PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

EVELYNE BARBIN

La démonstration : pulsation entre le discursif et le visuel

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4
« Produire et lire des textes de démonstration », , p. 39-67
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_39_0>

LA DÉMONSTRATION : PULSATION ENTRE LE DISCURSIF ET LE VISUEL

Evelyne Barbin

L'histoire des mathématiques permet d'examiner et de comparer plusieurs façons d'écrire des démonstrations, dans le but de saisir la manière dont le mathématicien use de du discours et du regard.

Dans les démonstrations géométriques, il s'agit de dire et de voir une figure. Ainsi, dans la démonstration géométrique chinoise "sans parole", le jeu des couleurs a pour fonction de suggérer un cheminement de pensée qui spécule sur le mouvement de la figure, alors que dans la démonstration géométrique grecque, le discours a pour fonction de décrire une figure immobile et de baliser le chemin de la "vérité dite". Cette première comparaison cerne la pulsation du géomètre entre le mouvement et la fixité du discours et de la figure. C'est de ce point de vue que nous examinerons des démonstrations géométriques d'Euclide, d'Hérigone, de Liu Hui et de Clairaut, et que nous interpréterons les paradoxes du mouvement dans la science hellène.

Dans ce que nous appelons les graphies démonstratives, il s'agir de dire et de voir un calcul. Ainsi, dans l'algèbre arabe, l'inconnue est désignée et algorithmisée dans un discours "sans symbole", alors que depuis la Renaissance, le travail symbolique de l'algèbre utilise la "géométrie de la littéralité". Cette seconde comparaison cerne la pulsation de l'algébriste entre le mouvement et la fixité du discours et de la lettre. Nous examinerons de ce point de vue les règles du calcul algébrique exprimées par Lacroix, et celles du calcul des équipollences de Bellavitis, qui consistent à faire apparaître et faire disparaître des symboles dans des calculs. C'est aussi de ce point de vue que nous interpréterons les paradoxes du mouvement dans le calcul infinitésimal.

I. Voir et dire une figure : le discours démonstratif

Avant d'examiner comment s'exprime le discours démonstratif, il faut se demander ce qui s'exprime dans ce discours, et donc cerner le travail du géomètre sur les figures. Nous poserons ensuite la question de savoir pourquoi ça s'exprime.

Le discours démonstratif : qu'est-ce qui s'exprime ?

Cette question vise à bien distinguer, d'une part, ce qui relève de la vue d'une figure, ce qui est sensation, ce qui est un simple événement, et d'autre part, ce qui relève de la vision ou du regard d'une figure, ce qui est perception, ce qui est un acte porteur d'une intention. Autrement dit, il s'agit d'opposer ici le sensible à l'entendement.

Par exemple, considérons des figures de triangles (fig.1). L'événement est constitué d'une multitude d'objets, c'est-à-dire de choses jetées devant nos yeux. La sensation ou la vue de ces ob-jets n'impose aucun énoncé géométrique.

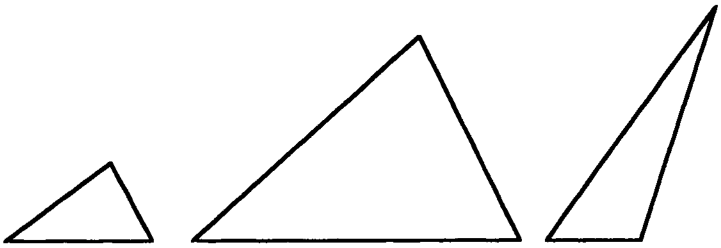


fig.1

Considérons ensuite trois figures d'un même triangle qui ont été disposées par un acte particulier (fig.2). Cette fois, l'agencement attire notre regard vers la perception les trois angles du triangle, ce qui nous amène à concevoir que la somme géométrique de ces trois angles est un angle plat. Ceci parce que les trois triangles de cet agencement sont, à la fois, le même triangle, et des triangles différents, puisque leurs positions sur la feuille sont différentes. L'énoncé sur la somme des angles du triangle s'impose par une nécessité de l'entendement, alors que la multitude de triangles ob-jets ne nous imposait rien. Bien au contraire, la vue de triangles petits, gros, ventrus ou fins, inciterait plutôt à croire que la somme de leurs angles n'a aucune raison d'être invariante. Comme le remarque Wittgenstein, l'agencement fonctionne comme une preuve de ce qui peut me surprendre[1].

