Recherche Coopérative sur Programme nº 25

Aldo Andreotti
François Norguet

La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1966, tome 1
« Travaux de A. Andreotti et F. Norguet sur les espaces analytiques Q-pseudoconvexes »,
, exp. nº 3, p. 1-68
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1966__1__A3_0>

III

LA CONVEXITÉ HOLOMORPHE DANS L'ESPACE ANALYTIQUE DES CYCLES D'UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE

par Aldo ANDREOTTI et François NORGUET

Introduction

X étant un sous-espace algébrique (compact) de l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, la méthode classique de construction de la "variété de Chow" permet de doter d'une structure d'espace algébrique projectif l'ensemble $C_d^+(X)$ de ses d-cycles analytiques positifs (combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs de sous-ensembles analytiques de dimension d en chaque point) ; pour tout ouvert Y de X , l'ensemble $C_d^+(Y)$ des éléments de $C_d^+(X)$ contenus dans Y est un ouvert de $C_d^+(X)$; sa structure analytique, mais non (Corollaire du théorème 3) celle de son normalisé faible - que nous désignerons encore par $C_d^+(Y)$ - peut dépendre de la réalisation de Y comme sous-espace de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Normaliser faiblement un espace analytique, c'est enrichir son faisceau structural en considérant encore comme "holomorphe" dans un ouvert U toute fonction continue dans U et holomorphe aux points réguliers de U ; l'espace obtenu est encore analytique (théorème 1) .

Pour toute forme différentielle φ de type (d,d), continue dans Y , la fonction à valeurs complexes F_φ définie dans $C_d^+(Y)$ par

$$F_\varphi(c) = \int_c \varphi \qquad \text{pour tout } c \in C_d^+(Y)$$

est continue (théorème 4) . Si φ est réelle et deux fois différentiable et si le courant $\frac{i}{\pi} d'd''\varphi$ est positif, alors F_φ est plurisousharmonique.

Si φ est indéfiniment différentiable et vérifie $d''\varphi = 0$, alors F_φ (qui ne dépend que de la classe de d"-cohomologie de φ) est holomorphe (théorème 5). Désignant par Ω^d (resp. $\mathcal{O}$) le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré d dans Y (resp. de fonctions holomorphes dans $C_d^+(Y)$) , on a ainsi, vu le théorème de Dolbeault, une application linéaire

$$\rho^{(o)} : H^d(Y, \Omega^d) \longrightarrow H^o(C_d^+(Y), \mathcal{O})$$

dont l'image est contenue dans l'ensemble des éléments de $H^o(C_d^+(Y), \mathcal{O})$ qui vérifient

$$f(c_1 + c_2) = f(c_1) + f(c_2)$$

pour tous $c_1 \in C_d^+(Y)$, $c_2 \in C_d^+(Y)$. Soit $A_d(Y)$ l'algèbre engendrée dans $H^o(C_d^+(Y), \mathcal{O})$ par l'image de $\rho^{(o)}$ et par les constantes .

Si Y (supposé à frontière non vide et sans points singuliers) est strictement d-pseudoconvexe (au sens de [3] , N° 5), alors $C_d^+(Y)$ est $A_d(Y)$-convexe : c'est ce qu'exprime la Proposition 7 de [3] . Comme $C_d^+(Y)$ est faiblement normal, $H^o(C_d^+(Y), \mathcal{O})$ est (vu le théorème 2) la fermeture intégrale faible de $A_d(Y)$, c'est-à-dire : $H^o(C_d^+(Y), \mathcal{O})$ est constitué par les fonctions f , continues dans Y , telles que, pour tout compact K de Y , il existe une équation de la forme

$$w^p + a_1(x) . w^{p-1} + \ldots + a_p(x) = 0$$

satisfaite pour $x \in K$ et $w = f(x)$, où les a_i sont des fonctions sur K , limites uniformes de restrictions à K d'éléments de $A_d(Y)$. Si, de plus, $H^{d+1}(Y, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ dans Y (en particulier si Y est d-complet) , alors $A_d(Y)$ sépare les points de $C_d^+(Y)$: c'est ce qu'exprime le théorème 5 de [3] . Un théorème de Runge (théorème 7) permet d'étudier aussi le cas de variétés sans bord (théorème 8) .

Enfin l'étude d'exemples simples conduit à la définition d'une application naturelle

$$\rho^{(1)} : H^{d+1}(X, \Omega^d) \longrightarrow H^1(C_d^+(X), \mathcal{O})$$

"dérivée" de $\rho^{(o)}$.

§ 1 . Sur la normalisation faible d'un espace analytique .

1 . Construction de la normalisation faible .

Théorème 1 . *Pour tout espace analytique* X , *il existe un espace analytique* $\hat{X}$ *et une application holomorphe bijective*

$$\hat{\pi} : \hat{X} \longrightarrow X$$

ayant la propriété suivante :

pour tout espace analytique Y *et toute application*

$$\sigma : Y \longrightarrow X$$

holomorphe, ouverte et injective, il existe une application holomorphe

$$\tau : \hat{\pi}^{-1}(\sigma(Y)) \longrightarrow Y$$

vérifiant

$$\sigma \circ \tau = \hat{\pi}\Big|_{\hat{\pi}^{-1}(\sigma(Y))} .$$

Preuve . Soit X^* le normalisé de X et soit π^* l'application naturelle de X^* sur X . Soit R la relation d'équivalence sur X^* définie par

$$x \sim y \iff \pi^*(x) = \pi^*(y) ;$$

c'est une relation d'équivalence propre. Soit $\hat{X}$ l'espace annelé quotient ([7] , § 2) de X^* par R , et soit p l'application naturelle de X^* sur $\hat{X}$; il existe une application et une seule $\hat{\pi}$ de $\hat{X}$ sur X , vérifiant $\hat{\pi} \circ p = \pi^*$; $\hat{\pi}$ est un homéomorphisme. D'après un théorème de H. Cartan ("Main Theorem" de [7] , § 3 , et la remarque p. 8, de [7]) , l'espace annelé $\hat{X}$ est un espace analytique. De la définition de la structure d'espace annelé de $\hat{X}$, il résulte que $\hat{\pi}$ est holomorphe.

Soit σ une application holomorphe, ouverte et injective d'un espace analytique Y dans X ; il n'est pas restrictif de supposer σ surjective ; c'est alors un homéomorphisme. L'application $\tau = \sigma^{-1} \circ \hat{\pi}$ est donc aussi un homéomorphisme.

L'application σ^{-1} est holomorphe hors du sous-espace $S(X)$ des points singuliers de X et de l'image $\sigma(S(Y))$ du sous-espace $S(Y)$ des points singuliers de Y ; donc $\sigma^{-1} \circ \pi^*$ est holomorphe hors du sous-espace $(\pi^*)^{-1}(S(X) \cup \sigma(S(Y)))$, qui est au moins de codimension 1 en chacun de ses points. Comme X^* est normal, $\sigma^{-1} \circ \pi^*$ est holomorphe en vertu du théorème de Riemann ([11] p.287) ; donc $\tau \circ p$ est holomorphe ; alors τ est holomorphe en vertu de la définition de la structure d'espace annelé de $\hat{X}$.

<u>Remarque 1</u> . Si l'espace analytique $\hat{X}'$ et l'application holomorphe $\hat{\pi}' : \hat{X}' \longrightarrow X$ vérifient aussi les conditions du théorème 1 , il existe un isomorphisme analytique $\rho : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}'$ vérifiant $\hat{\pi} = \hat{\pi}' \circ \rho$; donc $(\hat{X}, \hat{\pi})$ est déterminé à un isomorphisme analytique près. Il existe une structure d'espace analytique et une seule sur l'ensemble X , telle que $\hat{\pi}$ soit un isomorphisme d'espaces analytiques désormais on désignera par $\hat{X}$ l'ensemble X muni de cette structure, et par $\hat{\pi}$ l'application identité de $\hat{X}$ sur X ; le couple $(\hat{X}, \hat{\pi})$ sera appelé <u>normalisation faible</u> de X ; on dira que X est <u>faiblement normal</u> si $\hat{\pi}$ est un isomorphisme analytique.

<u>Remarque 2</u> . Rappelons qu'un sous-ensemble analytique E de X est dit maigre si, pour tout point x de X , il existe un voisinage ouvert U de x et un sous-ensemble analytique A dans U , de codimension $\geqslant 1$ en tout point de U , tels que $E \cap U \subset A$. Si f est une fonction à valeurs complexes continue dans X et holomorphe en dehors d'un sous-ensemble maigre de X , $f \circ \hat{\pi}$ est une fonction holomorphe dans $\hat{X}$. En effet, $f \circ \pi^*$ est holomorphe dans le normalisé X^* de X , donc $f \circ \hat{\pi}$ est holomorphe dans $\hat{X}$ en vertu de la définition du faisceau structural de $\hat{X}$.

2 . Fermeture intégrale faible .

Soit X un espace analytique ; soit $\mathcal{O}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes dans X , et soit $\Gamma(X,\mathcal{O})$ l'anneau des fonctions holomorphes sur X . Soit $C(X)$ l'anneau des fonctions continues à valeurs complexes sur X . Muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X , $C(X)$ est un espace de Fréchet $\Gamma(X,\mathcal{O})$ est un sous-espace fermé de $C(X)$ ([11] , Satz 28).

Si A est un sous-anneau de $\Gamma(X,\mathcal{O})$ et K un compact de X , nous désignerons par A_K l'anneau des restrictions des éléments de A à K , et par $\bar{A}_K$ le complété de A_K pour la convergence uniforme sur K .

Nous dirons qu'un élément f de $C(X)$ est topologiquement intègre sur A si , pour tout compact K de X , il existe une équation de la forme

$$w^p + a_1(x)\, w^{p-1} + \dots + a_p(x) = 0$$

satisfaite pour $x \in K$ et $w = f(x)$, et où les a_i sont des éléments de $\bar{A}_K$ (c'est-à-dire des fonctions sur K , limites uniformes de restrictions à K d'éléments de A).

Les éléments de $C(X)$, topologiquement intègres sur A , constituent un sous-anneau $\hat{A}$ de $C(X)$, qu'on appellera fermeture intégrale faible de A ; si $\hat{A} = A$, nous dirons que A est faiblement intégralement fermé.

Proposition 1 . *Soit $\hat{A}$ la fermeture intégrale faible d'un sous-anneau A de $\Gamma(X,\mathcal{O})$, et soit $\hat{\pi} : \hat{X} \longrightarrow X$ la normalisation faible de X . Le relèvement $\hat{\pi}^* \hat{A}$ de $\hat{A}$ à $\hat{X}$ est un anneau de fonctions holomorphes sur $\hat{X}$.*

Preuve . Soit $f \in \hat{A}$. D'après la remarque 2 de 1 , il suffit de démontrer que f est holomorphe aux points non singuliers de X .

Soit x_0 un tel point ; l'anneau local $\mathcal{O}_{x_0}$ est factoriel et le germe de f en x_o est intègre sur $\mathcal{O}_{x_o}$. Il existe donc une équation

$$(*) \qquad w^p + a_1(x)\, w^{p-1} + \dots + a_p(x) = 0$$

irréductible sur $\mathcal{O}_{x_o}$, à coefficients holomorphes sur un voisinage U de x_o et satisfaite par $f(x)$ pour tout $x \in U$. Le discriminant $\Delta(x)$ de cette équation n'est pas nul dans $\mathcal{O}_{x_o}$ car l'équation est irréductible sur $\mathcal{O}_{x_o}$. Si U est suffisamment petit, $\Delta(x) = 0$ définit dans U un sous-ensemble analytique E de codimension 1 en chaque point. Au voisinage de tout point $x \in U - E$, les racines de $(*)$ sont des fonctions holomorphes. Donc f est holomorphe dans $U - E$ et continue dans U ; d'après le théorème de Riemann, f est holomorphe dans U.

Corollaire. *Si X est faiblement normal, son anneau de fonctions holomorphes est faiblement intégralement fermé.*

3. Analogue d'un théorème de Weierstrass.

On démontre, pour des anneaux de fonctions holomorphes, un théorème analogue à celui de Weierstrass - Stone.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein X. Soit Y un ouvert de Stein, relativement compact, dans X. Il existe une famille finie d'éléments de $H^o(X, \mathcal{F})$ dont les images dans $H^o(Y, \mathcal{F})$ engendrent $H^o(Y, \mathcal{F})$ comme module sur l'anneau des fonctions holomorphes dans Y.*

Preuve. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans X. D'après le théorème A de H. Cartan généralisé aux espaces de Stein [5], il existe une famille finie $(s_i)_{i \in I}$ d'éléments de $H^o(X, \mathcal{F})$ dont les images dans $\mathcal{F}_x$, pour tout $x \in Y$, engendrent le $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{F}_x$. D'après le théorème 5 de [6] (dont la démonstration reste valable pour les espaces de Stein), les images des s_i engendrent $H^o(Y, \mathcal{F})$ comme $H^o(Y, \mathcal{O})$-module.

Lemme 2 . *Soit σ une application holomorphe propre d'un espace analytique complexe X dans un espace de Stein Y ; soit U un ouvert de Stein, relativement compact, dans Y . Pour toute fonction h holomorphe dans $\sigma^{-1}(U)$, il existe une famille $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ de fonctions holomorphes dans U telle que l'on ait*

$$h^p + \sum_{1 \leq i \leq p} a_i h^{p-i} = 0$$

dans $\sigma^{-1}(U)$, en posant $a_i = b_i \circ \sigma'$ pour $1 \leq i \leq p$, σ' désignant la restriction de σ à $\sigma^{-1}(U)$.

Preuve . Soit $\mathcal{F}$ l'image directe par σ du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans X ; d'après un résultat de H.Grauert [9], $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur Y . Vu le lemme 1 , il existe une famille finie $(s_i)_{i \in I}$ d'éléments de $H^0(U, \mathcal{F})$ qui engendre $H^0(U, \mathcal{F})$ comme module sur l'anneau des fonctions holomorphes dans U .

Soit h une fonction holomorphe dans $\sigma^{-1}(U)$; pour tout $i \in I$, s_i et $h\, s_i$ sont des fonctions holomorphes sur $\sigma^{-1}(U)$, donc $h\, s_i$ est un élément de $H^0(U, \mathcal{F})$. Il existe une famille $(b_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in I}}$ de fonctions holomorphes dans U , vérifiant, pour tout $i \in I$,

$$h\, s_i = \sum_{j \in I} b_{i,j}\, s_j \quad .$$

En posant $a_{i,j} = b_{i,j} \circ \sigma$, on a donc (dans U)

$$h\, s_i = \sum_{j \in I} a_{i,j}\, s_j \quad ;$$

on en déduit

$$\det\,(a_{i,j} - \delta_{i,j}\, h) = 0$$

qui est la relation annoncée.

Remarque .

Le nombre p est majoré par le cardinal de I , qui ne dépend pas de h .

Définition . Soit A un anneau de fonctions holomorphes sur un espace analytique complexe X . Pour tout compact K de X , on appelle A- enveloppe de K l'ensemble

$$\hat{K}_A = \left\{ x \; ; \; x \in X \; , \; |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \quad \text{pour tout} \quad f \in A \right\} .$$

On dit que X est A-convexe si, pour tout compact K de X , l'ensemble $\hat{K}_A$ est compact .

Si A est l'anneau de toutes les fonctions holomorphes dans X , on pose $\hat{K}_X = \hat{K}_A$.

On dit que A donne des coordonnées locales en un point x de X s'il existe un nombre entier $n > 0$ et une application holomorphe $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$, $f_i \in A$, d'un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{C}^n$, qui soit un isomorphisme analytique de U sur un sous-ensemble analytique $f(U)$ d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Lemme 3 . *Soit X un espace analytique complexe. Soit A un anneau de fonctions holomorphes sur X , vérifiant les conditions :*

i) A *contient* $\mathbb{C}$ (1) ;

ii) X *est* A-*convexe* .

Pour tout compact K de X , il existe un voisinage ouvert U de K et une application $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X dans $\mathbb{C}^n$, vérifiant les conditions

iii) $f_i \in A$ *pour* $1 \leq i \leq n$;

iv) $\hat{K}_A \subset P = \left\{ x \; ; \; x \in U \; , \; |f_i(x)| < 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \right\} \Subset U$ *et l'application de P dans*

$$Q = \left\{ z \; ; \; z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n \; , |z_i| < 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

déduite de f est propre .

Si, de plus, A sépare les points de X , on peut choisir cette application f de telle sorte que soit en plus vérifiée la propriété

(1) Il suffit, pour la validité du lemme, que A soit une $\mathbb{C}$-algèbre.

v) l'application g, déduite de f, de U dans $Y = \mathbb{C}^n - f(bU)$, est injective et propre.

Si, de plus encore, A donne des coordonnées locales en tout point de X, alors on peut choisir f de telle sorte que g soit un isomorphisme analytique de l'espace analytique U sur le sous-espace analytique $g(U)$ de Y.

Preuve. Soit K un compact de X. L'ensemble $\hat{K}_A$ étant compact, soit U un voisinage ouvert relativement compact de $\hat{K}_A$.

Pour tout $x \in \bar{U} - U$, il existe une fonction $h \in A$ telle que

$$|h(x)| > 2 \qquad \text{et} \qquad \sup_{y \in K} |h(y)| < 1 \quad ;$$

alors

$$V_{x,h} = \{x \,;\, x \in \bar{U} \,,\, |h(x)| > 2\}$$

est un voisinage de x dans $\bar{U}$ et $V_{x,h} \cap \hat{K}_A = \emptyset$.

Comme $\bar{U} - U$ est compact, il existe une famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ de points de $\bar{U} - U$ et une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ d'éléments de A vérifiant

$$|f_i(x_i)| > 2 \quad , \quad \sup_{y \in K} |f_i(y)| < 1 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq k \ ,$$

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k} V_{x_i, f_i} \supset \bar{U} - U \ ;$$

et

$$\Big(\bigcup_{1 \leq i \leq k} V_{x_i, f_i} \Big) \cap \hat{K}_A = \emptyset$$

et l'application $f = (f_i)_{1 \leq i \leq k}$ de X dans $\mathbb{C}^k$ vérifie les conditions iii et iv du lemme (pour $n = k$).

Supposons que A sépare les points de X. Comme $\bar{U}$ est compact, un lemme de H. Cartan ([7] p.7) montre l'existence d'une famille finie $(f_i)_{k < i \leq n}$ d'éléments de A qui sépare les points de $\bar{U}$; on peut choisir ces fonctions en sorte que $\sup_{y \in \bar{P}} |f_i(y)| < 1$ pour $k < j \leq n$; ainsi on aura encore

$$P = \{x \,;\, x \in U \,,\, |f_i(x)| < 1 \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n\} .$$

L'application $f = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de X dans $\mathbb{C}^n$ vérifie les conditions iii , iv et v demandées.

