PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

ALINE ROBERT

Connaissances mathématiques actuelles des futurs enseignants, connaissances mathématiques (et didactiques) potentielles

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1999-2000, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. nº 8, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1999-2000___3_A8_0>

Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques

Aline Robert

12 mai 2000

Connaissances mathématiques actuelles des futurs enseignants, connaissances mathématiques (et didactiques) potentielles...

Dans cet exposé, nous abordons la question des connaissances mathématiques ou proches des mathématiques que les enseignants débutants (en lycée et collège) vont être amenés à utiliser dans leur enseignement, après l'université : nous essaierons de confronter un bilan qui a été fait en préparation au Capes (concernant les connaissances actuelles des étudiants) et une étude qui a été menée à partir d'une enquête auprès des PLC2 (stagiaires reçus au capes théorique et ayant une classe en responsabilité) et un certain nombre de leurs formateurs (conseillers pédagogiques et formateurs IUFM) – permettant d'aborder les connaissances « potentielles », à avoir. C'est cette réflexion qui nous a conduite à concevoir le module de licence que nous allons présenter, pour « compléter » ce qui est fait à l'université.

I Connaissances actuelles (cf. Pian, 1999, Cahier de didirem n°34)

Nous avons fait passer deux tests aux étudiants préparant le Capes à Versailles et à Lille, à la rentrée et en janvier. Ces tests portent sur des connaissances de niveau DEUG.

L'analyse qu'a faite Pian des questions d'analyse montre essentiellement les tendances suivantes :

- « Les » étudiants savent résoudre un certain nombre de questions : ce sont les questions techniques, qui mettent en fonctionnement des connaissances de manière isolée, simple. Il n'y a ni mélange ni adaptation. Les démonstrations ne comportent pas d'étapes à trouver seul.
- En revanche, dès qu'il y a des adaptations à faire (mise en fonctionnement de type mobilisable), ou, pire, des initiatives à prendre (mise en fonctionnement de type disponible), dès qu'il y a confrontation à une certaine complexité des démonstrations, la majorité des étudiants n'abordent plus les questions, ou échouent. Cependant les étudiants qui progressent sont ceux qui au début de l'année ont déjà réussi quelques exercices non techniques.
- Des entretiens permettent de confirmer une impression qui se dégage de ces résultats quantitatifs : il manque aux étudiants une organisation des connaissances, une réflexion sur leur sens, leur utilisation.

En somme, les étudiants ont des connaissances atomisées, techniques, non disponibles, sans mises en relations, sans « relief » épistémologique.

II Connaissances mathématiques utilisées par les PLC2, connaissances potentielles.

1) *Les enquêtes sommaires* évoquées ci-dessus (cf. Robert, texte Mafpen, 1995, document de travail n°14, 1995, cahier de didirem n°26, 1996) et quelques entretiens avec des PLC2 à deux moments de l'année montrent des avis relativement convergents des formés et de leurs formateurs sur les difficultés rencontrées en cette première année d'enseignement.

Tout le monde s'accorde pour considérer que le plus difficile est de tenir compte des élèves dans les pratiques mathématiques des enseignants débutants. Or, cette prise en compte des élèves demande aussi des connaissances mathématiques, mais qui sont utilisées autrement que les années antérieures.

En particulier il s'agit d'introduire une (nouvelle) double globalité : sur l'année, organiser la progression pour que le programme « tienne » (plus ou moins !), et aussi sur chaque notion élaborer un « texte » complet, sans trous, en prévoyant ce qui sera exposé par l'enseignant, ce qui sera proposé aux élèves, les évaluations, etc. et en essayant qu'à la fin il y ait eu un apprentissage !

Souvent les sources (manuels) deviennent essentielles, et cela peut être nouveau, surtout s'il y a comparaison et critique. Il faut aussi, si possible, comprendre les erreurs des élèves, les mettre en relation avec d'autres chapitres par exemple.

Il y a donc un travail mathématique d'organisation, de découpage, de choix, voire d'aménagement, certes sur des notions plus simples que celles vues à l'université mais ce travail met en jeu tout de même des activités qui peuvent faire appel à ce qui a été repéré du côté des difficultés ou des manques.