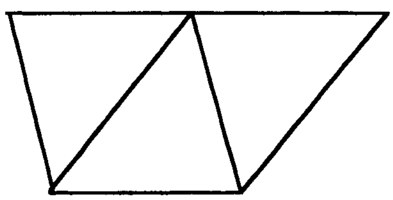


fig.2

L'énoncé sur la somme des angles ne concerne pas "ce" triangle posé devant nos yeux, mais "le" triangle, n'importe quel triangle. Merlau-Ponty, dans sa *Phénoménologie de la perception*, exprime bien comment la perception amène à la nécessité de l'énoncé par l'entendement en écrivant : "Il nous faut donc maintenant considérer l'entendement. Je pense le triangle et j'aperçois que ce sommet et ces lignes forment une somme d'angles égale à la somme des angles du triangle, et égale d'autre part à deux droits. Cela veut dire que ma construction graphique n'est pas un assemblage de lignes nées fortuitement de ma main. D'un bout à l'autre de l'opération, c'est du triangle qu'il s'agit. La genèse de la construction n'est pas seulement une genèse réelle, c'est une genèse intelligible [...]. J'ai conscience de démontrer parce que j'aperçois un lien nécessaire entre l'ensemble des données qui constituent l'hypothèse et la conclusion que j'en tire. C'est cette nécessité qui m'assure de pouvoir réitérer l'opération sur un nombre indéfini de figures empiriques, et elle vient elle-même de ce que, à chaque pas de ma démonstration et chaque fois que j'introduisais de nouveaux rapports, je demeurais conscient du triangle comme d'une structure stable qu'ils déterminent et n'effacent pas"[2].

La construction de la figure demande une mobilité du corps. Nous pouvons penser cette mobilité comme celles de trois copies du triangle qui viennent se coller en un agencement, et comme celle de notre main qui dispose les trois copies (fig.3). Ce n'est ni la définition du triangle, figure délimitée par trois droites, ni l'appréhension du triangle

---

[1] WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, p.59.

[2] MERLEAU-PONTY, *Phénoménologie de la perception*, p.440.

comme figure idéale, qui conduisent à la construction : "La construction explicite les possibilités du triangle considéré, non pas selon sa définition et comme idée, mais selon sa configuration et comme pôle de mes mouvements"[3]. Ce n'est pas non plus la définition du triangle qui nécessite l'énoncé, mais une autre mobilité, celle du regard. La mobilité de l'œil permet de voir à la fois les trois angles comme ceux du triangle et comme ceux constituant un angle plat : "La démonstration consiste à faire entrer la somme d'angles construite dans deux constellations différentes, et à la voir tour à tour comme égale à la somme des angles d'un triangle et égale à deux droits[...] nous n'avons pas seulement deux configurations qui se succèdent et se changent l'une l'autre ; la première subsiste pour moi pendant que la seconde s'établit"[4]. Chaque angle est regardé deux fois, il est lui aussi à la fois le même et différent par le changement de sa position. On peut parler comme Wittgenstein d'une preuve synoptique, où "la causalité ne joue aucun rôle"[5].

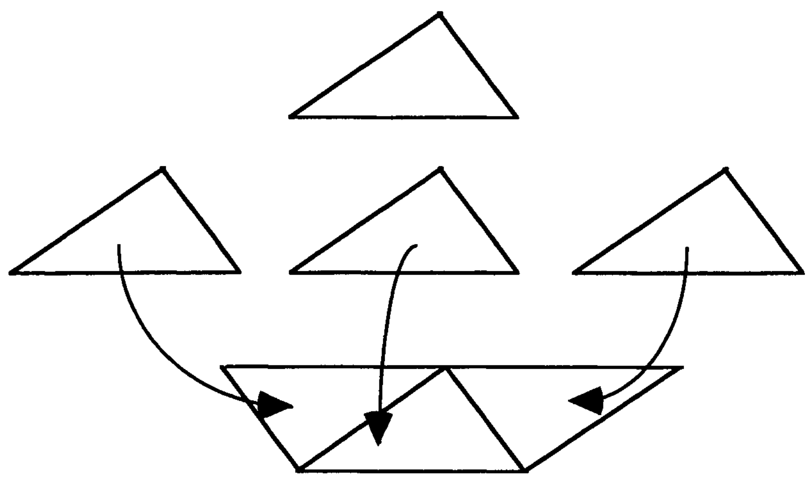
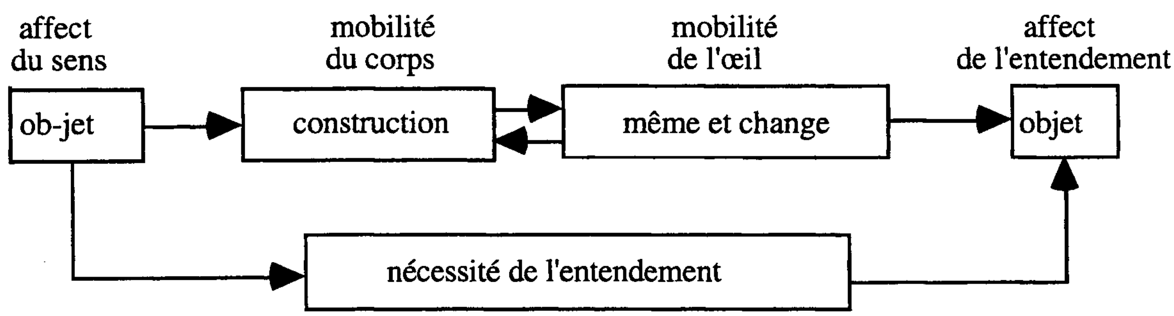


