ITALO GIORGIUTTI

Une lecture « didactique » des premiers écrits de Grassmann

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1999-2000, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. nº 7, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1999-2000___3_A7_0>

Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques
8 Mars 2000

Italo GIORGIUTTI
Laboratoire de didactique des mathématiques de Rennes

Une lecture « didactique » des premiers écrits de Grassmann

Le premier travail de Grassmann est la "théorie du flux et du reflux" c'est le mémoire que Grassmann a dû présenter pour pouvoir succéder à son père comme enseignant au lycée de Stettin. Si je me suis intéressé à ce travail c'est qu'au dire de Grassmann lui-même, ce travail a été pour lui l'occasion de créer ses propres outils mathématiques ce qu'il a consigné en partie dans l'Ausdehnungslehre (1844).

Au moment où on parle sans cesse d'enseignement par la "résolution de problèmes" et où on constate les difficultés de l'enseignement de l'algèbre linéaire une réflexion sur le travail de Grassmann ne pouvait être que des plus intéressantes. Cette réflexion prend essentiellement en compte celle de Dorier; on pourra à ce sujet se reporter à [1] et à la bibliographie de cet article et aussi à [2].

Le contenu du premier chapitre de la "théorie du flux et du reflux" ressemble a s'y méprendre à un traité de géométrie et même d'analyse vectorielle telles qu'on a pu les voir fleurir il y a un demi-siècle. L'Ausdehnungslehre de (1844) est essentiellement destinée introduire et justifier une partie des résultats qu'on trouve dans ce chapitre. La partie consacrée aux angles et aux rotations, étant reportée à un ouvrage qui aurait dû être écrit plus tard.

l'Algèbre linéaire

La naissance de l'analyse de Grassmann

Tout le monde est d'accord pour admettre que l'analyse de Grassmann n'aurait pu voir le jour s'il n'avait été autodidacte. En particulier, Grassmann fut pendant 6 semestres (temps où il se consacra à la théologie) élève de Schleirmacher qui était le maître incontesté de l'herméneutique c'est-à-dire à l'étude de l'interprétation des textes, ou de la manière de faire du sens avec de l'écrit, bref quelqu'un de parfaitement habitué à la séparation du fond et de la forme mais qui ne les envisageait pas à la fois sans une parfaite fusion et sans une séparation certaine mais avec une interprétation de l'un par l'autre. Des objets de nature intuitive vont apparaître dans son discours mathématique et il les distinguera soigneusement des objets formels : "bref par l'expression entre crochets, je comprendrai ce que j'ai appelé l'extension d'une grandeur élémentaire tandis que je désignerai par l'expression sans crochets la grandeur élémentaire elle-même." (lettre à Möbius). Nous parlerons plus loin de cette formalisation.

Grassmann était fondamentalement opposé à la géométrie (et à la mécanique) analytique de son époque parce qu'il pensait que ce n'était que du calcul dans lequel on perdait trop le sens des choses et en particulier des réalités fondamentales. Il n'était pas satisfait par la géométrie de la tradition euclidienne qu'il considérait comme basée de façon trop implicite sur des vérités de "sens commun" qui intervenaient sans arrêt au cours des démonstrations. Pour lui la géométrie devait être une science appliquée; les seuls exemples de sciences véritables qu'il donnait étaient la logique, l'arithmétique et la combinatoire. Mais la source de son travail n'est pas de faire a priori une telle théorie (et encore moins de reprendre le projet de la caractéristique géométrique de Leibnitz). Il pense que tout le monde est d'accord sur le fait qu'un segment AB étant donné et un point P quelconque du plan ou de l'espace étant donné, on peut construire un segment PC "égal et synchrone "à AB (ce qui pour lui n'est qu'une conséquence immédiate de l'homogénéité de l'espace). D'autre part il considère qu'un segment AB doit être pensé comme parcouru par un point P et AB +BC comme obtenu par un point P parcourant d'abord AB puis BC et c'est à partir de telles considérations et d'aucune autre considération géométrique surtout d'aucun de théorèmes de géométrie "usuel " qu'il va développer la base de son système de calcul.