Si A donne des coordonnées locales en tout point de X , on peut choisir la famille $(f_i)_{k < i \leqslant n}$ de telle sorte qu'elle donne des coordonnées locales en tout point de $\overline{P}$. Alors l'application g vérifie la condition supplémentaire annoncée.

Théorème 2 . *Soit X un espace analytique faiblement normal. Soit A un anneau de fonctions holomorphes dans X , vérifiant les conditions :*

i) A *contient* $\mathbb{C}$;

ii) X *est* A - *convexe* .

Alors la fermeture intégrale faible de A est l'anneau de toutes les fonctions holomorphes dans X .

Si, de plus, A sépare les points de X et donne des coordonnées locales en tout point de X , alors A est dense dans l'ensemble des fonctions holomorphes dans X , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact .

Preuve . Vu le Corollaire de la Proposition 1 , il suffit de montrer que toute fonction holomorphe sur X appartient à $\hat{A}$. Soit donc h une fonction holomorphe sur X , et soit K un compact de X . Soient U un voisinage ouvert de K et $f = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une application de X dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant les conditions iii et iv du lemme 3, dont nous conservons les notations. Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que la condition iv du lemme 3 soit encore vérifiée pour

$$P' = \{x \ ; \ x \in U \ , |f_i(x)| < 1 + \varepsilon \ \text{ pour } \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

au lieu de P et

$$Q' = \{z \ ; \ z = (z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^n \ , |z_i| < 1 + \varepsilon \text{ pour } \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

au lieu de Q .

Soit σ l'application de P dans Q déduite de f. D'après le lemme 2 (en prenant $Y = Q'$), il existe une famille $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ de fonctions holomorphes dans Q telle que l'on ait

$$(h|_P)^p + \sum_{1 \leq i \leq p} a_i \cdot (h|_P)^{p-i} = 0$$

dans P, en posant $a_i = b_i \circ \sigma$ pour $1 \leq i \leq p$. Dans le cas particulier où A sépare les points de X et donne des coordonnées locales en tout point de X, on peut prendre $p = 1$.

Comme toute fonction b holomorphe dans Q se développe en série de Taylor dans Q, $b \circ \sigma$ est limite uniforme sur K de fonctions de A ; on a donc $a_i \in \overline{A}_K$ pour $1 \leq i \leq p$, et $h \in \widehat{A}$.

<u>Remarque 1</u>. Sous les hypothèses du théorème 2, l'espace X est holomorphiquement convexe ; si les fonctions de A séparent les points de X, ou si A donne des coordonnées locales en tout point de X, alors X est un espace de Stein.

<u>Remarque 2</u>. Soit $X = \mathbb{C}$ et soit A l'algèbre des fonctions entières sur $\mathbb{C}$ dont la dérivée s'annule en 0. Les hypothèses i et ii du théorème 2 sont vérifiées, l'algèbre A est fermée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$, et A ne contient pas toutes les fonctions entières. Donc, pour construire à partir de A l'anneau des fonctions holomorphes dans X, le passage à la fermeture intégrale faible est nécessaire.

<u>Remarque 3</u>. Le cas particulier du théorème 2, obtenu lorsque A sépare les points de X et donne des coordonnées locales en tout point de X, était déjà connu. Il est énoncé par H. Cartan ([8]p.24), énoncé et démontré par Y.Katznelson ([14] Theorem 8.1.7) dans le cas des variétés. Il a pour conséquence que toute fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ est limite uniforme sur tout compact de sommes finies d'exponentielles de fonctions linéaires.

§ 2 . L'espace (analytique) des cycles positifs d'une variété algébrique

4 . Définition de cet espace .

a) L'anneau des coordonnées de la grassmannienne .

Soit $\mathbb{P}_n$ l'espace projectif de dimension n sur $\mathbb{C}$. Soient $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_n$ et soit F le fibré holomorphe en droites associé au diviseur d'équation $x_0 = 0$. L'anneau $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ des polynomes en $x_0, \ldots, x_n$ s'identifie à l'anneau gradué

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}_n , F) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Gamma(\mathbb{P}_n , F^k) ,$$

F^k désignant la puissance tensorielle k-ème de F .

Soit V une sous-variété algébrique irréductible de $\mathbb{P}_n$; considérons l'anneau gradué

$$\mathcal{A}(V , F|_V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Gamma(V, (F|_V)^k)$$

où $F|_V$ désigne la restriction du fibré F à V ; l'image de l'homomorphisme de restriction

$$r_V : \mathcal{A}(\mathbb{P}_n , F) \longrightarrow \mathcal{A}(V , F|_V)$$

est appelée anneau des coordonnées de V .

Proposition 2 . Si V est normale en chaque point (par exemple si V est non singulière), $\mathcal{A}(V, F|_V)$ est la fermeture intégrale de l'anneau des coordonnées de V .

Ce théorème est dû à O. Zariski [24]; on le démontre en prouvant successivement :

i) la fermeture intégrale de l'anneau des coordonnées est un anneau gradué ;

ii) à cause de la normalité de V, tout élément homogène de la fermeture intégrale est dans $\mathcal{A}(V, F_{|V})$;

iii) pour k suffisamment grand,

$$r_V\left(\Gamma(\mathbb{P}_n, F^k)\right) = \Gamma(V, (F_{|V})^k) .$$

Ce dernier point résulte aussi d'un théorème de J.P. Serre ([21] théorème 2 p. 259) .

Soit maintenant $\mathbb{P}_n^{d+1}$ le produit de $d+1$ exemplaires de $\mathbb{P}_n$, indexés par les nombres entiers $0, 1, \dots, d$; pour tout nombre entier h vérifiant $0 \leqslant h \leqslant d$, soit F_h le fibré sur $\mathbb{P}_n^{d+1}$, obtenu en relevant F par la projection de $\mathbb{P}_n^{d+1}$ sur son facteur d'indice h. L'anneau gradué

$$\mathcal{A}\left(\mathbb{P}_n^{d+1}, \bigotimes_{0 \leqslant h \leqslant d} F_h\right) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigotimes_{0 \leqslant h \leqslant d} \Gamma(\mathbb{P}_n, F_h^k)$$

s'identifie à l'anneau $\mathbb{C}[\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ des polynomes par rapport aux indéterminées $(\overset{h}{x}_i)_{\substack{0 \leqslant h \leqslant d \\ 0 \leqslant i \leqslant n}}$, dont chaque composante homogène est homogène et de degré indépendant de h par rapport à chaque famille $(\overset{h}{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'indéterminées ; c'est ce dernier degré que nous appellerons degré de la composante homogène considérée.

Supposons $d \leqslant n$; la relation

$$\bigwedge_{0 \leqslant h \leqslant d} \left(\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \overset{h}{x}_i \, du_i \right) = \sum_{0 \leqslant i_0 < i_1 < \dots < i_d \leqslant n} p_{i_0 \dots i_d}(x) \, du_{i_0} \wedge \dots \wedge du_{i_d}$$

définit des éléments $p_{i_0 \dots i_d}$ de $\mathbb{C}[\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$, homogènes de degré $d+1$; soit Ω l'ensemble des points $x = (\overset{h}{x})_{0 \leqslant h \leqslant d}$ de $\mathbb{P}_n^{d+1}$ tels que les nombres $p_{i_o \dots i_d}(x)$ ne soient pas simultanément nuls ; soit p l'application de Ω dans $\mathbb{P}_{\binom{n+1}{d+1}-1}$ définie par les fonctions $p_{i_o \dots i_d}$; $p(\Omega)$ est la grassmannienne, que l'on désignera par $\mathbb{P}_{n,d}$, des sous-espaces linéaires de dimension d de $\mathbb{P}_n$.

Soit $\mathbb{C}[\dots, P_{i_o \dots i_d}, \dots]$ l'anneau des polynomes en les indéterminées $(P_{i_o \dots i_d})_{0 \leq i_o < i_1 < \dots < i_d \leq n}$; la substitution de $p_{i_o \dots i_d}(x)$ à $P_{i_o \dots i_d}$ définit une application

$$\sigma : \mathbb{C}[\dots, P_{i_o \dots i_d}, \dots] \longrightarrow \mathbb{C}[\overset{o}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$$

dont le noyau est constitué par l'idéal des polynomes s'annulant sur $\mathbb{P}_{n,d}$; l'anneau des coordonnées de la grassmannienne est donc isomorphe à l'image de σ.

Le groupe linéaire $GL(d+1, \mathbb{C})$ opère sur $\mathbb{C}[\overset{o}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ par les substitutions

$$\overset{h}{x} \longrightarrow \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_{hk} \overset{k}{x} \quad , \quad A = (\alpha_{hk})_{\substack{0 \leq h \leq d \\ 0 \leq k \leq d}} \in GL(d+1, \mathbb{C}) \quad ;$$

un élément f homogène de $\mathbb{C}[\overset{o}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ est dit <u>invariant</u> par les opérations de $GL(d+1, \mathbb{C})$ si l'on a

$$f(Ax) = (\det A)^m f(x)$$

pour tout $A \in GL(d+1, \mathbb{C})$ et pour tout $x = (\overset{h}{x})_{0 \leq h \leq d}$, m désignant le degré total de f par rapport à l'ensemble de tous les $\overset{h}{x_i}$.

<u>Proposition 3</u> . <u>L'anneau des coordonnées de la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,d}$ est isomorphe à l'anneau des invariants de $\mathbb{C}[\overset{o}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ sous l'action du groupe</u> $GL(d+1, \mathbb{C})$. <u>Cet anneau est factoriel.</u> ([4] p. 110-113) .

Des propositions 2 et 3 il résulte que l'anneau des coordonnées de la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,d}$ est isomorphe à l'anneau

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}_{n,d}\ ,\ \hat{F}|_{\mathbb{P}_{n,d}})\ ,$$ $\hat{F}$ désignant le fibré sur $\mathbb{P}_{\binom{n+1}{d+1}-1}$ associé au diviseur défini par un hyperplan.

b . La notion classique de variété des cycles .

Soit V un sous-ensemble algébrique irréductible de dimension d de $\mathbb{P}_n$. Soient $(\overset{h}{u})_{0\leqslant h\leqslant d}$ les coordonnées de $d+1$ hyperplans, linéairement indépendants, de $\mathbb{P}_n$. La condition pour que leur intersection rencontre V s'exprime en annulant un polynome irréductible $F_V \in \mathbb{C}[\overset{0}{u},\ldots,\overset{d}{u}]$ (cf.[13], vol 2, p. 32-35).

Pour tout $A = (\alpha_{hk})_{\substack{0\leqslant h\leqslant d\\ 0\leqslant k\leqslant d}} \in GL(d+1,\mathbb{C})$, la substitution $\overset{h}{u} \longrightarrow \sum_{0\leqslant k\leqslant d} \alpha_{hk}\ \overset{k}{u}$ remplace les hyperplans considérés par d+1 hyperplans linéairement indépendants et contenant l'intersection des premiers. La condition $F_V(u) = 0$ entraîne donc $F_V(Au) = 0$. Comme $F_V(u)$ est irréductible, $F_V(Au)$ est divisible par $F_V(u)$ et on a

$$F_V(Au) = \rho(A).F_V(u)$$

où $\rho(A)$ est un polynome en les α_{hk} ; comme ρ est un caractère de $GL(d+1,\mathbb{C})$, $\rho(A)$ est une puissance de $\det(A)$; F_V est donc invariant sous l'action du groupe $GL(d+1,\mathbb{C})$, et détermine,à un facteur constant non nul près, un élément de l'anneau des coordonnées de $\mathbb{P}_{n,n-d-1}$.

Le polynome F_V est appelé forme de Cayley associée à V . Plus généralement, si $V = \sum_{i\in I} n_i V_i$ est un cycle positif (cf. [3], § 4) de dimension d de $\mathbb{P}_n$, on lui associe la forme de Cayley $F_V = \prod_{i\in I} F_{V_i}^{n_i}$ (V_i étant pour tout $i \in I$ un sous-ensemble algébrique irréductible de $\mathbb{P}_n$) .

<u>Proposition 4 . Pour qu'un élément</u> F <u>de</u> $\mathbb{C}[\overset{0}{u},\dots,\overset{d}{u}]$ <u>soit forme de Cayley d'un cycle positif de dimension</u> d <u>de</u> $\mathbb{P}_n$ <u>, il faut et il suffit que</u> :

i) F <u>soit invariant sous l'action de</u> $GL(d+1,\mathbb{C})$,

ii) <u>sur une extension algébrique convenable de</u> $\mathbb{C}[\overset{1}{u},\dots,\overset{d}{u}]$, F <u>se décompose en un produit de facteurs linéaires par rapport à</u> $\overset{0}{u}$:

$$F(\overset{0}{u},\dots,\overset{d}{u}) = A(\overset{1}{u},\dots,\overset{d}{u}) \cdot \prod_{1\leq\alpha\leq g}\Big(\sum_{0\leq i\leq n}\overset{\alpha}{\xi}_i\,\overset{0}{u}_i\Big) .$$

En effet, la première condition exprime que F est l'image d'un élément de l'anneau des coordonnées de la grassmannienne, de telle sorte que la condition $F = 0$ détermine un complexe de $\mathbb{P}_{n-d-1}$ dans $\mathbb{P}_n$. La seconde condition exprime que ce complexe est singulier, c'est-à-dire que l'ensemble des $\mathbb{P}_{n-d-1}$ appartenant au complexe, et contenus dans le $\mathbb{P}_{n-d}$ intersection des hyperplans $\overset{1}{u},\dots,\overset{d}{u}$, se décompose en l'ensemble des $\mathbb{P}_{n-d-1}$ contenus dans $\mathbb{P}_{n-d}$ et passant chacun par l'un des points $\overset{\alpha}{\xi}$ (qui sont tous dans $\mathbb{P}_{n-d}$) . Si donc $S_0,\dots,S_d$ sont des matrices anti-symétriques $({}^tS_i = -S_i)$, les hyperplans $S_0\overset{\alpha}{\xi},\dots,S_d\overset{\alpha}{\xi}$ passent par le point $\overset{\alpha}{\xi}$, et l'on a

$$F(S_0\overset{\alpha}{\xi},\dots, S_d\overset{\alpha}{\xi}) = 0$$

quelles que soient les matrices S_i . La Proposition 4 résulte alors d'un argument connu ([13] p. 52).

<u>Corollaire . Soit</u> A_d^g <u>l'espace vectoriel des éléments homogènes de degré</u> g <u>du sous-anneau des</u> $GL(d+1,\mathbb{C})$<u>-invariants de</u> $\mathbb{C}[\overset{0}{x},\dots,\overset{d}{x}]$. <u>Soit</u> X <u>un sous-ensemble algébrique de</u> $\mathbb{P}_n$. <u>L'ensemble des éléments de</u> A_d^g , <u>qui sont formes de Cayley des cycles positifs de dimension</u> d <u>de</u> X , <u>est un cône algébrique de somment</u> 0 .

En effet, désignons par $\overset{1}{\xi},\dots,\overset{g}{\xi}$ des points génériques de X et posons

$$\prod_{1\leq\alpha\leq g}\Big(\sum_{0\leq i\leq n}\overset{\alpha}{\xi}_i\,\overset{0}{u}_i\Big) = \sum_{\nu}\sigma_{\nu}(\xi)\cdot\omega_{\nu}(\overset{0}{u}) ,$$

les $\omega_\nu(\overset{o}{u})$ étant les différents monômes de degré g en les variables $\overset{o}{u}_i$; les $\sigma_\nu(\xi)$ sont les coordonnées du point générique d'un sous-espace algébrique W d'un espace projectif $\mathbb{P}_N$; soient $H_\lambda(\sigma_\nu)=0$ des équations de W. Ecrivons un élément F de A_d^g comme polynome en $\overset{o}{u}$:

$$F(\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u}) = \sum_\nu \varphi_\nu(\overset{1}{u},\ldots,\overset{d}{u}) . \omega_\nu(\overset{o}{u}) \quad ;$$

pour que F soit forme de Cayley d'un cycle de X, il faut et il suffit que l'on ait les relations $H_\lambda(\varphi_\nu(\overset{1}{u},\ldots,\overset{d}{u})) = 0$ quels que soien $\overset{1}{u},\ldots,\overset{d}{u}$;ceci s'exprime par un système d'équations algébriques homogènes en les coefficients de F.

Soit $P(A_d^g)$ l'espace projectif associé à l'espace vectoriel A_d^g considéré ci-dessus. Soit X un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_n$, et soit $W_d^g(X)$ le sous-ensemble algébrique de $P(A_d^g)$, constitué par les images des formes de Cayley des cycles positifs de dimension d de X On appelle <u>variété des cycles</u> de dimension d de X l'espace, localement algébrique

$$\mathcal{C}_d^+(X) = \bigcup_{g\in\mathbb{N}^*} W_d^g(X) .$$

On désignera par $C_d^+(X)$ l'ensemble des cycles positifs (cf.[3], § 4) de dimension d de X, et par $\sigma_{X,d}$ l'application de $\mathcal{C}_d^+(X)$ dans $C_d^+(X)$ qui, à un élément de $\mathcal{C}_d^+(X)$ défini par une forme de Cayley F, associe le cycle positif de X auquel F est associée ; l'application $\sigma_{X,d}$ est bijective. Comme dans [3], on désigne par $|A|$ le support d'un cycle positif A.

Dans $W_d^g(X)\times X$, soit $Z_d^g(X)$ la correspondance qui associe à tout élément c de $W_d^g(X)$ le sous-ensemble $|\sigma_{X,d}(c)|$ de X.

<u>Remarque 1</u> . <u>Cette correspondance est algébrique</u> ; <u>si on désigne par</u> $x=(x_i)_{0\leq i\leq n}$ <u>des coordonnées homogènes sur</u> $X\subset\mathbb{P}_n$ <u>et par</u> α <u>les coefficients des formes de Cayley de</u> A_d^g (<u>c'est-à-dire des coordonnées homogènes sur</u> $W_d^g(X)\subset P(A_d^g)$, $Z_d^g(X)$ <u>est définie par l'annulation d'un système</u> $g_\nu(\alpha,x)$ <u>de polynomes homogènes en les</u> x <u>et les</u> α.

En effet, soit c un élément de $W_d^g(X)$, image d'une forme de Cayley F ; soient $S_o,\dots,S_d$ des matrices antisymétriques, et soit $x \in \mathbb{P}_n$. En exprimant que $F(S_o x,\dots,S_d x)$ est nul quelles que soient les matrices S_i, on obtient un système d'équations $g_{\mathcal{D},F}(x)=0$ dont les solutions sont les points de $|\sigma_{X,d}(c)|$. Les coefficients des polynomes $g_{\mathcal{D},F}$ sont (c variant dans $W_d^g(X)$) des polynomes par rapport aux coefficients de F. La relation entre c et les points x de $|\sigma_{X,d}(c)|$ s'exprime donc en écrivant un système d'équa tions $g_{\mathcal{D}}(F,x)=0$ polynomiales par rapport à x et par rapport aux coefficients de F.