fig.3

Le passage de l'ob-jet triangle, en tant qu'affect de la vue, à l'objet triangle, en tant qu'affect de l'entendement s'effectue par une mobilité du corps, par des "copier-coller", et par une mobilité de l'œil, par des "même et change". C'est à travers ce passage que l'entendement énonce la nécessité de l'énoncé géométrique : la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.



Le discours démonstratif : comment ça s'exprime ?

Examinons comment s'exprime cette nécessité en lisant la démonstration de la proposition 32 du livre I des *Éléments* d'Euclide[6]. Rappelons que l'ouvrage d'Euclide est

---

[3] op.cit., p.442.
[4] op.cit., p.440.
[5] WITTGENSTEIN, op.cit., p.211.
[6] EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Vitrac, pp.255-256.

constitué en un système axiomatico-déductif : chaque livre commence par une suite de définitions et d'axiomes, puis chaque démonstration est déduite des axiomes et des propositions précédentes. Nous reviendrons plus loin sur le discours axiomatique et déductif du système euclidien, pour nous intéresser d'abord à la figure de la proposition 32 et au discours qui accompagne strictement la figure. La figure sur laquelle repose le discours est une figure immobile, et elle tronque une partie de la figure précédente (fig.4). Ici ne subsistent que les éléments suffisants qui permettront de déduire le résultat. Il n'y a plus trois triangles, mais un triangle et deux droites, la première prolonge une droite qui limite le triangle, et la seconde est parallèle à une droite qui limite le triangle[7]. Alors que la figure composée d'emblée des trois triangles rendait l'énoncé nécessaire, ici les droites sont rajoutées et elles sont nécessaires au discours.

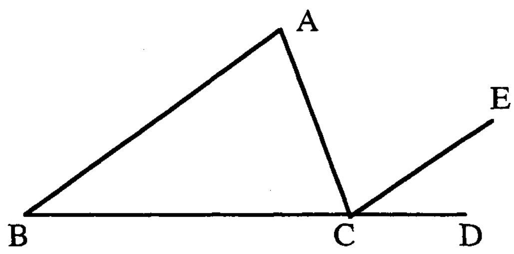


fig.4

Nous allons relever respectivement par les signes ⓒ et ⓞ les éléments du discours qui sont mise en place des mouvements du corps et de l'œil que nous avons mis en évidence plus haut.

Soit le triangle ABC, et qu'un des côtés BC, soit prolongé au-delà jusqu'en D. Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD, est égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous CAB, ABC, et que les trois angles intérieurs du triangles, ceux sous ABC, BCA, CAB, sont égaux à deux droits.	ⓒ
En effet, que par le point C, soit menée CE parallèle à la droite AB (prop.31). Puisque AB est parallèle à CE et que AC tombe sur elles, les angles alternes,	ⓒ
ceux sous BAC, ACE sont égaux entre eux. Ensuite, puisque AB est parallèle à CE et que la droite BD tombe sur elles, l'angle extérieur, celui sous ECD, est	ⓞ
égal à celui sous ABC, intérieur et opposé (prop.29). Et il a aussi été démontré	ⓞ
que celui sous ACE est égal à celui sous BAC. L'angle tout entier sous ACD est donc égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous BAC, ABC (n.c.2).	ⓞ
Que soit ajouté de part et d'autre celui sous ACB. Ceux sous ACD, ACB sont	ⓞ
donc égaux aux trois sous ABC, BCA, CAB. Mais ceux sous ACD, ACB sont	ⓞ
égaux à deux droits (prop.13) ; donc ceux sous ABC, BCA, CAB sont aussi égaux deux droits (n.c.1).	ⓞ

En ce qui concerne la mobilité du corps, notons que ce n'est pas "je" qui prolonge une droite et qui mène une parallèle, mais que les phrases au passif indiquent que ces droites ont été menées. En revanche, c'est "je" qui dis, qui prononce le discours. En ce qui concerne la mobilité de l'œil, le double regard sur les angles est indiqué par les conjonctions de coordination "aussi" et "mais". Tandis que sont utilisées les conjonctions de subordination "donc" et "puisque" pour les égalités des angles intérieurs et extérieurs au triangle déduites de la proposition 29, et pour l'égalité des sommes des angles déduite d'un axiome, à savoir la notion commune 2. Ainsi, la mobilité de la figure, celle du corps et celle de l'œil sont remplacées par un déroulement, celui du discours de celui qui

[7] nous utilisons la terminologie euclidienne où une droite est toujours finie.

prononce. Nous allons nous intéresser au déroulement de ce discours, en le prenant à ses débuts, c'est-à-dire depuis l'énoncé des définitions des figures et des axiomes.