De plus, il faut aussi mélanger des connaissances mathématiques et d'autres connaissances, liées aux élèves (didactiques notamment), et là encore on a vu la difficulté des étudiants à « mélanger ».

Plus généralement, on peut dire que le travail de l'enseignant est un vaste travail d'aménagement : conversion d'objectifs d'apprentissage généraux, génériques en propositions concrètes de scénario à faire passer au quotidien à de vrais élèves, négociation en classe entre ce qu'il a prévu et les élèves, qui résistent à l'effort et négocient vers la baisse, lutte (compromis) pour sa survie, voire son confort, entre les objectifs d'apprentissage et l'exercice du métier... Qui dit aménagement, dit adaptation, mélange et on retrouve ce qui a été repéré comme source de difficultés ci-dessus.

2) Ceci dit, pour aller plus loin, pour préciser davantage les activités mathématiques des enseignants, on est obligé de tenir compte *des conceptions qu'on a des pratiques d'enseignants.* Toutes les pratiques se valent-elles ? Ces aménagements, cette conversion, certes incontournables, sont-ils analogues pour toutes les conceptions des enseignements, demandent-ils les mêmes connaissances potentielles ?

A partir de là je vais développer mon point de vue : je vais rapidement esquisser ce que je retiens pour « jauger » les pratiques, en termes d'apprentissage d'élèves. Autrement dit, je vais dégager des dimensions qui d'après moi pourraient avoir des conséquences différenciées sur les apprentissages des élèves, et réfléchir en fonction de ces dimensions sur les connaissances correspondantes à développer (connaissances potentielles). Cela n'amène absolument pas à évaluer directement des pratiques, car des recompositions de multiples dimensions s'opèrent pour les élèves, mais cela sert à repérer des caractéristiques qui peuvent ne pas être neutres.

Le module que je vais présenter ensuite (en dernière partie) s'inscrit dans cette logique (il correspond à un travail sur un petit aspect de ces connaissances).

3) *Connaissances potentielles, dégagées à partir de ce qui peut à nos yeux différentier les pratiques des enseignants en classe.*

Deux niveaux ont retenu notre attention :

- <u>Niveau de la préparation</u>

Le scénario d'une séance a pour nous une grande importance : nous désignons ainsi l'ensemble des contenus à présenter aux élèves, avec leur organisation dans le temps et la gestion qui est prévue, à la fois pour les élèves et pour l'enseignant. Il s'agit de préciser les formes de travail des élèves, et la répartition des rôles entre enseignant et élèves.

Nous faisons en effet l'hypothèse qu'une des variables pouvant avoir des conséquences sur les apprentissages potentiels tient aux dynamiques entre les mathématiques contextualisées et décontextualisées qui peuvent s'enclencher dans la fréquentation des élèves des mathématiques en classe. Ces dynamiques dépendent de l'ordre des tâches prévues, de leur nature et de la forme du travail qui est proposé aux élèves.

Une analyse a priori des tâches et activités du scénario permet de déterminer des éléments de cette dynamique (y compris pour le concevoir).

Ce type d'analyse demande une connaissance du potentiel mathématique pour une notion donnée à un moment donné, c'est à dire des cadres, registres, points de vue, types de problèmes, situations de référence, etc. Elle demande aussi une connaissance du potentiel didactique : différents niveaux de mises en fonctionnement[1], procédures d'élèves, erreurs résistantes. Elle demande enfin une connaissance sur les notions à enseigner, les méthodes éventuelles, les mises en relation possibles, etc.

Nous en déduisons qu'il peut être utile que les enseignants disposent de mots spécifiques pour penser et exprimer ces analyses : cadres, registres, niveaux de mises en fonctionnement, « méta », etc.

Nous considérons que ce sont là des connaissances potentielles qui ne sont pas toujours actuelles, et peuvent nourrir des formations.

- Niveau de la gestion en classe.

Plusieurs activités de l'enseignant peuvent être discriminantes : par exemple le respect des prévisions de gestion sur le travail autonome des élèves, ou encore les synthèses des activités effectives des élèves pour appuyer l'exposition des connaissances.