De cette remarque on déduit immédiatement :

<u>Lemme 4</u>. <u>Soit</u> $c_o \in \mathcal{C}_d^+(X)$, <u>et soit</u> U <u>un voisinage de</u> $|\sigma_{X,d}(c_o)|$ <u>dans</u> X ; <u>il existe un voisinage</u> V <u>de</u> c_o <u>dans</u> $\mathcal{C}_d^+(X)$, <u>tel que la condition</u> $c \in V$ <u>entraîne</u> $|\sigma_{X,d}(c)| \subset U$.

Soit à présent Y un ouvert de X ; il résulte du lemme 4 que

$$\mathcal{C}_d^+(Y) = \sigma_{X,d}^{-1}(C_d^+(Y)) = \{c \ ; \ c \in \mathcal{C}_d^+(X) \ , \ |\sigma_{X,d}(c)| \subset Y\}$$

est une partie ouverte de $\mathcal{C}_d^+(X)$; $\mathcal{C}_d^+(Y)$ est appelé <u>variété des cycles</u> de dimension d de Y ; on désigne par $\sigma_{Y,d}$ la restriction de $\sigma_{X,d}$ à $\mathcal{C}_d^+(Y)$, et on pose $W_d^g(Y) = \mathcal{C}_d^+(Y) \cap W_d^g(X)$.

Comme précédemment ([3], N° 9), désignons par $S_d(Y)$ la famille des sous-ensembles analytiques compacts de Y, de dimension d en chacun de leurs points ; $S_d(Y)$ est un sous-ensemble de $C_d^+(Y)$; posons $\mathcal{S}_d(Y) = \sigma_{Y,d}(S_d(Y))$.

<u>Remarque 2</u>. $\mathcal{S}_d(Y)$ <u>est une partie ouverte de</u> $\mathcal{C}_d^+(Y)$.

Il suffit de l'établir pour $Y = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et, dans ce cas, de vérifier que $W_d^g(Y) \cap \mathcal{S}_d(Y)$ est ouvert dans $W_d^g(Y)$ pour tout $g > 0$; pour cela, il faut montrer que, dans $W_d^g(Y)$, les formes de Cayley, suffisamment voisines d'une forme de Cayley sans facteur irréductible multiple, sont aussi de ce type. Cela résulte de la Remarque suivante .

Remarque 3 . Soit $P(x)$ un polynome homogène en $x = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de degré $g > 0$. Il existe un nombre fini de polynomes p_α , $1 \leqslant \alpha \leqslant h$, en les coefficients de P , dont l'annulation simultanée exprime que P a un facteur multiple.

En effet, considérons le polynome $P(\lambda x + \mu y)$ comme polynome homogène en λ et μ . Son discriminant $\Delta(x,y)$ est un polynome en x et y dont les coefficients p_α , $1 \leqslant \alpha \leqslant h$, sont des polynomes en les coefficients de P . Si $P(x)$ a un facteur multiple, les p_α sont nuls. Réciproquement, si les p_α sont nuls, on a $P(\lambda x + \mu y) = (H(\lambda, \mu, x, y))^\ell K(\lambda, \mu, x, y)$ où H et K sont des polynomes premiers entre eux, H est de degré > 0 en λ et μ , et $\ell \geqslant 2$. Or H doit contenir les variables x ou y car s'il en était indépendant, en faisant successivement $x = 0$ et $y = 0$ on montrerait que H divise λ^g et μ^g ; donc H serait une constante. Supposons donc que H contienne les x . En faisant $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, on voit que P a un facteur multiple.

Soit encore $Z_d^g(Y) = (W_d^g(Y) \times Y) \cap Z_d^g(X)$; c'est la correspondance qui, à tout $c \in W_d^g(Y)$, associe le sous-ensemble algébrique compact $|\sigma_{Y,d}(c)|$ de Y . Il en résulte que la projection de $Z_d^g(Y)$ sur $W_d^g(Y)$ est propre. Nous utiliserons ultérieurement les remarques suivantes.

Remarque 4 . Soit A un sous-ensemble analytique compact, en chaque point de dimension > 0 , de $W_d^g(Y)$; alors $\bigcup_{c \in A} |\sigma_{Y,d}(c)|$ est un sous-ensemble analytique compact, en chaque point de dimension $\geqslant d+1$, de Y .

En effet, d'après ce qui précède, l'image réciproque de A dans $Z_d^g(Y)$ est un sous-ensemble analytique compact, de dimension $\geqslant d+1$ en chaque point; la projection de cet ensemble dans Y vérifie la même propriété.

Remarque 5 . Pour tout compact K de Y , le sous-ensemble $\{c \; ; \; c \in W_d^g(Y) \; , |\sigma_{Y,d}(c)| \subset K\}$ de $W_d^g(Y)$ est compact .

En effet, soit E ce sous-ensemble, et soit c_o un point de $W_d^g(X)$ adhérent à E ; soit $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de E tendant vers c_o ; tout point de $|\sigma_{X,d}(c_o)|$ étant limite (vu la Remarque 1) de points des $|\sigma_{X,d}(c_\nu)|$, on a $|\sigma_{X,d}(c_o)| \subset K$.

Dans [3], n° 9 , nous avons identifié $C_d^+(Y)$ à une partie de l'espace vectoriel topologique des courants à support compact dans Y ; la topologie forte (resp. faible) de cet espace de courants induit sur $C_d^+(Y)$ une topologie que nous appellerons encore forte (resp.faible) ; une partie de $C_d^+(Y)$ est dite bornée si elle est bornée dans l'espace des courants ; la proposition 9 de [3] caractérise les parties bornées de $C_d^+(Y)$.

Proposition 5 . Pour qu'une partie K de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que $\sigma_{Y,d}(K)$ soit borné dans $C_d^+(Y)$.

En effet, une partie K de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ est relativement compacte si et seulement s'il existe un nombre entier h tel que $K \cap W_d^g(Y)$ soit relativement compact dans $W_d^g(Y)$ pour $g \leq h$ et $K \cap W_d^g(Y) = \emptyset$ pour $g > h$. Ces deux conditions peuvent être remplacées par $\bigcup_{c \in K} |\sigma_{Y,d}(c)|$ relativement compact dans Y et $K \cap W_d^g(Y) = \emptyset$ pour $g > h$. Ces deux nouvelles conditions sont équivalents à celles de la Proposition 9 de [3] , car, en calculant les volumes à l'aide de la métrique de Fubini de $\mathbb{P}_n$, on a $\mathrm{vol}\, \sigma_{Y,d}(c) = g$ pour tout $c \in W_d^g(Y)$.

On munit chaque $W_d^g(X)$ de la structure d'espace analytique complexe induite par celle de l'espace projectif complexe $P(A_d^g)$; $\mathcal{C}_d^+(X)$ et $\mathcal{C}_d^+(Y)$ sont ainsi munis de structures d'espace analytiques complexes. Eventuellement ces structures peuvent dépendre, non seulement des structures d'espaces algébriques de X et de Y, mais encore de la réalisation de X et de Y comme sous-espaces de $\mathbb{P}_n$. L'étude de cette dépendance est l'objet du § c ci-dessous.

c) <u>Caractère fonctoriel de $\mathcal{C}_d^+$ et normalisation faible de la variété de Chow</u>.

α) Soit Y (resp. Y') un ouvert d'un sous-ensemble algébrique X (resp. X') de $\mathbb{P}_n$ (resp. $\mathbb{P}_{n'}$), et soit τ une application holomorph algébrique de Y dans Y'.

On désignera par $C_d^+(Y)_\tau$ l'ensemble des éléments V de $C_d^+(Y)$ où τ est bien définie, c'est-à-dire l'ensemble des éléments V de $C_d^+(Y)$ dont toute composante irréductible V_i a pour image $\tau(V_i)$ un sous-ensemble analytique complexe (compact) de dimension d de Y'.

On désignera par $C_d^+(\tau)$ l'application additive de $C_d^+(Y)_\tau$ dans $C_d^+(Y')$ qui, à tout cycle irréductible $V \in C_d^+(Y)_\tau$, fait correspondre le cycle $m\,\tau(V)$ de $C_d^+(Y')$, m désignant le degré de la restriction de τ à V.

On désignera par $\mathcal{C}_d^+(\tau)$ l'application de $\mathcal{C}_d^+(Y)_\tau = \sigma_{Y,d}^{-1}(C_d^+(Y)_\tau)$ dans $\mathcal{C}_d^+(Y')$ qui vérifie

$$\sigma_{Y',d} \circ \mathcal{C}_d^+(\tau) = C_d^+(\tau) \circ (\sigma_{Y,d}|_{\mathcal{C}_d^+(Y)_\tau}) .$$

Ensemblistement, $\mathcal{C}_d^+(\tau)$ est la même chose que l'application $C_d^+(\tau)$.

L'étude générale de l'application $\mathcal{C}_d^+(\tau)$ sera préparée par les remarques et les lemmes ci-dessous.

β) Soit N un nombre entier > 0, et soit $t(n,N) = (n+1)^N - 1$. Le polynome en les variables $u_i^{(\alpha)}$, $1 \leq \alpha \leq N$, $0 \leq i \leq n$,

$$\prod_{1 \leq \alpha \leq N} \sum_{0 \leq i \leq n} x_i \; u_i^{(\alpha)}$$

a pour coefficients les monomes $z_{i_1 \dots i_N} = \prod_{1 \leq \alpha \leq N} x_{i_\alpha}$. Soit λ_n^N l'application de $\mathbb{P}_n$ dans $\mathbb{P}_{t(n,N)}$, définie par les relations

$$\lambda_n^N (x) = z \quad \text{où} \quad z = (z_{i_1 \dots i_N})_{0 \leq i_\alpha \leq n} \quad .$$

<u>Remarque 1</u> . <u>L'application</u> λ_n^N <u>est un isomorphisme</u> (<u>algébrique</u>) <u>de</u> $\mathbb{P}_n$ <u>sur</u> $\lambda_n^N(\mathbb{P}_n)$

En effet si $U_i = \{x \; ; \; x \in \mathbb{P}_n \, , \; x_i \neq 0\}$ et

$W_i = \{z \; ; \; z \in \lambda_n^N(\mathbb{P}_n) \, , \; z_{i \dots i} \neq 0\}$, $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$ et

$\mathcal{W} = (W_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des recouvrements de $\mathbb{P}_n$ et $\lambda_n^N(\mathbb{P}_n)$ respectivement par des ouverts de Zariski. Entre U_i et W_i la correspondance λ_n^N est donnée par les relations

$$\frac{x_\alpha}{x_i} = \frac{z_{\alpha i \dots i}}{z_{ii \dots i}}$$

donc elle est biholomorphe algébrique.

On désignera par μ_n^N l'application de $\lambda_n^N(\mathbb{P}_n)$ sur $\mathbb{P}_n$ telle que $\lambda_n^N \circ \mu_n^N$ soit l'identité de $\lambda_n^N(\mathbb{P}_n)$.

Soit E_n^N l'espace vectoriel des polynomes homogènes de degré N en les $n+1$ indéterminées x_i , $0 \leq i \leq n$; soit P_n^N l'espace projectif associé, et soit $\Pi_n^{N,k}$ l'application de P_n^N dans P_n^{kN} , définie en associant à tout polynome de E_n^N sa puissance k-ème.

<u>Remarque 2</u> . <u>L'application</u> $\Pi_n^{N,k}$ <u>est un isomorphisme</u> (<u>algébrique</u>) <u>de</u> P_n^N <u>sur</u> $\Pi_n^{N,k}(P_n^N)$.

C'est une conséquence de la Remarque 1 . Il suffit de noter que :

i) tout élément ω de E_n^N s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = \sum_{\substack{0 \leq i_\alpha \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq N}} a_{i_1 \ldots i_N} \prod_{1 \leq \alpha \leq N} x_{i_\alpha} ,$$

ou les coefficients $a_{i_1 \ldots i_N}$ sont symétriques par rapport aux indices $i_1, \ldots, i_N$;

ii) si φ_n^N est l'application (injective) de P_n^N dans $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ définie en associant à ω le point de coordonnées homogènes $a_{i_1 \ldots i_N}$ (symétriques par rapport aux indices), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_n^N & \xrightarrow{\varphi_n^N} & \mathbb{P}_{t(n,N)} \\ \Big\downarrow \pi_n^{N,k} & & \Big\downarrow \lambda_{t(n,N)}^k \\ P_n^{kN} & \xrightarrow{\varphi_n^{kN}} & \mathbb{P}_{t(n,kN)} \end{array}$$

est commutatif.

On désignera par $\theta_n^{N,k}$ l'application de $\pi_n^{N,k}(P_n^N)$ sur P_n^N telle que $\pi_n^{N,k} \circ \theta_n^{N,k}$ soit l'identité de $\pi_n^{N,k}(P_n^N)$.

De la remarque 1 , il résulte que l'application $\mathcal{C}_d^+(\mu_n^N)$ est bijective.

<u>Lemme 5</u> . <u>L'application</u> $\mathcal{C}_d^+(\mu_n^N)$ <u>est holomorphe algébrique</u>.

Pour établir ce résultat, associons à tout hyperplan $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{P}_n$ l'hyperplan $\tilde{\lambda}_n^N(u)$ de $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ de coordonnées

$(\tilde{\lambda}_n^N(u))_{i_1 \ldots i_N} = \prod_{1 \leq \alpha \leq N} u_{i_\alpha}$; quel que soit l'hyperplan u , nous avons la relation

$$\Big(\sum_{0 \leq i \leq n} u_i \, x_i\Big)^N = \sum_{\substack{0 \leq i_\alpha \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq N}} (\tilde{\lambda}_n^N(u))_{i_1 \ldots i_N} : (\lambda_n^N(x))_{i_1 \ldots i_N} \quad ;$$

donc $\tilde{\lambda}_n^N(u)$ contient le point $\lambda_n^N(x)$ si et seulement si u contient x .

Soit alors $F_V(\overset{0}{U},\ldots,\overset{d}{U})$ une forme de Cayley associée à un cycle $V \in C_d^+(\lambda_n^N(\mathbb{P}_n))$. Si V est irréductible, le polynome homogène $F_V(\tilde{\lambda}_n^N(\overset{0}{u}),\ldots,\tilde{\lambda}_n^N(\overset{d}{u}))$ s'annule exactement lorsque l'intersection des hyperplans $\overset{i}{u}$, $0 \leq i \leq d$, rencontre le cycle irréductible $\mu_n^N(V)$ il existe donc une forme de Cayley $F_{\mu_n^N(V)}(\overset{0}{u},\ldots,\overset{d}{u})$ associée au cycle $\mu_n^N(V)$, telle que l'on ait l'identité

$$(*) \quad F_V(\tilde{\lambda}_n^N(\overset{0}{u}),\ldots,\tilde{\lambda}_n^N(\overset{d}{u})) = (F_{\mu_n^N(V)}(\overset{0}{u},\ldots,\overset{d}{u}))^M \quad ;$$

l'examen des degrés des cycles montre que l'on a $M = N^d$. Si V est quelconque, l'application du résultat précédent à chaque composante irréductible de V montre encore l'existence d'une forme de Cayley $F_{\mu_n^N(V)}(\overset{0}{u},\ldots,\overset{d}{u})$ associée au cycle $\mu_n^N(V)$, telle que l'on ait l'identité $(*)$. Cette identité montre que les coefficients du polynome $(F_{\mu_n^N(V)})^M$ s'expriment par des polynomes en fonction des coefficients de F_V ; la conclusion résulte alors de la Remarque 2 .

γ) Considérons maintenant une projection de $\mathbb{P}_n$ dans $\mathbb{P}_m$, ayant pour centre une sous-variété linéaire S de $\mathbb{P}_n$, et soit f l'application de $\mathbb{P}_n - S$ dans $\mathbb{P}_m$ qu'elle définit. Choisissons des coordonnées homogènes $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{P}_n$ et des coordonnées homogènes $(y_j)_{0 \leq j \leq m}$ de $\mathbb{P}_m$ telles que f soit définie par les relations

$$(f(x))_j = \begin{cases} x_j & \text{pour} \quad 0 \leq j \leq h \\ 0 & \text{pour} \quad h < j \leq m \end{cases} \quad ;$$

S est alors défini par les équations

$$x_j = 0 \qquad 0 \leq j \leq h \quad .$$

Pour tout hyperplan $v = (v_j)_{0 \leq j \leq m}$ de $\mathbb{P}_m$, posons

$$(\tilde{f}(v))_i = \begin{cases} v_i & \text{pour } 0 \leq i \leq h \\ 0 & \text{pour } h < i \leq n \end{cases} .$$

<u>Lemme 6</u> . <u>Soit</u> $F_V(\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u})$ <u>une forme de Cayley associée à un cycle</u> $V \in C_d^+(\mathbb{P}_n - S)_f$; <u>alors</u> $F_V(\tilde{f}(\overset{o}{v}),\ldots,\tilde{f}(\overset{d}{v}))$ <u>est une forme de Cayley associée au cycle</u> $(C_d^+(f))(V) \in C_d^+(\mathbb{P}_m)$.

En effet, si V est irréductible, le polynome homogène $F_V(\tilde{f}(\overset{o}{v}),\ldots,\tilde{f}(\overset{d}{v}))$ s'annule exactement lorsque l'intersection des plans $\overset{i}{v}$, $0 \leq i \leq d$, rencontre l'ensemble analytique irréductible f(V il existe donc une forme de Cayley $F_{f(V)}(\overset{o}{v},\ldots,\overset{d}{v})$, associée au cycle f(V), telle que l'on ait une identité

$$F_V(\tilde{f}(\overset{o}{v}),\ldots,\tilde{f}(\overset{d}{v})) = (F_{f(V)}(\overset{o}{v},\ldots,\overset{d}{v}))^k \quad ;$$

l'examen des degrés des cycles montre que k est le degré de la restriction de f à V ; $F_V(\tilde{f}(\overset{o}{v}),\ldots,\tilde{f}(\overset{d}{v}))$ est donc une forme de Cayley associée à l'image de V par l'application $C_d^+(f)$ .Si V n'es pas irréductible, il suffit d'appliquer le raisonnement ci-dessus à chaque composante irréductible de V .

δ) Considérons à présent un ouvert Y d'un sous-ensemble algébrique X de $\mathbb{P}_n$, et soit τ une application holomorphe algébrique de Y dans $\mathbb{P}_{n'}$; nous désignerons par $x' = (x'_j)_{0 \leq j \leq n'}$ des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}_{n'}$

<u>Lemme 7</u> . <u>Il existe deux nombres entiers positifs</u> ℓ <u>et</u> N , <u>une application linéaire injective</u> g <u>de</u> $\mathbb{P}_{n'}$ <u>dans</u> $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$, <u>et une projection de</u> $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ <u>dans</u> $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$, <u>de centre</u> S , <u>définissant une application</u> f <u>de</u> $\mathbb{P}_{t(n,N)} - S$ <u>dans</u> $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$, <u>de telle sorte que l'on ait</u> $g \circ \tau = f \circ (\lambda_n^N|_Y)$.