Déroulement du discours et discours de la mobilité

Les définitions des *Éléments* d'Euclide désignent des figures immobiles. Par exemple, la définition 15 énonce qu'un cercle est "une figure plane contenue par une ligne unique par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point sont égales entre elles"[8]. Les figures sont à la fois des formes et des grandeurs limitées par des lignes. Par exemple, la définition 19, à savoir "les triangles sont les figures planes contenues par trois droites"[9], désigne les triangles en tant qu'aires. Ces définitions n'ont pas nécessairement un rôle opératoire dans les démonstrations, par exemple celle de l'angle défini comme "l'inclinaison de deux lignes qui se touchent". Elles servent essentiellement à désigner des ob-jets.

Les axiomes du livre I sont réparties en "demandes" et en "notions communes". Les trois premières "demandes" réclament que soient toujours possibles des constructions de droite et de cercle. Notons que ces constructions à la règle et au compas correspondent à des manipulations d'instruments. De la sorte, les "demandes" disent, sous forme de discours, les mobilités qui président aux constructions des figures immobiles des définitions et des démonstrations. Elles permettent de construire une profusion de figures, de droites supplémentaires, qui sont nécessaires aux démonstrations.

La quatrième "demande" affirme l'égalité des angles droits. Ceux-ci ont été définis ainsi : "quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit"[10]. Par exemple, dans la situation où une droite D est perpendiculaire à deux droites D_1 et D_2, cette "demande" affirme que les angles définis par D et par les deux autres sont égaux (fig.5).

dem.1 : Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.	c
dem.2 : Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.	c
dem.3 : Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.	c
dem.4 : Et que tous les angles droits sont égaux entre eux.	o
dem.5 : Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs	
et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment	o
prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.	c

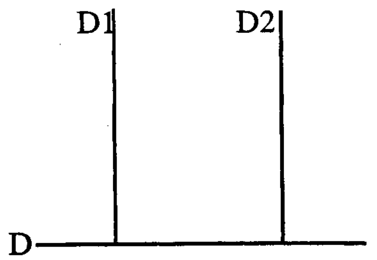


fig.5

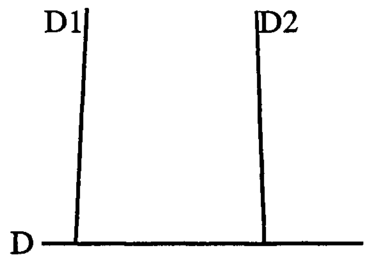


fig.6

[8] EUCLIDE, op.cit., p.162.
[9] op.cit., p.163.
[10] op.cit., p.160.

La cinquième "demande" concerne le cas où, au contraire, les angles faits par la droite D et les droites D_1 et D_2 ne sont pas des angles droits (fig.6). Elle affirme que les droites D_1 et D_2 se rencontreront. Ainsi, cette "demande" permet de juger de la rencontre de deux droites de manière locale, ou encore que l'œil puisse suppléer à la main.

Les "notions communes" concernent le "même et change", le mouvement de l'œil. Ainsi, la première "notion commune" énonce que "les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles". Pour que cet énoncé ait une signification, il faut au moins trois choses, c'est-à-dire percevoir trois choses comme différentes, mais que deux d'entre elles soient perçues comme même, en ce sens qu'elles sont égales à une même troisième. Alors la "notion commune" affirme que ces deux choses différentes seront cependant égales.

Il y a là une réelle difficulté, car cela pose la question de savoir en quoi consiste l'égalité de deux choses différentes. La septième "notion commune" énonce que "les choses qui s'ajustent les unes et les autres sont égales entre elles". Euclide en use très peu. Dans la démonstration de la proposition 4, ce que l'on appelle le premier cas d'égalité des triangles, elle lui sert à faire coïncider deux triangles l'un sur l'autre. L'égalité signifie dans ce cas que deux figures peuvent occuper l'une, puis l'autre, le même lieu, et donc un changement de lieu. C'est alors faire de la géométrie une physique, au sens aristotélicien du terme. Or, Platon écrit dans *La République* : "si la géométrie oblige à contempler l'essence alors elle nous convient ; si elle s'arrête au devenir alors, alors elle ne nous convient pas"[11]. Pour que les figures de la géométrie puissent être contemplées, il faut qu'elles soient immobiles. Nous reviendrons sur cette volonté d'immobilité, qui est aussi une marque de l'impossibilité de la science grecque à tenir un discours sur le mouvement.