Seulement ces activités enseignantes reposent sur le fait que le professeur a les moyens de transformer ce qu'il a écouté pendant le travail des élèves en informations lui permettant d'en faire la synthèse. Cela nécessite là encore des catégories et des mots pour penser et dire cette transformation.

Il a d'autres formes du travail de l'enseignant qui nous semble essentielle : les improvisations, les liens (entre mathématiques contextualisées et décontextualisées, entre le passé de la classe et le présent, voire le futur, entre le travail des élèves et le discours formalisé du professeur), les choix (et notamment ce que l'enseignant renonce à dire après avoir entendu les élèves), etc.

Ces activités demandent à notre avis les mêmes connaissances potentielles que celles que nous avons déjà citées, justement pour entendre, retenir, transformer ce qui vient des élèves, puis relier et choisir ce qui sera ajouté.

Ainsi proposons-nous de travailler en formation sur ces outils professionnels qui permettent de mettre du relief sur un contenu ou des activités mathématiques et que nous avons appelées connaissances potentielles. Une occasion de ce travail peut être l'étude du rapport entre énoncés (tâches) et activités provoquées. C'est ce que nous allons développer maintenant.

III Un module de licence préprofessionnel.

1) *Les modalités*

Il s'agit d'un module de licence optionnel, avec 48 heures de cours à l'université et un stage en lycée. Les modalités complètes précises sont décrites dans la brochure IREM n°88 (Pian, Robert).

Dans cet exposé nous décrirons en partie le travail sur le rapport entre des énoncés et les activités des élèves qui peuvent en résulter, travail fait en algèbre linéaire et occupant 24 heures du temps à l'université (ce contenu n'est pas traité dans la brochure précédente sauf le premier exemple donné ci-dessous).

2) *Les hypothèses à l'œuvre*

Trois hypothèses « didactiques » de plusieurs niveaux sont à l'œuvre dans cet enseignement :

a) D'abord nous faisons travailler les étudiants sur un contenu mathématique (algèbre linéaire de première année de DEUG) qui n'est pas totalement acquis. Nous espérons que l'expérience mathématique qu'ils vont vivre, et qui sera analysée à la fois d'un point de vue mathématique et

[1] On qualifie de technique le niveau correspondant à une mise en fonctionnement simple et isolée, on parle de mobilisable s'il y a une adaptation à faire, et de disponible si la connaissance doit être utilisée sans qu'aucune indication n'en ait donnée. Le niveau de mise en fonctionnement technique correspond à une question fermée, avec indication de méthode (par exemple un théorème général à appliquer, où toutes les hypothèses se vérifient directement et où c'est la conclusion du théorème qui correspond à ce qui est demandé). Pour le niveau de mise en fonctionnement mobilisable, les connaissances à utiliser sont indiquées (même indirectement). Il peut y avoir une étape à trouver, une question ouverte, quelque chose à compléter, à reconnaître d'une question précédente, un mélange ou une répétition. Enfin, le niveau de mise en fonctionnement disponible correspond à une question sans indication, ouverte ou non.

didactique laissera plus de traces qu'un travail analogue sur un contenu moins actuel. On reconnaît la stratégie d'homologie, suivie de transposition, développée par A. Kuzniak dans sa thèse (1994).

b) Ensuite nous nous appuyons sur l'hypothèse que, pour des élèves, être limités en classe à des activités techniques, des mises en fonctionnement simples, isolées, sans adaptations, sans recherches de connaissances à utiliser, peut être trop réducteur pour engendrer un apprentissage visé, au moins sur certains contenus, et pour certains élèves. Nous en déduisons qu'un des travaux de l'enseignant est l'élaboration d'énoncés suscitant des activités plus riches pour les élèves, avec des objectifs de mises en fonctionnement relativement contrôlés (adaptations variées, répétitions, mélanges, traductions, changements de cadres ou de registres, etc.).

