Raymond Stora

Le programme linéaire dans l'espace des impulsions

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1966, tome 2
« Conférences de G. Bengel, P. Lelong, R. Omnes et R. Stora », , exp. n° 4, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1966__2__A4_0>

Décembre 1965

IV

LE PROGRAMME LINEAIRE DANS L'ESPACE DES IMPULSIONS.

par

Raymond STORA

Service de Physique Théorique

C.E.N. Saclay - Boite Postale n°2

91 - GIF-sur-YVETTE - FRANCE - *

La situation décrite par Bros se résume comme suit

Champs A(x) Satisfaisant aux axiomes de Wightman	$\Leftrightarrow$	Distributions de Wightman $\mathcal{W}_P$ satisfaisant aux conditions $\mathcal{W}$
<--->		Distributions retardées généralisées satisfaisant aux conditions R.

Quelques commentaires sur la faiblesse actuelle de <---> seront faits plus bas, mais on a bon espoir que <---> devienne $\Leftrightarrow$ dans un temps fini.

LES CONDITIONS $\mathcal{R}$

Pour tout $n>0$ on considère l'espace $\mathbb{R}^{4n} \subset \mathbb{R}^{4(n+1)}$ des vecteurs $P = (p_0, \dots, p_n)$ dont chaque composante p_i est un vecteur de $\mathbb{R}^4$, satisfaisant $\sum_{i=0}^{n} p_i = 0$. Les carrés de quadrivecteurs dans $\mathbb{R}^4$ seront des carrés de Minkowsky :

On considère aussi $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, espace des vecteurs $S = (s_0, \dots, s_n)$, $s_i \in \mathbb{R}^1$, $\sum_{i=0}^{n} s_i = 0$.

On dénotera par I tout sous ensemble d'indices pris parmi $(0, \dots, n)$.

On trace dans l'espace des S l'ensemble des plans d'équations $s_I \equiv \sum_{i \in I} s_i = 0$

On appellera γ_α tout ouvert de l'espace des S, dont la frontière appartient à des plans $s_I = 0$, à l'intérieur duquel tous les s_I ont un signe déterminé. Les γ_α sont des cônes polyédraux dont les arêtes unidimensionnelles sont de la forme $s = \lambda\sigma$, $\lambda \geq 0$ $\sigma \in \{S\}$.

(R 1) A tout γ_α est associée une distribution tempérée $\tilde{\tau}_\alpha(p_0, \dots p_n) = \delta(\sum_{i=0}^{n} p_i)\tilde{\rho}_\alpha(P)$; $\tilde{\rho}_\alpha$ est la valeur au bord sur les réels d'une fonction holomorphe - que nous dénoterons encore $\tilde{\rho}_\alpha$ - dans le tube convexe $\mathcal{T}_\alpha$ à base imaginaire $Im\, P \in V_\alpha$

$$V_\alpha = \Big\{ P \;\Big|\; P = \sum_{\substack{\sigma^\lambda = \text{arête} \\ \text{de } \gamma_\alpha}} \mu_\lambda \sigma^\lambda ;\ \mu_\lambda < V^+ \Big\} :$$

$$\tilde{\rho}_\alpha (P) = \lim_{\substack{K \to 0 \\ K \in V_\alpha}} \tilde{\rho}_\alpha (P + iK)$$

(R'1) $\tilde{\rho}_\alpha(P)$ est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée $\rho_\alpha(X)$ dont le support est le dual de V_α.

(R2) Si γ_α et γ_β ont une frontière commune de dimension $n-1$, d'équation $s_I = 0$, alors, leurs valeurs au bord sur les réels aussi bien que sur les complexes, où $Im\, p_I = 0$ coïncident lorsque $(Re\, p_I)^2 < M_I^2$, (et éventuellement $(Re\, p_I)^2 \neq m_I^2 < M_I^2$) m_I^2 et M_I^2 sont des nombres réels positifs donnés par la physique.

(R3) Si quatre γ's "contigus" dénotés par $\gamma_{IJ}^{\pm\pm}$ ont deux a deux deux frontières communes $s_I = 0$, $s_J = 0$, ($s_I \gtrless 0$, $s_J \gtrless 0$ dans $\gamma_{IJ}^{\pm\pm}$), telles que $I \not\subset J$, $\complement I \not\subset J$, $I \not\subset \complement J$, $\complement I \not\subset \complement J$, alors, on a l'identité sur les valeurs aux bords à l'intersection des frontières communes de $\gamma_{IJ}^{\pm\pm}$:

$$\tilde{\rho}_{IJ}^{++} - \tilde{\rho}_{IJ}^{+-} - \tilde{\rho}_{IJ}^{-+} + \tilde{\rho}_{IJ}^{--} = 0$$

(R4 : les ρ^α sont invariants de Lorentz).

<u>Commentaires</u>.

Les relations (W) sont de deux sortes : $W = W_L \cup W_{NL}$ où les W_L sont linéaires, les W_{NL} sont non linéaires. Les relations (R 1,2,3,4) décrites ici sont linéaires En ce qui concerne ---> on a bon espoir de montrer que

$\{w_P\}$ satisfaisant $W_L \leftrightarrow \{\rho_\alpha\}$ satisfaisant

Ce travail a été fait pour $n = 2$ [1]; l'échec enregistré pour $n > 2$ provient principalement de l'ignorance de la solution du problème d'enveloppe d'holomorphie posé par (R 1234).