L'égalité peut signifier que deux choses occupent le même lieu. En effet, quand un géomètre grec écrit que deux figures sont égales, cela ne signifie pas qu'elles soient nécessairement superposables, mais cela peut signifier que leurs aires sont égales. Ainsi, Euclide énonce que deux triangles ayant la même base et situés entre les mêmes parallèles sont égaux. La difficulté devient alors de comprendre ce que signifie l'égalité de deux aires, c'est-à-dire de deux grandeurs. Ceci fait l'objet d'une définition du livre V d'Euclide, livre où est exposé la théorie eudoxienne des grandeurs. Mais parler du lieu d'une chose est bien plus difficile que de parler de la chose même. Ainsi, Proclus, commentateur d'Euclide du V^e^ siècle de notre ère, rapporte qu'Apollonius avait pensé démontrer la notion commune d'Euclide par le raisonnement suivant : "Puisque A est égal à B, il occupe le même lieu que lui, et puisque B est égal à C, il occupe le même lieu que celui-ci. Et donc A occupe le même lieu que C, donc ils sont égaux". Proclus proteste contre cette démonstration en écrivant qu'il "n'est absolument pas admissible de faire passer dans un lieu qui est plus incompréhensible pour nous que les choses situées en ce lieu ; car la découverte de la substance de ce lieu est difficile et douteuse"[12].

Dans les notions communes 2 et 3, il s'agit d'ajouter ou de retrancher des choses égales à des choses égales. "Ajouter" et "retrancher" n'ont ici aucune signification numérique, il faut comprendre ces opérations comme des constructions géométriques : ajouter une droite à une autre signifie prolonger la première par la seconde, ajouter deux figures rectilignes signifie les juxtaposer. Par exemple, dans le livre II, Euclide énonce que "si une ligne droite est coupée au hasard, les rectangles contenus par la droite entière et chacun des segments sont égaux au carré décrit sur la droite entière"[13]. Proclus ne mentionne pas la "notion commune" 5, "les doubles du même sont égaux", ni la suivante, "les moitiés du même sont égales entre elles". Elles peuvent sembler inutiles ou redondantes, sauf si nous nous référons justement aux constructions qui les sous-tendent.

---

11 voir PLATON, *La république*, Livre VII, 526-527.

12 PROCLUS, *Les commentaires sur le premier livre d'Euclide*, pp.171-172.

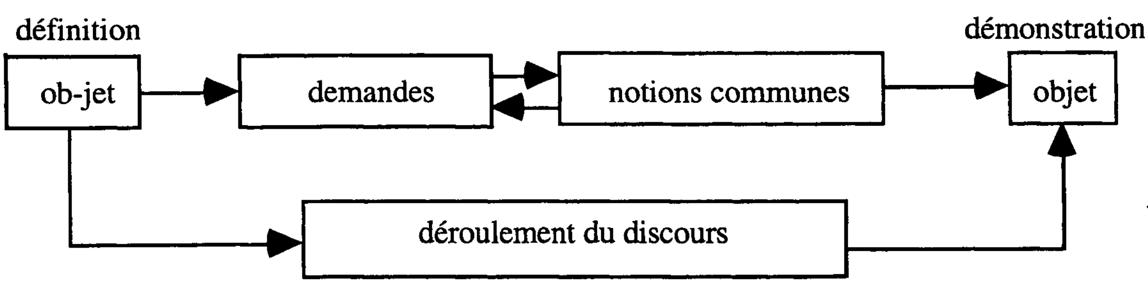
13 EUCLIDE, op.cit., p.328.

En effet, la "notion commune" 5 affirmerait, par exemple, que si on prolonge une droite, d'un côté puis de l'autre, par une droite qui lui est égale, on obtient des droites égales.

Ainsi, dans les "notions communes", comme dans les "demandes", un discours de la mobilité exprime les constructions des figures. Alors que dans les démonstrations de propositions, comme dans la proposition 32, les figures seront décrites de manière passives et contemplées dans leur immobilité. Le discours de la mobilité est qualifié de ridicule et méprisable par Platon. Il écrit dans *La République* : "aucun de ceux qui savent un peu de géométrie ne nous contestera que la nature de cette science est directement opposée au langage qu'emploient ceux qui la pratiquent. [...] Ce langage, assurément est fort ridicule et misérable; car c'est en homme de pratiques, ayant en vue les applications, qu'ils parlent de carrer, de construire sur une ligne, d'ajouter, et qu'ils font sonner d'autres mots semblables, alors que cette science toute entière n'a d'autre objet que la connaissance"[14].

n.c.1 : Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.	©
n.c.2 : Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.	© ©
n.c.3 : Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les touts sont égaux.	© ©
n.c.4 : Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.	© ©
n.c.5 : Et les doubles du même sont égaux.	©
n.c.6 : Et les moitiés du même sont égales entre elles.	©
n.c.7 : Et les choses qui s'ajustent les unes et les autres sont égales entre elles.	©
n.c.8 : Et le tout est plus grand que la partie.	
n.c.9 : Et deux droites ne contiennent pas une aire.	