c) Enfin, nous supposons qu'il est possible faire travailler les étudiants sur le lien énoncés -> activités provoquées, à la fois en terme d'analyse a priori et de conception. Il s'agit de dégager des variables à la disposition des enseignants pour modifier un énoncé, sans changer la situation mathématique, et de mettre à la disposition des étudiants des catégories (intéressantes) d'analyses a priori des activités d'élèves provoquées par un énoncé. Ici « intéressantes » fait référence à « pouvant avoir un intérêt » sur le plan des apprentissages potentiels, au sein d'un projet assez global (scénario). En particulier la gestion d'un exercice proposé en classe est essentielle dans les activités qui sont engendrées, laisser chercher les élèves quinze minutes ou deux minutes peut modifier considérablement les effets d'une tâche non technique par exemple. Cependant c'est seulement à la partie théorique d'élaboration d'énoncés en fonction d'objectifs à préciser que nous intéressons ici.

3) Trois exemples de TD

Ces exemples occupent une ou plusieurs séances.

Dans chaque cas, selon notre première hypothèse, deux types de consignes sont proposées et présentées, consigne mathématique (résolution explicite) et didactique (réflexion liée à l'énoncé ou à sa résolution). Les étudiants travaillent en petits groupes de 3 ou 4.

Nous joignons quelques remarques supplémentaires spécifiques des séances correspondantes.

Le seul thème abordé cette année qui n'est pas présenté ici concerne un travail autour des projecteurs.

Des annexes permettent d'avoir une idée des productions des étudiants.

<u>a) l'expérience préliminaire</u> (cf. brochure 88 p9).

1) Montrer que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers...
2) Est-ce que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers 7
3) En utilisant les nombres complexes, montrer que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers.
4) Soient m , n, p et q des entiers. Est-ce que le produit $(m^2 + n^2)(p^2 + q^2)$ peut toujours s'écrire sous la forme $r^2 + s^2$, où r et s entiers ?
5) L'ensemble des nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est stable par produit.

Il s'agit d'abord de résoudre un même exercice présenté dans des énoncés différents.

La deuxième consigne est de décrire les activités mathématiques qui ont été provoquées par chaque énoncé.

A la fin de la résolution, une liste d'activités est dressée collectivement (formaliser, prendre des exemples numériques, reconnaître des identités remarquables, calculer, adapter etc.).

Cette séance permet de mettre les étudiants à pied d'œuvre : ils font l'expérience de la diversité des activités provoquées par les différents textes, en commençant à repérer des caractéristiques des énoncés, des activités, et à voir le problème du lien (question ouverte ou fermée, indication de méthode ou non, pluralité de méthodes ou non, nécessité ou non d'adaptations de propriétés connues etc.).

b) Les carrés magiques : consignes, indications sur le déroulement, bilans (en trois temps)
Le premier temps porte sur les carrés magique d'ordre trois, le deuxième temps sur les carrés magiques d'ordre quatre, le troisième temps sur les notions de sous-espaces vectoriels, sommes directes, équations.

Premier temps :

L'énoncé mathématique : Comment trouver tous les carrés magiques réels d'ordre 3 ?

On appelle carré magique réel d'ordre trois un tableau carré de neuf nombres réels tel que les sommes des éléments de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale soient égales.

Un élément du tableau est repéré par « sa place » (i,j) : cela signifie que cet élément est sur la ligne i et la colonne j (i et j sont des entiers variant de 1 à 3). On pourra noter l'élément en place (i,j) a_{ij}.

On appelle somme du carré le nombre réel représentant la valeur commune des sommes des éléments d'une ligne, colonne ou diagonale.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des carrés magiques. On note N l'ensemble des carrés magiques de somme nulle.

1) Donner des exemples de carrés magiques, de somme non nulle et de somme nulle, si possible non « triviaux ». Pouvez-vous être sûr de les avoir tous ?
2) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que N en est un sous-espace vectoriel.

Variante : démontrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

3) Montrer que, pour tout carré magique C, si on appelle s la somme de C, on a $s = 3a_{22}$
4) Décrire le sous-espace vectoriel $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ engendré par le carré magique dont tout les éléments valent 1. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel $\mathcal{I}$?
5) Montrer que $\mathcal{C}$ est somme directe de $\mathcal{I}$ et de N.
6) Trouver la dimension de N puis celle de $\mathcal{C}$.
7) Avez-vous répondu à la question initiale posée ?

