PIERRE DOLBEAULT

Sur les faisceaux de diviseurs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1967, tome 3
« Conférences de J. Bros, P. Dolbeault, P. Lelong, A. Martineau et R. Stora », , exp. n^{o} 2,
p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1967__3__A2_0>

II

SUR LES FAISCEAUX DE DIVISEURS

par
Pierre DOLBEAULT

INTRODUCTION. -

Le but de cet exposé est de signaler des problèmes relatifs au faisceau des diviseurs (ou d'une généralisation des diviseurs) sur une variété analytique et d'en indiquer des solutions plus ou moins complètes.

Soient V une variété analytique complexe paracompacte, $\underline{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur V. Soient ρ un élément irréductible de $\underline{O}_x$ $(x \in V)$; $[\rho]$ le germe d'ensemble analytique complexe principal formé des zéros de ρ. Toute combinaison linéaire à coefficients entiers $\Sigma_k\, r_k [\rho_k]$ de tels germes est appelée un <u>germe de diviseur</u>. L'ensemble des germes de diviseurs constitue un faisceau de groupes abéliens appelé le faisceau des diviseurs et noté D ; N étant le faisceau (de groupes multiplicatifs) des fonctions méromorphes, $\underline{O}^*$ le faisceau (de groupes multiplicatifs) des fonctions holomorphes inversibles, on a : $D \approx N/\underline{O}^*$.

Si $\alpha = \Sigma_k\, r_k [\rho_k] \in D$, le germe d'ensemble $\cup_k [\rho_k]$ est appelé le <u>support de</u> α.

On appelle <u>diviseur à coefficients entiers</u> toute combinaison linéaire à coefficients entiers, localement finie, d'ensembles analytiques de V de codimension 1 ([5], [12] par exemple). La réunion des ensembles analytiques qui servent à définir un diviseur W est appelée le support $\underline{W}$ de W. Les diviseurs constituent un groupe abélien canoniquement isomorphe à $H^0(V,D)$.

Dans le cas où $\underline{W}$ est réunion de composantes irréductibles sans point singulier, il est clair que W, par ses composantes irréductibles, canoniquement orientées, affectées des coefficients ci-dessus, définit un cycle singulier, d'où une classe d'homologie entière, et, par dualité, une classe de cohomologie β'' de dimension 2 ; dans le cas où les composantes irréductibles ont des points singuliers, la construction ci-dessus de la classe β'' s'étend.

On peut associer, d'une autre façon, une classe de cohomologie à W. Considérons les suites exactes :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \underline{O}^{*} \longrightarrow N \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \underline{\underline{Z}} \longrightarrow \underline{O} \xrightarrow{e} \underline{O}^{*} \longrightarrow 0$$

où $\underline{\underline{Z}}$ est le faisceau constant des entiers et où e désigne l'homomorphisme : $\varphi \rightsquigarrow \exp(2\pi i \varphi)$.

A tout diviseur $W \in H^{o}(V, D)$ est associé un élément γ' de $H^{2}(V, \underline{\underline{Z}})$ par l'homomorphisme

$$H^{o}(V, D) \xrightarrow{\quad g \quad} H^{1}(V, \underline{O}^{*}) \xrightarrow{\ h\ } H^{2}(V, \underline{\underline{Z}})$$

γ' est d'ailleurs la classe caractéristique du fibré vectoriel $[W]$, de fibre $\underline{\underline{C}}$ défini par W de la façon suivante : pour un recouvrement ouvert (U_i) suffisament fin de V, le diviseur W étant donné, sur chaque U_i, par une fonction méromorphe f_i, le fibré $[W]$ est défini par les fonctions holomorphes de transition : f_i/f_j sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

PROBLEME 1.

Quelle relation y a-t-il entre les classes γ' et β'' ? Il est connu [5] et on verra au n° 1 que $\gamma' = \beta''$.