La Solution de (R3)

Les identités linéaires (R3) se trouvent être des identités entre éléments d'une algèbre de Lie. Envisagées dans l'espace des x , sur les ρ^{α}, elles donnent lieu, en vertu des conditions de régularité[4] des supports des ρ^{α} (cf. R1) à la décomposition suivante trouvée par Bros : Soient (ij) les arêtes unidemensionelles définies par $s_k = 0,\ k \neq i, j$; on considère les cônes simpliciaux S_a définis par n telles arêtes. A tout S_a on associe une fonction $\tilde{f}_a$ dans le tube $\mathcal{T}_a$:

$$Im\ p_i = \sum_{\substack{\lambda = \text{arête} \\ \text{de } S_a}} \mu_\lambda s_i^\lambda \quad ; \quad \mu_\lambda \in V^+$$

Alors (R3) implique la décomposition de Bros

$$\tilde{\rho}_\alpha = \sum_{S_a \supset \gamma_\alpha} \tilde{f}_a$$

LE PROBLEME D'ENVELOPPE D'HOLOMORPHIE.

En termes des $\tilde{f}_a$, (R2) devient pour le couple $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ voisinant le long de $s_I = 0$:

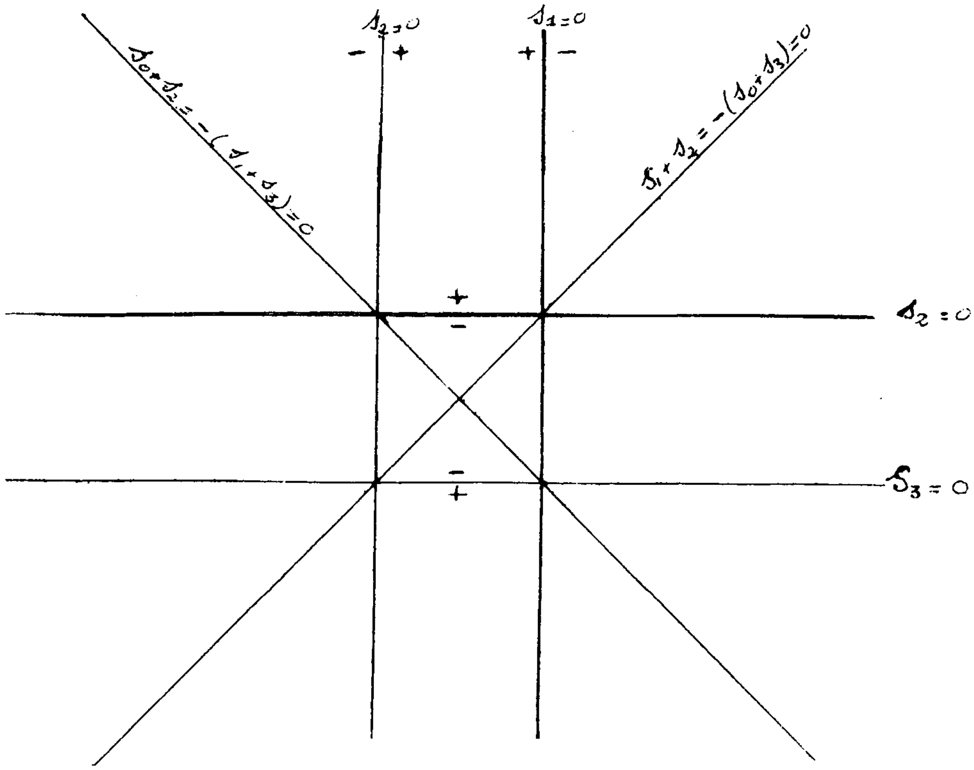
$$\underset{Im\ p_I = 0}{\text{val. au bord}} \left(\sum_{\substack{S_a \supset \gamma_\alpha \\ S_a \not\supset \gamma_\beta}} \tilde{f}_a - \sum_{\substack{S_b \supset \gamma_\beta \\ S_b \not\supset \gamma_\alpha}} \tilde{f}_b \right) = 0 \qquad , \quad (Re\ p_I^2) < M_I^2 \quad (R'2)$$

ce qui, par le théorème de l'"Edge of the wedge" permet d'étendre $\sum_{S_a \supset \gamma_\alpha \not\supset \gamma_\beta} \tilde{f}_a$ et $\sum_{S_b \supset \gamma_\beta \not\supset \gamma_\alpha} \tilde{f}_b$ à un voisinage complexe de $\overline{\bigcap_{\substack{S_a \supset \gamma_\alpha \\ S_a \not\supset \gamma_\beta}} \mathcal{T}_a \cap \bigcap_{\substack{S_b \supset \gamma_\beta \\ S_b \not\supset \gamma_\alpha}} \mathcal{T}_b}$ au dessus de $(Re\ p_I)^2 < M_I^2$