Preuve . Soit a un point de Y , et soit x_r (resp. x'_s) une coordonnée qui ne s'annule pas au point a (resp. $\mathcal{T}(a)$) ; les fonctions $\mathcal{T}^* \frac{x'_j}{x'_s}$, $0 \leq j \leq n'$, sont holomorphes algébriques sur Y au voisinage du point a ; il existe donc des fractions rationnelles R_j , $0 \leq j \leq n'$, telles que $\mathcal{T}$ soit défini par les équations

$$\frac{x'_j}{x'_s} = R_j \left(\frac{x_o}{x_r}, \ldots, \frac{x_n}{x_r} \right) \qquad , \qquad x \in Y$$

dans un voisinage de Zariski de a . On en déduit qu'il existe des polynomes homogènes η_j , $0 \leq j \leq n'$, de même degré et ne s'annulant pas simultanément au point a , tels que l'application $\mathcal{T}$ soit définie, dans un voisinage de Zariski de a , par les relations

$$x'_j = \eta_j(x_o, \ldots, x_n) \qquad , \qquad 0 \leq j \leq n' .$$

Comme tout sous-ensemble d'une variété algébrique est précompact pour la topologie de Zariski, il existe un recouvrement fini de Y par des ouverts de Zariski $U^{(\alpha)}$, $1 \leq \alpha \leq \ell$, et des polynomes homogènes $\eta_j^{(\alpha)}$, $0 \leq j \leq n'$, $1 \leq \alpha \leq \ell$, tous du même degré N , tels que, pour tout α :

i) les polynomes $\eta_j^{(\alpha)}$, $0 \leq j \leq n'$, ne s'annulent pas simultanément dans $U^{(\alpha)}$

ii) l'application $\mathcal{T}$ est définie, dans $U^{(\alpha)}$, par les relations

$$x'_j = \eta_j (x_o, \ldots, x_n) \qquad , \qquad 0 \leq j \leq n' .$$

En particulier, pour tout point a de Y , il existe un polynome $\eta_j^{(\alpha)}$ qui ne s'annule pas au point a .

Soient $f_j^{(\alpha)}$ des fonctions linéaires homogènes des coordonnées de $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ telles que l'on ait

$$\eta_j^{(\alpha)} (x) = f_j^{(\alpha)} (\lambda_n^N (x)) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{P}_n \quad ;$$

soit S l'ensemble des points de $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ pour lesquels s'annulent tous les $f_j^{(\alpha)}$; on a $\lambda_n^N(Y) \cap S = \emptyset$.

Soit f l'application de $\mathbb{P}_{t(n,N)} - S$ dans $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$ définie par les fonctions linéaires $f_j^{(\alpha)}$; si $(z_j^{(\alpha)})_{0 \leq j \leq n',\ 1 \leq \alpha \leq \ell}$ désignent des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$, f est définie par les relations $z_j^{(\alpha)} = f_j^{(\alpha)}(y)$, y désignant l'ensemble des coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}_{t(n,N)} - S$.

Soit enfin g l'application de $\mathbb{P}_{n'}$ dans $\mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}$ définie par les relations $z_j^{(\alpha)} = x_i'$. La situation est représentée par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}_n & \supset & Y & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P}_{n'} \\
\Big\downarrow \lambda_n^N & & \Big\downarrow \lambda_n^N|_Y & & \Big\downarrow g \\
\mathbb{P}_{t(n,N)} & \supset & \mathbb{P}_{t(n,N)} - S & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_{(n'+1)\ell-1}
\end{array} ,$$

dont la commutativité se vérifie aisément.

η) Considérons l'application τ envisagée au début de α) ; supposons que, pour tout sous-ensemble analytique complexe compact irréductible A de dimension d de Y , $\tau(A)$ soit un sous-ensemble analytique complexe (compact) de dimension d de Y' . Alors $\mathcal{C}_d^+(\tau)$ est une application de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ dans $\mathcal{C}_d^+(Y')$; les lemmes précédents ne nous permettent pas de démontrer que $\mathcal{C}_d^+(\tau)$ est holomorphe, car nous ne savons pas si $\mathcal{C}_d^+(\lambda_n^N)$ est holomorphe.

Pour cette raison, nous enrichirons la structure analytique de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ en la normalisant faiblement.

Définition . Soit Y un ouvert d'un sous-ensemble algébrique X de $\mathbb{P}_n$. Désormais, nous appellerons *variété des cycles* de dimension d de Y , et nous désignerons encore par $\mathscr{C}_d^+(Y)$, le normalisé faible de l'espace analytique $\mathscr{C}_d^+(Y)$ précédemment défini.

Avec cette définition, qui ne change pas l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}_d^+(Y)$, l'application $\mathscr{C}_d^+(\lambda_n^N)$ devient holomorphe, à cause du lemme 5 ; grâce aux lemmes 6 et 7 , et compte-tenu de l'injectivité de l'application g du lemme 7 , on voit que l'application $\mathscr{C}_d^+(\mathcal{T})$ devient holomorphe elle-aussi. On a donc :

Théorème 3 . *Soit* Y (*resp.* Y') *un ouvert d'un sous-ensemble algébrique* X (*resp.* X') *de* $\mathbb{P}_n$ (*resp.* $\mathbb{P}_{n'}$) ; *soit* $\mathcal{T}$ *une application holomorphe algébrique de* Y *dans* Y' , *telle que l'image* $\mathcal{T}(A)$ *de tout sous-ensemble analytique complexe compact de dimension* d *de* Y *soit un sous-ensemble analytique complexe* (*compact*) *de dimension* d *de* Y' . *Alors l'application* $\mathscr{C}_d^+(\mathcal{T})$ *de* $\mathscr{C}_d^+(Y)$ *dans* $\mathscr{C}_d^+(Y')$ *est holomorphe*.

Corollaire . *Soit* Y *un ouvert d'un sous-ensemble algébrique* X *de* $\mathbb{P}_n$. *L'espace analytique complexe* $\mathscr{C}_d^+(Y)$ *ne dépend (à une bijection biholomorphe près) que de la structure d'espace algébrique projectif de* Y .

Le théorème 3 exprime encore le caractère fonctoriel de cette dépendance.

d). *Une remarque sur les ensembles exceptionnels* .

Soit X un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_n$ et soit A un sous-ensemble algébrique de X . On dira que A est un *ensemble exceptionnel* s'il existe un voisinage U de A dans X et une application holomorphe propre π de U sur un ouvert V d'un espace algébrique, vérifiant les conditions :

i) π est un homéomorphisme de $U - A$ sur $V - \pi(A)$;
ii) $\dim A > \dim \pi(A)$.

Dans ces conditions, on a des inclusions (c'est-à-dire des injections holomorphes ouvertes)

$$\mathcal{C}_d^+(A) \subset \mathcal{C}_d^+(U) \qquad , \quad \mathcal{C}_d^+(\pi(A)) \subset \mathcal{C}_d^+(V)$$

et une application holomorphe

$$\pi_d \ : \ \mathcal{C}_d^+(U) - \mathcal{C}_d^+(A) \longrightarrow \mathcal{C}_d^+(V) - \mathcal{C}_d^+(\pi(A)) \ .$$

Si d est la dimension de $\pi(A)$, alors $\mathcal{C}_d^+(\pi(A))$ est constitué de points isolés dans $\mathcal{C}_d^+(V)$, donc $\mathcal{C}_d^+(\pi(A))$ possède un voisinage holomorphiquement convexe dans $\mathcal{C}_d^+(V)$; il en est de même pour $\mathcal{C}_d^+(A)$ dans $\mathcal{C}_d^+(U)$. Donc

<u>Si</u> A <u>est un ensemble exceptionnel purement dimensionnel de</u> X , <u>il existe un entier</u> $d < \dim A$ <u>tel que</u> $\mathcal{C}_d^+(A)$ <u>possède un voisinage holomorphiquement convexe dans</u> $\mathcal{C}_d^+(X)$.

Si d est le plus petit entier satisfaisant à cette condition, toute modification π d'un voisinage de A vérifiant les conditions i) et ii) applique A sur un ensemble $\pi(A)$ de dimension $\geqslant d$.

Compte-tenu de la Remarque 2 de b , l'énoncé ci-dessus est encore exact si on remplace $\mathcal{C}_d^+(A)$ (resp. $\mathcal{C}_d^+(X)$) par $\mathcal{S}_d(A)$ (resp. $\mathcal{S}_d(X)$) .

Nous n'étudierons pas dans ce travail les problèmes suggérés par la remarque ci-dessus :

α) la condition indiquée est-elle suffisante ?

β) pour tout espace algébrique projectif X , existe-t-il une image holomorphe Y , généralement biunivoque, sur laquelle il n'y a pas d'ensembles exceptionnels ?

γ) pour un tel espace, les ensembles exceptionnels sont-ils en nombre fini ?

Auparavant, il conviendrait de généraliser les résultats de ce mémoire aux espaces analytiques complexes non algébriques.

5 . Théorème de continuité .

a) Résultats préliminaires .

Lemme 8 . *Soit V un sous-ensemble algébrique purement dimensionnel de dimension s de $\mathbb{P}_n$. Pour tout nombre entier $k \geqslant 0$, l'ensemble des $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$ tels que l'on ait*

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{P}_k \cap V) = k + s - n$$

est partout dense sur la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,k}$. (On convient que $\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{P}_k \cap V) < 0$ signifie $\mathbb{P}_k \cap V = \emptyset$)

Preuve . Considérons la bijection $\sigma : \mathcal{C}_k^+ (\mathbb{P}_n) \longrightarrow C_k^+ (\mathbb{P}_n)$ définie précédemment ; la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,k}$ est un sous-ensemble de $C_k^+ (\mathbb{P}_n)$; la restriction de σ à $\sigma^{-1} (\mathbb{P}_{n,k})$ est un homéomorphisme de $\sigma^{-1}(\mathbb{P}_{n,k})$ sur $\mathbb{P}_{n,k}$; en effet, si $p_{i_o\dots i_k}$ sont les coordonnées grassmanniennes de $\mathbb{P}_k$, la forme de Cayley de $\mathbb{P}_k$ est

$$F_{\mathbb{P}_k} (\overset{o}{u},\dots,\overset{k}{u}) = \sum p_{i_o\dots i_k} \; \overset{o}{u}_{i_o} \dots \overset{k}{u}_{i_k} \quad .$$

Soit Ω l'ensemble des $\mathbb{P}_k$ envisagé .

Supposons $k+s-n < 0$, et $\mathbb{P}_k \cap V = \emptyset$; d'après le lemme 4 et la remarque ci-dessus , on aura $\mathbb{P}'_k \cap V = \emptyset$ si $\mathbb{P}'_k$ est assez voisin de $\mathbb{P}_k$ dans $\mathbb{P}_{n,k}$; donc Ω est ouvert dans $\mathbb{P}_{n,k}$. Soit V' une variété purement dimensionnelle, de dimension $n-k-1$, contenant V ; Ω contient l'ensemble des $\mathbb{P}'_k$ qui ne rencontrent pas V', c'est-à-dire l'ensemble, partout dense dans $\mathbb{P}_{n,k}$, des éléments de $\mathbb{P}_{n,k}$ qui n'annulent pas la forme de Cayley de V' ; donc Ω est partout dense dans $\mathbb{P}_{n,k}$.

Supposons maintenant $k+s-n = r \geqslant 0$, et $\mathbb{P}_k \cap V$ de dimension r ; choisissons un $\mathbb{P}_{n-(r+1)}$ tel que $W = \mathbb{P}_{n-(r+1)} \cap V$ soit purement dimensionnelle de dimension $s-(r+1)$ et que l'on ait $\mathbb{P}_k \cap W = \emptyset$; d'après ce qui précède, on aura $\mathbb{P}'_k \cap W = \emptyset$ si $\mathbb{P}'_k$

est assez voisin de $\mathbb{P}_k$ dans $\mathbb{P}_{n,k}$; or $\mathbb{P}'_k \cap W = \emptyset$ entraîne $\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{P}'_k \cap V) = r$; donc Ω est ouvert. De plus Ω contient l'ensemble des $\mathbb{P}'_k$ qui ne rencontrent pas W . Cet ensemble est partout dense dans $\mathbb{P}_{n,k}$, d'après ce qui précède ; donc Ω est partout dense dans $\mathbb{P}_{n,k}$.

Lemme 9 . *Soit* V *un sous-ensemble algébrique purement dimensionnel de dimension* d *de* $\mathbb{P}_n$. *Soit* Δ *la diagonale de* $V \times V$, *et soit*

$$f : (V \times V - \Delta) \times \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_n$$

l'application définie par

$$f(x,y,\lambda,\mu) = \lambda x + \mu y \quad .$$

Pour les $\mathbb{P}_{n-d-2}$ *d'un ouvert partout dense de* $\mathbb{P}_{n,n-d-2}$, *l'adhérence de* $A = f^{-1}(\mathbb{P}_{n-d-2})$ *dans* $V \times V \times \mathbb{P}_1$ *est de dimension* $\leq d-1$.

Preuve . Soient V_i , $1 \leq i \leq k$, les composantes irréductibles de V . Soit x_i (resp. y_j) un point générique de V_i (resp. V_j) et soit W_{ij} la variété de $\mathbb{P}_n$ de point générique $\lambda x_i + \mu y_j$.
La variété W_{ij} est de dimension $\leq 2d+1$; l'image de f est contenue dans $\bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} W_{ij}$. Le lemme 8 montre que : pour les $\mathbb{P}_{n-d-2}$ d'un ouvert partout dense de $\mathbb{P}_{n,n-d-2}$, l'ensemble A est de dimension $\leq d-1$. Son adhérence dans $V \times V \times \mathbb{P}_1$ est encore de dimension $\leq d-1$.

La projection de $\overline{A}$ sur le premier facteur V de $V \times V \times \mathbb{P}_1$ est encore un ensemble algébrique de dimension $\leq d-1$.

Grâce au théorème de Baire, on déduit immédiatement des lemmes 8 et 9 et de cette remarque la proposition suivante .

<u>Proposition 6</u> . <u>Soit</u> $(V_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ <u>une suite de sous-ensembles algébriques purement dimensionnels de dimension</u> d <u>de</u> $\mathbb{P}_n$. <u>Les</u> $\mathbb{P}_{n-d-2}$ <u>d'un ensemble partout dense de la grassmannienne</u> $\mathbb{P}_{n,n-d-2}$ <u>possèdent les propriétés suivantes</u> :

i) $\mathbb{P}_{n-d-2} \cap V_\nu = \emptyset$ <u>pour tout</u> $\nu \in \mathbb{N}$;

ii) <u>pour tout</u> $\nu \in \mathbb{N}$, <u>la projection de</u> V_ν <u>de centre</u> $\mathbb{P}_{n-d-2}$ <u>est biunivoque en dehors d'une sous-variété</u> $\sum_\nu$ <u>de dimension</u> $\leq d-1$.

b) <u>Précisions sur des convergences d'intégrales et de fonctions</u> .

Dans [16] est définie l'intégration, sur un ensemble analytique complexe, d'une forme différentielle extérieure continue à support compact. Il en résulte que le lemme 9 de [3] et les considérations qui le précèdent dans le n° 7 restent valables si la forme φ est supposée seulement continue (au lieu de indéfiniment différentiable).

Comme dans [2] et [3] , on désigne par $\mathcal{H}(V)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans une variété analytique complexe V , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V .

Pour tout $z = (z_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$, posons

$$z_j = \xi_{2j-1}(z) + i\, \xi_{2j}(z) \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq n \ ,$$

avec $\xi_h(z) \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq h \leq 2n$.

Pour tout $a \in \mathbb{C}^n$ et toute famille $(r_h)_{1 \leq h \leq 2n}$ de nombres réels > 0 , soit

$$Q(a,r) = \left\{ z \ ; \ z \in \mathbb{C}^n , \left| \xi_h(z) - \xi_h(a) \right| \leq r_h \quad \text{pour} \quad 1 \leq h \leq 2n \right\} .$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$; pour tout pavé $Q(a,r) \subset U$, on désigne par $\mathcal{H}(U , a , r ,g)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant les conditions :

i) $\left\{ f(z) = 0 \right\} \cap Q(a,r) \cap$

$$\left\{ \left| \xi_{2n-1}(z) - \xi_{2n-1}(a) \right| = r_{2n-1} , \left| \xi_{2n}(z) - \xi_{2n}(a) \right| = r_{2n} \right\} = \emptyset$$

ii) pour tout $b = (b_j)_{1 \leq j \leq n-1}$ vérifiant $|\xi_h(b) - \xi_h(a)| \leq r_h$ pour $1 \leq h \leq 2n-2$, l'équation $f(b_1, \dots, b_{n-1}, z_n) = 0$ a un nombre fini $\leq g$ de solutions dans

$$\left\{ |\xi_{2n-1}(z) - \xi_{2n-1}(a)| \leq r_{2n-1}, |\xi_{2n}(z) - \xi_{2n}(a)| \leq r_{2n} \right\}.$$

Du théorème de Rouché, il résulte que $\mathcal{H}(U, a,r,g)$ est ouvert dans $\mathcal{H}(U)$.

<u>Lemme 10</u>. <u>Soit</u> $\varphi = \alpha(z) . (\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} dz_i) \wedge (\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} d\bar{z}_i)$, <u>la fonction</u> α <u>étant continue dans</u> U. <u>L'application de</u> $\mathcal{H}(U,a,r,g)$ <u>dans</u> $\mathbb{C}$, <u>qui à</u> f <u>associe</u>

$$\int_{F|Q(a,r)} \varphi$$

(F <u>désignant le diviseur de</u> f <u>et</u> $F|Q(a,r)$ <u>sa restriction à</u> $Q(a,r)$), <u>est continue</u>.

<u>Démonstration</u>. Posons $\alpha = i^{(n-1)^2} \beta$. Soit $f \in \mathcal{H}(U,a,r,g)$.

α) Supposons d'abord $\beta = 1$.

Soit $r - \varepsilon = (r_h - \varepsilon)_{1 \leq h \leq 2n}$ où $\varepsilon < \min_{1 \leq h \leq 2n} r_h$.

