TERESA ASSUDE

Éléments pour une analyse écologique des textes mathématiques

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1999-2000, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. n° 2, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1999-2000___3_A2_0>

Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques 19 mai 1999
Teresa Assude
IUFM de Versailles & DIDIREM (Paris 7)

Eléments pour une analyse écologique des textes mathématiques

I – Questions initiales

Le texte mathématique, et plus généralement l'écrit mathématique, joue un rôle important dans l'activité mathématique de l'élève. Dans cet article, je vais esquisser un programme de recherche autour de la signification de cette assertion, en posant d'abord un certain nombre de questions, et en traitant un petit nombre d'entre elles.

L'écrit mathématique([1]) ne s'identifie pas au texte mathématique, celui-ci étant un cas particulier de celui-là. Faire la distinction entre les deux est opératoire pour rendre compte de l'existence d'un certain nombre « d'objets» dans le registre écrit qui ne sont pas considérés par l'institution scolaire comme des textes. Je pose donc une première série de questions : qu'est-ce qu'un texte mathématique ? Peut-on définir, et comment, une typologie de textes de manière à dégager une spécificité du texte mathématique ? L'acceptation d'un écrit comme texte mathématique, varie-t-elle selon les institutions, selon les moments historiques ?

Si j'affirme que le texte mathématique est important dans l'activité des élèves, je dois m'attarder sur le mot « important ». Pourquoi s'intéresser au texte mathématique ? D'où vient son importance ? Cette importance vient-elle de l'analyse du travail des mathématiciens ou de l'analyse de besoins didactiques ? Quel rôle et quelles fonctions joue le texte mathématique dans l'activité des élèves ?

Cette dernière question nous amène à l'activité de l'élève. Quels types d'activités peut-on considérer par rapport aux textes mathématiques ? Je signale d'abord les activités de lecture et de production de textes : comment lit-on un texte ? Comment produit-on un texte mathématique ? Quels outils pour analyser un texte ? En outre, je peux aussi supposer d'autres types d'activités. Par exemple, quel rapport peut-on faire entre la résolution de problèmes comme activité institutionnalisée dans le système d'enseignement français et l'institutionnalisation faite par le professeur ? Quel est le rôle du texte (ou de la trace écrite) dans ce rapport ? Quelles sont les fonctions cognitives du travail avec le texte ou plus généralement du travail par et avec l'écrit ?

Comme je l'ai dit plus haut, ce questionnement m'ouvre un programme de recherche que je suis loin d'avoir accompli mais je veux seulement esquisser quelques éléments d'une approche morphosémantique des textes mathématiques.

II – L'objet « texte mathématique »

1 - Pourquoi s'intéresser au texte mathématique ?

[1] Pour le moment, je prends ici « écrit mathématique » et « texte mathématique » dans un sens générique tout en sachant qu'il y a plusieurs sortes d'écrits et de textes.

L'intérêt pour le texte mathématique dans l'enseignement des mathématiques n'est pas d'aujourd'hui comme le montre la citation de Zofia Krygowska (1969, p.228) :

> « L'enseignement moderne des mathématiques devrait donc initier l'élève aux formes diverses de l'activité intellectuelle en mathématiques à son niveau. De ce point de vue savoir analyser et saisir la pensée mathématique d'autrui, savoir choisir et raisonnablement exploiter les sources diverses de l'information mathématique, savoir exprimer oralement et dans la forme écrite ses propres pensées pour qu'elles soient compréhensibles aux autres, etc., tout cela n'est pas un objectif moins important de l'apprentissage mathématique que le développement de l'activité créatrice proprement dite. De plus tout cela constitue la condition sine qua non de cette activité. Le rôle de la lecture mathématique mérite de ce point de vue notre attention particulière. »

Et elle rajoute :

> « Dans cette situation un problème se pose dans la pédagogie moderne mathématique, à savoir le problème de l'initiation de l'élève à l'étude intelligible et effective du texte mathématique. »

En outre, ces citations mettent en relief l'un des postulats sur l'importance du texte mathématique : celui-ci est l'une *des formes du travail mathématique*, forme qui permet *la prise d'information et permet d'accéder aux travaux mathématiques d'autrui*, d'être un lien de cette « chaîne ouverte de générations de chercheurs connus ou inconnus, travaillant les uns avec les autres, en tant qu'ils constituent, pour la totalité de la science vivante, la subjectivité productrice. »(Husserl, p.177)

Considérons, comme Husserl, que le langage (et l'écriture) est l'une des conditions de l'intersubjectivité : « C'est la fonction décisive de l'expression linguistique écrite, de l'expression qui consigne, que de rendre possibles la communication sans allocution personnelle, médiate ou immédiate, et d'être devenue, pour ainsi dire, communication sur le mode virtuel. Par là, aussi, la communautisation de l'humanité franchit une nouvelle étape. Les signes graphiques, considérés dans leur pure corporéité, sont objets d'une expérience simplement sensible et se trouvent dans la possibilité d'être, en communauté, objets d'expérience intersubjective. » Cette idée de communauté supranationale, lieu de possibilité d'une expérience intersubjective, condition d'émergence à la fois d'une raison et d'une tradition au sein d'une culture me semble essentielle.

Précisons alors que le texte mathématique permet de se situer par rapport à une tradition, celle qui est consignée dans le texte en tant que sédiment d'un passé, il permet aussi au lecteur de réactiver les « évidences originaires » tout en les reconstruisant : le projet est alors le germe de nouvelles créations dans le futur. Husserl considère que la faculté de réactivation est essentielle à l'homme en tant qu'être parlant, et que chaque lecteur peut reconstruire le sens « originaire » du texte. Le sens « originaire » du texte est à prendre ici dans la possibilité donnée au lecteur de se poser la question des raisons pour lesquelles le texte est rentré dans l'histoire, en reconstruisant et même en récréant les « éléments proto-fondateurs ». Pour le dire autrement, la question de l'origine n'est pas celle de trouver le sens « caché ou non » des premiers chercheurs mais elle réside dans l'espace ouvert de réactivation de l'évidence par le lecteur.

2 – Définition minimale de l'objet « texte mathématique »

Quand on parle de texte mathématique, de quoi parle-t-on ? Comment peut-on définir un texte mathématique ? Peut-on trouver une spécificité du texte mathématique par rapport à d'autres types de textes ? Ces questions méritent notre attention même si les linguistes ne sont pas forcément d'accord sur une définition de texte.

Une définition minimale du texte mathématique est la suivante : texte ayant affaire à des objets mathématiques. Cette définition n'est pas opératoire car elle ne distingue pas la variabilité des textes mathématiques en fonction des critères suivants : le but (texte didactique, texte de vulgarisation, texte de recherche, etc.), le destinataire (la communauté mathématicienne, autres), l'auteur, son statut et les conditions de production du texte, et finalement la situation d'énonciation. Peut-on trouver un noyau commun dans toute cette variabilité des textes mathématiques ? D'une façon minimale et statique, on peut dire qu'un texte mathématique est un *« tissu » de relations entre des objets mathématiques*, tissu qui se manifeste assez souvent par l'usage de symboles mathématiques, de formules, de graphiques entrelacés avec le langage naturel (Laborde 82), c'est-à-dire par un entrelacement de registres sémiotiques (Duval 95).