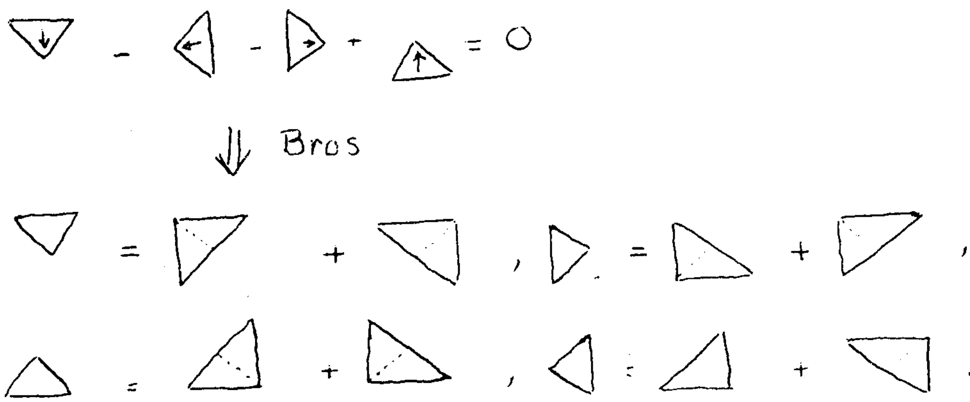
On va rapidement voir que la résolution des relations linéaires (R3) de l'algèbre de Lie sous jacente se propagent dans le complexe en s'agrémentant de problèmes d'enveloppes d'holomorphie.

<u>Exemple</u> : $n = 3$

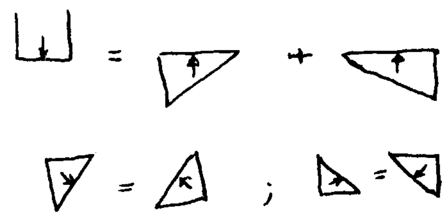
On dessine l'espace des $\mathcal{S}$ en coupant par un plan, on cbtient ainsi la moitié des cellules γ_α .



(R3) :



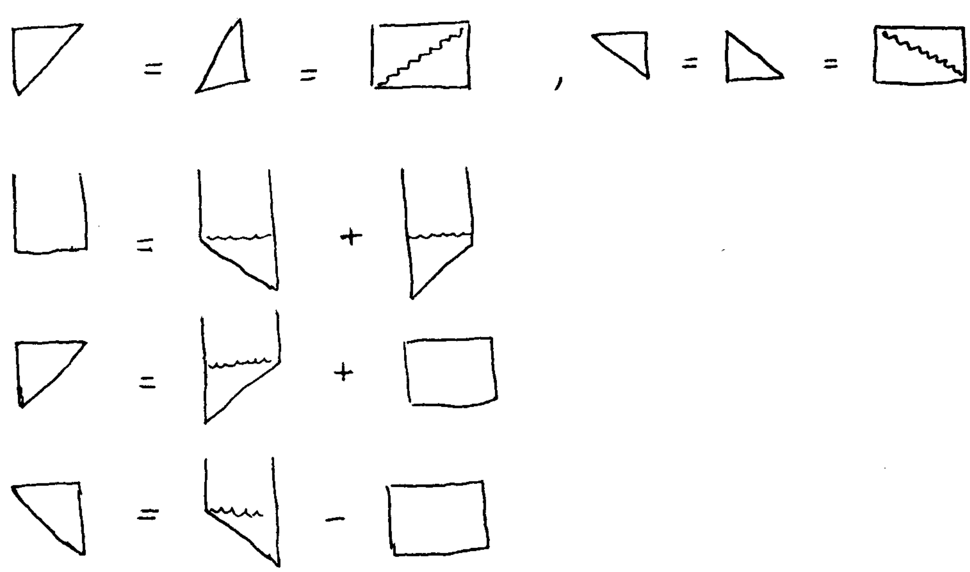
(R'2) par exemple : i/ ii/



etc.

[Remarque : dans tout ce qui suit, chaque polyèdre $\mathfrak{P}$ correspond à une fonction analytique dans le tube $\mathrm{Im}\, p_i = \sum_{\substack{\lambda = \text{arête} \\ \text{de } \mathfrak{P}}} \mu_\lambda s_i^\lambda$, $\mu_\lambda \in V^+$]

La solution de ii/ s'obtient soit par complétion analytique soit par la méthode décrite pour i/ , qui résoud aussi n'importe lequel des (R'2) La réponse est la suivante :



avec la notation qu'un domaine représenté par un polyèdre $\mathfrak{L}$ traversé d'une ligne ondulante est l'intersection du tube représenté par le polyèdre $\mathscr{P}$ par le domaine $p_I^2 \neq M_I^2 + \rho$, ρ réel > 0 où $s_I = 0$ est l'équation du plan "ondulant".

En général.[1] la solution de $(R'2)$ est

$$\tilde{f}_a = \sum_{\substack{S_{a'} \supset \gamma_\alpha \\ S_{a'} \not\supset \gamma_\beta}} \tilde{f}_{aa'} + \sum_{\substack{S_b \supset \gamma_\beta \\ S_b \not\supset \gamma_\alpha}} \underset{\sim}{\tilde{f}}_{ab} + \delta_a \, . \quad (R'2_{\alpha\beta})$$

où $\tilde{f}_{aa'} = - \tilde{f}_{a'a}$ est holomorphe dans l'union convexe de $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_{a'}$; $\underset{\sim}{\tilde{f}}_{ab} = - \underset{\sim}{\tilde{f}}_{ba}$ est holomorphe dans l'union convexe de $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{T}_b$ privée de la coupure $p_I^2 = M_I^2 + \rho$, ρ réel > 0 et δ_a est une somme de fonctions holomorphes dans des tubes contenant S_a .