Dans le cas où V est une variété analytique réelle, en particulier la structure sous-jacente à une structure analytique complexe, on considère le faisceau $\underline{A}$ des germes de fonctions analytiques de variables réelles à valeurs complexes, $\underline{N}$ le faisceau des groupes multiplicatifs des germes de fonctions méromorphes de variables réelles à valeurs complexes, $\underline{A}^{*}$ le sous-faisceau de $\underline{N}$ des groupes multiplicatifs des germes inversibles dans $\underline{A}$. On appelle germe de pseudo-diviseur tout élément de $\underline{N}/\underline{A}^{*}$ et pseudo-diviseur tout élément W de $H^{o}(V, \underline{N}/\underline{A}^{*})$.

Là encore, il y a deux façons d'associer à W une classe de cohomologie entière de dimension 2 de V. Ces classes sont-elles égales ? (problème 1').

Dans le cas où V est une variété de Stein, tout élément de $H^2(V, \underline{\underline{Z}})$ est la classe de cohomologie d'un diviseur (Serre [11]). Dans le cas où V est une variété algébrique projective sans singularité, tout élément du sous-groupe $H^{1,1}(V, \underline{\underline{Z}})$ des classes de type $(1,1)$ de $H^2(V, \underline{\underline{Z}})$ est la classe de cohomologie d'un diviseur (Lefschetz-Hodge, voir [10]).

PROBLEME 2.

Si V est analytique réelle, tout élément de $H^2(V, \underline{\underline{Z}})$ est-il la classe de cohomologie d'un pseudo-diviseur ?

V étant, de nouveau, une variété analytique complexe, pour $q \geq 1$, on a le diagramme suivant :

$$H^q(V, D) \longrightarrow H^{q+1}(V, \underline{O}^*) \longrightarrow H^{q+2}(V, \underline{\underline{Z}})$$

déduit des suites exactes (1) et (2).

PROBLEME 3.

Quelle est l'image de $H^q(V, D)$ dans l'homomorphisme ci-dessus ?

Ce problème est ouvert. On ne connaît, pour le moment, qu'une résolution fine particulière d'un sous-faisceau D'_c du faisceau $D \otimes_{\underline{\underline{Z}}} \underline{\underline{C}}$ des diviseurs à coefficients complexes, ce qui fournit des propriétés de $H^q(V, D'_c)$ et de son image, par un homomorphisme canonique, dans $H^{q+2}(V, \underline{\underline{C}})$.

La plupart des résultats ci-dessous ont déjà été publiés ([5], [6], [7],); cependant ceux des n^{os} 2, 3 et 4 étaient établis pour la structure analytique réelle sous-jacente à une structure analytique complexe, ce qui n'introduit pas de difficultés essentielles, mais donne des propriétés faisant intervenir le type des formes différentielles ou des classes de cohomologie introduites. En outre, les résultats 2.4 et 3.2 sont nouveaux. Les résultats du n^o 5 ont paru dans une note récente [8].

1 . Solution du Problème 1 .

(Pour une démonstration complète, voir [5] , théorème 3.7) . Soit S l'ensemble des points singuliers de $\underline{W}$; la donnée de W équivaut à la donnée d'un entier sur chaque composante connexe de $\underline{W} \setminus S$, laquelle est canoniquement orientée, d'où un cycle b porté par $\underline{W} \setminus S$, puis un élément β' de $H^2(V \setminus S, \underline{\underline{Z}})$ et, vu l'isomorphisme

$$(3) \qquad H^2(V, \underline{\underline{Z}}) \xrightarrow{\approx} H^2(V \setminus S, \underline{\underline{Z}})$$

induit par l'injection : $V \setminus S \longrightarrow V$, un élément unique $\beta'' \in H^2(V, \underline{\underline{Z}})$. A cause de l'isomorphisme (3) , il suffit de démontrer que $\gamma' = \beta''$ dans le cas où $\underline{W}$ n'a pas de point singulier ; alors : $\beta'' = \beta'$ est la classe d'un 2-cocycle singulier B qui associe, à chaque 2-simplexe σ dont le bord ne rencontre pas $\underline{W}$ son coefficient d'enlacement avec le cycle b ; si le simplexe σ est suffisamment petit pour être dans un ouvert U sur lequel W est le diviseur de la fonction f , alors, ce coefficient d'enlacement est $(1/2\pi i)\int_\sigma df/f = (1/2\pi i) \times$ (variation de log f sur σ) .