L'intégrale

$$\frac{1}{2^{n-1}} \int_{F|Q(a,r) - Q(a,r-\varepsilon)} \varphi$$

est l'aire de la projection de $F|Q(a,r) - Q(a,r-\varepsilon)$ sur l'espace des variables z_i, $1 \leq i \leq n-1$; elle est donc ≥ 0 et majorée par le produit par g de l'aire de

$$(Q(a,r) - Q(a,r-\varepsilon)) \cap \{z_n = a_n\}.$$

Par suite, il existe une constante K telle que l'on ait

$$0 \leq \int_{F|Q(a,r) - Q(a,r-\varepsilon)} \varphi \leq K g \varepsilon^{2n-2}.$$

β) Supposons maintenant $\beta \geq 0$. Soit η un nombre réel > 0 . Soit ε un nombre réel > 0 tel que l'on ait

$$f \in \mathcal{H}(U,a,r-\varepsilon,g) \quad \text{et} \quad K g\, \varepsilon^{2n-2} \sup_{z \in Q(a,r)} \beta(z) < \frac{\eta}{3} .$$

Soit ρ une fonction indéfiniment différentiable à support compact dans $\overset{\circ}{\widehat{Q(a,r)}}$, égale à 1 sur $Q(a,r-\varepsilon)$ et vérifiant $0 \leq \rho \leq 1$.

Pour toute $f' \in \mathcal{H}(U,a,r-\varepsilon,g) \cap \mathcal{H}(U,a,r,g)$, on a

$$\int_{F'|Q(a,r-\varepsilon)} \varphi \leq \int_{F'|Q(a,r)} \rho\varphi \leq \int_{F'|Q(a,r)} \varphi$$

(où F' désigne le diviseur de f' dans U) et, d'après α ,

$$\left| \int_{F'|Q(a,r)} \varphi - \int_{F'|Q(a,r-\varepsilon)} \varphi \right| < \frac{\eta}{3} .$$

Donc, pour toute $f' \in \mathcal{H}(U,a,r-\varepsilon,g) \cap \mathcal{H}(U,a,r,g)$, on a

$$\left| \int_{F'|Q(a,r)} \varphi - \int_{F'|Q(a,r)} \rho\varphi \right| < \frac{\eta}{3}$$

et par conséquent

$$\left| \int_{F|Q(a,r)} \varphi - \int_{F'|Q(a,r)} \varphi \right| < \frac{2\eta}{3} + \left| \int_{F|Q(a,r)} \rho\varphi - \int_{F'|Q(a,r)} \rho\varphi \right|$$

On a vu que $\mathcal{H}(U, a, r-\varepsilon, g) \cap \mathcal{H}(U, a, r, g)$ est un voisinage de f dans $\mathcal{H}(U)$: d'après le corollaire 2 de [2], il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de f dans $\mathcal{H}(U)$ tel que $f' \in \mathcal{V}$ entraîne

$$\left| \int_{F|Q(a,r)} \rho\varphi - \int_{F'|Q(a,r)} \rho\varphi \right| < \frac{\eta}{3} .$$

La condition $f' \in \mathcal{V} \cap \mathcal{H}(U, a, r-\varepsilon, g) \cap \mathcal{H}(U, a, r, g)$ entraîne donc

$$\left| \int_{F|Q(a,r)} \varphi - \int_{F'|Q(a,r)} \varphi \right| < \eta .$$

γ) On établit le lemme lorsque β est une fonction à valeurs réelles en considérant séparément les parties positive et négative de β, puis dans le cas général en considérant séparément les parties réelle et imaginaire de β.

Remarque . Soit $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$; les pavés $Q(a, r)$ tels que l'on ait $f_\nu \in \mathcal{H}(U, a, r, g)$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ constituent une famille de fermés de U stable par intersection. Donc, si E est une différence de réunions finies de tels pavés, et si f_ν tend vers f_o dans $\mathcal{H}(U)$ quand ν tend vers $+\infty$, on a

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_{F_\nu|E} \varphi = \int_{F_o|E} \varphi .$$

Nous supposerons maintenant $U = \overset{o}{\overbrace{Q(a, r')}}$ avec $r' > r$ (c'est-à-dire $r'_h > r_h$ pour $1 \leq h \leq 2n$) .

Lemme 11 . Soit $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite de polynomes non identiquement nuls de degré g, vérifiant $\lim_{\nu \to +\infty} p_\nu = p_o$. Soit $(f_{\nu,i})_{\nu \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq k}$ une famille de fonctions holomorphes dans $\overset{o}{\widehat{Q(a,r')}}$ vérifiant les conditions :

i) $f_{\nu,i}$ est un polynome unitaire

$$f_{\nu,i}(z) = z_n^{s_{\nu,i}} + \sum_{1 \leq j \leq s_{\nu,i}} a_j(z_1,\dots,z_{n-1}) z_n^{s_{\nu,i}-j}$$

en z_n , dont les coefficients a_j sont holomorphes dans $\overset{o}{\widehat{Q(a,r')}}$ et dont toutes les racines sont dans le rectangle

$$\left\{ |\xi_{2n-1}(z) - \xi_{2n-1}(a)| < r_{2n-1} ,\ |\xi_{2n}(z) - \xi_{2n}(a)| < r_{2n} \right\};$$

ii) pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, les polynomes $f_{\nu,i}$, $1 \leq i \leq k$ sont deux à deux sans facteur commun ;

iii) la fonction $\prod_{1 \leq i \leq k} f_{\nu,i}$ coïncide sur $Q(a,r')$ avec $p_\nu|_{Q(a,r')}$ à un facteur holomorphe inversible près ;

iv) pour tout indice i , l'ensemble des zéros de $f_{\nu,i}$ tend vers l'ensemble des zéros de $f_{o,i}$ quand $\nu \longrightarrow +\infty$.

Alors, pour tout indice i , et tout r'' vérifiant $r < r'' < r'$, $f_{\nu,i}$ converge uniformément vers $f_{o,i}$ dans $Q(a,r'')$ quand ν tend vers $+\infty$.

Démonstration . En vertu de la condition i) où $s_{\nu,i} \leq g$, les fonctions $f_{\nu,i}$ sont bornées supérieurement en module dans $\overset{o}{\widehat{Q(a,r')}}$ par un même nombre M ; pour chaque indice i , l'ensemble des fonctions $f_{\nu,i}$, $\nu \in \mathbb{N}$ est donc relativement compact dans $\mathcal{H}_o(\overset{o}{\widehat{Q(a,r')}})$; soit f_i une fonction appartenant à l'adhérence de cet ensemble ; il suffit de démontrer que $f_i = f_{o,i}$.

Pour chaque polynome p_ν le polynome unitaire de degré minimum

$$q_\nu(z) = z_n^{t_\nu} + \sum_{1 \leq j \leq t_\nu} b_j(z_1,\dots,z_{n-1})\, z_n^{t_\nu - j}$$

qui lui est associé sur $Q(a,r')$ est déterminé de façon unique ; en effet les fonctions symétriques des racines de q_ν s'écrivent au moyen de l'intégrale logarithmique étendue au contour du rectangle.

$$\{ |\xi_{2n-1}(z) - \xi_{2n-1}(a)| \leq r'_{2n-1} \, , \, |\xi_{2n}(z) - \xi_{2n}(a)| \leq r'_{2n} \} .$$

On a donc $q_\nu = \prod_{1 \leq i \leq k} f_{\nu,i}$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, et $\lim_{\nu \to +\infty} q_\nu = q_o$, uniformément sur $Q(a, r'')$.

Considérons un indice i déterminé, et soit f_i une fonction appartenant à l'adhérence de l'ensemble des $f_{\nu,i}$ $\nu \in \mathbb{N}$, dans $\mathcal{H}(\widehat{\overset{o}{Q}(a,r')})$; pour tout indice $j \neq i$, il existe une fonction f_j appartenant à l'adhérence de l'ensemble des $f_{\nu,j}$, $\nu \in \mathbb{N}$, de telle sorte que l'on ait $\lim_{m \to +\infty} f_{\nu_m,j} = f_j$ pour une suite croissante $(\nu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de nombres entiers et pour tout indice j . On a donc

$$\prod_{1 \leq j \leq k} f_j = \prod_{1 \leq j \leq k} f_{o,j} .$$

D'après la condition iv) , les zéros de f_j sont ceux de $f_{o,j}$. Donc, vu la condition ii) , on a $f_j = f_{o,j}$ pour tout j . En particulier, on a $f_i = f_{o,i}$; donc $f_{\nu,i}$ tend vers $f_{o,i}$, uniformément dans $Q(a,r'')$, quand ν tend vers $+\infty$.

c) Un lemme d'algèbre extérieure .

Dans l'espace $\mathbb{C}^n$ du point $z = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$, considérons les formes différentielles extérieures de type (p,p)

$$\Psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \left(\bigwedge_{1 \leq \alpha \leq p} dz_{i_\alpha}\right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq \beta \leq p} d\bar{z}_{j_\beta}\right), \quad 1 \leq i_\alpha \leq n \ , \ 1 \leq j_\beta \leq n \ .$$

Soit X_ε l'ensemble des automorphismes linéaires $z \to (1+T)z$ de $\mathbb{C}^n$ tels que la matrice T ait ses éléments $< \varepsilon$ en valeur absolue.

<u>Lemme 11</u> . <u>Pour tout nombre réel</u> $\varepsilon > 0$, <u>l'espace vectoriel engendré sur le corps</u> $\mathbb{C}$ <u>par les formes différentielles</u> $\varphi_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_p}$, $1 \leq i_\alpha \leq n$, $1 \leq j_\beta \leq n$, <u>est engendré (sur le corps</u> $\mathbb{C}$) <u>par les formes</u> $\chi^* \varphi_{1 \cdots p\, 1 \cdots p}$ <u>où</u> $\chi \in X_\varepsilon$.

La démonstration se déduit, à l'aide d'une récurrence, de la remarque suivante .

Soit U un voisinage du point $(0,0,\ldots 0,1)$ de $\mathbb{C}^n$ dans l'hyperplan d'équation $z_n = 1$. Pour tout $t \in U$, soit χ_t l'application de $\mathbb{C}^n$ en lui-même, définie par $\chi_t(z) = z + z_n t$.
Pour $1 \leq i_\alpha \leq n-1$ et $1 \leq j_\beta \leq n-1$, nous avons

$$\chi_t^* \varphi_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q} = \varphi_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_p} + \sum_{1 \leq \lambda \leq p} t_{i_\lambda} \varphi_{i_1 \cdots \left[\begin{smallmatrix} i_\lambda \\ n \end{smallmatrix}\right] \cdots i_p j_1 \cdots j_p}$$

$$+ \sum_{1 \leq \mu \leq p} \bar{t}_{j_\mu} \varphi_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots \left[\begin{smallmatrix} j_\mu \\ n \end{smallmatrix}\right] \cdots j_p} + \sum_{\substack{1 \leq \lambda \leq p \\ 1 \leq \mu \leq p}} t_{i_\lambda} \bar{t}_{j_\mu} \varphi_{i_1 \cdots \left[\begin{smallmatrix} i_\lambda \\ n \end{smallmatrix}\right] \cdots i_p j_1 \cdots \left[\begin{smallmatrix} j_\mu \\ n \end{smallmatrix}\right] \cdots j_p},$$

où le symbole $\left[\begin{smallmatrix} i_\lambda \\ n \end{smallmatrix}\right]$ signifie que l'indice i_λ est remplacé par l'indice n . Cette relation montre que chaque $\varphi_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_p}$, $1 \leq i_\alpha \leq n$, $1 \leq j_\beta \leq n$, est combinaison linéaire, à coefficients complexes, d'un nombre fini d'éléments $\chi^*_{t^{(h)}} \varphi_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_p}$, $1 \leq i_\alpha \leq n-1$, $1 \leq j_\beta \leq n-1$, $t^{(h)} \in U$.

De ce lemme, on déduit immédiatement.

<u>Corollaire 1</u> . <u>Soit</u> E <u>l'espace vectoriel</u> (<u>sur le corps</u> $\mathbb{C}$) <u>des formes différentielles extérieures continues, à support compact et de type</u> (p,p) <u>dans</u> $\mathbb{C}^n$; <u>soit</u> F <u>une forme</u> $\mathbb{C}$- <u>linéaire sur</u> E ; F <u>est déterminée par ses valeurs sur les éléments</u> $\chi^*(f \varphi_{1 \cdots p\, 1 \cdots p})$ <u>de</u> E <u>, où</u> χ <u>varie dans</u> X_ε <u>et</u> f <u>dans l'ensemble des fonctions continues et à support compact dans</u> $\mathbb{C}^n$.

Reformulons ce corollaire sous une forme qui généralise une méthode de démonstration due à K. Kodaira ([15] p. 105 et 106) .

Corollaire 2 . Soit A un espace vectoriel complexe de dimension n ; soit E l'espace vectoriel (sur le corps $\mathbb{C}$) des formes différentielles extérieures continues, à support compact et de type (p,p) dans A ; soit F une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur E . Soit B_0 une base de A ; pour tout $\varepsilon > 0$, soit B_ε l'ensemble des bases de A qui se déduisent de B_0 par une matrice $1+T$ telle que les éléments de T soient $< \varepsilon$ en valeur absolue. Soit $E_\varepsilon = \{\varphi ; \varphi \in E , \exists$ une base appartenant à B_ε pour laquelle $\varphi = f \, \varphi_{1 \ldots p \, 1 \ldots p}$, où f est une fonction continue à support compact dans $A\}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, F est déterminée par ses valeurs sur les éléments de E_ε .

En particulier, pour montrer qu'une suite $(F_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ de formes $\mathbb{C}$- linéaires sur E tend vers une forme $\mathbb{C}$- linéaire F_0 , il suffit de montrer qu'on a $\lim\limits_{\nu \to +\infty} F_\nu(\varphi) = F_0(\varphi)$ pour tout $\varphi \in E_\varepsilon$.

d) Enoncé et démonstration du théorème .

Théorème 4 . Soit X un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_n$; soit Y un ouvert de X , ne contenant aucun point singulier de X . Pour toute forme différentielle φ de type (d,d) , continue sur Y , la fonction à valeurs complexes F_φ définie dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$ par

$$F_\varphi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi \quad \text{pour tout} \quad c \in \mathcal{C}_d^+(Y)$$

est continue.

Avant de prouver ce théorème, nous ferons quelques remarques.

Remarque 1 . Le théorème 4 exprime la continuité de $\sigma_{Y,d}$ relativement à la topologie faible de $C_d^+(Y)$.

Remarque 2 . L'application qui à φ associe F_φ est continue relativement à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (pour φ et pour F_φ) .

Cela résulte immédiatement de la Proposition 5 , et de la majoration donnée par le lemme 9 de [3].

Démonstration .

α) Réduction au cas affine . Soit $c_o \in \mathcal{C}_d^+(Y)$. Comme le support de $\sigma_{Y,d}(c_o)$ est compact dans Y , il existe une famille finie $(W_i)_{i \in I}$ d'ouverts de $\mathbb{P}_n$ et, pour tout $i \in I$, des coordonnées $(z_j^{(i)})_{1 \leq j \leq n}$ dans W_i , telles que l'on ait

$$U_i = W_i \cap Y = \left\{ z \ ; \ z \in W_i \ , \quad z_j^{(i)} = 0 \quad \text{pour} \quad s < j \leq n \right\}$$

et

$$\operatorname{supp} \sigma_{Y,d}(c_o) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad .$$

Pour tout $i \in I$, soit ρ_i une fonction indéfiniment différentiable à support compact dans W_i , de telle sorte que l'on ait $0 \leq \rho_i \leq 1$ et $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$ sur un voisinage W du support de $\sigma_{Y,d}(c_o)$ dans $\mathbb{P}_n$.

Pour tout $i \in I$, soit ψ_i une forme différentielle extérieure de type (d,d) , indéfiniment différentiable et à support compact dans W_i , telle que

$$\psi_i|_{U_i} = (\rho_i|_{U_i}) \cdot (\varphi|_{U_i}) \quad .$$

La forme $\psi = \sum_{i \in I} \psi_i$ est donc une forme de type (d,d) dans $\mathbb{P}_n$ vérifiant $\psi|_{W \cap Y} = \varphi|_{W \cap Y}$.

D'après le lemme 4 , il existe un voisinage V de c_o dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$, tel que $c \in V$ entraîne $|\sigma_{Y,d}(c)| \subset W \cap Y$. Pour tout $c \in V$, on a

$$\int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi = \sum_{i \in I} \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi_i \quad ;$$

il suffit donc d'étudier chacune des intégrales figurant au second membre, lorsque c varie dans V .

β) Choix des coordonnées et de la projection .

D'après ce qui précède, il suffit d'établir le théorème lorsque $Y = \mathbb{P}_n$ et lorsque φ est une forme différentielle de type (d,d) à support compact dans un ouvert de coordonnées de $\mathbb{P}_n$.

Soit $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de $\mathcal{C}_d^+(Y)$ tendant vers c_o et appartenant à la composante connexe de c_o . On peut choisir des coordonnées homogènes $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ dans $\mathbb{P}_n$ vérifiant les conditions:

i) φ est à support compact dans $\mathbb{C}^n = \{x \; ; \; x \in \mathbb{P}_n \; , \; x_o \neq 0\}$;

ii) $\mathbb{P}_{n-d-2} = \{x \; ; \; x \in \mathbb{P}_n \; , \; x_i = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq d+1\}$ vérifie relativement à la suite $(\sigma_{Y,d}(c_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ les conditions i) et ii) de la Proposition 5 ;

iii) aucune composante irréductible de $\sigma_{Y,d}(c_o)$ n'est contenue dans l'hyperplan d'équation $x_o = 0$;

iv) le point à l'infini de l'axe des x_{d+1} n'appartient pas à la projection de $\sigma_{Y,d}(c_o)$ sur

$$\mathbb{P}_{d+1} = \{x \; ; \; x \in \mathbb{P}_n \; ; \; x_i = 0 \text{ pour } d+2 \leq i \leq n\} .$$

On peut supposer les conditions iii) et iv) vérifiées par $\sigma_{Y,d}(c_\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, puisqu'elles le sont dès que ν est assez grand.

Considérons dans $\mathbb{C}^n$ les coordonnées

$$y_i = \frac{x_i}{x_0} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d+1 \quad \text{et} \quad z_j = \frac{x_{d+1+j}}{x_0} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant n-d-1 \ ;$$

soient

$$\mathbb{C}^{d+1} = \{ x \ ; \ x \in \mathbb{C}^n \ , \quad z_j = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant n-d-1 \} \ ,$$

$$\mathbb{C}^{n-d-1} = \{ x \ ; \ x \in \mathbb{C}^n \ , \quad y_i = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d+1 \} \ ;$$

$\mathbb{P}_{n-d-2}$ est l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{C}^{n-d-1}$.

On doit établir la relation

$$\lim_{\nu \to +\infty} F_\varphi (c_\nu) = F_\varphi (c_0)$$

pour toute forme différentielle φ de type (d,d) , continue et à support compact dans $\mathbb{C}^n$; pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $G_\nu(\varphi) = F_\varphi(c_\nu)$ définit une forme $\mathbb{C}$- linéaire sur l'espace $\mathbb{C}$- vectoriel de ces formes différentielles.

Tout système de coordonnées, situé dans un sous-ensemble partout dense d'un certain voisinage de celui précédemment choisi, vérifie encore les conditions ci-dessus. Vu le Corollaire 2 du lemme 11 et la remarque qui le suit, il suffit donc de considérer les formes différentielles

$$\varphi = \alpha(y,z) \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant d} dy_i \wedge d\bar{y}_i$$

où $\alpha(y,z)$ est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{C}^n$.