La définition linguistique de la notion de texte pose problème, comme le souligne Duval, qui dit que « toutes les définitions qui ont été proposées pour définir la notion de texte recourent à l'analogie de la phrase (...) Mais ce recours s'avère être une impasse. En effet la phrase, en tant qu'elle forme un acte complet de discours, et le texte en tant qu'il forme l'unité complète d'une démarche discursive peuvent paraître très proches en vertu de ce caractère de complétude, mais ils ne peuvent pas être comparés parce qu'ils ne relèvent pas des mêmes fonctions discursives.» (Duval 95, p.329) Pour ce chercheur, un texte « est une forme de discours plus complexe et plus dense que toute autre forme socialement produite en temps réel [et] *tout texte apparaît comme la version sélectionnée marquant un arrêt dans un processus de rédaction qui pourrait encore se poursuivre.* » Le texte apparaît alors lié aux conditions de production et la « variabilité rédactionnelle » apparaît comme une composante essentielle dans la spécificité des textes.

Le texte mathématique s'inscrit sur un support matériel, peut être visualisé dans sa matérialité de signes, et c'est un écrit cohérent soit localement soit globalement : on peut parler d'un texte de démonstration (Duval 1998), d'un texte global comme l'ensemble d'un certain nombre de théorèmes et de leurs démonstrations, ou encore comme un livre ou un manuel.

Certains linguistes se sont penchés sur l'analyse linguistique des textes de raisonnement, et plus particulièrement des textes de démonstration. Par exemple, Isabelle Beck met en évidence que l'étude linguistique des textes est un moyen de préciser à la fois la variabilité et la permanence des textes de démonstration. Pour cela, elle considère deux types de caractéristiques linguistiques, celles liés au dictum (ce dont on parle) et celles liés au modum (comment on parle, à savoir les marques d'énonciation, les connecteurs, la situation, le moment d'énonciation). La première caractéristique du type de texte étudié qu'elle met en avant est la suivante : *il existe une minimisation des marques énonciatives destinés à agir sur l'interlocuteur et corrélativement de celles qui renvoient au rédacteur.*

Selon Beck (1998), on peut dégager un certain nombre de caractéristiques des textes de démonstrations, et on peut même les élargir à d'autres textes mathématiques. Voilà quelques-unes de ces caractéristiques :

- il y a un lexique peu varié, et des relations syntaxiques très statiques exprimant des relations (par exemple, « O est le milieu de [AB] ») et ces relations sont contraintes par les connaissances mathématiques ;
- il y a un faible usage des possibilités de la langue notamment en ce qui concerne l'usage des temps et des personnes (souvent le seul temps utilisé est le présent, et la seule personne est « on »), ce qui permet de dire que les textes de démonstration sont impersonnels et atemporels ;

- il y a de nombreux connecteurs (donc, or, si, alors, et, mais) mais le connecteur « donc » reste l'emblème de la démonstration.

Retrouve-t-on ces caractéristiques dans d'autres textes mathématiques ? Nous partons de l'hypothèse, étayée par ces travaux, que le texte mathématique peut se définir par trois caractéristiques :

- une stéreotypisation de l'organisation globale du texte : définition, théorème, démonstration, lemme, application, exemple, sous des chronologies diverses, et de l'organisation locale : propositions, pas de raisonnement, ensemble des pas de raisonnement (Duval 1992) ;
- une présence très forte du contexte théorique qui est aussi une partie de son contexte référentiel : le contexte sémantique contraint fortement le syntaxique (voir par exemple, l'usage du lexique et des symboles, le rôle de la nominalisation) (Laborde 1995) ;
- une minimisation des marques énonciatives : le contexte pragmatique est réduit à une portion congrue par la dépersonnalisation, la décontextualisation et la détemporalisation.

Ces caractéristiques, comme toute classification, ne rendent pas compte de toute la diversité des textes mathématiques mais elles donnent un moyen de repérage des textes mathématiques par rapport à d'autres types de textes. Précisons ce point.

3 – Types de textes et genre mathématique

Todorov (1970) écrit que classer un texte « c'est découvrir une règle qui fonctionne à travers plusieurs textes », et Petitjean (1989) ajoute que cette classification « dépend pour une part de l'objet à classer, pour une autre part, de la démarche classificatrice. » Dans son article (1989), ce chercheur présente une série de classifications très diverses en fonction de critères sociologiques, psychologiques, linguistiques, et il propose de garder le terme « types de textes » pour une classification homogène, telle que celle présentée par E.Werlich (1975) « qui, à partir d'un « foyer conceptuel » lié à des procédures cognitives, distingue cinq types de textes :

a) Le type descriptif est lié à la perception dans l'espace.
b) Le type narratif est lié à la perception dans le temps.
c) Le type expositif est associé à l'analyse et à la synthèse de représentations conceptuelles.
d) Le type argumentatif est centré sur le jugement et la prise de position.
e) Le type instructif est lié à la prévision du comportement à venir. »(p.97)

Il précise aussi que les textes sont rarement monolithiques. Certains auteurs, comme Jean-Michel Adam (1985, 1987), préfèrent d'ailleurs parler de « structures séquentielles de base » (descriptive, narrative, etc), les textes présentant des enchaînements ou emboîtements de plusieurs séquences même si l'une peut être dominante.

Etant donné cet apport théorique, que peut-on dire sur le texte mathématique ? Dans quelle catégorie peut-on le classer ? Il nous semble que le texte mathématique, en tant que produit fini et publié, est essentiellement de type expositif car il est associé à l'analyse et à la synthèse de représentations conceptuelles par le poids des contraintes théoriques annoncées auparavant : le modèle du texte euclidien reste malgré tout très prégnant car *le type mathématique est lié très fortement à une organisation globale qui se manifeste par des formes* (définition, théorème, démonstration, proposition, pas de raisonnement, etc.), formes qui permettent d'identifier un *genre mathématique*. Guichard (1998), en analysant plusieurs textes de démonstration d'époques différentes, considère que *Les Eléments* d'Euclide restent le modèle et la référence des textes mathématiques et il écrit (p.103) :

« La première chose à remarquer est l'organisation très structurée du texte euclidien :

Proposition :
- l'énoncé
Exposition (*ou disposition, ou hypothèse*) :
- traduction graphique ou symbolique de l'énoncé
- éléments ou données de la question
Détermination (*ou diorisme ou requis à démontrer*) :
- explique clairement ce qui est cherché
Construction (*ou préparation*) :
- rajoute ce qui manque aux données pour trouver ce qui est cherché
Démonstration
Conclusion :
- retour à la proposition.

Cette présentation se retrouve pour tous les énoncés de l'ouvrage d'Euclide ; c'est un canon à respecter. »

D'autres types de textes mathématiques existent qui sont plus heuristiques (voir par exemple les narrations de recherche) ou des textes commentaires mais nous nous intéressons ici à ce qu'on pourrait appeler un « *genre mathématique* ».

4 - Approche morphosémantique du texte mathématique

Le texte mathématique nous apparaît donc comme un genre caractérisé par des formes spécifiques qui l'organisent en fonction d'un contexte théorique. La prééminence de ces formes peut être comprise en fonction d'une part de la prégnance du modèle euclidien de présentation des savoirs mathématiques, modèle non encore obsolescent (le modèle axiomatique est dans la continuité des *Eléments* d'Euclide tout en le retravaillant), et d'autre part de la question de la nécessité mathématique et du besoin de réduire l'arbitraire et le contingent des pratiques mathématiques. Or la prégnance de ces formes ne peut pas être séparée du substrat dont elles se détachent, puisqu'un texte n'est pas seulement un enchaînement de phrases ni un enchaînement de propositions.