Il dit avoir été fortement marqué par le fait que sur une droite la relation AB+BC= AC n'était valable que si B était intérieur au segment [AC], mais que si on imposait un signe à cette longueur et la relation AB = -BA, alors la relation ci-dessus était toujours valable. C'est cette situation qui lui a donné l'intuition de ce que nous appelons aujourd'hui un espace vectoriel. Les constructions qu'il a essayées de justifier de son mieux ont horrifié tous ses lecteurs.

Grassmann ajoute : " en suivant le concept de produit, tel qu'il fut conçu par mon père je trouvais que non seulement le rectangle mais aussi le parallélogramme est aussi à considérer comme le produit des deux segments en tenant compte de leur direction. En combinant le concept de produit avec celui de somme .... je trouvais par la considération des mouvements que si je multipliais un segment par la somme de plusieurs segments alors ce produit est égal à la somme des produits partiels".

Mais c'est à son mémoire sur les marées qu'il se consacre entièrement et pour cela il lit la mécanique analytique de Lagrange. Les premiers objets qu'il rencontre sont d'abord les objets de la géométrie usuelle puis des objets tels que les points massiques et les barycentres, les forces, les moments, les couples, puis les fonctions du temps à valeurs dans ces objets.

Un exemple : le **calcul barycentrique** selon Grassmann

Grassmann veut d'abord donner un sens aux sommes pondérées de points qu'il va considérer dans un premier temps comme des sommes formelles et étudier les propriétés de ces sommes. Pour calculer $\Sigma\lambda_i A_i$ on va d'abord calculer la somme $\Sigma\lambda_i$ [PA_i] ce qui se fait sans trop de problèmes à condition qu'on ait défini la multiplication d'un segment par un nombre λ_i puis la somme $\Sigma\lambda_i$ [QA_i] qui diffère de la précédente de ($\Sigma\lambda_i$ [PQ] donc si ($\Sigma\lambda_i$) = 1 on définit un point unique. En posant ($\Sigma\lambda_i$) =λ, on a $\Sigma\lambda_i A_i = \lambda$ ($\Sigma\mu_i A_i$) où $\mu_i = \lambda_i / \lambda$. Donc $\Sigma\lambda_i A_i = \lambda G$ où G = $\Sigma\mu_i A_i$. Si λ= 0, $\Sigma\lambda_i$ [PA_i]] est indépendant de P et de la forme B-A ou [AB], (Grassmann choisira la première forme pour obtenir une addition qui ressemble à celle des entiers). Ces sommes de points vont être définies comme des objets formels qui sont égaux à des objets de la forme mP ou P-Q : ce sont les objets du premier échelon. Les produits de tels éléments vont donner des sommes formelles de droites (définies par un point et un vecteur) ; ce seront les objets du second échelon etc.

Dans le cas où les points P sont pris sur une droite les objets du second échelon sont tous nuls et ceux du premier sont proportionnels, dans le cas où les points P sont pris dans un plan les objets du troisième échelon sont tous nuls et ceux du second sont proportionnels, etc.

L'accueil obtenu en 1844 par la publication de l'Ausdehnungslehre a été des plus déplorables, silence de la plupart des mathématiciens, aucun écho dans aucune revue, critiques privées souvent acerbes mais pouvait-il en être autrement alors que même les rudiments de la théorie des ensembles n'étaient pas disponibles et que le souci de Grassmann était de se faire comprendre et de faire voir la genèse de ses idées, ce qui le conduit à de nombreuses redites ?

Die Geométriche Analyse

Persuadé de l'importance de son travail, Grassmann se met à lire les auteurs qui ont traité des "vecteurs" en particulier Möbius avec lequel les rapports avec s'amélioreront au cours du temps. Signalons que la première théorie du barycentre de Möbius ne traite du cas où la somme des coefficients est non nulle et les vecteurs parallèles et que c'est à partir de considérations de géométrie usuelle qu'il définit le barycentre. C'est d'ailleurs Möbius qui l'incite à concourir pour un prix proposé par la *Fürstlich Jablonowski'chen Gessellschaft* (Académie Prince Jablonowski) : il s'agissait de réaliser si possible le projet inauguré par Leibnitz qui consistait à créer une espèce de calcul géométrique. En utilisant son produit intérieur introduit dans l' Ausdehnungslhere il retrouve le produit scalaire habituel, les sphères les cercles, leurs faisceaux linéaires etc.