Nous avons dit que le passage de l'ob-jet triangle de la vue à l'objet triangle de l'entendement s'effectue par une mobilité du corps et par une mobilité de l'œil. Dans le discours axiomatique le passage de l'ob-jet de la définition à ce qui va devenir l'objet immobile de la démonstration s'effectue par des axiomes où se disent des mobilités du corps, dans des constructions, et des mobilités de l'œil, dans des transports d'égalités.



Euclide : le discours de la nécessité

Les deux premières démonstrations du Livre I sont intéressantes à examiner pour lire le discours démonstratif d'Euclide. D'une part, parce qu'elles nous permettent de

[14] PLATON, idem.

saisir comment les axiomes vont être opérationnels dans le discours. En effet, la première doit être déduite uniquement à partir des axiomes, et la seconde à partir de ces axiomes et de la proposition 1. D'autre part, parce que les deux premières propositions ne sont pas des théorèmes, mais des problèmes de construction. La distinction entre "problème" et "théorème" dans la géométrie grecque est explicitée par Pappus dans le Livre II de sa *Collection mathématique*. Dans un "problème", terme qu'Alain Bernard traduit de manière adéquate par "pro-jet", "on projette de faire quelque chose ou de le construire", alors que dans un "théorème", c'est-à-dire un "spectacle", "ayant sup-posé certaines choses on voit ce qui s'ensuit"[15]. Cependant, dans les *Éléments* d'Euclide, les "pro-jets" de construction s'effacent derrière la mise en scène du discours.

La proposition 1 énonce "Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral"[16]. Les figures introduites sont désignées au parfait passif de l'impératif, autrement dit, le discours déductif va s'appuyer une figure déjà là. Bernard Vitrac remarque que, d'une manière générale dans le discours euclidien, les objets sont les sujets des verbes, "le mathématicien s'effaçant devant ce qu'il contemple"[17].

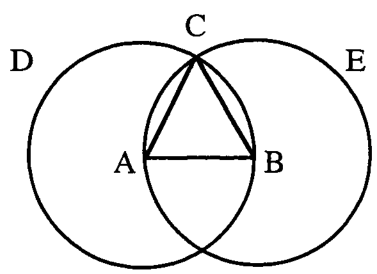


fig.7

Soit AB la droite limitée donnée. Il faut alors construire un triangle équilatéral sur la droite AB.	
Que du centre A et au moyen de l'intervalle AB soit décrit le cercle BCD	dem ©
(dem.3), et qu'ensuite du centre B, et au moyen de l'intervalle BA, soit décrit	et
le cercle ACE (dem.3), et que du point C auquel les cercles s'entrecoupent	dem ©
soient jointes les droites CA, CB jusqu'aux points A, B (dem.1).	et
Et puisque le point A est le centre du cercle CDB, AC est égale à AB (def.15) ;	puisque
ensuite, puisque le point B est le centre du cercle CAE, BC est égale à BA	puisque
(def.15). Et il a été démontré que CA est égale à AB ; or les choses égales à une	nc ⓞ
même chose sont aussi égales entre elles (n.c.1) ; et donc CA est égale à CB ;	donc
donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles.	donc

Nous avons de nouveau noter par les signes © et ⓞ les éléments du discours démonstratif qui correspondent à des mouvements du corps et de l'œil. Nous avons aussi noter les conjonctions qui rythment le déroulement du discours déductif. L'utilisation des demandes de constructions est ponctuée par des "et", tandis que celle des définitions et des notions communes l'est par des "puisque" et des "donc". Le discours démonstratif est le règne du "donc". Une fois les axiomes admis comme vrais, la vérité de ce qui s'en suit

---

15 BERNARD, *Le triparti du temps*, p. 179, extrait de *Temps et mathématique*, thèse à l'Université de Strasbourg. Alain Bernard insiste sur la difficulté à traduire le terme grec *theorein*, qui désigne une vision d'une grande intensité, comme celle que l'on ressent au théâtre, d'où sa proposition de traduire le terme par celui de "spectacle".

16 EUCLIDE, op.cit., pp.194-195.

17 voir ses commentaires dans EUCLIDE, op.cit., p.195.

est prétendue inéluctable par le "donc". La nécessité est marquée par le discours, on peut parler ici d'un discours de la nécessité.

La proposition 2 énonce : "Placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée"[18]. Cet énoncé montre que le discours de la nécessité a pris le pas sur la possibilité du construire. Il ne s'agit pas de pouvoir "le faire", de prendre un compas en l'écartant de la droite BC, d'amener la pointe du compas en A, de tracer un arc de cercle dont le rayon sera AB, de marquer un point L sur cet arc, puis de tracer BC. Il s'agit de pouvoir déduire par le discours la validité d'une construction. Comme l'indique tout de suite la figure (fig.8), la nécessité du discours fait fi de la simplicité. Cette figure serait même un peu plus complexe si elle incluait la construction du triangle équilatéral DAB qui est nécessaire à établir déductivement la vérité.