Notre approche du texte va prendre en compte à la fois le point de vue *statique* de la segmentation du texte en unités pertinentes pour le but qu'on s'assigne ainsi que leur traitement (Duval 1999) et le point de vue *dynamique* à partir duquel « le texte dans sa globalité va déterminer le sens de ses unités locales » à travers la dynamique des formes et des fonds (Rastier, 1997). Dans une sémantique des textes, la notion *d'isotopie* prend une place importante comme principe de cohésion textuelle qui repose sur la répétition d'éléments semblables ou compatibles et elle propose « une description des parcours interprétatifs ». Pour cette description, Rastier (1997) propose de s'intéresser à la fois aux *rythmes* qui assurent la temporalisation des isotopies qui constituent les fonds sémantiques et *aux contours des formes sémantiques* (notamment ceux des molécules sémiques et aussi leurs connexions en périodes ou syntagmes). Cet auteur précise que « les *parcours interprétatifs* doivent reconnaître les *mouvements textuels* », ainsi que les *points nodaux* c'est-à-dire les moments qui infléchissent le « *cours de l'action* » du texte ou qui connectent plusieurs isotopies : « Gestes et mouvements, points nodaux et moments critiques, tempo du rythme et phrasé des contours permettent de concevoir le texte comme un *cours d'action* sémiotique, au-delà d'une concaténation de symboles. Le genre codifie la conduite de cette action, mais ce qu'on pourrait appeler le *ductus* particularise un énonciateur, et permettrait de caractériser le style sémantique par des rythmes et des tracés particuliers des contours de formes. »(p.139)

Nous allons nous intéresser ici à un principe particulier qui est celui de l'ancien-nouveau et à la manière comment certaines formes se détachent des fonds pour l'actualiser, notamment les « formes condensées ». Condensation, déploiement et densité sont trois notions qui nous permettront d'identifier des parcours interprétatifs. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à une isotopie particulière qui est celle des transformations géométriques lors de l'analyse de deux textes mathématiques.

5 - Morphologies et densité

Rastier (1997, p.135) définit la notion de *morphologie* comme étant l'unité résultant de « segmentations et de catégorisations sur des formes et des fonds sémantiques ». Nous allons nous intéresser aux morphologies de deux points de vue : celui de la quantité d'objets visibles et celui de la quantité d'information véhiculée.

Une première remarque est la suivante : *il existe des morphologies qui sont plus denses que d'autres*, c'est-à-dire que nous établissons dans l'ensemble des morphologies une sorte de *relation d'ordre*.. Nous en avons donné des exemples dans notre travail précédent (voir Assude 94) et ici, nous présenterons un exemple à propos du théorème de Pythagore.

Il s'agit de l'étude du théorème de Pythagore en classe de troisième et les manuels que nous avons pris correspondent à la même réforme et datent de 1980 et 1984. Nous nous intéresserons seulement au moment où les deux manuels énoncent le théorème pour y voir la densité des deux morphologies l'une par rapport à l'autre. Le manuel 1 est celui de la collection Renée Polle de la librairie Delagrave et le manuel 2 est celui de la collection Faire des mathématiques de Cédic ([2]). Voici l'extrait du manuel 1 :

I – LE THEOREME

Soit un triangle (ABC) rectangle en A. Reprenons les notations définies au chapitre précédent (I).

Nous avons établi que :

$$\mathrm{Cos}^2\hat{B} + \mathrm{Sin}^2\hat{B} = 1$$

deux membres de cette égalité par a^2.

On obtient :

$$a^2\,\mathrm{Cos}^2\hat{B} + a^2\,\mathrm{Sin}^2\hat{B} = a^2. \quad (1)$$

Mais :

$$a^2\,\mathrm{Cos}^2\hat{B} = (a\,\mathrm{Cos}\,\hat{B})^2 = c^2$$

et :

$$a^2\,\mathrm{Sin}^2\hat{B} = (a\,\mathrm{Sin}\,\hat{B})^2 = b^2.$$

L'égalité (1) devient : $c^2 + b^2 = a^2$

Ou

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Enonçons le résultat : (théorème de Pythagore).

Dans tout triangle rectangle, les côtés étant mesurés avec une même unité, le carré de la mesure de l'hypoténuse égale la somme des carrés des mesures des deux autres côtés.

Remarque : la relation $a^2 = b^2 + c^2$ est homogène et du second degré ; son exactitude n'est pas modifiée (bien que les valeurs numériques changent) par un changement de l'unité de longueur.

[2]. manuel 1 : Polle R, Clopeau G-H et Delobel J, (1980), Mathématiques, classe de troisième, collection Renée Polle, Delagrave ; manuel 2 : Deledicq A, Lassave C et Missenard D, (1984), Mathématiques 3ème, Cédic.

Voici l'extrait du manuel 2 :

> **1. L'énoncé de Pythagore**
>
> PROPRIETES
> Propriété dite de Pythagore
> Si le triangle ABC est rectangle en A, alors on a :
> $AB^2 + AC^2 = BC^2$
>
> Propriété réciproque
> Si, dans un triangle ABC, on a :
> $AB^2 + AC^2 = BC^2$
> alors ce triangle est rectangle en A.
>
> Ces énoncés sont pour toi des axiomes.
> On dit en français : « dans un triangle rectangle, le carré (de la mesure) de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés (des mesures) des deux autres côtés. »

Ces deux formes relatives au théorème de Pythagore ne comportent pas les mêmes objets. La première morphologie comporte, outre les objets triangle, triangle rectangle, mesures des côtés d'un triangle, carré, somme, qui apparaissent aussi dans la deuxième morphologie, les objets angles d'un triangle, cosinus et sinus d'un angle, la relation fondamentale de la trigonométrie. En outre, nous pouvons segmenter ces deux morphologies en propositions aux sens grammatical ou logique comme le précise Duval (1998).

En ce qui concerne la deuxième morphologie, on annonce d'abord de quoi il s'agit (de re) par le titre (L'énoncé de Pythagore) et ensuite le comment (de dicto) est aussi annoncé par un autre titre (Des propriétés). D'abord, les deux propositions suivantes sont énoncées dans deux registres (langue naturelle et symbolique), ensuite on précise le statut de ces deux propositions (axiomes) et à la fin on réduit l'une des propositions à un seul registre (conversion du registre symbolique en registre de la langue naturelle). Aucune référence explicite est faite à l'ancien et le statut « axiome » est là pour le rappeler.

Par contre, dans la première morphologie, le but n'est pas le même : on ne veut pas seulement l'énoncé du théorème mais on veut le déduire d'un résultat ancien. Le nombre de propositions est plus grand que dans la deuxième morphologie ainsi que le nombre d'objets. Ces objets renvoient à des objets anciens qui sont supposés être vus chronologiquement avant ce chapitre : il est même écrit « reprenons les notations définies au chapitre précédent ». On peut penser de même pour l'objet « relation homogène du second degré » qui apparaît dans la remarque, objet qui n'est pas un objet usuel à ce niveau d'enseignement. La discussion sur la présence auparavant des objets qui apparaissent explicitement dans une forme ne sera pas faite ici même si elle est importante.

Ce qui nous intéresse avec cet exemple est de montrer que la « quantité d'objets visibles », la « quantité de propositions » dans la première forme est plus grande que dans la deuxième forme. Nous dirons alors que la première forme est plus dense que la deuxième en ce qui concerne la quantité d'objets. A cette première signification, nous ajouterons une deuxième signification : une forme peut être plus dense qu'une autre, non seulement en termes de quantité d'objets, mais en termes de quantité d'informations. Cette deuxième signification renvoie forcément au sujet et à son système de connaissances mais, pour le moment, nous ne nous intéresserons à cet aspect.