Grassmann gagne le concours et une certaine notoriété parmi les mathématiciens. Son texte est publié par les soins du jury. Il se hasarde alors à poser sa candidature à un poste de professeur d'université. L'avis de Kummer qui a soigneusement étudié son dossier est sans appel : selon lui la présentation formelle est un échec ("elle prend place parmi les nombreuses tentatives faites pour construire un système symbolique sans pour cela prétendre former une discipline nouvelle et la théorie n'apporte vraiment rien de neuf".)

l'Ausdehnungslhere de 1962.

Mais Grassmann va réécrire l'Ausdehnungslhere de manière qu'elle puisse être lue par tout mathématicien et peut-être aussi, ce qui ne lui semble pas contradictoire, pour construire un système formel tout à fait consistant et pourquoi pas axiomatique au sens où on pouvait l'entendre à l'époque. La seconde édition sera publiée en 1862.

Le premier chapitre introduit les espaces vectoriels et contient en gros ce qui se fait aujourd'hui en DEUG dans un cours d'algèbre "normal". Les concepts qui y sont introduits sont nés de la manipulation des sommes et produits leur introduction et leur sens sont aussi à chercher dans l'édition de 1864. On trouve des résultats qui ne seront redécouverts que bien plus tard (théorème de l'échange et de la base incomplète). On y trouve plus loin les applications linéaires et leurs propriétés après être passé par l'étude de divers produits.

La théorie du flux et du reflux.

Venons-en maintenant au problème du "flux" et du "reflux". Un petit parcours historique nous permettra de voir quels sont les phénomènes considérés comme pertinents en se référant dans un premier temps au savoir des marins plutôt qu'à des "fables". Les phénomènes rapportés par Pline (voir par exemple [3]) sont pris au sérieux : dépendance par rapport au soleil et à la lune, "les phénomènes célestes faisant sentir leurs effets avec du retard sur la vue."

Un premier type de solutions est formé de celles qui sont purement pratiques et souvent locales. Par exemple, pour un lieu donné : on part d'observations qui datent de la nuit des temps à savoir que les marées sont fortement liées au mouvement apparent du soleil et de la lune, on savait aussi depuis l'antiquité que ce mouvement avait une périodicité de 19 ans (Cycle de Méton). A partir de la connaissance de l'heure de la pleine mer en un lieu donné le jour de la pleine lune, (cette heure est une constante du lieu) et le nombre de jours qui séparent la pleine et nouvelle lune de la date du flux maximum (qui est aussi une constante locale) permet de se faire une idée de la hauteur des marées (connaissant par exemple la hauteur de la mer la veille, compte tenu d'autres circonstances perturbatrices telles que les vents).

Au cours du moyen âge on cherche à numériser la situation, à partir de considérations astronomiques et de concepts apparus lors de reforme de calendriers, en particulier du rôle du point γ et des relations entre les mois lunaires et solaires. En particulier, on tient compte du retard entre les marées de grande amplitude et les conjonctions de la lune et du soleil, retard qui est constant pour un lieu donné de même que les heures des hautes et des basses mers en un lieu donné. Il fallait pourtant préciser les notions relatives à l'amplitude des marées et à leur hauteur.

Un certain nombre de ces notions sont précisées, mais incomplètement à partir de la théorie en particulier les retards des hautes et des basses mers par rapports aux phénomènes astronomiques, et aussi l'explication des modes semi-diurnes. Il faut attendre les travaux de Laplace eux même directement issus de la mécanique analytique de Lagrange. Le travail de Laplace est précédé d'une théorie du mouvement de la terre par rapport au soleil et de la lune par rapport à la terre et qui lui permet de préciser les forces agissant sur un point ans un repère lié à la terre auxquels il va falloir ajouter les forces de pression des molécules liquides. Grassmann va partir des données de Laplace. A partir des méthodes "vectorielles" il va non seulement retrouver une bonne partie des résultats de Lagrange mais va systématiquement utiliser les méthodes vectorielles dans son mémoire. (En particulier pour les solutions des systèmes linéaires à coefficients constants). Il adopte le point de vue de Laplace qui consiste à étudier le cas qui lui semble le convenir à tous les points du globe à savoir que la mer recouvre entièrement la terre qui sera à très grande profondeur et sphérique, la masse de la mer et sa densité seront négligeables devant celle de le terre. Les études locales plus précises pouvant être faites suivant la forme des bassins en tenant compte en particulier d'éventuels phénomènes d'oscillations forcées. Laplace fera des calculs dans le cas d'un canal parcourant l'équateur. Laplace va plus spécialement se concentrer sur la décomposition des forces astronomiques, Grassmann sur celui des mouvements resutants. Contrairement à Laplace, il n'est pas intéressé par la détermination des constantes qu'il trouve. Ni l'un ni l'autre ne vont remettre en cause leurs notions de continuité ou de convergence.