Questions liés à l'enseignement (en annexe, nous avons joint trois exemples d'énoncés élaborés par les étudiants)

1) Analyser l'énoncé.
2) Comparer les énoncés A, B, C suivants et l'énoncé donné.

A. Trouver tous les carrés magiques d'ordre trois à coefficients réels.

B. En considérant un carré magique comme une matrice de M3($\mathbb{R}$), trouver tous les carrés magiques d'ordre trois à coefficients réels.

C. En considérant un carré magique comme une matrice de $M_3(\mathbb{R})$, montrer que l'ensemble est un espace vectoriel, trouver sa dimension.

3) Construire un énoncé sur carrés magiques d'ordre 3 en précisant vos objectifs.
4) Corriger un énoncé proposé par un autre groupe, signaler les maladresses ou erreurs de texte : détecter les intentions des auteurs et comparer avec la réalité.

Deuxième temps

Enoncé mathématique proposé

1) On considère l'ensemble des carrés magiques d'ordre 4.

Que pouvez vous généraliser de l'étude précédente (analogie, sans calculs) ?

2) est-il plausible d'affirmer que tout carré magique s'exprime en fonction de 5 carrés particuliers ?

Cet énoncé a révélé des difficultés sur les différents registres en algèbre linéaire, et c'est ce qui a amené au troisième temps.

Travail lié à l'enseignement

Réfléchir à ce qui a été mis en œuvre jusqu'à maintenant sur le travail sur les énoncés et sur le lien énoncés – activités.

Troisième temps

Enoncé mathématique proposé

Montrer que les sous-ensembles F et G suivants sont deux sous-espaces supplémentaires de IR^3 : F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(2e_1 + 3e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ et G est

l'ensemble des vecteurs de composantes $(\lambda, 0, 0)$, où λ décrit IR.

Donner des équations de F et G (faisant intervenir les composantes-(x, y, z) des vecteurs correspondants).

Décomposer un vecteur u de IR^3 sur F + G (déterminer les deux vecteurs obtenus en fonction des composantes de u).

Pouvez-vous représenter par un dessin dans l'espace cette situation ?

Enoncé lié à l'enseignement

On travaille sur généralisation / particularisation, paramètres, changement de point de vue (cadres…) / mise en relation.

1) Vous venez de résoudre un exercice sur équations, paramètres, sev supplémentaires.

Analyser les difficultés que vous avez rencontrées.

2) Donner un énoncé faisant travailler ces éléments dans $|R^4$ en précisant vos objectifs.

c) <u>les formes linéaires et hyperplans</u>

Deux énoncés ont été travaillés, le premier en classe, le second à la maison (travail de renforcement).

Le premier énoncé permet de travailler sur une question où la disponibilité du théorème du rang est bien utile (pour montrer la non injectivité des formes linéaires non nulles sur |R dès lors que la dimension de l'espace de départ est strictement supérieure à 1).

Un petit texte mathématique faisant le point sur différents registres en algèbre linéaire a été distribué à ce moment-là (en annexe), un complément de cours a eu lieu après l'exercice de renforcement.

En annexe se trouve aussi un extrait de copie d'étudiant, montrant justement une difficulté d'écriture en algèbre linéaire (confusion entre le registre intrinsèque et celui des composantes ?).

Enoncé travaillé en classe

Résoudre et analyser l'énoncé suivant (question par question : ouvertures, indications, étapes, qu'est-ce qui peut fonctionner, à quel niveau, quel est le degré de généralité, y a-t-il des changements de points de vue ou de registres et des mises en relation, y a-t-il des modifications de texte qui changeraient ces analyses ?).

Dans tout cet exercice, on essaiera de donner plusieurs démonstrations des mêmes questions, si possible.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur |R (n >0). Donner l'expression générale d'une forme linéaire sur E.