D'une manière empirique, nous dirons qu'il y a des morphologies plus ou moins denses que d'autres (c'est-à-dire avec plus ou moins de « choses » visibles) et qu'il peut exister des *morphologies de densité optimale* permettant au rapport des sujets de s'établir d'une manière convenable. Il nous semble que le travail de l'élève (et même celui du professeur) ne sera pas le même selon la densité des morphologies par lesquelles se manifeste un certain objet de savoir. Cette relation "d'ordre" n'est pas toujours facile à repérer, quand c'est le cas nous pourrons dire que les morphologies ont une *densité « semblable »*. C'est le cas entre la deuxième morphologie et la morphologie suivante prise dans un autre manuel de l'époque([3]) :

> Les activités qui précèdent mettent en évidence une propriété des longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Cette propriété, que nous allons admettre, porte le nom de « Théorème de Pythagore ».
> **Théorème de Pythagore**
> Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
> Ou encore
> Si AB est perpendiculaire à AC, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$
> AB désigne la distance de A à B, ou la longueur du côté [AB] du triangle.
>
> Attention ! Dans l'énoncé du théorème de Pythagore :
> L'HYPOTHESE est : le triangle ABC est rectangle en A : ---------------------- $AB \perp AC$
> LA CONCLUSION est : le carré de l'hypoténuse [BC] est égal à la somme des carrés des deux autres côtés -- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
> Le théorème de Pythagore s'abrège souvent en :
> Le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Posons une première hypothèse de travail :

H1 : *dans l'organisation des objets de savoir, la tendance est de minimiser l'ensemble des objets de savoir présents lors du travail à propos d'un objet de savoir tout en tenant compte des conditions institutionnelles existantes et des buts visés.*

Cette hypothèse est reliée à un principe plus général qui est le *principe d'économie de la structuration didactique* (principe qu'on trouve aussi dans d'autres domaines). Nous admettons qu'un des principes d'organisation d'un texte mathématique est celui de la *recherche de l'économie des moyens par rapport aux buts déclarés.* Comment ce principe se manifeste-t-il ?

Il semble qu'un des points d'accord entre les didacticiens est celui qui concerne la dialectique ancien-nouveau, à savoir que le nouveau naît de l'ancien et cela était aussi présent dans les travaux des psychologues et notamment ceux de Piaget. L'avancée du temps didactique va permettre l'apparition de nouveaux objets de savoir et de nouveaux rapports aux objets qui vont prendre appui sur des objets et des rapports aux objets anciens. Or cette reprise des objets et rapports anciens peut ne pas se faire nécessairement sous les formes dans lesquelles ils se sont manifestés la première fois. D'où une reformulation, et/ou une généralisation. Nous dirons alors que *les formes anciennes peuvent être reprises comme formes condensées* sinon l'ampleur des nouvelles morphologies serait tel qu'il serait difficile de pouvoir les manipuler. Inversement, les morphologies peuvent devenir de telle manière

[3] E.Galion, Mathématiques 3è, O.C.D.L., Hatier, 1980.

denses (par l'adjonction de nouveaux objets) qu'un processus de condensation peut alors se mettre en place pour les abréger. Nous allons préciser ce que nous entendons par condensation mais avant nous présenterons très rapidement des travaux existants sur la condensation.

6 – Travaux sur la condensation

Les travaux d'Anna Sfard sur le rôle des algorithmes dans la pensée mathématique et notamment la double nature – objet et processus – des concepts mathématiques mettent l'accent sur les différents stades de structuration dans la formation d'un concept mathématique. Ces trois stades sont : l'intériorisation, la condensation et la réification. Elle définit la condensation de la manière suivante (Sfard 1991, p.19) :

> « The phase of condensation is a period of « squeezing » lengthly sequences of operations into more manageable units. At this stage a person becomes more and more capable of thinking about a given process of a whole, without feeling an urge to go into details. »

Ainsi, la phase de condensation est une phase intermédiaire dans le passage d'un processus à un objet : c'est le moment où une vision plus globale se forme par la transformation de séries d'opérations dans des unités plus opérationnels. Ces travaux se situent dans une perspective cognitive même si l'analyse des processus cognitifs se fonde sur une analyse épistémologique de la formation des concepts mathématiques.

Dans une perspective proche se situent les travaux sur la modélisation des didacticiens italiens Arzarello, Bazzini et Chiappini (1994) qui mettent en évidence la condensation comme processus cognitif. Dans des activités de modélisation, les étudiants doivent trouver des formules algébriques qui modélisent une certaine situation, et le résultat final de ce travail de modélisation soit la formule algébrique condense le processus qui y aboutit. Ils écrivent (1994) :

> « si ha condensazione quando il significato relativo a un oggetto nell'ambito di un certo frame è incorporato in una formula in modo efficiente, e quindi si ha una buona nominalizzazione. »([4])

Les auteurs écrivent que la condensation permet d'incorporer la signification d'un objet, relative à un certain cadre, dans une formule efficace, ce qui indique que la formule est une forme condensée investie d'une signification par le sujet.

Dans un autre tout domaine, Sigmund Freud parle aussi de condensation lors des processus d'élaboration des rêves. Il écrit (Freud 1923, p.189) :

> « Le premier effet du travail d'élaboration d'un rêve consiste dans la condensation de ce dernier. Nous voulons dire par là que le contenu du rêve manifeste est plus petit que celui du rêve latent, qu'il représente par conséquent une sorte de traduction abrégée de celui-ci. La condensation peut parfois faire défaut, mais elle existe d'une façon générale et est souvent considérable. On n'observe jamais le contraire, c'est-à-dire qu'il n'arrive jamais que le rêve manifeste soit plus étendu que le rêve latent et ait un contenu plus riche. La condensation s'effectue par un des trois procédés suivants : I° certains éléments

[4] Traduction : il y a condensation lorsque la signification d'un objet dans le domaine d'un certain cadre est incorporé dans une formule efficacement, et lorsqu'il y a une bonne nomination.

> latents sont tout simplement éliminés : 2° le rêve manifeste ne reçoit que des fragments de certains ensembles du rêve latent ; 3° des éléments latents ayant des traits communs se trouvent fondus ensemble dans le rêve manifeste. »

L'auteur dit encore qu'on peut réserver le mot « condensation » à ce dernier procédé. Ce qui nous intéresse ici c'est le fait qu'il y a une diminution du contenu du rêve latent au rêve manifeste et ce sont les trois procédés de condensation notamment le dernier, à savoir la possibilité de *réorganisation*, dans le rêve manifeste, d'éléments latents divers qui ont, au moins, un trait commun qui sert alors de *noyau organisateur*. Ce travail sur la condensation est apparu car Freud s'est rendu compte de la distance entre la brièveté du texte et l'ampleur des associations qu'il suppose. Notre travail sur le texte mathématique et les mécanismes de condensation et de déploiement s'inspire des idées freudiennes même si nous ne nous intéresserons pas à « l'inconscient du texte » ou à l'inconscient de celui qui le produit ou le lit.

7 - Condensation et déploiement

Nous nous situons ici dans la lignée du philosophe anglais Jeremy Bentham qui considère que le mouvement des mathématiques suit deux directions, celle de la condensation et celle de l'exemplification. A propos du travail de ce philosophe sur les mathématiques, J.-P. Cléro écrit (1998, p.467) : « c'est la *condensation* qui fournit ici l'élément le plus original. Il relève délibérément de considérations économiques. Quand il s'agit de remplacer la langue vernaculaire par des signes, c'est à condition de respecter certains principes. Nous avons suffisamment aperçu les principes d'intelligibilité ; il nous faut désormais considérer les principes économiques qui dépendent très directement du principe d'utilité. On ne peut substituer des signes à d'autres que si l'utilisation de ceux-là présente un avantage, c'est-à-dire : si leur apprentissage ne coûte pas plus d'effort, donc plus de peine, que de plaisir censé résulter probablement de leur usage. Le point de vue économique régit donc la convenance de l'*éloignement* des nouveaux signes par rapport aux usuels ; et comme aucun signe ne peut exister sans rapport à d'autres signes, il régit aussi leur *nombre*, car il n'est pas souhaitable que de nombreux signes se substituent à ceux de la langue vernaculaire, faute de quoi l'on perdrait l'avantage de l'abréviation. »

Nous donnerons d'abord quelques exemples qui montrent comment nous considérons ce terme "condensation". Ainsi, dans son livre "L'enseignement de la géométrie", Gustave Choquet présente une axiomatique de la géométrie et l'un des axiomes d'ordre est le suivant : «A toute droite D sont associées deux structures d'ordre total, opposées l'une de l'autre». A propos de cet axiome, l'auteur écrit (Choquet, p.21) :
"Cet axiome est exprimé sous une forme condensée puisqu'il suppose connu ce qu'est un ordre total sur un ensemble."