γ) <u>Equations des projections des cycles</u> .

Poursuivons la démonstration sous les hypothèses précisées dans β
Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, soit

$$A_\nu = \sigma_{Y,d}(c_\nu) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \ell_\nu} n_{i,\nu} A_{i,\nu}$$

l'expression canonique de $\sigma_{Y,d}(c_\nu)$ (cf.[3] , n° 9) .

Comme c_ν tend vers c_0 dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$ quand ν tend vers $+\infty$, nous pouvons associer à c_ν, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, une forme de Cayley F_ν de telle sorte que les coefficients de F_ν tendent vers ceux de F_0 quand ν tend vers $+\infty$. Ces formes de Cayley F_ν sont toutes de même degré g par rapport à chaque série $\overset{i}{u}$ de variables. Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, soit

$$F_\nu = \prod_{1 \leq i \leq \ell_\nu} F_{i,\nu}^{n_{i,\nu}}$$

où $F_{i,\nu}$ est forme de Cayley de $A_{i,\nu}$.

En effectuant dans F_ν (resp. $F_{i,\nu}$) la substitution définie par $\overset{i}{u}_0 = y_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq d$, $\overset{i}{u}_{i+1} = -1$ pour $0 \leq i \leq d$ et $\overset{i}{u}_j = 0$ dans les autres cas, nous obtenons un polynome p_ν (resp. $p_{i,\nu}$) en les variables $(y_i)_{1 \leq i \leq k+1}$, vérifiant les conditions :

i) $p_\nu = \prod_{1 \leq i \leq \ell_\nu} p_{i,\nu}^{n_{i,\nu}}$ est de degré g pour tout $\nu \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim_{\nu \to +\infty} p_\nu = p_0$.

Vu la condition ii) de β, les polynomes $p_{i,\nu}$ sont irréductibles. Vu la condition iii) de β pour A_ν, p_ν (resp. $p_{i,\nu}$) est non constant et admet pour diviseur la projection (avec multiplicités) de $A_\nu \cap \mathbb{C}^n$ (resp. $A_{i,\nu} \cap \mathbb{C}^n$) sur $\mathbb{C}^{d+1}$. Vu la condition iv) de β pour A_ν, le polynome $p_\nu(a_1,\dots,a_d, y_{d+1})$ possède, quel que soit ν, g racines (distinctes ou non) pour tout choix des constantes a_i, $1 \leq i \leq d$. De cette condition il résulte encore : tout point $a \in \{p_0(y)=0\}$ possède un système fondamental de voisinages $Q(a,r)$ tels que $p_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^{d+1}, a,r,g)$.

δ) Equations locales des projections des cycles.

Soit K un compact de $\mathbb{C}^{d+1}$ contenant la projection du support de φ.

Soit a un point de K vérifiant $p_0(a) = 0$. Soit $(a,b_i)_{1 \leq i \leq k}$ l'ensemble des points du support de A_0 qui se projettent en a ;

on a $k \leqslant g$, $b_i \in \mathbb{C}^{n-d-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Pour tout i , $1 \leqslant i \leqslant k$, soit $P_i(\varepsilon)$ le polydisque fermé de $\mathbb{C}^{n-d-1}$ de centre b_i , de rayons égaux à ε . Il est possible de choisir ε et r de telle sorte que :

i) les $P_i(\varepsilon)$ soient deux à deux disjoints ;

ii) $\{p_0(y) = 0\} \cap Q(a,r) \cap$
$$\{|\xi_{2d+1}(y) - \xi_{2d+1}(a)| = r_{2d+1} , |\xi_{2d+2}(y) - \xi_{2d+2}(a)| = r_{2d+2}\} = \emptyset ;$$

iii) pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $|A_0| \cap (Q(a,r) \times bP_i(\varepsilon)) = \emptyset$,

$bP_i(\varepsilon)$ désignant le bord de $P_i(\varepsilon)$.

Remarquons que les voisinages $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} Q(a,r) \times P_i(\varepsilon)$ de l'ensemble des points (a,b_i) , $1 \leqslant i \leqslant k$, vérifiant ces conditions, constituent un système fondamental de voisinages de cet ensemble.

Choisissons un tel voisinage ; nous pouvons supposer la condition ii) (resp. iii)) ci-dessus vérifiée par p_ν au lieu de p_0 (resp. A_ν au lieu de A_0) pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, car ceci a lieu dès que ν est assez grand. Soient $r' > r$ et $\varepsilon' > \varepsilon$, tels que les conditions i) et iii) ci-dessus soient encore vérifiées pour r' au lieu de r , ε' au lieu de ε, et tout $\nu \in \mathbb{N}$.

Soit
$$B_{\nu,i} = |A_\nu| \cap (\overset{\circ}{\widehat{Q(a,r')}} \times \overset{\circ}{\widehat{P_i(\varepsilon')}}) .$$
En vertu de la condition ii) , la projection de $B_{\nu,i}$ sur $\overset{\circ}{\widehat{Q(a,r')}}$ est propre ; son image est donc un sous-ensemble analytique $B'_{\nu,i}$ de $\overset{\circ}{\widehat{Q(a,r')}}$ de codimension pure 1 . Soient $B^{(\alpha)}_{\nu,i}$ les composantes irréductibles de $B_{\nu,i}$; chacune d'elles est contenue dans une composante de A_ν ; donc sa multiplicité $\mu^{(\alpha)}_{\nu,i}$ est déterminée. Soit $B'^{(\alpha)}_{\nu,i}$ la projection de $B^{(\alpha)}_{\nu,i}$; les $B'^{(\alpha)}_{\nu,i}$ sont les composantes irréductibles de $B'_{\nu,i}$.

Pour chaque $B'^{(\alpha)}_{\nu,i}$ soit $f^{(\alpha)}_{\nu,i}$ une fonction holomorphe dans $\overset{\circ}{\widehat{Q(a,r')}}$ ayant $B'^{(\alpha)}_{\nu,i}$ pour diviseur. Comme les $f^{(\alpha)}_{\nu,i}$ divisent $p_\nu / \overset{\circ}{\widehat{Q(a,r')}}$, qui est de degré g, on peut prendre pour $f^{(\alpha)}_{\nu,i}$ un polynome unitaire en y_{d+1}

$$f^{(\alpha)}_{\nu,i}(y) = y_{d+1}^{s_{\alpha,\nu,i}} + \sum_{1 \leq j \leq s_{\alpha,\nu,i}} a_j(y_1,\ldots,y_d)\, y_{d+1}^{s_{\alpha,\nu,i}-j}$$

dont les coefficients a_j soient holomorphes dans $\overset{\circ}{\widehat{Q(a,r')}}$ et dont les racines soient toutes dans le rectangle

$$\{ |\xi_{2d+1}(y) - \xi_{2d+1}(a)| < r_{2d+1} , |\xi_{2d+2}(y) - \xi_{2d+2}(a)| < r_{2d+2} \} .$$

Soit alors

$$f_{\nu,i} = \prod_{\alpha} (f^{(\alpha)}_{\nu,i})^{\mu^{(\alpha)}_{\nu,i}}$$

On a $f_{\nu,i} \in \mathcal{H}(\overset{\circ}{\widehat{Q(a,r')}}, a, r, g)$ et les fonctions $f_{\nu,i}$ vérifient les hypothèses du lemme 11 : l'hypothèse ii) en vertu de la condition ii) de $\mathcal{C}$ selon laquelle la projection est génériquement biunivoque, les autres hypothèses en conséquence immédiate de la construction. Par conséquent, pour tout r'' vérifiant $r < r'' < r'$, $f_{\nu,i}$ converge uniformément vers $f_{o,i}$ dans $Q(a,r'')$ quand ν tend vers $+\infty$.

ε) <u>Convergence des intégrales</u> .

Soit Q un pavé contenant K . Il existe une constante $V > 0$ telle que l'on ait, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{vol}\, (p_\nu) / Q < V$$

où (p_ν) désigne le diviseur de p_ν .

Selon les conclusions de β , nous intégrons une forme différentielle

$$\varphi = \alpha(y,z)\ \Theta \qquad , \quad \Theta = \left(\frac{i}{2}\right)^d \bigwedge_{1 \leq i \leq d} dy_i \wedge d\bar{y}_i$$

où $\alpha(y,z)$ est une fonction continue dont le support se projette dans K .

Soit $\delta > 0$; soit $\eta > 0$ tel que, si p et p' sont deux points de $\mathbb{C}^n$, de distance $< \eta$, on ait

$$|\alpha(p) - \alpha(p')| < \frac{\delta}{3gV}$$

Pour chaque point $a \in \{p_o(y) = 0\} \cap K$, effectuons la construction exposée en δ , avec des nombres r_a et ε_a , de telle sorte que chaque $Q(a,r_a) \times P_i(\varepsilon_a)$ soit de diamètre $< \eta$. Soit $(a_h)_{1 \leq h \leq \ell}$ une suite finie de points de $\{p_o(y) = 0\} \cap K$ telle que l'on ait

$$\{p_o(y) = 0\} \cap K \subset \bigcup_{1 \leq h \leq \ell} Q(a_h, r_{a_h}) \subset Q \quad .$$

Posons $r_h = r_{a_h}$ et $\varepsilon_h = \varepsilon_{a_h}$ pour $1 \leq h \leq \ell$. La construction précédente, effectuée aux points a_h , $1 \leq h \leq \ell$, nous fournit les voisinages

$$Q(a_h, r_h) \times P_i(\varepsilon_h) \quad , \quad 1 \leq i \leq k_h \qquad , \quad 1 \leq h \leq \ell \quad ,$$

k_h désignant le nombre de points de $|A_o|$ au dessus de a_h . Nous pouvons supposer

$$|A_\nu| \cap (K \times \mathbb{C}^{n-d-1}) \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} Q(a_h, r_h) \times P_i(\varepsilon_h)$$

pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, car cette condition est réalisée dès que ν est suffisamment grand.

La construction exposée en δ nous fournit encore des fonctions $f_{\nu,i,h}$, $1 \leq i \leq k_h$, $1 \leq h \leq \ell$, $\nu \in \mathbb{N}$; $f_{\nu,i,h}$ est définie au voisinage de $Q(a,r_h)$ et possède les propriétés indiquées à la fin de δ .

Soit $E_1 = Q(a_1, r_1)$ et, pour tout $h \leq \ell$,

$$E_h = Q(a_h, r_h) - \bigcup_{1 \leq j < h} Q(a_j, r_j) \quad ; \text{ pour } 1 \leq h \leq \ell,$$

et pour $1 \leq i \leq k_h$, soit $\Delta_{h,i} = E_h \times P_i(\mathcal{E}_h)$. Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\int_{A_\nu} \varphi = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} \int_{\Delta_{h,i} \cap A_\nu} \varphi$$

et par conséquent

$$\left| \int_{A_\nu} \varphi - \int_{A_o} \varphi \right| \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} \left| \int_{A_\nu \cap \Delta_{h,i}} \varphi - \int_{A_o \cap \Delta_{h,i}} \varphi \right| .$$

En désignant par $\alpha_{h,i}$ une valeur prise par α dans $\Delta_{h,i}$, nous avons

$$\left| \int_{A_\nu \cap \Delta_{h,i}} \varphi - \int_{A_o \cap \Delta_{h,i}} \varphi \right| \leq \left| \int_{A_\nu \cap \Delta_{h,i}} (\alpha - \alpha_{h,i})\theta \right|$$

$$+ \left| \int_{A_o \cap \Delta_{h,i}} (\alpha - \alpha_{h,i})\theta \right| + \left| \alpha_{h,i} \left(\int_{A_\nu \cap \Delta_{h,i}} \theta - \int_{A_o \cap \Delta_{h,i}} \theta \right) \right|$$

$$\leq \frac{\delta}{3gV} \operatorname{vol}(p_\nu)\Big|_{E_h} + \frac{\delta}{3gV} \operatorname{vol}(p_o)\Big|_{E_h}$$

$$+ \sup_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} |\alpha_{h,i}| \cdot \left| \int_{(f_{\nu,i,h})|_{E_h}} \theta - \int_{(f_{o,i,h})|_{E_h}} \theta \right| ,$$

D'après δ , $f_{\nu,i}$ tend vers $f_{o,i}$ uniformément dans un voisinage de $Q(a_h, r_h)$. D'après δ et la remarque faite à la suite du lemme 10,

$$\int_{(f_{\nu,i,h})|_{E_h}} \theta - \int_{(f_{o,i,h})|_{E_h}} \theta$$

tend vers 0 quand ν tend vers $+\infty$. Soit ν_1 tel que $\nu \geqslant \nu_1$ entraîne

$$\left| \int_{(f_{\nu,i,h})|_{E_h}} \varphi - \int_{(f_{o,i,h})|_{E_h}} \varphi \right| < \frac{\delta}{3 . \sup\limits_{\substack{1 \leq i \leq k_h \\ 1 \leq h \leq \ell}} |\alpha_{h,i}| \cdot \sum\limits_{1 \leq h \leq \ell} k_h}$$

pour tout h vérifiant $1 \leqslant h \leqslant \ell$ et tout i vérifiant $1 \leq i \leq k_h$.

Pour $\nu \geqslant \nu_1$, on a

$$\left| \int_{A_\nu} \varphi - \int_{A_o} \varphi \right| \leqslant \frac{\delta}{3 g V} \sum_{1 \leq h \leq \ell} k_h \left(\mathrm{vol}\ (p_\nu)|_{E_h} + \mathrm{vol}\ (p_o)|_{E_h}\right) + \frac{\delta}{3} .$$

Comme on a $k_h \leqslant g$ et $\sum\limits_{1 \leqslant h \leqslant \ell} \mathrm{vol}\ (p_\nu)|_{E_h} \leqslant V$, on obtient

$$\left| \int_{A_\nu} \varphi - \int_{A_o} \varphi \right| \leqslant \delta .$$

6 . Théorème d'analyticité.

a) Un lemme sur des courbes analytiques dans $\mathcal{C}_d^+(\mathbb{P}_n)$

Soit $D = \{ t \ ; \ t \in \mathbb{C} \ , |t| < 1 \}$; l'anneau $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ des séries entières en t convergentes au voisinage de 0 est factoriel ; donc l'anneau $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u}]$ (voir la notation introduite dans le n° 4 a)

Remarque 1 . Soit $F(t,\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u})$ un élément de l'anneau $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u}]$, à coefficients holomorphes dans D, et irréductible sur $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. Il existe un nombre réel ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1$ tel que, pour tout t vérifiant $0 < |t| < \varepsilon$, $F(t,\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u})$ se décompose dans $\mathbb{C}[\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u}]$ en facteurs irréductibles distincts.

En effet, vu la Remarque 3 du N° 4, b , la condition pour que $F(t,\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u})$ ait un facteur multiple dans $\mathbb{C}[\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u}]$ est donnée par l'annulation de polynomes p_α, $1 \leq \alpha \leq \ell$, en les coefficients de F, c'est-à-dire par l'annulation au point t d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{C}\{\{t\}\}$; comme $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ est principal, l'idéal engendré par ces éléments est engendré par un élément $\Delta(t)$; celui-ci n'est pas identiquement nul car F est irréductible sur $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. Il suffit de choisir ε tel que l'on ait $\Delta(t) \neq 0$ pour $0 < |t| < \varepsilon$.

Pour toute application holomorphe $\mathcal{T}$ de D dans $\mathcal{C}^+_d(\mathbb{P}_n)$, il existe un élément $F(t,\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u})$ de l'anneau $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u}]$ à coefficients holomorphes dans D, tel que, pour tout $t \in D$, $F(t,\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u})$ soit une forme de Cayley appartenant à $\mathbb{C}[\overset{o}{u},\dots,\overset{d}{u}]$ et définissant l'élément $\mathcal{T}(t)$ de $\mathcal{C}^+_d(\mathbb{P}_n)$; comme D est normal, un tel élément définit $\mathcal{T}$.

Lemme 12 . Soit $\mathcal{T}$ une application holomorphe de D dans $\mathcal{C}^+_d(\mathbb{P}_n)$. Il existe un nombre réel ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1$, une variété analytique complexe A de dimension $d+1$, une application holomorphe propre π de A sur D et une application holomorphe f de A dans $\mathbb{P}_n$, de telle sorte que :

i) pour tout $t \in D$, la restriction de f à $\pi^{-1}(t)$ est propre, et on a $f(\pi^{-1}(t)) = |\sigma_{\mathbb{P}_n,d}(\mathcal{T}(t))|$;

ii) pour tout t vérifiant $0 < |t| < \varepsilon$, il existe un sous-ensemble analytique S_t de $\pi^{-1}(t)$, de dimension $\leq d-1$, tel que la restriction de f à $\pi^{-1}(t) - S_t$ soit un isomorphisme analytique de $\pi^{-1}(t) - S_t$ sur son image ;

iii) <u>pour tout 2-simplexe différentiable</u> Δ <u>contenu dans la couronne</u> $0 < |t| < \varepsilon$, <u>la restriction de</u> π <u>à</u> $\pi^{-1}(\Delta)$ <u>est une fibration différentiable triviale</u>, <u>à fibres compactes de dimension</u> d, de $\pi^{-1}(\Delta)$ <u>sur</u> Δ .

<u>Preuve</u>. α. En appliquant à un élément F de $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{0}{u},\dots,\overset{d}{u}]$ qui définit τ la méthode utilisée au début de la démonstration du lemme 4 , on obtient un système d'équations $g_\nu(t,x) = 0$, $0 \leq \nu \leq k$ définissant un sous-ensemble analytique $\tilde{A}$ de $D \times \mathbb{P}_n$. Soit $\tilde{\pi}$ (resp. $\tilde{f}$) la projection de $\tilde{A}$ sur D (resp. dans $\mathbb{P}_n$) . On a les propriétés suivantes :

i) pour tout $t \in D$, la restriction de $\tilde{f}$ à $\tilde{\pi}^{-1}(t)$ est un isomorphisme analytique de $\tilde{\pi}^{-1}(t)$ sur $|\sigma_{\mathbb{P}_n,d}(\tau(t))|$; en particulier, $\tilde{\pi}$ est propre.

ii) $\tilde{A}$ est purement dimensionnel et de dimension $d+1$; c'est une conséquence de i .