Il est alors clair qu'il faut recoller ensemble les expressions obtenues pour $\tilde{f}_a$ à partir des edges of the wedges correspondant aux n faces de S_a .

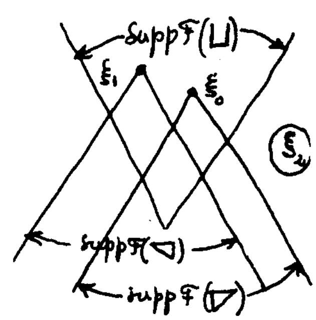
- <u>Démonstration de $R'_{\alpha\beta}2$ dans le cas i/.</u>

On passe aux transformées de Fourier : soient ξ_0, ξ_1, ξ_2, les variables conjuguées de p_0, p_1, p_2 .

$$\text{support } \mathcal{F}(\sqcup) = \{ \xi \mid \xi_0 \in \bar{V}^+, \ \xi_1 \in \bar{V}^+ \ \ \xi_2 \in \bar{V}^+ \}$$

$$\text{support } \mathcal{F}(\triangle) = \{ \xi \mid \xi_0 \in \bar{V}^+ \ \ \xi_1 \in \bar{V}^+ \ \ \xi_2 - \xi_0 \in \bar{V}^- \}$$

$$\text{support } \mathcal{F}(\bigtriangledown) = \{ \xi \mid \xi_0 \in \bar{V}^+ \ \ \xi_1 \in \bar{V}^+ \ \ \xi_2 - \xi_1 \in \bar{V}^- \}$$



On considère $C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \mathcal{F}(\sqcup) - \mathcal{F}(\triangledown) - \mathcal{F}(\triangleleft)$

$$\text{support } C = \text{supp. } \mathcal{F}(\sqcup) \cup \text{supp } \mathcal{F}(\triangledown) \cup \text{supp } \mathcal{F}(\triangleleft)$$

$(\mathcal{R}'2_{\alpha\beta})$ signifie $\tilde{C}(\xi_0, \xi_1, p_2) = 0$, $p_2^2 < M_2^2$

Alors une extension de la méthode de Dyson[5] montre qu'il existe une solution $\Gamma(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \varkappa_2)$, paire en $\varkappa_2$, tempérée, de l'équation de KleinGordon

$$KG\ \Gamma = \left(\Box_{\xi_2} - \frac{\partial^2}{\partial \varkappa_2^2}\right) \Gamma(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \varkappa_2) = 0$$

telle que

$$\Gamma(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \varkappa_2)\Big|_{\varkappa_2 = 0} = C(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$$

Les propriétés de support de cette solution Γ (théorème du double cône, théorème d'Huygens), montrent que

$$\text{supp } \Gamma(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \varkappa_2) = \text{supp } C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \times (-\infty < \varkappa_2 < +\infty)$$

La régularité de ce support[4] permet d'écrire $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{F}(\sqcup)} - \Gamma_{\mathcal{F}(\triangleleft)} - \Gamma_{\mathcal{F}(\triangledown)}$ où les $\Gamma_{\mathcal{F}(?)}$ ont pour supports : supp $\mathcal{F}(?) \times (-\infty < \varkappa_2 < +\infty)$.

d'où : $$KG\left(\Gamma_{\mathcal{F}(\sqcup)} - \Gamma_{\mathcal{F}(\triangledown)} - \Gamma_{\mathcal{F}(\triangleleft)}\right) = 0$$

On peut donc écrire (régularité des supports) :

$$KG\ \Gamma_{\mathcal{F}(\sqcup)} = \Delta_{\sqcup,\triangledown} + \Delta_{\sqcup,\triangleleft}$$

$$KG\ \Gamma_{\mathcal{F}(\triangledown)} = \Delta_{\sqcup,\triangledown} + \Delta_{\triangledown,\triangleleft} \qquad (*)$$

$$KG\ \Gamma_{\mathcal{F}(\triangleleft)} = \Delta_{\sqcup,\triangleleft} - \Delta_{\triangledown,\triangleleft}$$

avec $\Delta_{?,!}$ tempérée de support $\operatorname{supp} \Gamma_{\mathcal{F}(?)} \cap \operatorname{supp} \Gamma_{\mathcal{F}(!)}$.

Soient alors D_{ret}, D_{av}, les solutions élémentaires de l'équation de Klein Gordon avec support dans $\xi_2^0 > 0$, $\xi_2^0 < 0$ respectivement, et invariantes de Lorentz.

On résoud facilement (*)

$$\Gamma_{\mathcal{F}(\sqcup)} = \mathring{\Gamma}_{\mathcal{F}(\sqcup)} + D_{ret} * \left(\Delta_{\sqcup,\triangledown} + \Delta_{\sqcup,\triangleleft}\right)$$

$$\Gamma_{\mathcal{F}(\triangledown)} = \mathring{\Gamma}_{\mathcal{F}(\triangledown)} + D_{av} * \left(\Delta_{\sqcup,\triangledown} + \Delta_{\triangledown,\triangleleft}\right)$$

$$\Gamma_{\mathcal{F}(\triangleleft)} = \mathring{\Gamma}_{\mathcal{F}(\triangleleft)} + D_{av} * \left(\Delta_{\sqcup,\triangleleft} - \Delta_{\triangledown,\triangleleft}\right)$$

en observant que, en vertu des supports de $D_{ret,av}$, et des $\Delta_{?,!}$ les convolutions sont des distributions tempérées, solutions particulières des équations (*) , de même supports que les $\Gamma_{\mathcal{F}(?)}$ auxquelles elles contribuent, et que les $\mathring{\Gamma}_{\mathcal{F}(?)}$, solutions de l'équation de Klein Gordon homogène ont par conséquent les mêmes supports que les $\Gamma_{\mathcal{F}(?)}$ et sont nulles car ces supports sont bornés soit vers les $\xi_2^0 < 0$ soit vers les $\xi_2^0 > 0$.