De même, dans un article intitulé *Sur le symbolisme des mathématiques et de la physique mathématique*, Hermann Weyl écrit (Weyl, p.253) :

> "Il va de soi que le lien entre symbole et donné perceptible n'est pas rompu pour autant ; le physicien comprend ce que le symbolisme veut dire puisqu'il teste par l'expérience les lois physiques qui y sont condensées"

Un autre exemple, plutôt historique, est celui de la formule de résolution des équations du second degré à une inconnue qui condense tout un ensemble d'ouvrages, notamment des mathématiques arabes.

Dans leur livre sur l'algèbre linéaire, Pham et Dillinger (1996, p202) écrivent sur le déterminant le suivant :

« **Le déterminant en formules**

Toutes les propriétés du *déterminant* peuvent être encapsulées dans la formule générale

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

où la somme porte sur toutes les permutations des n indices 1, 2, …., n, et sgn(σ) désigne la *signature de la permutation* σ (cf. déf. 4.1.9). »

Et ils écrivent la note suivante :

« Attention ! Le contenu de cette capsule est fortement concentré ! Ne pas laisser à la portée des enfants ! »

Dans ce cas, la formule condense un ensemble de propriétés d'un objet mathématique, et à l'intérieur même de la forme, la référence à une définition précédente est numérotée.

Voyons, à partir de ces cas, les différentes occurrences des formes condensées et les mécanismes de la condensation.

La condensation est l'un des moyens par lequel se constitue la linéarité du texte mathématique en tant que moyen économique de prise en compte de l'ensemble des interrelations entre les objets. Comme penser la brièveté du texte par rapport aux pratiques qui lui correspondent ? Comment penser la contrainte de linéarité d'un texte ? Les formes condensées sont des formes discursives (dans notre cas écrites) qui correspondent soit à des pratiques (exemple de Weil), soit à des savoirs anciens nécessaires (exemple de Choquet) soit des savoirs anciens réorganisés (cas de la formule du second degré ou l'exemple du déterminant). Précisons trois des mécanismes de condensation :

- *l'élimination* : quand on passe des pratiques aux savoirs, on élimine un certain nombre d'objets contingents pour ne garder que le nécessaire (exemple du travail par résolution de problèmes) ;
- la *fragmentation* : dans la prise en compte des savoirs anciens dans l'émergence du nouveau, on ne prend que les fragments pertinents pour le but qu'on se donne (exemple de Choquet) ;
- la *réorganisation* : les savoirs anciens ne sont pas pris tels quels mais ils sont remaniés, réorganisés, soit par généralisation soit par unification soit par formalisation (exemple de la formule du déterminant). D'autres exemples peuvent être pris dans le travail de Robert (1998).

Les mécanismes de condensation sont alors un des éléments importants dans la production d'un texte et on ne peut pas les séparer des mécanismes de déploiement ce qui nous amène à une deuxième hypothèse, qui peut être cruciale dans les rapports des sujets à ces formes :

H 2 : *les mécanismes de condensation ne peuvent pas être séparés des mécanismes de déploiement des formes condensées.*

L'exemple de Gustave Choquet suppose que le lecteur sache ce qu'est une relation d'ordre total, et l'exemple de Pham et Dillinger montre que les propriétés vues auparavant sont être censées connues du lecteur pour que celui-ci puisse réactiver la formule condensée, ce qui est dit dans la note avec un certain humour. Un autre exemple, pour ceux qui connaissent Cabri-géomètre, est celui des macro-constructions dans ce logiciel qui peuvent être considérées comme des formes condensées de certaines constructions, constructions qui peuvent être réactivées si nécessaire.

La possibilité de déploiement d'une forme condensée y être inscrite dans le sens ou bien on donne les éléments pour cela (renvoi à la définition ou au théorème), ou bien on suppose le lecteur connaissant, mais de toutes manières on renvoie ce déploiement au lecteur. Nous retrouvons ici le rôle du lecteur et de la lecture des textes mathématiques. Comme le dit Husserl, le lecteur doit reconstruire le « sens originaire » du texte dans l'espace ouvert de réactivation de l'évidence. Autrement dit, le déploiement des formes condensées dépend du lecteur et de la possibilité de celui-ci de rentrer dans la pensée mathématique d'autrui soit par des renvois explicites dans le texte soit par d'autres enquêtes de prise d'information soit par l'aide d'un enseignant (ce qui est le cas dans une classe). Comme le dit Krygowska (1969) :

> « Tous ceux qui ont étudié sérieusement la mathématique savent très bien que la lecture effective d'un texte mathématique exige un effort et même dans certaines conditions, un effort créateur, une certaine collaboration avec l'auteur du texte. Cette lecture exige aussi une certaine technique dans l'analyse de la définition, du théorème, de la démonstration, de la structure totale du texte étudié. »

En résumé, un des principes écologiques de la production d'un texte du savoir est celui de l'économie de la structuration didactique dont la réalisation se manifeste par des mécanismes de condensation : il existe une densité optimale des formes de savoir et la tendance à réduire ces formes au minimum conduit à la reprise des formes anciennes par des formes condensées qui, elles-mêmes, ne peuvent pas être séparées de la possibilité de leur déploiement.

III – Analyse de textes : une étude de cas

Nous allons analyser deux textes mathématiques pour l'enseignement de la géométrie de la fin du XIXème siècle et début du XXème siècle. Cette analyse sera faite à partir d'un texte de démonstration du théorème suivant (T) : dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux. Les textes mathématiques de départ – les manuels – sont les suivants : *Traité de Géométrie* de Eugène Rouché et Charles de Comberousse dans sa quatrième édition de 1879, et *Leçons de Géométrie élémentaire (Géométrie plane)* de Jacques Hadamard de 1898. Dans les deux textes, T apparaît dans le livre I et dans le deuxième chapitre. Voyons les deux textes de démonstration de ce théorème :

T1 : Rouché et de Comberousse

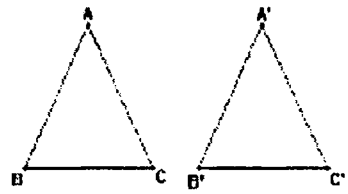
THEOREME

28. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit ABC un triangle isocèle ; par hypothèse le côté AB est égal au côté AC, et il faut démontrer que l'angle B est égal à l'angle C (fig.25).

Considérons un second triangle A'B'C', *reproduction exacte* du premier, et transportons-le sur ABC en le renversant de manière que A' tombe en A et C' en B, ce qui est possible puisque le côté A'C', reproduction de AC, doit, en vertu de l'hypothèse, être égal à AB. Les angles A et A' étant les mêmes, le côté A'B' prendra la direction AC, et comme A'B', reproduction de AB, est égal à AC, le point B' tombera en C ; donc les deux triangles coïncideront ; par suite, l'angle C' coïncidant avec l'angle B et n'étant que la reproduction de l'angle C, on a B = C.