1) Existe-t-il des formes linéaires sur E bijectives ?
2) Montrer que le noyau d'une forme linéaire sur E est un hyperplan (sev de dimension n-1).
3) Est-ce que tout hyperplan est noyau d'une forme linéaire ? Si oui caractériser l'ensemble des formes linéaires dont un hyperplan est noyau.
4) On suppose que E est euclidien (produit scalaire noté (x|y). Montrer que toute forme linéaire sur E peut s'écrire comme (x|.). En déduire que le dual de E est isomorphe à E.
5) Proposer une question particulière qui fasse travailler (un peu autrement) un théorème utilisé ici, en explicitant votre objectif.

Renforcement (travail à la maison).

On se place dans $|R^4$ et on note (x, y, z, t) les composantes des vecteurs (sur la base canonique).

1) Montrer que le sous-ensemble L d'équation

$x + y + z + t = 0$

est un s.e.v.

Quelle est sa dimension ?

Donner des équations paramétriques de L.

On indiquera deux démonstrations pour trouver la dimension de L, et on les comparera.

2) Mêmes questions avec le sous-ensemble M d'équations

$x + 2y + z + 2t = 0$

$x - y - z + t = 0$

On donnera une seule démonstration (économique).

3) Quelle démarche systématique a pu conduire l'enseignant en train d'élaborer son énoncé à proposer la question 2) à partir de la question 1) ? Y a-t-il d'autres questions qui pourraient être posées ainsi ?

4) Elaborer rapidement ce qui pourrait constituer les énoncés d'un fragment de cours à partir des activités vues ces dernières séances (« décontextualiser »).

4) *Un résumé du travail effectif*

Nous ne donnons pas ici d'évaluation de ce travail, que nous ne nous sommes pas donnés les moyens d'effectuer, mais seulement un résumé global de certaines de nos interventions.

<u>a) Ce qui a été travaillé en mathématiques</u>

- Différents registres en algèbre linéaire pour écrire un vecteur, un sous-espace (équations).
- Différents points de vue pour décrire un carré magique de somme nulle, matrice, octuplet, élément annulant des formes linéaires, avec les différentes méthodes qui résultent du choix d'un point de vue pour trouver l'ensemble de ces éléments.
- Différents types de démonstrations (avec l'intérêt des analyses-synthèses dans des problèmes d'existence).
- Théorème du rang : applications diverses, notamment pour interpréter des résolutions de systèmes linéaires homogènes ; travail sur l'adage « nombre d'équations + nombre de paramètres = dimension de l'espace initial ».

<u>b) Modalités du travail sur le lien énoncés – activités, un exemple de bilan travaillé pour l'enseignement</u>

i) <u>Type de consignes</u>

- Résoudre et analyser un énoncé (procédures utilisées, erreurs)
- Construire un énoncé avec des objectifs précis en termes d'activités.
- Corriger un énoncé en dégageant les intentions en termes d'activités
- Comparer des énoncés (cela a été fait surtout à partir des projecteurs)
- Modifier un énoncé (en fonction d'objectifs)
- Généraliser à partir d'une situation (dégager des paramètres) – cf. deuxième temps des carrés magiques
- Elaborer un cours après des exercices - cf. c) renforcement

ii) Un bilan pour l'enseignement

<u>Des variables liées aux formulations des énoncés :</u>

- Ouverture des questions
- Indications de méthodes (avec ou non pluralité de méthodes)
- Découpages et étapes (implicites, à introduire)
- Mises en fonctionnement attendues du fait de l'énoncé

Trois leviers pour fabriquer des énoncés à partir de sources disponibles :

Les généralités suivantes ont été présentées aux étudiants. On propose comme levier :

- ♦ *Le jeu du général (décontextualisé, propriétés, théorèmes, définitions) au particulier (contextualisé, numérique, ou générique mais non général), et les mises en fonctionnement des propriétés.*

Plusieurs cas se présentent :