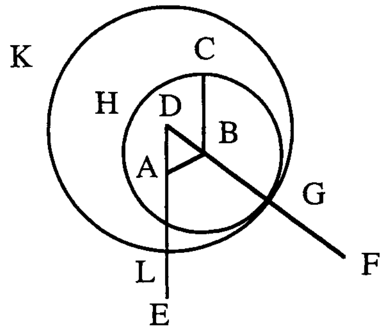


fig.8

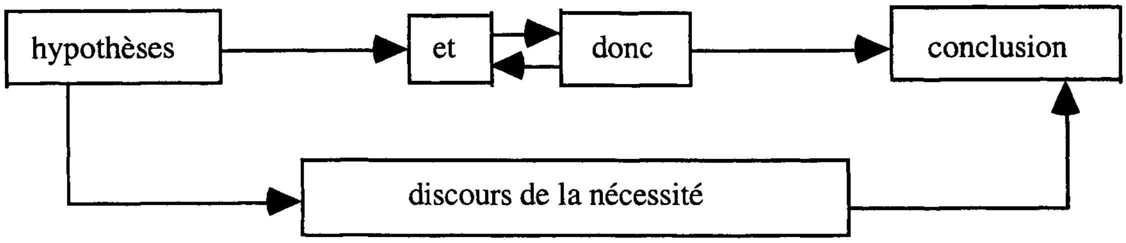
Soit d'une part A le point donné, d'autre part BC, la droite donnée. Il faut alors	
placer au point A une droite égale à la droite donnée BC.	
En effet, que soit jointe la droite AB, du point A jusqu'au point B (dem.1),	dem C
$\boxed{\text{et}}$ que sur elle, soit construit le triangle équilatéral DAB(prop.1). $\boxed{\text{Et}}$ que les	$\boxed{\text{et}}$
droites AE, BF soient les prolongements en ligne droite de DA, DB (dem.2).	dem C
$\boxed{\text{Et}}$ que du centre B et au moyen de l'intervalle BC soit décrit le cercle CGH,	$\boxed{\text{et}}$
$\boxed{\text{et}}$ qu'ensuite du centre D et au moyen de l'intervalle DG soit décrit le cercle	$\boxed{\text{et}}$
GKL (dem.3).	dem C
Or, $\boxed{\text{puisque}}$ le point B est le centre du cercle CGH, BC est égale à BG ;	$\boxed{\text{puisque}}$
ensuite, $\boxed{\text{puisque}}$ le point D est le centre du cercle GKL, DL est égale à DG	$\boxed{\text{puisque}}$
(def.15), desquelles la partie DA est égale à la partie DB (def.20) ; $\boxed{\text{donc}}$ la	$\boxed{\text{donc}}$
partie restante AL est égale à la partie restante BG (n.c.3). D'autre part il a été	nc O
démontré que BC est aussi égale à BG ; $\boxed{\text{donc}}$ chacune des droites AL, BC est	$\boxed{\text{donc}}$
égale à BG ; or les choses égales à une même chose sont égales entre elles	nc O
(n.c.1) ;et $\boxed{\text{donc}}$ AL est égale à BC.	$\boxed{\text{donc}}$

Ces deux propositions qui enjoignent par leur énoncé de "construire", ne laissent pourtant aucune place dans les discours des démonstrations à la résolution du problème de construction, du "pro-jet". En fait, le discours prend pour hypothèses la figure déjà construite pour faire s'ensuivre la vérité de la figure.

---

[18] EUCLIDE, op.cit., pp.197-199.

Dans le discours démonstratif, la nécessité de l'énoncé ne tient pas une évidence en tant qu'affect de l'entendement. D'une certaine façon, toute l'évidence de ce discours est concentrée dans l'énoncé des axiomes. Car, comme l'écrit Aristote dans les *Seconds analytiques*, les prémisses doivent être "vraies, premières et immédiates", mais "par démonstration" il ne faut entendre rien d'autre que l'énonciation du syllogisme[19].