Fig. 25



T2 : Hadamard

23. **Théorème**. – Dans tout triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.
Soit le triangle isoscèle ABC (fig.20). Retournons l'angle BAC sur lui-même (**10**) de manière que AB prenne la direction AC et réciproquement.
Puisque AB et BC sont égaux, le point B viendra prendre la place du point C et inversement. L'angle ABC sera donc venu en ACB, de sorte que ces deux angles sont égaux.

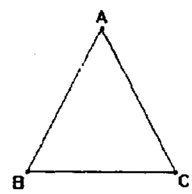


Fig.20

Pour analyser ces deux textes nous allons utiliser la grille suivante construite à partir des travaux de Duval et des apports théoriques exposés ci-dessus :

1 – Enoncé du théorème : lexique et autres ostensifs
2 – Démonstration
  a) segmentation en propositions (au sens grammatical)
  b) pas de raisonnement
  c) statut des propositions
  d) lexique et autres ostensifs
  e) densité des morphologies
  f) formes condensées
3 – Place du théorème dans la globalité du texte
4 – Mouvements textuels : isotopies, points nodaux, rythmes, phrasés des formes

1 - Enoncé du théorème

Il n'y pas une grande différence entre le lexique et les ostensifs présents en T1 et T2 mais il y a une différence significative : dans T1, on considère **un** triangle isocèle comme étant l'objet générique, dans T2 on considère « **tout** triangle isocèle ». Du point de vue logique, nous sommes là en présence d'une proposition en T1 et d'un prédicat en T2.

2 - Démonstrations

Nous allons d'abord segmenter les deux morphologies T1 et T2 en propositions au sens grammatical tel que Duval le suggère. Le tableau suivant nous donne un aperçu de cette segmentation :

morphologie T1	*morphologie T2*
Soit ABC un triangle isocèle	Soit le triangle isocèle ABC
par hypothèse le côté AB est égal au côté AC	
et il faut démontrer que l'angle B est égal à l'angle C	

(fig.25).	(fig.20)
Considérons un second triangle A'B'C', *reproduction exacte* du premier	Retournons l'angle BAC sur lui-même (**10**)
et transportons-le sur ABC	de manière que AB prenne la direction AC et réciproquement.
en le renversant de manière que A' tombe en A et C' en B	Puisque AB et BC sont égaux
ce qui est possible	le point B viendra prendre la place du point C et inversement
puisque le côté A'C', reproduction de AC, doit, en vertu de l'hypothèse, être égal à AB	L'angle ABC sera donc venu en ACB
Les angles A et A' étant les mêmes	
le côté A'B' prendra la direction AC	
et comme A'B', reproduction de AB, est égal à AC	
le point B' tombera en C	
donc les deux triangles coïncideront	
par suite, l'angle C' coïncidant avec l'angle B et n'étant que la reproduction de l'angle C	
on a B = C	de sorte que ces deux angles sont égaux

T1 a plus de propositions et plus d'objets (notamment un deuxième triangle) que T2. La morphologie de T1 est plus dense que la morphologie de T2 au sens où il y a plus d'objets et de propositions (au sens grammatical) en T1 qu'en T2. En T1, la démonstration s 'appuyant sur le fait qu'on prend un deuxième triangle « reproduction exacte de ABC », on ajoute un certain nombre de propositions (au sens grammatical) pour montrer que les deux triangles coïncident « en les retournant ». En T2, on renvoie le lecteur au point (10). Ecrire dans cette démonstration (10) évite de montrer la conservation des angles en retournant la figure ce qui n'a pas évité en T1 pour montrer la superposition des deux triangles par retournement. Ce (10) condense ainsi la morphologie suivante :

> « **10.** Deux angles sont dit *égaux*, conformément à la définition des figures égales (**2**), si, en les transportant l'un sur l'autre, on arrive à les faire coï ncider.
> Deux angles égaux BAC, B'A'C' peuvent être placés l'un sur l'autre de deux façons différentes, savoir : ou bien le côté A'B' venant sur AB et A'C' sur AC, ou l'inverse. On passe de l'une à l'autre en retournant l'un des deux angles sur lui-même, par exemple en déplaçant l'angle BAC de manière à ce que AB vienne dans la position occupée primitivement par AC, et réciproquement. Dans ce retournement, il y a une demi-droite intérieure à l'angle qui ne change pas, c'est celle qui divise l'angle en deux parties égales et qu'on appelle la *bissectrice* de l'angle BAC. »

Quand le lecteur arrive ici, le chaînage en arrière n'est pas fini car un nouveau renvoi est fait en ce qui concerne la définition de figures égales :

> « **2.** On admet qu'une figure quelconque peut être transportée d'une infinité de façons dans l'espace.
> *On nomme FIGURES EGALES deux figures que l'on peut transporter l'une sur l'autre, de manière à les faire coïncider exactement dans toutes leurs parties ; en un mot, deux figures égales sont une seule et même figure, en deux places différentes.* »

Nous avons dit que T2 est moins dense que T1 en ce qui concerne la « quantité d'objets visibles » et la « quantité de propositions qui relient ces objets » : le tableau nous le montre. Or nous ne pouvons pas dire de même en ce qui concerne la quantité d'information puisque T2 renvoie à d'autres morphologies par des formes condensées (ici simplement des numéros) qui comportent des informations : définition de figures égales et d'angles égaux notamment. Ce texte prévoit ces renvois mais certaines démonstrations peuvent laisser dans l'implicite ou à la charge du lecteur certains passages : par exemple en T1, le fait qu'on peut ou non « transporter une figure dans l'espace ».

Pourquoi T1 est différent de T2 ? Nous venons de voir quelques éléments qui permettent de voir les différences entre ces deux morphologies. Mais cette manière d'identifier les propositions, les pas de raisonnement et les enchaînements doit être mise en rapport avec une approche dynamique des morphologies : comment elles se relient entre elles, quelle évolutions temporelles pour chacune d'entre elles et pour l'ensemble. Essayons maintenant d'identifier les parcours interprétatifs des deux textes pour préciser les mouvements textuels.

3 - Place de T1 et T2 dans la globalité des textes L1 et L2

Comme nous l'avons déjà dit, T1 et T2 se situent dans le chapitre II du livre premier des deux ouvrages. Voyons l'organisation du livre premier dans chacun des livres à travers le sommaire.

L1 : livre de Rouché et de Comberousse

Egalité des angles de deux triangles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires
Somme des angles d'un polygone

§ VI. – Du parallélogramme.
Propriétés du parallélogramme
Caractères auxquels on reconnaît qu'un quadrilatère est un parallélogramme
Propriétés du rectangle, du losange et du carré.