β. Soit $\tilde{S}$ l'ensemble des points singuliers de $\tilde{A}$; c'est un ensemble analytique de dimension $\leq d$. D'après le théorème d'Hironaka [12], il existe une variété analytique complexe A de dimension $d+1$ et une application holomorphe propre h de A sur $\tilde{A}$, de telle sorte que la restriction de h à $A - h^{-1}(\tilde{S})$ soit un isomorphisme analytique de $A - h^{-1}(\tilde{S})$ sur $A - \tilde{S}$, et que l'ouvert $A - h^{-1}(\tilde{S})$ soit partout dense dans A . Soient $\pi = \tilde{\pi} \circ h$ et $f = \tilde{f} \circ h$. On a les propriétés suivantes :

i) Pour tout $t \in D$, on a

$$f(\pi^{-1}(t)) = \tilde{f}(\tilde{\pi}^{-1}(t)) = |\sigma_{\mathbb{P}_n,d}(\tau(t))| ,$$

et la restriction de f à $\pi^{-1}(t)$ est propre .

ii) L'ensemble $S = h^{-1}(\tilde{S})$ est un sous-ensemble analytique de dimension $\leq d$ de A ; pour tout $t \in D$, la restriction de f à

$\pi^{-1}(t) - S_t$, $S_t = S \cap \pi^{-1}(t)$ est un isomorphisme analytique de $\pi^{-1}(t) - S_t$ sur son image. Parmi les composantes irréductibles de S, pourrait figurer une composante irréductible d'une fiche de π ; toutefois, il existe un nombre réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout t vérifiant $0 < |t| < \varepsilon_1$, l'ensemble analytique S_t soit de dimension $\leq d-1$. La propriété ii) du lemme est donc établie pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

iii) L'application π est propre, et il existe un nombre réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que la couronne $0 < |t| < \varepsilon_2$ ne contienne aucune valeur critique de π . En effet, l'ensemble critique de π dans A est l'ensemble des points de A où s'annule la différentielle de π ; c'est donc un ensemble analytique, et son image par l'application propre π est un sous-ensemble analytique T de D ; d'après le théorème de Sord, T est de mesure nulle ; il est donc de dimension zéro ; la propriété annoncée en résulte. On en déduit la propriété iii) du lemme pour $\varepsilon \leq \varepsilon_2$.

Corollaire . Soit X un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_n$; soit Y un ouvert de X , ne contenant aucun point singulier de X . Soit φ une forme différentielle extérieure continue, de type (d,d) , dans Y. Soit F_φ la fonction à valeurs complexes définie dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$ par

$$F_\varphi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi \qquad \text{pour tout } c \in \mathcal{C}_d^+(Y) .$$

Soit τ une application holomorphe de D dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$, définie par un élément $F(t, \overset{0}{u}, \ldots, \overset{d}{u})$ de $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{0}{u}, \ldots, \overset{d}{u}]$ à coefficients holomorphes dans D , et irréductible sur $\mathbb{C}\{\{t\}\}$.

Il existe un nombre réel ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1$, une variété analytique complexe A de dimension $d+1$, une application holomorphe propre π de A sur D et une application holomorphe f de A dans Y , tels qu'on ait la propriété suivante :

<u>Soient</u> $D'_\varepsilon = \{t \; ; \; 0 < |t| < \varepsilon\}$, $A'_\varepsilon = \pi^{-1}(D'_\varepsilon)$, <u>et</u> π'_ε <u>la restriction de</u> π <u>à</u> A'_ε ; <u>alors la restriction de</u> $F_\varphi \circ \tau$ <u>à</u> D'_ε <u>est</u> (<u>comme courant de degré</u> 0 <u>dans</u> D'_ε) <u>l'image par</u> π'_ε <u>de la restriction de</u> $f^*\varphi$ <u>à</u> A'_ε (<u>considérée comme courant dans</u> A'_ε) .

Effectuons en effet la construction du lemme 12 ; la remarque 1 nous permet en outre de choisir ε tel que $\sigma_{\tilde{Y},d}(\tau(t))$ soit identique à son support pour $t \in D'_\varepsilon$. On a alors

$$(F_\varphi \circ \tau)(t) = \int_{\sigma_{Y,d(\tau(t))}} \varphi = \int_{\pi^{-1}(t)} f^* \varphi$$

pour $t \in D'_\varepsilon$.

Soit ψ une forme différentielle extérieure indéfiniment différentiable, de type $(1,1)$, à support compact dans D'_ε . On a

$$\int_{D'_\varepsilon} (F_\varphi \circ \tau) . \psi = \int_{D'_\varepsilon} \left(\int_{\pi^{-1}(t)} f^* \varphi . \right) . \psi .$$

Si le support de ψ est contenu dans un 2-simplexe différentiable Δ contenu dans D'_ε , la dernière intégrale est égale à

$$\int_{A'_\varepsilon} (f^*\varphi) \wedge ({\pi'_\varepsilon}^* \psi) \quad ;$$

sinon, on se ramène à ce cas en utilisant une partition de l'unité. La relation obtenue

$$\int_{D'_\varepsilon} (F_\varphi \circ \tau) \; . \; \psi = \int_{A'_\varepsilon} (f^*\varphi) \wedge ({\pi'_\varepsilon}^* \psi)$$

exprime la propriété annoncée.

b) Enoncé et démonstration du théorème .

Définition . Un forme différentielle φ de type (d,d), définie et continue dans une variété analytique complexe, sera dite pseudoconvexe si elle est réelle et si le courant $\frac{i}{\pi} d'd'' \varphi$ est $\geqslant 0$ (au sens de [17]) .

Théorème 5 . Soit X un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_n$; soit Y un ouvert de X , ne contenant aucun point singulier de X , et soit Ω^d le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré d dans Y .

i) Pour toute forme différentielle φ de type (d,d) , deux fois différentiable et pseudoconvexe dans Y , la fonction à valeurs réelles F_φ définie dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$ par

$$F_\varphi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi \qquad \text{pour tout } c \in \mathcal{C}_d^+(Y)$$

est continue et plurisousharmonique (au sens de [10])

ii) Pour tout $\xi \in H^d(Y, \Omega^d)$, la fonction à valeurs complexes F_ξ définie dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$ par

$$F_\xi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}} \xi \qquad \text{pour tout } c \in \mathcal{C}_d^+(Y) ,$$

est holomorphe.

Démonstration .α . Soit φ une forme différentielle extérieure continue de type (d,d) dans Y , et soit F_φ la fonction définie par

$$F_\varphi(c) = \int_{\sigma_{Y,d}(c)} \varphi \qquad \text{pour tout } c \in \mathcal{C}_d^+(Y) .$$

Soit $\mathcal{T}$ une application holomorphe de D dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$; elle est définie par un élément $F(t,\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u})$ de l'anneau $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u})]$ à coefficients holomorphes dans D .

Soit
$$F(t,\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u}) = \prod_{1 \leq i \leq s} F_i(t,\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u})^{m_i}$$
la décomposition de F en facteurs premiers dans $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u}]$; soit $\tau_i(t)$ l'élément de $\mathcal{C}^+_d(Y)$ défini par la forme de Cayley $F_i(t,\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u})$. Pour $|t|$ suffisamment petit, on a
$$\sigma_{Y,d}(\tau(t)) = \sum_{1 \leq i \leq s} m_i \cdot \sigma_{Y,d}(\tau_i(t))$$
et par conséquent
$$F_\varphi \circ \tau = \sum_{1 \leq i \leq s} m_i \cdot (F_\varphi \circ \tau_i) .$$
Si, moyennant des hypothèses convenables sur φ, on montre que $F_\varphi \circ \tau_i$ est, pour tout i, soit holomorphe, soit sousharmonique au voisinage de 0, la même propriété en résultera pour $F_\varphi \circ \tau$. Il suffit donc de considérer le cas où τ est définie par un élément $F(t,\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u})$ de $\mathbb{C}\{\{t\}\}[\overset{o}{u},\ldots,\overset{d}{u}]$ à coefficients holomorphes dans D, et irréductible sur $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. Effectuons dans ce cas la construction du Corollaire qui précède.

β) Supposons φ pseudoconvexe et deux fois différentiable ; l'opération image réciproque f^* des formes par f et l'opération image directe π_* des courants par π'_ε commutent avec les différentielles d' et d'', par conséquent aussi avec l'opérateur $d'd''$; elles conservent en outre le caractère $\geqslant 0$ des formes et des courants. La fibration $\pi : A'_\varepsilon \longrightarrow D'_\varepsilon$ étant localement triviale (du point de vue différentiable) sur D'_ε, le courant $\pi_* f^*\varphi$ coïncide sur D'_ε avec la fonction continue $F_\varphi \circ \tau$. Par conséquent le courant $\frac{i}{\pi} d'd''(F_\varphi \circ \tau)$ est $\geqslant 0$ dans D'_ε ; comme $F_\varphi \circ \tau$ est continue (d'après le théorème 4), $F_\varphi \circ \tau$ est sousharmonique au voisinage de 0. Ceci ayant lieu quel que soit τ, F_φ est plurisousharmonique dans $\mathcal{C}^+_d(Y)$.

γ) Supposons maintenant que φ est indéfiniment différentiable et vérifie $d''\varphi = 0$; un argument utilisé en (β) montre que l'on a $d''(F_\varphi \circ \tau) = 0$ (au sens des courants) dans D'_ε ; par conséquent

$F_\varphi \circ \tau$ est holomorphe dans D'_ε ; comme $F_\varphi \circ \tau$ est continue d'après le théorème 4 , $F_\varphi \circ \tau$ est holomorphe au voisinage de 0 en vertu du théorème de Riemann . Ceci ayant lieu pour toute application τ telle que $\tau(o)$ soit un point non singulier de $\mathcal{C}_d^+(Y)$, F_φ est (d'après le théorème de Hartogs banal) holomorphe au voisinage des points non singuliers de $\mathcal{C}_d^+(Y)$. Comme F_φ est continue et comme $\mathcal{C}_d^+(Y)$ est faiblement normal, F_φ est holomorphe dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$.
Or on a par définition $F_\xi = F_\varphi$ (cf. [3] n° 7 a γ) si φ est une forme à laquelle le théorème de Dolbeault associe la classe $\xi \in H^d(Y, \Omega^d)$; F_ξ est donc holomorphe.

c) <u>L'application</u> $\rho^{(o)}_{Y,d}$.

Reprenons les hypothèses du théorème 5 , et désignons par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$. Vu le théorème 5 , soit

$$\rho^{(o)}_{Y,d} : H^d(Y, \Omega^d) \longrightarrow H^o(\mathcal{C}_d^+(Y), \mathcal{O})$$

l'application qui fait correspondre, à tout $\xi \in H^d(Y, \Omega^d)$, la fonction F_ξ , holomorphe dans $H^o(\mathcal{C}_d^+(Y), \mathcal{O})$; cette application est linéaire;

son image est contenue dans l'ensemble des fonctions f holomorphes sur $\mathcal{C}_d^+(Y)$ et additives ,c'est-à-dire vérifiant

$$f(c_1+c_2) = f(c_1) + f(c_2)$$

pour tous $c_1 \in \mathcal{C}_d^+(Y)$, $c_2 \in \mathcal{C}_d^+(Y)$, l'addition dans $\mathcal{C}_d^+(Y)$ étant obtenue en transportant par la bijection $\sigma_{Y,d}$ l'addition de $C_d^+(Y)$.

Soit $A_q(Y)$ l'algèbre engendrée dans $H^o(\mathcal{C}_d^+(Y), \mathcal{O})$ par l'image de $\rho^{(o)}_{Y,d}$ et les constantes .

§ 3 . Convexité holomorphe dans l'espace des cycles .

6 . L'espace des cycles d'une variété algébrique strictement q-pseudoconvexe .

a) Cas d'un ouvert strictement q-pseudoconvexe .

Rappelons, selon [7] et [19], la méthode de réduction de Remmert d'un espace holomorphiquement convexe . Soit V un tel espace, et soit R la relation d'équivalence dans V pour laquelle $x \sim y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$ pour toute fonction f holomorphe dans V . Cette relation d'équivalence est propre ; d'après le "Main theorem" de [ ], l'espace annelé $V/_R$ quotient de V par R est un espace analytique complexe et l'application naturelle π de V sur $V/_R$ est holomorphe ; $V/_R$ est un espace de Stein ; les fibres de π sont des ensembles analytiques connexes. L'ensemble

$$\{ x \; ; \; x \in V \quad , \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) > 0 \}$$

sera appelé ensemble de dégénérescence de V . D'après un théorème de Remmert [20] , c'est un ensemble analytique .

Nous avons défini dans [3] la notion de sous-ensemble ouvert strictement q-pseudoconvexe d'une variété analytique complexe.

Théorème 6 . Soit Y un sous-ensemble ouvert d'une variété algébrique projective X ; supposons que Y a une frontière non vide et ne contient pas de point singulier de X .

Si Y est strictement q-pseudoconvexe, alors :

i) l'espace analytique complexe $\mathcal{C}_q^+(Y)$ est $A_q(Y)$-convexe ;

ii) $H^0(\mathcal{C}_q^+(Y), \mathcal{O})$ est la fermeture intégrale faible de $A_q(Y)$.

En particulier, l'espace $\mathcal{C}_q^+(Y)$ est holomorphiquement convexe. L'ensemble de dégénérescence de chacune de ses composantes connexes est compact .

<u>Si, de plus,</u> $H^{q+1}(Y,\mathcal{F}) = 0$ <u>pour tout faisceau analytique, cohérent</u> $\mathcal{F}$ <u>dans</u> Y (<u>en particulier si</u> Y <u>est q-complet</u>), <u>alors</u> $A_q(Y)$ <u>sépare les points de</u> $\mathcal{C}_q^+(Y)$; <u>en particulier</u>, $\mathcal{C}_q^+(Y)$ <u>est holomorphiquement complet</u>.

La conclusion i) résulte de la Proposition 7 de [3] (encore valable quand on y remplace les ensembles analytiques A_ν par des éléments de $C_q^+(Y)$) et du Théorème 5 . La conclusion ii) résulte de i) et du Théorème 2 .

D'après le lemme 15 de [3], il existe un compact K de Y contenant tout sous-ensemble analytique compact de Y de dimension $\geqslant q+1$ en chacun de ses points. Soit E l'ensemble de dégénérescence d'une composante connexe W de $\mathcal{C}_q^+(Y)$; d'après la Remarque 4 du n° 4,b, $\bigcup_{c \in E} |\sigma_{Y,q}(c)|$ est un sous-ensemble analytique compact de Y ayant en chaque point une dimension $\geqslant q+1$, donc contenu dans K ; d'après la Remarque 5 du n° 4, b) E est contenu dans un compact K' de W .

La dernière assertion résulte du Théorème 5 de [3] .

b) <u>Paires de Runge d'espaces de cycles</u> .

Soit X une variété analytique complexe ; on désigne par $C^{r,s}(X)$ l'espace vectoriel des formes différentielles indéfiniment différentiables et de type (r,s) dans X ; on le munit de la topologie de la convergence uniforme, sur tout compact, des coefficients des formes et de leurs dérivées ; c'est alors un espace de Fréchet - Schwartz .

La différentielle extérieure d'' définit une application linéaire continue $d''_{r,s}$ de $C^{r,s}(X)$ dans $C^{r,s+1}(X)$; le noyau $Z^{r,s}(X)$ de $d''_{r,s}$ est fermé ; c'est donc un espace de Fréchet-Schwartz.

<u>Définition</u> . Soit Y un sous-ensemble ouvert de X ; on dit que (X,Y) est une q-<u>paire de Runge</u> si l'image de l'homomorphisme de restriction

$$r_Y^X : Z^{q,q}(X) \longrightarrow Z^{q,q}(Y)$$

est dense dans $Z^{q,q}(Y)$ (cf. [22]) .

Si $q = 0$, on retrouve la notion usuelle de paire de Runge.

Soit Ω^q le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré q dans X . Vu le théorème de Dolbeault, $H^s(X,\Omega^r)$ est canoniquement isomorphe au quotient du noyau de $d''_{r,s}$ par l'image de $d''_{r,s-1}$; on munit $H^s(X,\Omega^r)$ de la topologie déduite de la topologie quotient correspondante. Pour que l'espace vectoriel topologique $H^s(X,\Omega^r)$ soit séparé (donc pour qu'il soit un espace de Fréchet - Schwartz), il faut et il suffit que l'image de $d''_{r,s-1}$ soit un sous-espace fermé de $C^{r,s}(X)$. Ceci a lieu en particulier si $\dim_{\mathbb{C}} H^s(X,\Omega^r) < +\infty$ (analogue de la Remarque qui suit le Théorème 11 de [O]) .

<u>Remarque</u> . <u>Supposons les espaces</u> $H^q(X,\Omega^q)$ <u>et</u> $H^q(Y,\Omega^q)$ <u>séparés</u>. <u>Alors</u>, <u>pour que</u> (X,Y) <u>soit une q-paire de Runge</u>, <u>il faut et il suffit que l'image de l'homomorphisme de restriction</u>

$$*r_Y^X : \quad H^q(X,\Omega^q) \longrightarrow H^q(Y,\Omega^q)$$

<u>soit dense dans</u> $H^q(Y,\Omega^q)$.

En effet, on a le diagramme commutatif d'applications linéaires

$$\begin{array}{ccc}
Z^{q,q}(X) & \xrightarrow{\quad r_Y^X \quad} & Z^{q,q}(Y) \\
\Big\downarrow \lambda_X & & \Big\downarrow \lambda_Y \\
H^q(X,\Omega^q) & \xrightarrow{\quad *r_Y^X \quad} & H^q(Y,\Omega^q)
\end{array}$$

dans lequel λ_X et λ_Y sont surjectifs donc topologiques.

Si (X,Y) est une q-paire de Runge, l'image de $*r_Y^X$ est dense dans $H^q(Y,\Omega^q)$. Réciproquement, supposons que cette image est dense ; pour tout $\varphi \in Z^{q,q}(Y)$, il existe une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $Z^{q,q}(X)$ telle que

$$\lambda_Y\,(r_Y^X\,(\mu_n) - \varphi) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty .$$

Comme λ_Y est topologique, il existe une suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $Z^{q,q}(Y)$ tendant vers 0 quand $n \to +\infty$, et vérifiant $\lambda_Y (r_Y^X (\mu_n) - \varphi) = \lambda_Y (\nu_n)$, c'est-à-dire $\lambda_Y (r_Y^X (\mu_n) - \varphi - \nu_n) = 0$. Pour tout n, il existe donc un élément h_n de $C^{q,q-1}(Y)$ vérifiant

$$r_Y^X (\mu_n) = \varphi + \nu_n + d''h_n \quad .$$

Pour tout n, soit k_n un élément de $C^{q,q-1}(X)$ tel que $h_n - (k_n|_Y)$ tende vers 0 dans $C^{q,q-1}(Y)$ quand $n \to +\infty$. On a

$$\varphi = \lim_{n \to +\infty} r_Y^X (\mu_n - d''k_n) \quad .$$

Donc (X,Y) est une q-paire de Runge .

Rappelons que selon [0], une fonction φ à valeurs réelles, définie et indéfiniment différentiable dans une variété analytique complexe X de dimension n, est dite fortement q-pseudoconvexe si sa forme de Levi a au moins $n-q$ valeurs propres > 0 en tout point de X.