Il s'en suit que

$$\Gamma = D * \left(\Delta_{\sqcup,\triangledown} + \Delta_{\sqcup,\triangleleft}\right)$$

où $D = D_{ret} - D_{av}$ est la solution impaire invariante de Lorentz de l'équation de Klein Gordon.

D'où, la restriction à $\varkappa_2 = 0$ étant licite pour une solution de l'équation homogène,

$$C(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = \int d^4u_2 \, d\varkappa_2 \; D(\xi_2 - u_2, \varkappa_2) \times$$
$$\times \left[\Delta_{\sqcup,\triangledown}(\xi_0, \xi_1, u_2, \varkappa_2) + \Delta_{\sqcup,\triangleleft}(\xi_0, \xi_1, u_2, \varkappa_2)\right]$$

En passant aux transformées de Fourier :

$$\tilde{C}(p_0, p_1, p_2) = \int d\tau_2 \, \epsilon(p_2^0) \, \delta(p_2^2 - M_2^2 - \tau_2^2) \times$$
$$\times \left[\tilde{\Delta}_{\sqcup\triangledown}(p_0, p_1, p_2, \tau_2) + \tilde{\Delta}_{\sqcup,\triangleleft}(p_0, p_1, p_2, \tau_2)\right]$$

(dans la suite on remplacera $\sqcup,\triangledown$ par $\bigcup$

$\sqcup,\triangleleft$ par $\bigcup$

pour rappeler que les $\tilde{\Delta}$, s'étendent analytiquement dans les tubes indiqués)

Comme les $\tilde{\Delta}$ sont tempérées, on peut les écrire $(\tau_2^2 + a^2)^N \tilde{\Delta}'$ pour N entier suffisamment grand, et a^2 réel, de sorte que $\tilde{\Delta}'$ soit bornée en τ_2, et, en utilisant la décomposition

$$\epsilon(p^0)\,\delta(p^2 - M^2 - \tau^2) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta \in V^+}} \left[\frac{1}{(p+i\eta)^2 - M^2 - \tau^2} - \frac{1}{(p-i\eta)^2 - M^2 - \tau^2}\right]$$

on obtient une décomposition de $\widetilde{C}$ en valeurs au bords de fonctions analytiques :

$$\widetilde{C}(p_0,p_1,p_2) = (p_2^2 - M_2^2 + a^2)^N \Big[\underset{\substack{\eta\in V^+\\ \eta\to 0}}{\text{val. bord}} \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\tau_2}{(p_2+i\eta)^2 - M_2^2 - \tau_2^2}\left(\widetilde{\Delta}'_{\sqcup} + \widetilde{\Delta}'_{\sqcup}\right)$$

$$- \underset{\substack{\eta\in V^+\\ \eta\to 0}}{\text{val. bord}} \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\tau_2}{(p_2-i\eta)^2 - M_2^2 - \tau_2^2}\,\widetilde{\Delta}'_{\sqcup}(p_0,p_1,p_2,\tau_2)$$

$$- \underset{\substack{\eta\in V^+\\ \eta\to 0}}{\text{val. bord}} \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\tau_2}{(p_2-i\eta)^2 - M_2^2 - \tau_2^2}\,\widetilde{\Delta}'_{\sqcup}(p_0,p_1,p_2,\tau_2)\Big]$$

Transformant de Fourier cette décomposition dont les supports en ξ ont déjà été vus et comparant avec $C(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \mathcal{F}(\sqcup) - \mathcal{F}(\triangledown) - \mathcal{F}(\nabla)$, on voit facilement qu'il existe $\sqcup, \sqcup, \square$ telles que

$$\sqcup = (p_2^2 - M_2^2 + a^2)^N \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\tau_2}{p_2^2 - M_2^2 - \tau_2^2}\left(\widetilde{\Delta}'_{\sqcup}(p_0,p_1,p_2,\tau_2) + \widetilde{\Delta}'_{\sqcup}(p_0,p_1,p_2,\tau_2)\right) + \sqcup + \sqcup$$

$$\triangledown = (p_2^2 - M_2^2 + a^2)^N \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\tau_2}{p_2^2 - M_2^2 - \tau_2^2}\,\widetilde{\Delta}'_{\sqcup}(p_0,p_1,p_2,\tau_2) + \sqcup + \square$$

$$\nabla = (p_2^2 - M_2^2 + a^2)^N \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\tau_2}{p_2^2 - M_2^2 - \tau_2^2}\,\widetilde{\Delta}'_{\sqcup}(p_0,p_1,p_2,\tau_2) + \sqcup - \square$$

d'où :

$$\sqcup = \widetilde{\sqcup} + \widetilde{\sqcup}\,, \qquad \triangledown = \widetilde{\sqcup} + \square\,, \qquad \nabla = \widetilde{\sqcup} - \square$$