Comparons cette organisation avec celle du deuxième livre

L2 : livre de Hadamard

INTRODUCTION
1. Volumes, surfaces, lignes, points
2. Figures égales
3-4. Des propositions
5-7. Ligne droite ; segments de droites ; leurs comparaison
8. Du plan

LIVRE PREMIER
DE LA LIGNE DROITE

Chapitre premier. – Des angles
9-11. Comparaison des angles
12. Deux angles opposés par le somme sont égaux
13. Droites perpendiculaires – Par un point pris sur une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.- Angles droits, aigus, obtus.
14-16. Somme des angles formés, d'un même côté d'une droite, par plusieurs demi-droites issues d'un point de cette droite.- Somme des angles formés, autour d'un même point, par plusieurs droites issues de ce point.
17. Les bissectrices des quatre angles déterminés par deux droites qui se coupent forment deux droites indéfinies, perpendiculaires entre elles.
18-19. Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.- Symétrie par rapport à une droite.
20. Sens de rotation des angles.- Il est altéré dans la symétrie par rapport à une droite
Exercices 1-4

Chapitre II. – Des triangles
21-22. Polygones en général. – Triangles
23. Propriétés du triangle isoscèle
24. Cas d'égalité des triangles
25. L'angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'un angle intérieur non adjacent.- Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle, et réciproquement
26. La ligne droite est plus courte que toute ligne brisée terminée aux mêmes extrémités
27. Lignes brisées enveloppées et enveloppantes
28. Quand deux triangles ont un angle inégal compris entre côtés égaux chacun à chacun, au plus grand angle est opposé le plus grand côté
Exercices 5-15

Chapitre III – Perpendiculaires et obliques
29-31. Perpendiculaires et obliques
32-33. Lieu des points équidistants de deux points donnés
Exercices 16-18

Chapitre IV – Cas d'égalité des triangles rectangles.- Propriété de la bissectrice d'un angle
34-35. Cas d'égalité des triangles rectangles
36. Propriété de la bissectrice d'un angle
Exercices 19-20

Chapitre V. – Droites parallèles

En ce qui concerne le premier livre consacré à la ligne droite, L1 et L2 ont une organisation proche : le chapitre IV de L2 est intégré au chapitre III de L1, et le chapitre V de L1 est intégré au chapitre V de L2. Par contre, le chapitre VII de L2 n'est pas intégré dans le livre I de L1. Les deux livres numérotent des paragraphes mais au niveau du sommaire, il n'y a que L2 qui les rend visibles. En ce qui concerne l'introduction, les deux livres présentent un ensemble de définitions d'objets géométriques (volume, surface, lignes, point, ligne droite, ligne brisée, segment de droite, demi-droite, figure), de la géométrie elle-même et d'autres objets plus généraux comme proposition, axiome, théorème, hypothèse, conclusion, corollaire, lemme, c'est-à-dire les formes d'organisation textuelle de l'étude des problèmes de géométrie (et pas seulement). La place de T1 et T2 dans L1 et L2 respectivement est la même : même chapitre, même livre, et dans l'environnement proche nous trouvons les mêmes objets et mêmes théorèmes.

4 - Mouvements textuels

Dans une première approche, nous aurons pu dire que ces deux livres ont des mouvements textuels proches puisqu'ils ont le même type d'organisation avec les mêmes objets et les mêmes propositions ainsi que le même découpage temporel. Or il y a quelques observations qui nous induisent à penser que les mouvements textuels ne sont pas exactement les mêmes.

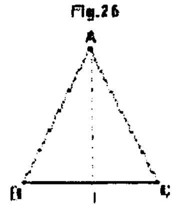
Le premier indice apparaît dans l'introduction de L2 précisément avec la définition de « figures égales » que nous avons citée ci-dessus. A la suite de cette définition, l'auteur écrit : « Une figure à laquelle on ne fait subir que des déplacements, sans la déformer, est encore dite figure invariable. » Cette citation nous induit à penser qu'il y a peut-être un mouvement textuel déterminé par la notion de figures invariantes et la notion de transformation géométrique.

Un deuxième indice apparaît au point 19. Précisons que le point 18 concerne le théorème « Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une. » et que ce théorème apparaît aussi en L1 au point 24 qui clôt le premier chapitre concernant les angles. Ce deuxième indice est plus explicite : il y a les définitions du symétrique d'un point par rapport à une droite, du symétrique d'une figure par rapport à une droite, le théorème « deux figures planes symétriques sont égales » et le corollaire « la figure symétrique d'une droite est une droite ». Et ensuite, l'auteur précise la notion d'axe de symétrie : « Lorsqu'une figure coïncide avec sa symétrique par rapport à *xy*, on dit qu'elle est symétrique par rapport à cette droite, ou encore qu'elle admet cette droite comme *axe de symétrie.* »

Ici, on peut observer qu'un nouvel objet « symétrie plane par rapport à un axe » apparaît ainsi que certains théorèmes qui en découlent notamment celui qui concerne l'égalité de figures, ce qui marque une nette différence avec L1 où ces objets et propositions sont absents.

Voyons si ces indices trouvent un écho par rapport à T2. Ce théorème apparaît au point 23 du deuxième chapitre et à la fin de ce point une remarque est faite : « Dans un triangle quelconque ABC, on peut considérer quatre droites : 1° La bissectrice de l'angle A ; 2° La hauteur issue de A ; 3° La médiane issue du même point ; 4° La perpendiculaire sur le milieu de BC. En général, ces quatre droites sont distinctes les unes des autres (Voir exercice 17). Le théorème précédent[5] exprime que, dans un triangle isoscèle, elles sont toutes confondues en une seule, *qui est* (**19**) *un axe de symétrie du triangle.* »

Ici l'auteur fait une relecture du théorème en disant que le triangle isocèle a un axe de symétrie et utilise pour cela un renvoi à l'ancien par la forme condensée (19) ce qui n'est pas le cas en L1 où ce théorème figure pourtant. Ce théorème apparaît en L1 au point 30 qui suit alors T1 (point 28) et sa réciproque (point 29) :

> « 30. Les démonstrations qui précèdent mettent en évidence la propriété propre au triangle isocèle d'être *superposable à lui-même par retournement.* Cette propriété est la clef des autres propriétés du triangle isocèle.
> Ainsi (fig.26), dans ce retournement du triangle isocèle BAC, B venant en C et C en B, le milieu I de BC retombe sur lui-même aussi bien que le sommet A. Par suite, l'angle AIC vient recouvrir son adjacent et supplémentaire AIB, et l'angle CAI son adjacent BAI. Donc, *dans tout triangle isocèle BAC, la droite qui joint le sommet A au milieu I*
>
> Fig.26
>
> 
>
>
> *de la base BC est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au sommet en deux parties égales.* »

L'absence de relecture du théorème et notamment l'absence des mots « axe de symétrie » marque bien la différence des mouvements textuels des deux livres : le cours de l'action de L2 est marqué par cette isotopie – transformation géométrique - qui revient à plusieurs fois dans le texte et trace les parcours interprétatifs de L2, contrairement à L1 où elle est absente.

Un dernier indice (pour ne citer qu'un) est encore présent dans le livre I de L2 où le chapitre VI est intitulé « Des parallélogrammes.- Des translations » marquant bien que l'organisation de l'étude de la géométrie est faite autour de la notion de transformation. Cette notion est présentée plus tard dans l'ouvrage dans un annexe intitulé « Sur les méthodes en géométrie » où l'auteur montre que les « méthodes de transformation » sont des moyens de simplification : « Le but de la transformation étant de simplifier la figure sur laquelle on

[5] Dans tout triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base et la divise en deux parties égales.

opère, on doit s'efforcer de rendre cette simplification la plus grande possible. », et un peu plus loin : « L'avantage de la transformation pourrait être illusoire si, en simplifiant certaines propriétés de la figure, on se trouvait avoir compliqué les autres. Nous ne devrons donc effectuer cette transformation que si les diverses propriétés qui figurent dans l'énoncé sont modifiées par celle-ci d'une façon suffisamment simple. Or, il se trouve que, dans presque toutes les catégories de transformations qui viennent d'être passées en revue, certaines propriétés ne subissent aucun changement ou, suivant l'expression consacrée, restent *invariantes.* »

Les différences entre T1 et T2 peuvent être analysées en termes de mouvements textuels différents : T2 actualise en quelque sorte, et par là le réalise aussi, ce mouvement autour de l'isotopie « transformation » qui permet, non seulement, de faire apparaître des nouveaux objets et de nouvelles propositions, mais aussi de simplifier certaines démonstration, notamment T2 par rapport à T1 : T2 est moins dense que T1 en ce qui concerne la quantité d'objets et de propositions.