Pour un recouvrement (U_j) assez fin de V , le diviseur W étant donné sur U_j par une fonction méromorphe f_j , les fonctions f_j/f_k sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ définissent un 1-cocycle relativement à (U_j) dont la classe de cohomologie a pour image canonique $g W$ dans $H^1(V, \underline{O}^*)$. Soit g_{jk} une détermination de $(1/2\pi i) \log (f_j/f_k)$; sur $U_j \cap U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$, la fonction $g_{jk} + g_{k\ell} + g_{\ell j} = c_{jk\ell}$ est un entier ; $(c_{jk\ell})$ est un cocycle du nerf de (U_j) dont la classe de cohomologie (de Čech) a pour image canonique, dans $H^2(V, \underline{\underline{Z}})$, l'élément γ' .

Dans l'isomorphisme qui identifie le groupe de cohomologie de Čech et le groupe de cohomologie singulière , à γ' est associée la classe de cohomologie singulière du cocycle B' défini ainsi : on considère le complexe singulier des simplexes petits d'ordre r où r est un recouvrement ouvert tel que la réunion des ouverts de r contenant un point $x \in V$ soit contenu dans un U_j ; soit σ un 2-simplexe singulier petit d'ordre r , à chacun de ses sommets a_1 , a_2 , a_3 , on associe un ouvert U_{j_1} , U_{j_2}, U_{j_3} qui le contient et B' est le cocycle qui associe $c_{j_1 j_2 j_3}$ à σ ; on vérifie que B' est cohomologue à B , d'où l'égalité cherchée : $\beta'' = \gamma'$.

2 . Solution du Problème 1' .

(Cf. [6] , théorème 8) . Des suites exactes

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow \underline{A}^* \longrightarrow \underline{N} \longrightarrow \underline{N}/\underline{A}^* \longrightarrow 0$$

$$(5) \qquad 0 \longrightarrow \underline{\underline{Z}} \longrightarrow \underline{A} \xrightarrow{e} \underline{A}^* \longrightarrow 0$$

(où e est l'homomorphisme : $\varphi \rightsquigarrow \exp(2\pi i \varphi)$)

résulte :

$$H^o(V, \underline{N}/\underline{A}^*) \xrightarrow{g_1} H^1(V, \underline{A}^*) \xrightarrow{h_1} H^2(V, \underline{\underline{Z}}) \quad .$$

A $W \in H^o(V, \underline{N}/\underline{A}^*)$ est associé, par g_1 , un fibré vectoriel $[W]$ analytique réel, de fibre $\underline{\underline{C}}$, dont la classe caractéristique est $\gamma' = h_1 g_1 W$.

Pour $a \in V$, soit $f \in \underline{N}_a$, on a : $f = \alpha \prod_k \rho_k^{r_k}$ avec : $\alpha \in \underline{A}_a^*$; $\rho_k \in \underline{A}_a$, irréductible, r_k entier $\neq 0$, le nombre de facteurs étant fini .

Soit n la dimension de la variété V .

2.1. Soit $W_a \in (\underline{N}/\underline{A}^*)_a$ défini par $f \in \underline{N}_a$. Avec les notations ci-dessus, soit $'\rho_k$ une fonction induisant le germe ρ_k en a et définie au voisinage de a . Soit σ un 2-simplexe singulier suffisamment petit rencontrant chaque composante Γ_k d'équation $'\rho_k = 0$ en un point au plus où la dimension est $n-2$, en aucun point où la dimension est $\leq n-3$ et tel que : $\partial\sigma$ rencontre Γ_k en des points isolés où la dimension est $n-1$. Alors

$$(1/2\pi i) \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial\sigma \, |\prod_k \rho_k| \geq \epsilon} df/f$$

est un entier qui est nul si $\dim_a \Gamma_k \leq n-3$ ou $\dim_a \Gamma_k = n-1$, pour tout les k .