- ▪ on part d'une définition (que l'on adapte dans différents contextes par exemple).
- on peut travailler sur le cas général, trouver des propriétés équivalentes, trouver des conséquences, résoudre d'autres problèmes faisant intervenir les objets introduits.
- on peut demander un exemple, deux exemples
- on peut faire reconnaître ou faire construire un exemple
- on peut faire travailler des spécificités d'un exemple (avec plus ou moins d'adaptation)
- ▪ on part d'un cas particulier, on fait établir des propriétés sur ce cas, on fait généraliser, puis explorer d'autres propriétés.
- ♦ *Les mises en relation et changements de points de vue (ou de méthodes) : grâce à des demandes de traductions ou d' interprétations*

On cherche à faire aborder le même problème de plusieurs points de vue : par exemple les carrés magiques de somme nulle sont des matrices et des octuplets. Le cas échéant on traduit des propriétés obtenues d'une seule manière dans un autre point de vue (cadre, registre, etc.). Des traductions courantes en algèbre concernent le jeu local (éléments) / global (ensembles).

- ♦ *La recherche de paramètres à faire varier pour fabriquer un nouvel énoncé à partir d'un énoncé donné*

Par exemple, pour les carrés magiques, la nature des coefficients, la « taille » du tableau.

Dans un texte donné, regarder ce qui change, ce qui ne change pas selon les choix des paramètres (cela ressemble au travail classique sur les variables didactiques).

Bibliographie

Kuzniak A. (1994) Etudes des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré, *Thèse de doctorat de l'université Paris 7.*

Pian J. (1999) Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de capes, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels, *Cahier de Didirem*, n°34, Irem Paris 7.

Pian J. et Robert A. (1999) Comment élaborer des énoncés en mathématiques ? L'exemple d'un enseignement de licence de mathématiques sur ce thème, *Brochure IREM* n°88, Irem Paris 7.

Robert A. (1995a) Formation professionnelle initiale des futurs professeurs de mathématiques : les opinions des intéressés et de leurs tuteurs (formateurs sur le terrain), *Publication de la MAFPEN de Versailles.*

Robert A. (1995b) Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale ou comment désaltérer qui n'a pas soif ? *Document de travail* n° 14, IREM Pais 7.

Robert A. (1996) Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques, *Cahier de Didirem* n°26, Irem Paris 7.

Annexes

Un exemple d'énoncés produits par les étudiants (cf. III, b), premier temps)

Un texte sur les registres en algèbre linéaire (cf. III, c)

Un extrait de copie (cf. III, c).

Devoir Renforcements

$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

<u>M. q. le/s ensemble L soit un/s e.v.</u>

$L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y + z + t = 0\}$.

- $L \neq \emptyset$ par exemple $(1, 1, -1, -1) \in L$.
- Soit $(x_1, y_1, z_1, t_1) \in L \Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow L \subset \mathbb{R}^4$
- Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in L$

  $X_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in L$ et $\alpha, \beta \in L$.

alors $\alpha X_1 + \beta X_2 \in L$.

$\alpha X_1 + \beta X_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2, \alpha t_1 + \beta t_2)$

$= \alpha (x_1 + y_1 + z_1 + t_1) + \beta (x_2 + y_2 + z_2 + t_2)$

$= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$

donc $\alpha X_1 + \beta X_2 \in \mathbb{R}^4$

donc L est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$!

Comment se donner vecteurs, sous-espaces vectoriels, applications linéaires (différents registres en algèbre linéaire) ?

Pour fixer les idées on se place dans un espace vectoriel de dimension 3 (penser $\mathbb{R}^3$).
On suppose qu'on a fixé une base e_1, e_2, e_3 (penser la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

1) *Vecteurs*

- globalement : U, u, $\vec{u}$,... tels que...
- sur une base $e_1 + 2e_2 + 3e_3$
- par des composantes sur une base (1, 2, 3) ou (x = 1, y = 2, z = 3), ou $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

2) *Sous-espaces*

- Globalement (tels que ..., image ou noyau d'une application linéaire).

Cela peut donner des indications sur la dimension, grâce à des théorèmes généraux.

- Globalement engendré par des vecteurs donnés U, V ...

La dimension est alors donnée par le nombre de vecteurs libres parmi les vecteurs donnés.