En guise de conclusion

Pour revenir à l'analyse des différences entre T1 et T2, nous pouvons conclure que cette différence peut être analysée par les moyens de segmentation du texte proposés par Duval (on identifie ainsi les propositions, les pas de raisonnement, enfin la structure de la démonstration), par le moyen de la notion de morphologie, densité et condensation (on identifie alors les la quantité d'objets et de propositions ainsi que la quantité d'informations et comment on peut minimiser ces quantités d'information par le biais de formes condensées, formes qui permettent aussi de gérer la dialectique ancien/nouveau dans un texte). Nous pouvons aussi analyser ces différences d'une manière plus globale en montrant la place du théorème dans l'ensemble du texte et les différents mouvements textuels qui animent les textes (dans notre cas, l'isotopie *transformation géométrique* permet de créer des cohésions textuelles différentes qui expliquent les différences dans les deux démonstrations).

BIBLIOGRAPHIE

Adam J-M (1992), *Les textes : types et prototypes*, Nathan-Université, Paris.
Ancillotti J-P et alii (1997), *Présentation des travaux du groupe CESAME.* Actes de la IXème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, pp.70-75.
Arsac G et alii (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon.
Arsac G (1997/98), Les limites d'un enseignement déductif en géométrie, *Petit x*, n°47, pp.5-31.
Artaud M (1997), *Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques.* Actes de la IXème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, pp.101-139.
Arzarello F., Bazzini L. et Chiappini G. (1994), *L'Algebra come strumento di pensiero, Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto strategico del C.N.R., Quaderno n°6.
Assude T. (1994), *Quelques principes de l'écologie didactique des savoirs. Condensation et densité des formes de savoir.* Actes du Séminaire DidaTech, Grenoble, Séminaire n°161, pp.137-165.
Assude T.(1996), *Condensation et institutionnalisation : poser le problème et questions ouvertes.* Actes du Séminaire DidaTech, Grenoble, pp.
Assude T. (1997), *Approche écologique et disparition de noms : exercice d'application.* Actes de la IXème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, pp.140-145.
Assude T & Paquelier Y (1997), *L'atelier de recherche mathématique au primaire. Problèmes liés à la gestion du temps et de la mémoire.* Actes de la CIEAEM 49, Setubal, pp.47-51.
Assude T, Maurel M & Sackur C (1998), *CESAME : The Personal History of Learning Mathematics in the Classroom. An Analysis of Some Students Narratives.* Présentation au CERME I dans le groupe sur les interactions dans la classe, Osnabrueck.
Beck I (1998), Une approche linguistique de textes de raisonnement, in Houdebine J (ed.) *Produire et lire des textes de démonstration*, Actes du colloque du Laboratoire de Didactique des Mathématiques de Rennes I, pp.1-22.
Bosch M (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad,* Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona.
Bosch M et Chevallard Y (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.19.1, pp.77-124.
Brousseau G. (1981), Problèmes de la didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.2, n°1, pp.37-127.
Brousseau G. et Centeno J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.11, n°2.3, pp.167-210.
Brousseau G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, *Actes de la VIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* Saint-Sauves d'Auvergne, pp.3-45.
Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
Cartan A. et E. (1934), *Arithmétique, Classes de 4e et de 3e*, Librairie Armand Colin, Paris
Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1ème édition. Deuxième édition 1991.

Chevallard Y. (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Actes du séminaire de didactique des mathématiques*, Grenoble, IMAG.
Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.12, n°1, pp.73-112.
Chevallard Y (1995), *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*, in Actes de VIIIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, ed par Noirfalise R et Perrin-Glorian MJ, pp.83-122
Chevallard Y (1995/96), Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Petit x*, n°42, pp.
Cléro J.-P (1998), *La réflexion benthamienne sur les mathématiques*, Revue de Synthèse, Mathématiques à l'épreuve de l'écriture, Quatrième série, n°4, Albin Michel, pp.447-484.
Choquet G. (1964), *L'enseignement de la géométrie*. Hermann, Paris.
Comiti C. et Grenier D. (1993), Matériel de recherche donnée lors d'une séance de TD de l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.
Duval R (1992), Interaction des différents niveaux de représentation dans la compréhension de textes, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, pp.136-196.
Duval R (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Ed.Peter Lang
Duval R (1998), Ecriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ?, in Houdebine J (ed.) *Produire et lire des textes de démonstration*, Actes du colloque du Laboratoire de Didactique des Mathématiques de Rennes I, pp.79-98.
Duval R (1999), Ecriture et raisonnement, et découverte de la démonstration en mathématiques, Actes de Xème Ecole d'Eté de didactique des Mathématiques, Houlgate, tome II, pp.29-50.
Freud S. (1923), *Introduction à la psychanalyse*, Payot, Paris.
Guichard J-P (1998), A partir de quelques textes historiques, in Houdebine J (ed.) *Produire et lire des textes de démonstration*, Actes du colloque du Laboratoire de Didactique des Mathématiques de Rennes I, pp.101-121.
Hadamard J. (1898), *Leçons de Géométrie élémentaire (Géométrie plane)*, A.Colin, Paris.
Houdebine J (1998), La diversité des textes de démonstration, in Houdebine J (ed.) *Produire et lire des textes de démonstration*, Actes du colloque du Laboratoire de Didactique des Mathématiques de Rennes I, pp.23-37.
Husserl (1962), *L'origine de la géométrie*, P.U.F, Paris, 4ème édition 1995, traduction.
Krygowska Z (1969), Le texte mathématique dans l'enseignement, *Actes du Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique (Lyon)*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, pp.228-238.
Laborde C (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse d'Etat, Université de Grenoble I.
Laborde C (1991-1992), *Lecture de textes mathématiques par des élèves (14-15 ans) : une expérimentation*, Petit x, n°28, pp.
Laborde C (1995), Ocorre apprendere a leggere i srivere in matematica, *Actes du II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica*, Sulmona.
Lang S. (1986), *Serge Lang, des jeunes et des maths, un chercheur rencontre des collégiens*, Belin, Paris.
Margolinas C. (1992), Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.12, n°1, pp.113-158.

Mercier A. (1992), *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*, thèse présentée à l'Université de Bordeaux I.
Pham F et Dillinger H (1996), *Algèbre linéaire*, Diderot, Paris.
Perrin-Glorian M-J. (1993), Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes «faibles», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.13, n°1.2, pp.5-118.
Perrin-Glorian M-J. (1993/1994), Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de «classes faibles», *Petit x*, n°35, pp.5-40.
Perrin-Glorian M-J. (1994), Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives, in Artigue et alii (eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp.97-147.
Petitjean A. (1989), Les typologies textuelles, *Pratiques*, n°62, pp.86-125.
Rajoson L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, thèse de 3ème cycle, Université d'Aix-Marseille II.
Rastier F (1997), Herméneutique matérielle et sémantique des textes, in Salanskis, Rastier & Scheps(ed.), *Herméneutique : textes, sciences*, Colloque de Cerisy, PUF, Paris, pp.119-148.
Ricoeur P, Signe et sens, Encyclopédie Universalis.
Robert A (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.18.2, pp.130-190.
Rouché E & De Comberousse Ch. (1879), *Traité de Géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 4ème édition.
Rouchier A. (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université d'Orléans.
Sfard A (1991), On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp.1-36.
Sensevy G. (1996), Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen: le journal des fractions, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.16, n°1, pp.7-46.
Terracher P. et alii (1989), *Mathématiques 3e*, Hachette, Paris.
Thom R (1977), *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Interéditions, Paris, 2ème édition.
Weyl H. (1953), *Sur le symbolisme des mathématiques et de la physique mathématique*, in *Le continu et autres écrits*, Librairie J.Vrin, Paris, traduit par J.Largeault.