Le coefficient d'enlacement utilisé dans le n° 1 est remplacé ici par une partie finie. On rappelle que, en un point régulier a de Γ_k, $\dim_a \Gamma_k$ est la dimension de la variété analytique réelle coïncidant avec Γ_k au voisinage de a ; en un point singulier, voir la définition de $\dim_a \Gamma_k$ dans [3].

2.2. On appelle support $\underline{W}$ de W l'ensemble des points de V où W induit un germe différent de l'élément neutre de $\underline{N}/\underline{A}^*$.

W étant donné, il existe un ensemble analytique S contenu dans $\underline{W}$, en tous les points duquel la dimension est $\leq n-3$ et possédant la propriété suivante : soit $V' = V \setminus S$; il existe une chaîne singulière localement finie $X' = \Sigma_p \alpha_p X'_p$ de V' dans laquelle :

1) les X'_p sont des variétés analytiques réelles, de dimension $n-2$, orientées canoniquement, dont la réunion $\underline{X}'$ constitue l'ensemble des points de $V' \cap \underline{W}$ où la dimension est $n-2$; l'adhérence $\underline{X}$ de $\underline{X}'$ dans V est $\underline{X}' \cup S'$ où $S' \subset S$ $(\dim S' \leq n-3)$;

2) les α_p sont des entiers ; de plus, si W_a est induit par W en $a \in V'$, alors, pour tout 2-simplexe σ satisfaisant aux conditions de 2.1, l'entier figurant dans 2.1 est le coefficient d'enlacement de X' et de $\partial\sigma$.

Démonstration. (Pour plus de détails, voir [6], théorème 8).

2.1. - Calcul élémentaire de partie finie d'une intégrale.

2.2. - W est induit par un diviseur W^* d'une complexifiée V^* de V. $\underline{W}^*$ étant le support de W^*, on a : $\underline{W} = \underline{W}^* \cap V$; les points de S sont certains points singuliers de $\underline{W}^*$, certains points singuliers des complexifiés [3] de $\underline{W}$ au voisinage des points de V, les points où la position relative de V et de $\underline{W}^*$ est singulière dans un sens qu'on peut préciser (voir [6]).

2.3. - Dans V', le cycle singulier (localement fini) $\Sigma_p \alpha_p X'_p$ définit un élément de $H_{n-2}(\underline{X}', \underline{\underline{Z}})$ (groupe d'homologie de $\underline{X}'$, de dimension $n-2$, dans l'homologie des espaces localement compacts de Borel-Moore [2]) et, par l'homomorphisme induit par l'injection canonique : $\underline{X}' \longrightarrow V'$, une classe $\beta \in H_{n-2}(V', \underline{\underline{Z}})$.

Soient $\beta' \in H^2(V', \mathbb{Z})$ *la classe duale de* β ; $\gamma' \in H^2(V, \mathbb{Z})$ *la classe caractéristique de* $[W]$. *Si* $g^* : H^2(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(V', \mathbb{Z})$ *est l'homomorphisme induit par l'injection canonique* : $V' \longrightarrow V$, *alors* : $g^* \gamma' = \beta'$.

La démonstration est analogue à celle qui est résumée au n° 1 , compte tenu de 2.2.

2.4. - *$\underline{X}$ étant défini comme dans* 2.2. , *la classe caractéristique de* $[W]$ *est duale d'un élément de* $H_{n-2}(V, \mathbb{Z})$, *image d'un élément de* $H_{n-2}(\underline{X}, \mathbb{Z})$ *dans l'homomorphisme* :

$$H_{n-2}(\underline{X}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-2}(V, \mathbb{Z})$$

induit par l'injection canonique : $\underline{X} \longrightarrow V$.