La suite de l'histoire des marées est d'abord théorique. Elle est essentiellement mathématique par la nécessité d'introduire d'autres méthodes pour intégrer les équations et l'étude d'autres cas particuliers. Elle est aussi technique ; en partant des principes de Laplace on relève (par exemple à

Brest puis à Saint Servan) les hauteurs de la marée et on décompose ces fonctions en somme de fonctions périodiques et on se sert de cette décomposition pour prédire les hauteurs des marées en ces points. Le projet Topex/Poseidon permet actuellement de faire ce travail à l'échelle du globe.

Quelques commentaires

Ces commentaires sont tout à fait personnels, c'est à dire qu'ils proviennent de l'observation des phénomènes didactiques que j'ai pu faire sur des élèves en activité et que le parcours de l'œuvre de Grassmann telle que je l'interprète ne fait que confirmer. Il aurait fallu les confirmer dans le cadre de diverses théories didactiques en cours, mais ce n'était pas le but de ce travail.

On peut faire tout d'abord, des remarques de caractère tout à fait général :

1) Il a été de mode de donner des problèmes dont la solution n'est pas possible pour un individu d'un groupe donné. celui qui donne le problème pense que ce problème est un bon problème et se justifie à travers une analyse de la tâche qui montre que ce problème va faire naître une réflexion permettant à l'élève de mieux analyser la situation et d'avancer vers la solution. Il est certain que dans cette analyse il ne faut pas oublier d'une quantité importante de facteurs divers (par exemple le contexte, des contraintes, des instruments, du langage).

La première condition pour espérer qu'un problème soit un "bon problème" c'est qu'il suscite une véritable activité chez les élèves. Dans le cas de Grassmann le problème du "flux " et du "reflux" a été un bon problème parce que, comme Grassmann le dit lui-même les réflexions qu'il a suscitées lui ont pris tout son temps et qu'elles sont dans le prolongement de réflexions antérieures sur la géométrie.

Parmi les contraintes implicites que Grassmann a dû subir ce sont celles de l'institution (formulées clairement dans le rapport de Kummer : "la Science de la grandeur extensive... s'annonce comme une nouvelle discipline mathématique qui veut prendre sa place entre l'analyse et la géométrie sans être un lien entre ces deux eux disciplines telle la géométrie analytique". Nous reviendrons plus loin sur ce texte quand nous parlerons de l'évaluation.

2) Les contraintes, Grassmann va essayer de les surmonter, en dénonçant d'abord les divers inconvénients de la géométrie analytique, qui ne permet pas une la mise en place de concepts et c'est d'ailleurs la critique qu'on peut faire à toute attitude purement algorithmique. Mais cela va le conduire à réécrire son travail en 1862, dans un style qui est plus proche de celui des mathématiciens. Les développements qu'il donne ne peuvent avoir de sens que pour ceux qui se sont approprié les idées essentielles de l'édition de 1844. (au moment de la réédition de l'Ausdehnungslhere Grassmann fera le choix de cette dernière).

Les contraintes (comme d'ailleurs les aides) vont agir de manière très variée chez les élèves inhibition très forte pouvant aller jusqu'à une critique acerbe du travail proposé ou même à un refus total. Chez d'autres, il pourra conduire à nouvelles règles d'action qu'il conviendra d'étudier soigneusement.

