x_2,\ldots,x_m) = \sum_{j_1\geq 0\ j_2\geq o\ ,\ldots,j_n\geq o} \frac{a_{j_1,j_2,\ldots,j_n}}{x^{J_1}\ x^{J_2}\ldots x_n^{J_n}} + h\ (x_1,x_2\ldots x_m)$$

où $h(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \mathcal{H}^{p\times p}\ (D^m)$.

Ecrivons

$$H(x_1,x_2,\ldots x_m) = \sum_{j_1\geq o} \frac{h_{j_1}(x_2,x_3,\ldots,x_n)}{x^{J_1}} + h(x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

où pour tout j_1 , $h_{j_1} \in \mathcal{H}^{p\times p}(\hat{D})^{n-1}$.

Alors d'après le théorème rappelé ci-dessus, pour tout $M_1 \in (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n}$, il existe un entier $q(M_1)$ tel qur pour tout $q \geq q(M_1)$, $h_q(M_1) = 0$. Supposons qu'une infinité de fonctions $(h_{j_1})_{j_1 \in I}$ ne soient pas identiquement nulles et posons pour tout $j \in I$

$$V_j = \{M_1 \in (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n} \mid h_j(M_1) = 0\}$$

et

$$W = \bigcup_{j \in I} V_j \quad , \quad W \subset (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n} \quad .$$

L'ensemble I étant infini, pour tout point $M_1 \in (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n}$, il existe $j_1 \in I$ tel que $j_1 \geq q(M_1)$ c'est à dire que $M_1 \in V_{j_1}$ et par suite

$$W = (\hat{D})^{n-1} \times D^{m-n} \quad .$$

L'ensemble W admet donc un point intérieur, comme il est réunion de la famille dénombrable de fermés $(V_j)_{j \in I}$, d'après le théorème de Baire un au moins de ces fermés, par exemple V_{j_0} admet un point intérieur. Ce qui entraine que $h_{j_0} = 0$ sur $(D)^{n-1} \times D^{m-n}$ car h_{j_0} est holomorphe sur $(D)^{n-1} \times D^{m-n}$, et ceci contredit la définition de l'ensemble $(h_{j_1})_{j_1 \in I}$. Il y a donc qu'un nombre fini de fonctions h_{j_1} qui ne sont pas identiquement nulles. Ce résultat étant vrai quelque soit la variable choisie parmi les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ (nous avons pris x_1) , il résulte que H est méromorphe sur D^m .

3. <u>Définition 3</u>.

<u>Nous dirons que l'origine est un point singulier du type de Fuchs pour le système</u> (s) <u>si</u> :

$$k_i^j = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad i \neq j \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$k_i^i = 1 \qquad\qquad 1 \leq j \leq m \; .$$

<u>Proposition 5</u>.

<u>Si l'origine est un point singulier du type de Fuchs pour</u> (s) <u>alors l'espace vectoriel E de ses solutions est faiblement singulier à l'origine</u>.

Démonstration.

La proposition 3, entraine que E est engendré par les colonnes d'une matrice

$$T_e(Q) = U(M) \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j}$$

où (e) est une base adaptée.

Il suffit donc de prouver que $U(0)$ est inversible.

Nous avons pour tout $j = 1,2,\ldots,n$:

$$x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} Q^A Q^F + U(A_j Q^A Q^F + Q^A F_j Q^F) = P_j U Q^A Q^F$$

avec

$$Q^A = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{A_j} \quad , \; Q^{-A} = \prod_{j=1}^{n} Q^{-A_j} \quad , \; Q^F = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{F_j} .$$

Donc

$$x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + U\,(A_j + Q^A F_j Q^{-A}) = P_j U$$

et en faisant tendre le point Q vers le point Q_o , il vient

$$U(0)\,(\widetilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i} \log.\, D_j^o) = P_j\,(0)\,U(0) \;.$$

Cette formule entraine que le noyau de $U(0)$ est invariant par les endomorphismes $\widetilde{\mathcal{L}}_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ associés aux matrices

$$\widetilde{\mathcal{L}}_j = \widetilde{A}_j + \frac{1}{2\pi i} \log.\, D_j^o$$

Donc d'après le théorème 2 du § 3 (page 20), l'espace vectoriel **E est faiblement** singulier à l'origine.

3. Soit $\mathfrak{F}^{p \times p}(\mathcal{D})$, le sous ensemble de $\mathfrak{J}^{p \times p}(\mathcal{D})$ des systèmes de Pfaff pour lesquels l'origine est un point singulier du type de Fuchs.

Définition 4.

Deux systèmes de Pfaff

$$(s_1)\ df = \omega_1 f$$

$$(s_2)\ dg = \omega_2 f$$

appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(\mathcal{D})$ seront dits équivalents sur $\mathcal{D}$, s'il existe une application holomorphe U de D^m dans Gl $(p,\mathbb{C})$ telle que la transformation $f = Ug$ transforme le système (s_1) en le système (s_2).

La relation d'équivalence ainsi définie s'étend aux germes de systèmes de Pfaff appartenant à $\mathcal{J}^{p\times p}(\mathcal{D})$.

Proposition 6.

Dans chaque classe d'équivalence de germes de systèmes de Pfaff défini par un élément de $\mathcal{F}^{p\times p}(\mathcal{D})$, il y a un germe défini par un système de la forme :

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j(x_1,x_2,\dots,x_n)}{x_j}\, dx_j$$

où les P_j $(j=1,2,\dots,n)$ sont des polynômes.

Démonstration.

Si (e) est une base adaptée de l'espace vectoriel des solutions du système considéré, nous avons :

$$T_e(Q) = U(M)\, Q^A\, Q^F \quad .$$

Il existe un disque $D' \subset D$, tel que $U(M)$ soit inversible dans D'^m ; la transformation $f = U(M)\,g$ nous donne le résultat annoncé.

Cette proposition est une autre forme du théorème de Floquet [9], et présente un grand intérêt dans l'étude de la classification des germes de système de Pfaff appartenant à $\mathcal{F}^{p\times p}(\mathcal{D})$.