Démonstration : On a : $V' = V \setminus S$; $\underline{X}' = \underline{X} \setminus S'$;
$V \setminus \underline{X} = (V' \setminus X') \cup (S \setminus S')$.

Soient $\Delta : H_{n-2}(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(V, \mathbb{Z})$ et $\Delta' : H_{n-2}(V', \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(V, \mathbb{Z})$ les isomorphismes de dualité [2] .

On a le diagramme commutatif suivant dans lequel les lignes et les colonnes sont des suites exactes : [2]

$$\begin{tikzcd}
 & H_{n-1}(V \setminus \underline{X}, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(V' \setminus \underline{X}', \mathbb{Z}) \arrow[d, "\varphi_*"'] \\
H_{n-2}(S', \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-2}(\underline{X}, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-2}(\underline{X}', \mathbb{Z}) \arrow[d, "\psi_*"'] \\
H_{n-2}(S, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-2}(V, \mathbb{Z}) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d] & H_{n-2}(V', \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H_{n-2}(S \setminus S', \mathbb{Z}) \arrow[r] & H_{n-2}(V \setminus \underline{X}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "h_*"] & H_{n-2}(V' \setminus \underline{X}', \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Les groupes de la première colonne sont nuls à cause de la dimension .

Alors $g_* = \Delta'^{-1} g \Delta$ est injectif et si $\gamma = \Delta^{-1} \gamma'$, d'après 2.3 , on a : $\beta = g_* \gamma$.

D'après 2.3 , β est l'image, par l'homomorphisme ψ_* de $\Sigma_p \alpha_p X'_p$, donc a une image nulle dans $H_{n-2}(V'\backslash \underline{X}', \underline{\underline{Z}})$; alors, à cause de l'injectivité de h_* , γ a une image nulle dans $H_{n-2}(V\backslash \underline{X}, \underline{\underline{Z}})$, i.e. est l'image, dans l'homomorphisme f_* d'un élément de $H_{n-2}(\underline{X}, \underline{\underline{Z}})$ dont l'image par $g_*| X$ est égale à $\Sigma_p \alpha_p X'_p$ à l'addition près d'un élément de Im φ_* .

3 . Problème 2 .

3.1. - Tout élément de $H^2(V, \underline{\underline{Z}})$ est la classe caractéristique d'un fibré [W] défini par un pseudo-diviseur W .

Démonstration . On considère la suite exacte déduite de (5) :

$$H^q(V, \underline{A}) \longrightarrow H^q(V, \underline{A}^*) \xrightarrow{h} H^{q+1}(V, \underline{\underline{Z}}) \longrightarrow H^{q+1}(V, \underline{A})$$

$\underline{A}$ étant cohérent, d'après le théorème B pour les variétés analytiques réelles [1] , on a : $H^q(V, \underline{A}) = 0$ pour $q \geq 1$, donc h est un isomorphisme pour $q = 1$.

Mais tout élément de $H^1(V, \underline{A}^*)$ est la classe d'un fibré vectoriel analytique réel qui possède une section continue, donc une section analytique réelle (d'après un résultat inédit de H. CARTAN [4], conséquence d'un théorème de GRAUERT [9]), donc :

$$H^o(V, \underline{N}/\underline{A}^*) \longrightarrow H^1(V, \underline{A}^*)$$

est surjectif .

3.2. - Alors, d'après 3.1. et 2.4. :

Toute classe de $H_{n-2}(V, \underline{\underline{Z}})$ est définie comme dans 2.4.

4 . Application .

(Cf. [7] où on trouvera des démonstrations plus détaillées) .

4.1. - Soient A^1 le faisceau des germes de formes différentielles C^∞, à valeurs complexes, de degré 1 , sur V ;

B^1 (resp. B^2) le faisceau des germes de formes différentielles C^∞, à valeurs complexes, de degré 1 (resp. 2), fermées sur V .