3) Le travail sur les marées et les travaux voisins, vont se concrétiser par des approches diverses. Par exemple les méthodes des coordonnées, de la géométrie analytique, de la géométrie élémentaire. Beaucoup de mathématiciens vont continuer à travailler en utilisant force calculs sur les déterminants, par suite leur éducation mathématique ils sont devenus virtuoses de ce type de calculs et cela leur ôte toute envie d'utiliser d'autres méthodes.

La situation est analogue chez les élèves. On peut remarquer qu'une majorité des copies suivent la même présentation (dont il est extrêmement difficile de savoir si elle a été institutionnalisée, imposée imitée ou naturelle). Mais certaines "solutions" peuvent être tout à fait inattendues elles n'en sont pas moins intéressantes même si elles ne permettent pas de résoudre complètement problème posé.

4) Encore une remarque d'ordre général et qui se rapporte au problème de l'évaluation. Revenons-en aux appréciations de Kummer pour qui le travail sur les symboles n'était valable que s'il n'était pas érigé en système, et si ces symboles n'étaient que des "symboles abréviateurs" pour des expressions mathématiques usuelles. C'est ainsi que va procéder Möbius dans sa première théorie du barycentre(et d'ailleurs aussi dans les commentaires à l'"analyse géométrique") par exemple $\Sigma\lambda_i A_i$ remplace $\Sigma\lambda_i A_i A'_i$ où les $A_iA'_i$ sont des segments parallèles pour lesquels on sait faire les calculs en utilisant par exemple le théorème de Thalès. Grassmann n'est pas du tout d'accord avec cette manière de voir. Ce qu'il y a de fondamental chez lui ce sont les segments qu'il note [AM] qui dans sa tête vont représenter des mouvements et dont la traduction dans le système formel est fort ambiguë comme le montre une lettre à Möbius. Définir la dimension d'un espace géométrique à partir de la proportionnalité des produits d'ordre n+1 est une hypothèse très forte.

Du point de vue des élèves il faut éviter de considérer comme fausses certaines de leurs affirmations pouvant provenir de conceptions qui ne sont pas celles que l'institution impose (ni d'ailleurs imposer des conceptions qui au nom d'une certaine pragmatique devraient être plus efficaces).

Mais revenons au cas particulier de l'algèbre linéaire et de ses relations avec la géométrie. Il me semble que Grassmann en avait une connaissance parfaite, ce qui n'est pas le cas de nos étudiants. Quant à l'algèbre linéaire il ne développe pas un point de vue aussi élémentaire que celui qu'on souhaite manipuler au niveau des DEUG : il y manipule certes de manière tout à fait implicite les quotients et la dualité et de manière tout à fait explicite un système énorme dans lequel il est très difficile de se mouvoir. On sait que c'est une surcharge cognitive considérable que de mener de front l'apprentissage de deux théories.

En guise de conclusion

La théorie de Grassmann s'est diffusée très lentement dans le monde des mathématiciens professionnels et puis parmi les autres. Les raisons en sont multiples : le poids de certains mathématiciens comme Klein convaincus de l'importance des travaux de Grassmann, la réécriture par des mathématiciens de talent de questions classiques mais tout à fait mystérieuses, par exemple, la théorie des déterminants par Kroneker des surfaces de Riemann et de la relativité par H. Weyl, enfin la création de théorie nouvelles qui utilisaient les idées et les résultats de Grassmann.

Dans le domaine de l'enseignement, c'est dans le domaine de la mécanique qu'on à utilisé systématiquement le "calcul vectoriel". Mais il était utilisé comme une écriture commode de résultats analytiques. L'expérience montre qu'il ne s'agit pas du tout de la même algèbre linéaire que celle que prônent les mathématiciens.

On a beaucoup parlé d'algèbre linéaire et on peut se poser la question de quelle l'algèbre linéaire parle-t-on ?

Bibliographie

[1] Dorier, Jean Luc, *Hermann Grassmann et la théorie de l'extension.* Repères Irem n°25 janvier 1997.

[2] Flament, Dominique *Hermann Grassmann, la Science de la Grandeur Extensive, la Lineale Ausdehnunsglehre.* Paris : Blanchard 1994.

[3] Gillet, André *Une histoire des marées.* Paris : Belin 1998.