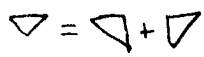
où

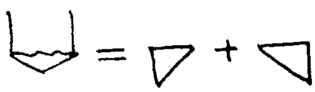
$$\widetilde{\sqcup} = \sqcup + (p_2^2 - M_2^2 + a^2)^N \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\tau_2}{p_2^2 - M_2^2 - \tau_2^2}\,\widetilde{\Delta}'_{\sqcup}(p_0,p_1,p_2,\tau_2)$$

$$\widetilde{\sqcup} = \sqcup + (p_2^2 - M_2^2 + a^2)^N \frac{1}{2i\pi}\int \frac{d\tau_2}{p_2^2 - M_2^2 - \tau_2^2}\,\widetilde{\Delta}'_{\sqcup}(p_0,p_1,p_2,\tau_2)$$

Q. E. D.

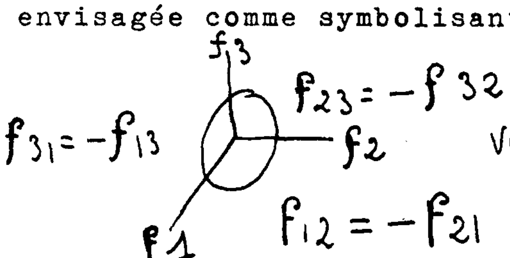
REMARQUES

1) On aurait pu d'abord faire l'enveloppe d'holomorphie de  et  , avec, pour résultat  , puis résoudre le problème de décomposition

 dans  ;

ce qui nous sauve dans la solution de ce problème est la possibilité de passer a l'espace des ξ où les supports s'arrangent bien.

2) Cette situation rappelle furieusement celle que l'on trouve dans les notes de Martineau p. 92 (bien connues de nous depuis 1962-1963, après les indications de B. Malgrange, ainsi que sa démonstration du théorème de l'edge of the wedge et des lemmes qui y contribuent !), et que nous avions envisagée comme symbolisant ce triple edge of the wedge :



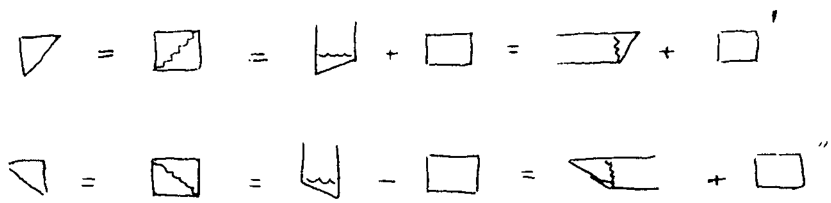
val. bord $f_1+f_2+f_3=0 \Rightarrow \begin{cases} f_1=\text{bord}(f_{12}+f_{13}) \\ f_2=\text{bord}(f_{23}+f_{21}) \\ f_3=\text{bord}(f_{32}+f_{31}) \end{cases}$

ce qui nous avait fait penser qu'on avait décomposition en fonctions holomorphes dans les enveloppes d'holomorphie des domaines initiaux pris deux à deux - et c'est bien le cas !.

LE RECOLLAGE DES EDGES OF THE WEDGE

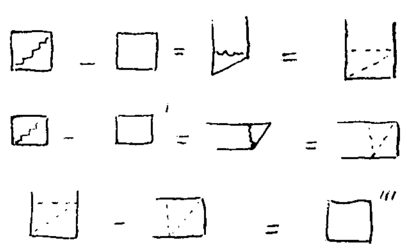
Comme on l'a signalé plus haut, de chaque edge of the wedge relatif à une face $S_I = 0$, on déduit une décomposition de tout $\tilde{f}_\alpha$ ayant cette face comme frontière. On tombe tout de suite sur des identités entre sommes de fonctions analytiques pour lesquelles le passage aux transformées de Fourier ne donne plus rien :

Exemple :



etc.

d'où



i.e.

(enveloppes d'holomorphie inconnues)

UN PROBLEME SIMPLIFIE

On envisage un problème modèle où les quadrivecteurs sont remplacés par des variables unidimensionnelles.

Le diagramme de l'espace S correspond alors à la base imaginaire des tubes de définition des $\tilde{r}_\alpha$

Les conditions spectrales doivent être remplacées par

$$|s_I| < M_I$$

Le problème est alors exactement soluble.

La solution est donnée par la représentation

$$\tilde{\rho}(s_1, \dots s_n) = \sum_{P(0 \dots n)} \int \frac{ds'_{P_0}\, ds'_{P_0 P_1} \cdots ds'_{P_0 \dots P_{n-1}}\, \sigma(s'_{P_0}, \dots, s'_{P_0 \dots P_{n-1}})}{(s'_{P_0}-s_{P_0})(s'_{P_0 P_1}-s_{P_0 P_1}) \cdots (s'_{P_0 \dots P_{n-1}}-s_{P_0 \dots P_{n-1}})} \quad -,)$$

où P est une permutation de $(0, 1, \dots, n)$

$$s_0 = -\sum_1^n s_i \qquad s_{P_0 \dots P_i} = s_{P_0} + \dots + s_{P_i} .$$

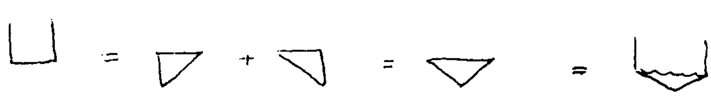
et l'intégrale est prise pour $s'_{P_0} > M_{P_0}, \dots s'_{P_0 \dots P_{n-1}} > M_{P_0 \dots P_{n-1}}$

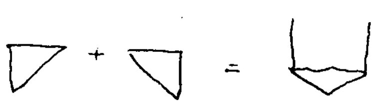
(les σ sont des transformées de Fourier de distributions de Wightman).