D'après le lemme de Poincaré, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow B^1 \longrightarrow A^1 \xrightarrow{d} B^2 \longrightarrow 0 \quad .$$

Soit m^1 le faisceau des germes de 1-formes différentielles méromorphes, de variables réelles, à valeurs complexes qui sont d-fermées . Soit μ^1 le sous-faisceau de groupes de m^1 constitué des germes de la forme: $(1/2\pi i)(df/f)$ où $f \in \underline{N}$. Soit $\underline{M}^1 = A^1 + \mu^1$.

Lemme .

$$\underline{M}^1/B^1 \approx A^1/B^1 \oplus \mu^1/B^1 \quad .$$

Considérons les homomorphismes suivants :

$$H^o(V,\underline{M}^1) \longrightarrow H^o(V,\underline{M}^1/B^1) \longrightarrow H^o(V,\mu^1/B^1) \longrightarrow H^o(V,\underline{N}/\underline{A}^*) ,$$

induits, respectivement, par la projection sur un quotient, sur un facteur direct, et par l'isomorphisme : $\mu^1/B^1 \longrightarrow \underline{N}/\underline{A}^*$, dont l'inverse est défini par : $\varphi \longrightarrow (1/2\pi i)(d\varphi/\varphi)$.

Alors le pseudo-diviseur, image de $\omega \in H^o(V,\underline{M}^1)$ dans $H^o(V,\underline{N}/\underline{A}^*)$ sera dit le résidu de ω .

4.2. - Soit (θ,ω) un couple de formes différentielles où : $\theta \in H^o(V,B^2)$ et $\omega \in H^o(V,M^1)$. Soit n la dimension de la variété V , toute chaîne singulière , C^∞ , localement finie , c , à coefficients entiers, possédant les propriétés suivantes, sera dite admissible pour le couple (θ , ω) :

(1) Le bord ∂c de c ne rencontre le support $\underline{W}$ du résidu W de ω qu'en des points où la dimension est $(n-1)$ et ∂c coupe $\underline{W}$ transversalement.

(2) c ne rencontre l'ensemble des points de $\underline{W}$ où la dimension est $n-2$ qu'en des points isolés et ne rencontre $\underline{W}$ en aucun point où la dimension est $\leq n-3$.

On considère l'expression $\int'_{\partial c}$ ayant la signification suivante : décomposons c en une somme de simplexes σ_j admissibles et suffisamment petits pour que chacun d'eux soit contenu dans un ouvert u_j d'un recouvrement de V dans lequel $\omega = \alpha_j + \beta_j$, avec :

$$\beta_j \in H^o(u_j, A^1) \quad \text{et} \quad \alpha_j = (1/2\pi i)(df_j/f_j) \quad \text{où} \quad f_j \in H^o(u_j, \underline{N}) \quad ;$$

alors, si

$$f_j = \prod_k \rho_{jk}^{r_k} \text{, on pose :}$$

$$\int'_{\partial c} \omega = \sum_j \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \sigma_j |\prod_k \rho_{jk}| \geq \varepsilon} \omega \quad .$$

Le couple (θ, ω) est dit un <u>$\underline{\underline{Z}}$-couple</u> si :

$$R[(\theta, \omega), c] = \int_c \theta - \int'_{\partial c} \omega \quad \text{est un entier} \quad .$$

Alors, en dehors des singularités de ω, on a : $d\omega = \theta$.
Considérons la relation : $R[(\theta,\omega),c] = R[(\theta_1,\omega_1),c]$, pour toute chaîne c admissible pour les deux couples (θ,ω) et (θ_1,ω_1) ; c'est une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence des $\underline{\underline{Z}}$ - couples constitue un groupe commutatif qu'on note $B^2(V, \underline{\underline{Z}})$.

4.3. - <u>Il existe un épimorphisme canonique</u> :

$$h : B^2(V, \underline{\underline{Z}}) \longrightarrow H^2(V, \underline{\underline{Z}}) \quad .$$

<u>Démonstration</u>.