- Equations : deux types
  - paramétriques
  - cartésiennes

On passe d'une forme à l'autre en éliminant les paramètres, ou en choisissant des vecteurs libres (mettre des 0 aux bonnes places) dont les coordonnées vérifient les équations cartésiennes.
Cela permet de savoir si un vecteur est ou non dans le sous-espace, ou de traduire l'appartenance au sous-espace.

Exemple : Γ sous-espace vectoriel engendré par U et V donnés
U = (1, 2, 3) = $e_1 + 2e_2 + 3e_3$
V = (1, 0, 1) = $e_1 + e_3$
Définition globale : $\Gamma = \{\alpha U + \beta V, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$
Equations paramétriques : $x = \alpha + \beta$, $y = 2\alpha$, $z = 3\alpha + \beta$
Equations cartésiennes : $x + y - z = 0$
On vérifie que U et V sont dans Γ.
Le vecteur (1,1,1) [$e_1 + e_2 + e_3$] n'est pas dans Γ.
Le vecteur (1, -1, 0) est dans Γ, il peut s'écrire (-1/2)U +3/2V.

3) *Applications linéaires* (ici de l'espace dans lui-même, à généraliser)

- Globalement : $f^2 = \mathrm{Id}$, $p^2 = p$ etc. (expression pas toujours possible)
- par les composantes d'un vecteur image (x', y', z') en fonction de (x, y, z), composantes d'un vecteur de l'espace de départ
- par les images des éléments de la base (e_1, e_2, e_3)
- par f(u) par rapport à u (quelconque) (pas toujours intéressant !)
- par une matrice...

Exemple f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

- Ou $e_1 \to e_1 + e_3$, $e_2 \to e_1 + e_2 + e_3$, $e_3 \to 3e_1 - e_2 + 2e_3$
- Ou $x' = x + y + 3$, $y' = y - z$, $z' = x + y + 2z$, où u = (x, y, z) et f(u) = (x', y', z')...

Matrice – à voir !

Premier énoncé

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des carrés magiques, N l'ensemble des carrés magiques de somme nulle, I l'ensemble des carrés magiques engendré par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

0) Démontrer que $s = 3a_{22}$, s étant la somme en ligne, en colonne et en diagonale.

1) Démontrer que I et N sont deux espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$.

2) Calculer leur dimension.

3) Démontrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

4) $\mathcal{C}$ est-il en somme directe avec I et N ?

5) En déduire la dimension de $\mathcal{C}$.

6) Trouver A, B ($A, B \in M_3(\mathbb{R})$), $\exists\, \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$

$N = \alpha A + \beta B$.

En déduire que $\forall M \in \mathcal{C}$, $M = \lambda I + \alpha A + \beta B$

7) Décomposer suivant le modèle de la question 6). α, β, λ ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Deuxième énoncé

On appelle carré magique réel d'ordre trois un tableau carré de neuf nombres réels tel que les sommes des éléments de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale soient égales

1) On considère un carré magique comme une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ que l'on note $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Montrer que $\mathcal{C}$, l'ensemble des carrés magiques, est un espace vectoriel, en utilisant la définition.

2) Vérifier que pour tout carré magique C, si on appelle s la somme de C, on a $s = 3e$

3) Soit N l'ensemble des carrés magiques de somme nulle.

Vérifier que N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

Trouver une base de N, en déduire sa dimension.

4) Soit $\mathcal{U}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par le carré magique dont tout les éléments valent 1.

Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{U} \oplus N$.

En déduire dim $\mathcal{U}$.

Troisième énoncé

Le but de ce problème est de déterminer une méthode qui nous permette de trouver tous les carrés magiques d'ordre trois à coefficients réels.

On considère un carré magique comme une matrice de $M_3(\mathbb{R})$

1) Proposer trois exemples de carrés magiques (distinguer deux cas particuliers de somme nulle)

2) On note s_c la somme de tout carré magique $C = (a_{ij})$, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$.

Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout carré magique C

$Sc = n \times a_{22}$.

3) Démontrer que soit $\mathcal{C}$ = {carrés magiques}, $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que si

N = {carrés magiques / s = 0} alors N sev de C (on pourra montrer que C sev de $M_3(\mathbb{R})$).