On vérifie sans peine que $\tilde{\rho}$ est analytique dans les tubes de départ dans des voisinages complexes des régions de coïncidences impliquées par les conditions spectrales, et que ses valeurs au bord sur les réels satisfont aux relations linéaires.

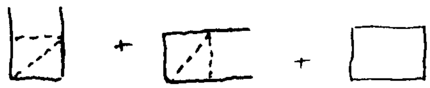
Si on essaye de retrouver ce résultat directement on rencontre déjà une bonne partie des difficultés de recollement.

<u>Exemple</u> : $n = 3$ à nouveau :

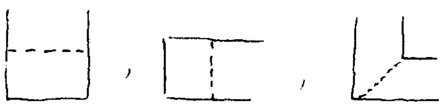
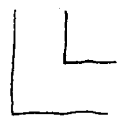


ici  est un problème de Cousin pour le recouvrement  de  ;

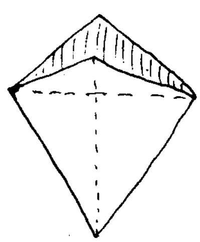
l'étape suivante pose le problème suivant :

 = 0

qui est un problème de Cousin pour le recouvrement

 **de**  ,

c'est à dire pour un tube à base conique de la forme d'un "angle" : (3 variables complexes)



PROBLEMES DIVERS

1) Dans l'espace $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times i\mathbb{R}^{n+1}$ on se donne N hypersurfaces analytiques d'équations (P_i) : $Im\, L_i - b_i = 0$ les L_i étant des formes linéaires homogènes à coefficients réels.

On suppose que dans $i\mathbb{R}^{n+1}$ deux des plans, P_i, au plus contiennent un n-2-plan. On considère les tubes $\mathcal{T}_\alpha$ à bases imaginaires B_α : les ensembles où tous les $P_i \equiv Im\, L_i - b_i$ ont un signe donné, et dans chaque tube, une fonction holomorphe admettant des valeurs au bord.

Si 4 cellules sont en position de Sato Steinmann

() par rapport à $P_i \cap P_j$, elles satisfont a une relation

$$\underset{\text{sur } P_i \cap P_j}{\text{bord}} \quad f_{++} - f_{+-} - f_{-+} + f_{--} = 0$$

Alors il existe une décomposition commune de toutes ces fonctions : associons à chaque P_i deux fonctions $f_i^{\pm}$ holomorphes dans les tubes $P_i^{\pm} : Im\, L_i - b_i \gtrless 0$ respectivement:

$$f_\alpha = \sum_{\substack{i=1 \\ P_i^{\pm} \supset B_\alpha}}^{N} f_i^{\pm} .$$

<u>QUESTION</u> :

Quelle est l'interprétation en terme de cohomologie de ce recollement des résultats locaux au voisinage des $P_i \cap P_j$?

2) Supposons une situation analogue à la précédente à ceci près que

soit a) il n'y ait de relations de Steinmann qu'à certaines des intersections $P_i \cap P_j$,

soit b) certains $n-2$ plans $P_i \cap P_j$ appartiennent aussi à un troisième P_k (et éventuellement d'autres) de telle sorte qu'il n'y ait pas de relation sur les valeurs au bord .

<u>QUESTION</u> Comment ces noeuds interviennent-ils comme obstruction à la décomposition finale qui n'est pas connue de l'auteur.

<u>Remarque</u>

Le problème 1) a fourni pour le cas $n=4$ un schéma de décomposition qui a pu être démontré même dans le cas réaliste.

3) <u>Cohomologie de domaines "mordus"</u>

A part le cas du lemme de Martineau sur le cube (p.61) qui avait été démontré par Epstein en 1963, on peut essayer de dire plus proprement ce qui suit;

On part de la situation de Martineau (Séminaire Bourbaki 13ème année 1960-61)

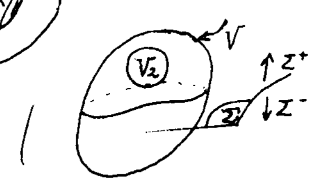
V domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}^n$