On montre (à l'aide de 2.3) que la classe caractéristique associée au résidu de ω ne dépend que de la classe d'équivalence du couple (θ,ω) ; d'où l'existence d'un homomorphisme h. Pour montrer que h est surjectif, on utilise 3.1. et le lemme suivant :

Soit $\theta \in H^o(V, B^2)$ et $W \in H^o(V, \underline{N}/\underline{A}^*)$ dont l'image de la classe caractéristique dans : $H^2(V, \underline{Z}) \longrightarrow H^2(V, \underline{C})$ est définissable (à l'aide du théorème de de Rham) par θ, alors, il existe $\omega \in H^o(V, \underline{M}^1)$ tel que : $d\omega = \theta$ et que le résidu de ω soit W.

4.4. - Le noyau de h est le sous-groupe de $B^2(V, \underline{Z})$ formé des classes de couples $[0, (-1/2\pi\, i)\, d \log \varphi]$, où $\varphi \in H^o(V, \underline{A})$.

Cela résulte de ce que, si la classe caractéristique associée à un pseudo-diviseur W est nulle, W est le pseudo-diviseur d'une fonction analytique de variables réelles, à valeurs complexes sur V.

5. Sur le Problème 3. [8]

5.1. - Soit, de nouveau, V une variété analytique complexe paracompacte. Soit m^1 le sous-faisceau du faisceau des 1-formes différentielles méromorphes, d-fermées, constitué des germes :

$\omega \prod_k \rho_k^{-1}$ dans lesquels ω est un germe de 1-forme holomorphe, ρ_k est un germe de fonction coordonnée complexe locale et $[\rho_j] \neq [\rho_\ell]$ pour $j \neq \ell$. Soit E^1 le sous-faisceau de m^1 constitué des germes de formes holomorphes ; alors, $D'_c = m^1/E^1$ est isomorphe au faisceau des germes de diviseurs à coefficients complexes dont les supports sont des réunions de germes de sous-variétés analytiques complexes de codimension 1. On considère les faisceaux de $\underline{O}$-modules suivants : A, le faisceau des formes différentielles C^∞ à valeurs complexes ; $A^{p,q}$, le sous-faisceau de A, constitué des germes de formes de type (p,q) ; M le faisceau des fonctions méromorphes ; $T = M \oplus_{\underline{O}} A$ est appelé le faisceau des formes différentielles semi-méromorphes ; $m^{p,q}$, le sous-faisceau de T constitué des germes $\Sigma_k\, \rho_k^{-p} \varphi_k^{p,q}$ où $\varphi_k^{p,q} \in A^{p,q}$ et où ρ_k est un germe de fonction coordonnée complexe locale ; on pose en outre :

$$n^{p,q} = \bigoplus_{t=0}^{q} m^{p+t,q-t} \; ; \; B^{p,q} = \bigoplus_{t=0}^{q} A^{p+t,q-t} \; ; \; D^{p,q} = n^{p,q}/B^{p,q} \quad .$$

5.2. - Le faisceau D'_c possède la résolution fine :

$$(R) \quad 0 \longrightarrow D'_c \xrightarrow{j} D^{1,o} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} D^{1,q} \xrightarrow{d} \cdots$$

dans laquelle j est définie par l'injection canonique : $m^1 \longrightarrow n^{1,o}$ et d par la différentiation extérieure.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Soit $\underline{S}_x$ l'ensemble, en $x \in V$, de tous les germes de sous-variétés analytiques complexes de codimension 1 de V et soit $m^{p,q}_{(s)}$ le sous-module de $m^{p,q}_x$ formé des éléments ayant $s \in \underline{S}_x$ pour ensemble singulier. Alors :

$$m^{p,q}_x / A^{p,q}_x = \bigoplus_{s \in \underline{S}_x} m^{p,q}_{(s)} / A^{p,q}_x \quad .$$