Proposition 7 . *Soit X une variété analytique complexe. Soit K un compact de X, et soit φ une fonction à valeurs réelles, indéfiniment différentiable dans X, vérifiant les conditions :*

i) *φ est fortement q-pseudoconvexe dans $X - K$;*
ii) *pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $B_c = \{x \; ; \; x \in X \, , \varphi(x) < c\}$ est relativement compact dans X.*

Alors, pour toute valeur non critique c de φ vérifiant $c > \sup_{x \in K} \varphi(x)$ et pour tout entier $\ell \geq q$, le couple (X, B_c) est un ℓ-couple de Runge.

Cette proposition est établie dans [22] avec l'hypothèse $K = \emptyset$. La démonstration de [22] s'applique encore à notre cas avec les modifications suivantes (p.331) : $B^{k,\ell+1}(A)$ est un sous-espace fermé de $Z^{k,\ell+1}(A)$ (puisque $\dim_{\mathbb{C}} H^{\ell+1}(A,\Omega^k) < +\infty$) ; $j^{-1}(B^{k,\ell+1}(A))$ est un sous-espace fermé de $Z^{k,\ell}(B_c \cap V)$, et c'est l'image de r .

Théorème 7 . Soient X et Y deux sous-ensembles ouverts, sans points singuliers, et strictement q-pseudoconvexes, d'une variété algébrique projective. Si (X,Y) est une q-paire de Runge, alors $(\mathcal{C}_q^+(X), \mathcal{C}_q^+(Y))$ est une paire de Runge et, pour tout compact K de $\mathcal{C}_q^+(Y)$, $\hat{K}_{\mathcal{C}_q^+(X)}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}_q^+(Y)$.

Conservant les notations du théorème 6 , posons $A = A_q(X)$, $B = A_q(Y)$, et désignons par A' l'algèbre des restrictions à $\mathcal{C}_q^+(Y)$ des éléments de A ; (X,Y) étant une q-paire de Runge, la Remarque 2 qui suit l'énoncé du Théorème 4 montre que A' est dense dans B . De plus, d'après le Théorème 6 , $\mathcal{C}_q^+(X)$ (resp. $\mathcal{C}_q^+(Y)$) est A-convexe (resp. B-convexe) . De ces propriétés, on déduit :

i) $\mathcal{C}_q^+(X)$ (resp. $\mathcal{C}_q^+(Y)$) est A-convexe (resp. A'-convexe) ;

ii) $\mathcal{C}_q^+(Y)$ est saturé pour la relation d'équivalence, définie dans:

$\mathcal{C}_q^+(X)$: $x \sim y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in A$.

De l'énoncé (b') de [1] p. 501 , résulte la conclusion .

c) Variétés strictement q-pseudoconvexes .

Définition . Une variété analytique complexe X sera dite strictement q-pseudoconvexe s'il existe un compact K de X et une fcnction φ à valeurs réelles, indéfiniment différentiable dans X , vérifiant les conditions :

i) φ est fortement q-pseudoconvexe dans $X - K$;

ii) il existe une suite croissante et divergente $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels tels que $B_{c_n} = \{x \; ; \; x \in X \; , \varphi(x) < c_n\}$ soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, relativement compact et strictement q-pseudoconvexe dans X .

Théorème 8 . Soit X un ouvert d'une variété algébrique projective, ne contenant pas de points singuliers. Si X est une variété strictement q-pseudoconvexe, $\mathcal{C}_q^+(X)$ est holomorphiquement convexe .

<u>Si, de plus,</u> $H^{q+1}(X,\mathcal{F}) = 0$ <u>pour tout faisceau analytique cohérent</u> $\mathcal{F}$ <u>dans</u> X (<u>en particulier si</u> X <u>est q-complet</u>), <u>alors</u> $A_q(X)$ <u>sépare les points de</u> $\mathcal{C}_q^+(X)$; <u>en particulier</u>, $\mathcal{C}_q^+(X)$ <u>est holomorphiquement complet</u>.

En effet, d'après la Proposition 7 , (B_{c_m}, B_{c_n}) est une q-paire de Runge pour $m > n$; d'après le théorème 7 , $(\mathcal{C}_q^+(B_{c_m}), \mathcal{C}_q^+(B_{c_n}))$ est une paire de Runge et, pour tout compact K de $\mathcal{C}_q^+(B_{c_n})$, $\hat{K}_{\mathcal{C}_q^+(B_{c_m})}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}_q^+(B_{c_n})$. D'après un théorème de Stein ([23] Satz 1.2.),$(\mathcal{C}_q^+(X), \mathcal{C}_q^+(B_{c_n}))$ est une paire de Runge pour tout n . Donc, pour tout compact K de $\mathcal{C}_q^+(X)$ et tout n vérifiant $K \subset \mathcal{C}_q^+(B_{c_n})$, on a $\hat{K}_{\mathcal{C}_q^+(X)} \cap \mathcal{C}_q^+(B_{c_m}) = \hat{K}_{\mathcal{C}_q^+(B_{c_m})}$ pour tout $m > n$; d'après ce qui précède, $\hat{K}_{\mathcal{C}_q^+(X)} \cap \mathcal{C}_q^+(B_{c_m})$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}_q^+(B_{c_n})$ pour tout $m > n$; $\hat{K}_{\mathcal{C}_q^+(X)}$ est donc un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}_q^+(B_{c_n})$ et a fortiori de $\mathcal{C}_q^+(X)$.

La seconde assertion résulte du théorème 5 de [3].

<u>Exemple 1</u> . Reprenons l'exemple du N° 5 de [3] en gardant les mêmes notations . Soit $Z = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - P_{n-h-1}$.

α) Dans X , nous avons

$$\mathcal{L}(F) = F\mathcal{L}(\Phi) + \frac{i}{\pi}\frac{d'F \wedge \overline{d'F}}{F} .$$

En un point $a \in Z - P_h$, choisissons un repère

$$\theta^\alpha = \sum_{1 \leq i \leq h} a_i^\alpha \, dx_i \ , \ 1 \leq \alpha \leq h \ , \ \eta^\beta = \sum_{1 \leq j \leq n-h-1} b_j^\beta \, dy_j \ ,$$

$$1 \leq \beta \leq n-h-1$$

$$d'F = \sum_{1 \leq i \leq h} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum_{1 \leq j \leq n-h-1} \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

tel que

$$\pi_1^* \Omega_1 = \frac{i}{\pi} \sum_{1 \leq \alpha \leq h} \theta^\alpha \wedge \bar\theta^\alpha \text{ et } \pi_2^* \Omega_2 = \frac{i}{\pi} \sum_{1 \leq \beta \leq n-h-1} \eta^\beta \wedge \bar\eta^\beta ;$$

alors

$$\mathcal{L}(F) = \frac{i}{\pi} F \left(- \sum_{1 \leq \alpha \leq h} \theta^\alpha \wedge \bar\theta^\alpha + \sum_{1 \leq \beta \leq n-h-1} \eta^\beta \wedge \bar\eta^\beta + \frac{d'F}{F} \wedge \overline{\frac{d'F}{F}} \right) ,$$

et $\mathcal{L}(F)$ a $n - h$ valeurs propres > 0 et h valeurs propres < 0 au point a . La variété Z est donc strictement h-pseudoconvexe .

β) Les ouverts

$$U_i = \{ z \; ; \; z \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \; , \; z_i \neq 0 \} \; , \quad 0 \leq i \leq h$$

constituent un recouvrement de Z par $h + 1$ ouverts de Stein .Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur Z , on a donc $H^{h+i}(Z, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geq 1$. Grâce à cette propriété et à celle établie ci-dessus, $\mathcal{C}_h^+(Z)$ est, vu le théorème 8 , un espace holomorphiquement complet .

γ) Montrons que Z est même h-complet . Utilisant les notations du N° 4 , c , β, choisissons N tel que $n + h < t(n,N)$ et posons $z_{i,i,\dots,i} = \hat z_i$ pour $0 \leq i \leq h$; soit

$$P_{t(n,N)-h-1} = \{ \hat z \; ; \; \hat z \in \mathbb{P}_{t(n,N)} \; , \; \hat z_i = 0 \text{ pour } 0 \leq i \leq h \} ;$$

$\lambda_n^N(Z)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{P}_{t(n,N)} - P_{t(n,N)-h-1}$.

Soit P'_h un sous-espace linéaire projectif de dimension h de $\mathbb{P}_{t(n,N)}$ tel que :

i) $P'_h \subset \mathbb{P}_{t(n,N)} - P_{t(n,N)-h-1}$

ii) P'_h et $P_{t(n,N)-h-1}$ engendrent $\mathbb{P}_{t(n,N)}$

iii) $P'_h \cap \lambda_n^N(Z) = \emptyset$.

Construisons sur $\mathbb{P}_{t(n,N)} - P'_h - P_{t(n,N)-h-1}$ la fonction F analogue à celle considérée en α) ; sa forme de Levi a $t(n,N)-h$ valeurs propres > 0 en tout point de $\mathbb{P}_{t(n,N)} - P'_h - P_{t(n,N)-h-1}$, donc en tout point de $\lambda_n^N(Z)$; la fonction $\varphi = F \circ \lambda_n^N$ correspondante est fortement h-pseudoconvexe dans Z et les sous-ensembles

$$B_c = \{ z \ ; \ z \in Z \ , \ \varphi(z) < c \} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

sont relativement compacts dans Z. Donc Z est h-complet. Remarquons toutefois que les sous-ensembles B_c que nous venons de construire n'ont aucune raison d'être strictement h-pseudoconvexes, et que la fonction φ ne permet donc pas de montrer que Z est strictement h-pseudoconvexe.

<u>Exemple 2</u> . Soit maintenant X un sous-espace algébrique (compact) de $\mathbb{P}_n$, et soit $U = X \cap Z$. Les ouverts $U_i \cap X$, $0 \leq i \leq h$, constituent un recouvrement de Y par $h+1$ ouverts de Stein, donc $H^{h+i}(U, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geqslant 1$ et pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ dans Y.

En construisant les variétés de Chow relativement à $\mathbb{P}_n$, on obtient $\mathcal{C}_h^+(U)$ comme sous-ensemble analytique de $\mathcal{C}_h^+(Z)$; comme $\mathcal{C}_h^+(Z)$ est holomorphiquemebt complet (Exemple 1, β), l'espace analytique A, obtenu en munissant $\mathcal{C}_h^+(U)$ de la structure analytique induite par $\mathcal{C}_h^+(Z)$, est de Stein. L'application naturelle de $\mathcal{C}_h^+(U)$ sur A est un homéomorphisme holomorphe ; d'après [18], $\mathcal{C}_h^+(U)$ est un espace de Stein.

7 . <u>L'application $\rho^{(1)}$ pour les variétés algébriques compactes</u> .

Pour définir cette application, nous utiliserons les remarques suivantes :

Remarque 1 . Soit X un espace topologique . Soit $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X . L'application naturelle

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F})$$

est injective . Elle est surjective si l'on a $H^1(U_i,\mathcal{F}) = 0$ pour tout $i \in I$.

C'est un cas particulier du théorème des recouvrements acycliques de J. Leray .

Soit $\mathcal{A}^{r,s}$ le faisceau des germes de formes différentielles indéfiniment différentiables de type (r,s) dans une variété analytique complexe X ; soit $\mathcal{A}_c^{r,s}$ le sous-faisceau des germes de formes différentielles d''-fermées, et $\Omega^r = \mathcal{A}_c^{r,0}$ le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré r .

Remarque 2 . On a un isomorphisme canonique

$$H^s(X,\mathcal{A}_c^{r,r}) \simeq H^{r+s}(X,\Omega^r) \quad \text{pour} \quad s \geqslant 1 \ .$$

En effet, désignant par d_s la restriction de d'' à $\mathcal{A}^{r,r+s}$, on a pour $\mathcal{A}_c^{r,r}$ la résolution fine

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_c^{r,r} \longrightarrow \mathcal{A}^{r,r} \xrightarrow{d_0} \mathcal{A}^{r,r+1} \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow \mathcal{A}^{r,r+s} \xrightarrow{d_s} \cdots \ ;$$

pour $s \geqslant 1$, $H^s(X,\mathcal{A}_c^{r,r})$ est donc canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel de d''-cohomologie des formes différentielles indéfiniment différentiables de type $(r, r+s)$; la remarque résulte alors du théorème de Dolbeault .

Définition de l'application $\rho^{(1)}$. Soit X une sous-variété algébrique (compacte) non singulière de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Pour tout élément $p = P_{n-d-1}$ de la grassmannienne $\mathbb{P}_{n,n-d-1}$ des sous-variétés linéaires de dimension $n-d-1$ de $\mathbb{P}_n$, soit $Z_p = \mathbb{P}_n - P_{n-d-1}$ et $U_p = X \cap Z_p$; soit $\mathcal{U}$ le recouvrement de X par les ouverts U_p , $p \in \mathbb{P}_{n,n-d-1}$, et soit $\mathcal{C}$ le recouvrement de $\mathcal{C}_d^+(X)$ par les ouverts $\mathcal{C}_d^+(U_p)$. D'après l'exemple 2 du N° 6 ,

i) $H^{d+i}(U,\mathcal{F}) = 0$ pour $i \geqslant 1$, $U \in \mathcal{U}$ et pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ dans X ;

ii) $\mathcal{C}$ est un recouvrement de Stein de $\mathcal{C}_d^+(X)$.

Soit $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{A}_c^{d,d})$ (resp. $Z^1(\mathcal{C},\mathcal{O})$) l'espace vectoriel des 1-cocycles de $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{C}$) à valeurs dans le faisceau $\mathcal{A}_c^{d,d}$ (resp. $\mathcal{O}$). Soit α l'application de $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{A}_c^{d,d})$ dans $Z^1(\mathcal{C},\mathcal{O})$ qui, à tout $\varphi_{p,q} \in \Gamma(U_p \cap U_q, \mathcal{A}_c^{d,d})$, fait correspondre

$$\dot{\rho}^{(o)}_{U_p \cap U_q, d}(\varphi_{p,q}) \in \Gamma(\mathcal{C}_d^+(U_p) \cap \mathcal{C}_d^+(U_q), \mathcal{O}) ;$$

à tout cobord, α associe un cobord ; donc α définit une application linéaire

$$\beta : H^1(\mathcal{U},\mathcal{A}_c^{d,d}) \longrightarrow H^1(\mathcal{C},\mathcal{O}) .$$

Or, d'après la propriété ii) ci-dessus, $H^1(\mathcal{C},\mathcal{O})$ est canoniquement isomorphe à $H^1(\mathcal{C}_d^+(X), \mathcal{O})$. D'après la propriété i) ci-dessus et la Remarque 2 , on a $H^1(U, \mathcal{A}_c^{d,d}) = 0$ pour tout $U \in \mathcal{U}$; d'après la Remarque 1 , $H^1(\mathcal{U},\mathcal{A}_c^{d,d})$ est canoniquement isomorphe à $H^1(X, \mathcal{A}_c^{d,d})$, et celui-ci à $H^{d+1}(X,\Omega^d)$ d'après la Remarque 2 . Compte-tenu de ces isomorphismes, β définit une application linéaire

$$\rho^{(1)}_{X,d} : H^{d+1}(X,\Omega^d) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}_d^+(X), \mathcal{O}) .$$

BIBLIOGRAPHIE

0 . A. ANDREOTTI et H. GRAUERT . - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.-Bull. Soc.Math. France. 90, 1962 p. 193-259 .

1 . A. ANDREOTTI et R. NARASIMHAN .- A topological property of Runge pairs.- Annals of Mathematics, 76, 1962, pp. 499-509 .

2 . A ANDREOTTI et F. NORGUET . - Quelques propriétés de courants définis à l'aide de fonctions holomorphes .-Anais Acad. Bras. de Ciencias .

3 . A. ANDREOTTI et F. NORGUET . - Problèmes de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie -Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa .

4 . A. ANDREOTTI et P. SALMON . - Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete .- Monatshefte für Mathematik, t. 61, 1957, pp. 97-142 .

5 . A. ANDREOTTI et E. VESENTINI . - Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets .- Séminaire Ehresmann, 4 (1962-63), 1-31, Paris, Secrétariat Mathématique .

6 . H. CARTAN . - Variétés analytiques complexes et cohomologie .- Colloque sur les fonctions de plusieurs variables .- Centre belge de recherches mathématiques, 1953 .

7 . H. CARTAN . - Quotients of complex analytic spaces .- Contributions to Function Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, pp. 1-15 .

8 . H. CARTAN . - Problèmes d'approximation dans la théorie des fonctions analytiques .- Atti della 2a Riunione del Groupement des Mathématiciens d'expression latine, 1961, pp. 24-29 .

9 . H. GRAUERT . - Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen .- Publications mathématiques de l'I.H.E.S. N° 5 , 1960 .

10 . H. GRAUERT et R. REMMERT . - Plurisubharmonische Funktionen im komplexen Räumen .- Math. Zeitschr. 65, 1956, pp. 175-194 .

11 . H. GRAUERT et R. REMMERT . - Komplexe Räume .- Math. Ann. 136, 1958, pp. 245-318 .

12 . H. HIRONAKA . - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero .- Ann. of Math. 79, 1964, pp. 109-326 .

13 . W.V.D. HODGE et D. PEDOE . - Methods of Algebraic Geometry .- Cambridge University Press, 1952 .

14 . Y.KATZNELSON . - Lectures on several complex variables .- Yale University, 1963-64, multigraphié .

15 . K. KODAIRA et G. DE RHAM . - Harmonic integrals .- Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, 1950, revised 1953.- Princeton, Institute for Advanced Study, 1953, multigraphié .

16 . P. LELONG . - Intégration sur un ensemble analytique complexe.- Bull. Soc. Math.France, 85, 1957, pp. 239-262 .

17 . P. LELONG . - Eléments positifs d'une algèbre extérieure complexe avec involution .- Séminaire P. Lelong, 4e année, 1962, Exposé 1, 22 pages - Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie, Paris .

18 . R. NARASIMHAN . - A note on Stein spaces and their normalisations .- Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962) pp. 327-333 .

19 . R. REMMERT . - Reduction of complex spaces .- Seminars on analytic functions, Volume 1 , pp. 190-205, Princeton, Institute for advanced Study, 1957, (multigraphié).

20 . R. REMMERT . - Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume .- Math. Annalen, 133, 1957, p. 328-370 ,

21 . J.P. SERRE . - Faisceaux algébriques cohérents .- Ann.of Math. 61, 1955, pp. 197-278 .

22 . G. SORANI . - Homologie des q-paires de Runge .- Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie 3 , vol. 17 , 1963, pp. 319-332 .

23 . K. STEIN . - Uberlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume .- Archiv der Mathematik, 7 , 1956, pp. 354-361 .

24 . O. ZARISKI . - The second summer institute .- Bull. Amer.Math.Soc. 62, 1956, 129 .

Istituto Matematico "Leonida Tonelli"
Università di Pisa .

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire associé au C.N.R.S
Palais Universitaire
Strasbourg