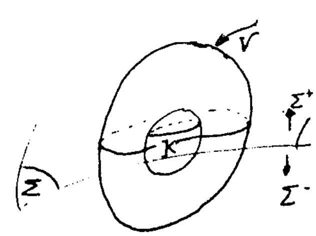
K compact d'holomorphie dans V

Σ hypersurface analytique (i.e. pseudoconvexe des 2 côtés) coupant K

Soient

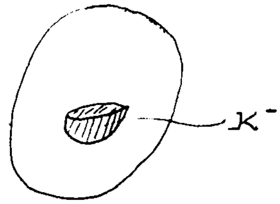
$V_1 = V - K$





$V_2 = V \cap \Sigma^+$

$V_1 \cap V_2 =$

$V_1 \cup V_2 =$ 

K^- est encore un compact d'holomorphie

Alors on a :

$$H^i(V_1, \mathcal{O}) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n-2 \qquad \text{(Martineau-Bourbaki)}$$

$$H^i(V_1 \cup V_2', \mathcal{O}) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n-2$$

$$H^i(V_2, \mathcal{O}) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n \qquad \text{(théorème B)}$$

$$H^i(V_1 \cap V_2, \mathcal{O}) = \,?$$

Mais d'après la suite de Mayer Victoris :

$$0 \to H^0(V_1 \cup V_2, \mathcal{O}) \to H^0(V_1, \mathcal{O}) \oplus H^0(V_2, \mathcal{O}) \to H^0(V_1 \cap V_2, \mathcal{O}) \to$$

$$\to H^1(V_1 \cup V_2, \mathcal{O}) \to H^1(V_1, \mathcal{O}) \oplus H^1(V_2, \mathcal{O}) \to H^1(V_1 \cap V_2, \mathcal{O}) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^p(V_1 \cup V_2, \mathcal{O}) \to H^p(V_1, \mathcal{O}) \oplus H^p(V_2, \mathcal{O}) \to H^p(V_1 \cap V_2, \mathcal{O}) \to H^{p+1}(V_1 \cap V_2, \mathcal{O}) \to \cdots$$

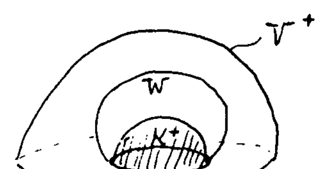
on a :

$$H^i(V_1 \cap V_2, \mathcal{O}) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n-3$$

Par excision on a le même résultat pour $W - K^+$:

[Remarque de Andréotti]

W domaine d'holomorphie, en passant à la cohomologie relative:



$$H^*(V^+ - K^+) \simeq H^{*+1}(V^+, V^+ - K^+)$$

$$V^+ = W \cup (V^+ - K^+) \Rightarrow$$

$$H^*(W \cup V^+ - K^+, V^+ - K^+) \overset{\text{excs.}}{\simeq} H^*(W, W \cap (V^+ - K^+)) = H^*(W, W - K^+)$$

$$\simeq H^{*-1}(W - K^+).$$

Remarque

Il était essentiel que Σ soit pseudoconvexe des deux côtés

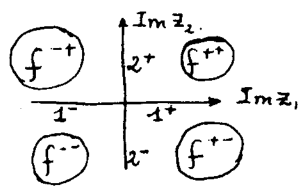
QUESTION

Peut-on arranger ce genre de démonstration s'il y a une chance qu'elle soit correcte.

Peut on gagner sur "$n-3$" (ceci ne résoud pas le cas  de tout à l'heure).

Si on ne peut pas gagner sur "$n-3$", peut on comprendre la différence qu'il y a entre ce cas et celui du "lemme du cube" de Martineau où du résultat local d'Andréotti et Grauert ?

5) dans $\mathbb{C}^2$



On se donne $1^{\pm}, 2^{\pm}$ distributions en z_2 (z_1) holomorphes en z_1 (z_2) pour $\mathrm{Im}\, z_1 (z_2) \gtrless 0$ admettant des valeurs au bord telles que

val.bord $1^+ - 1^- - 2^+ + 2^- = 0$

Alors il existe $f^{\pm\pm}$ holomorphes dans $\mathrm{Im}\, z_1 \gtrless 0$, $\mathrm{Im}\, z_2 \gtrless 0$ admettant des valeurs aux bords ; on a la décomposition

$$1^+ = \text{bord}\ (f^{++} - f^{+-})$$
$$1^- = \text{bord}\ (f^{-+} - f^{--})$$
$$2^+ = \text{bord}\ (f^{++} - f^{-+})$$
$$2^- = \text{bord}\ (f^{+-} - f^{--})$$

QUESTION - De quelle sorte de cohomologie s'agit-il ?
Généralisations ?
Ceci est-il implicitement contenu dans les notes de Martineau ou seulement dans Sato sous forme des $\mathcal{B}_\nu$? (Sato II p.420-421)

BIBLIOGRAPHIE

1) Les exemples sont tirés de manuscrits non publiés provenant de la collaboration de J. BROS, HEPSTEIN, V. GLASER, R. STORA (quelques photocopies disponibles).
Une de ces copies traite de la flèche $\leftarrow - - \rightarrow$ du début de ce texte.

2) A. MARTINEAU "Distributions et Valeurs au bord des fonctions holomorphes" et Séminaire BOURBAKI

3) A. ANDREOTTI et H. GRAUERT Bull.Soc.Math.Fr. 7 10,1962, p.193

4) En ce qui concerne les conditions de régularité de supports, voir L. SCHWARTZ, Théorie des distributions Th. XXXIV p.99 du tome I, B. MALGRANGE Séminaire SCHWARTZ 1959-1960, n° 21.

5) Un bon exposé de la méthode de Dyson est donné par A.S. WIGHTMAN dans "Relations de dispersions et particules élémentaires" HERMANN Paris 1961 Editeurs DE WITT - OMNES.