Posant : $n^{p,q}_{(s)} = \bigoplus_{t=0}^{q} m^{p+t,q-t}_{(s)}$, on est ramené à montrer l'exactitude de :

$$n^{p,q}_{(s)} \xrightarrow{d} n^{p,q+1}_{(s)} \xrightarrow{d} n^{p,q+2}_{(s)}$$

ce qui résulte du lemme de Grothendieck (tout germe de (p,q)-forme C^∞, d''-fermé, avec $q \geq 1$ est la d''-différentielle d'un germe C^∞ de type $(p, q-1)$), et du fait que tout germe de p-forme méromorphe fermée $(p \geq 2)$ ayant pour ensemble polaire s à la multiplicité p est la différentielle d'une $(p-1)$-forme méromorphe ayant pour ensemble polaire s à la multiplicité $(p-1)$.

Il résulte de cela un "théorème de de Rham"

5.3. - Soit $\underline{K}^{1,q}(V, \underline{C})$ le q-ième groupe de cohomologie du complexe des sections défini par la résolution (R), alors, il existe un isomorphisme canonique :

$$H^q(V, D'_c) \xrightarrow{\approx} \underline{K}^{1,q}(V, \underline{C})$$

5.4. - <u>Application</u> . Si V <u>est une variété algébrique projective sans singularité</u> , munie d'une métrique Kählérienne de forme fondamentale $\omega^{1,1}$, on dit qu'une classe de cohomologie de degré $q+1$ est <u>non primitive</u> [12] si, dans le théorème de de Rham (classique), elle est associée à la classe d'une forme différentielle $\omega^{1,1} \wedge \varphi$; on sait [5] qu'il existe un monomorphisme canonique $g_1 : H^{q+1}(V, E^1) \longrightarrow H^{q+2}(V, \underline{\underline{C}})$; soit g l'homomorphisme : $H^q(V, D'_c) \longrightarrow H^{q+2}(V, \underline{\underline{C}})$ composé de l'homomorphisme : $H^q(V, D'_c) \longrightarrow H^{q+1}(V, E^1)$ défini par la suite exacte :

$0 \longrightarrow \mathbf{E}^1 \longrightarrow m^1 \longrightarrow D'_c \longrightarrow 0$ (qui définit D'_c) et de g_1 , alors :

<u>l'image de</u> g <u>contient le sous-espace des classes non primitives de</u> V .

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. ATIYAH and F. HIRZEBRUCH, Analytic cycles on complex manifolds, Topology, 1 (1962), 25-45.

[2] A. BOREL and J. C. MOORE, Homology theory for locally compact spaces, Michigan Journal of Math., 7 (1960), 137-160.

[3] H. CARTAN, Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes Bull. Soc. Math. de France, 85 (1957), 77-99.

[4] H. CARTAN, Espaces fibrés analytiques réels (non publié), conférence faite à la Faculté des Sciences de Poitiers, décembre 1959.

[5] P. DOLBEAULT, Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe I, Ann. of Math., 64 (1956), 83-130.

[6] P. DOLBEAULT, Une généralisation de la notion de diviseur, Atti del Convegno intern. di Geom. alg., Torino (mai 1961).

[7] P. DOLBEAULT, Sur le groupe de cohomologie entière, de dimension deux, d'une variété analytique complexe, Rend. di Mat., 21 (1962), 219-239.

[8] P. DOLBEAULT et G. ROBIN, Sur le faisceau des diviseurs à coefficients complexes, C.R. Acad. Sci. Paris, 262 (1966), 1452-1455 et un article à paraître.

[9] H. GRAUERT, On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, Ann. of Math. 68 (1958), 460-472.

[10] K. KODAIRA and D. C. SPENCER, Divisor class groups on algebraic varieties, Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1954), 872-877.

[11] J. P. SERRE, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953, 57-68.

[12] A. WEIL, Introduction à l'étude des variétés kählériennes, A.S.I. 1267, Hermann, Paris, 1958.