Hérigone : le discours schématisé

Comme le remarque Gassendi, un détracteur d'Aristote du XVII[e] siècle, les démonstrations d'Euclide ne s'écrivent pas avec des syllogismes. Les tentatives pour les écrire de la sorte seront d'ailleurs vouées à l'insuccès, à cause de la lourdeur de l'écriture. En revanche, Hérigone propose une nouvelle écriture des démonstrations supprimant les "donc" et les "puisque", qui ponctuent le discours de la nécessité. Examinons une démonstration de son ouvrage de 1634, *La géométrie des attouchements d'Appolonius de Perge, restituée par François Viète*, celle du "problème II" (voir l'encadré ci-dessous)

Le discours de la nécessité d'Euclide est linéaire, il utilise l'unidimensionnalité de la ligne d'écriture. Frege remarque que "la position relative des signes écrits distribués dans le plan d'écriture bidimensionnel peut servir à exprimer des rapports internes, de manière plus déliée que ne le permettent les simples précession et succession du temps unidimensionnel", et il propose dans son idéographie d'utiliser les deux dimensions de la page d'écriture[20]. La disposition des démonstrations en colonnes que propose Hérigone utilise ces deux dimensions. Mais il est manifeste que cette disposition ne convient pas au discours démonstratif, car, en l'absence de tout symbolisme indiquant comment s'ordonne déductivement les assertions, comme celui de l'idéographie de Frege, le fil déductif ne peut pas être suivi. Nous reviendrons sur l'écriture bidimensionnelle proposée par Frege quand nous examinerons la disposition des graphies démonstratives.

Rappelons que le symbolisme algébrique est introduit à partir du XVI[e] siècle. Hérigone simplifie l'écriture à l'aide de nombreuses abréviations, "Req." pour requis, "posit." pour position, "concl." pour conclusion, etc. Il utilise aussi des symboles qui sont toujours les nôtres pour désigner les angles, le parallélisme, l'égalité, la perpendicularité, et également d'autres symboles qui n'ont pas été transmis par l'histoire tels que :

—D pour "donné" ;
ʘ pour "cercle".

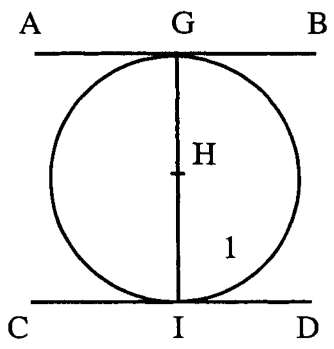
Le système d'Hérigone suppose que toutes les propositions soient répertoriées par une numération adéquate, à la mode d'autres *Éléments*, ceux de Bourbaki. Le travail qu'a accompli Hérigone pour répertorier toutes les propositions et les citer dans chacune des colonnes de gauche est assez gigantesque. Comme le remarque Jean-Paul Guichard, voilà du travail tout fait pour les constructeurs de logiciels de démonstrations. Cette disposition pourrait aussi hélas inspirer les pédagogues qui pensent que les difficultés des élèves pour

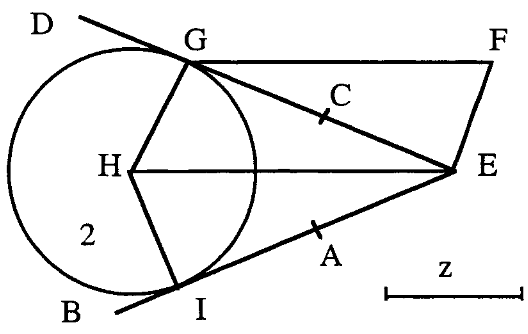
---

19 ARISTOTE, *Les seconds analytiques*, trad.Tricot, p.8.
20 FREGE, *Ecrits logiques et philosophiques*, trad. Imbert, p.67.

"faire" des démonstrations proviennent uniquement de leur mauvaise maîtrise grammaticale des locutions, et qui croient que les pratiques langagières sont annexes dans l'activité démonstrative. Les élèves n'auraient presque plus à écrire de phrases. Disons à ce propos que la disposition en colonnes d'Hérigone ou des pédagogues suppriment le "donc" qui marque la nécessité du discours démonstratif. "Faire" une démonstration demande avant tout acte d'écriture une nécessité de l'entendement, et c'est cela qui est la source première des difficultés des élèves, car, sans l'appréhension de cette nécessité, la démonstration n'a aucun sens. Passer outre cette nécessité produit du non-sens, et supprimer le caractère nécessaire du discours est insensé.

Étant données deux lignes droites, décrire un cercle de grandeur donné, qui touche les deux lignes données.





	Hypoth.		*Constr.2.cas*
ab & cd snt ——D.posit.		suppos.	dc,ba n snt // §e
z est ——D.		34.d.1	deb est <,
Req. est Θ hgi.		9.1	< ceh = < heb,
	Constr.1.cas.	11.1	ef $\perp$ de,
suppos.	ab // cd,	3.1	ef = z,
11.1	gi $\perp$ ab,	31.1	fg // eh,
10.1	gh = hi,	11.1	gh $\perp$ de,
symp.	*Req. est* Θ hgi.	3 p.1	hgi *est* Θ.
	Demonstr.	symp.	*Req. est* Θ hgi.
29.1	gi $\perp$ cd,		*Prepar.*
concl.			
c.36.3	Θ gi tang : ab & cd.	12.1	hi $\perp$ bc.
	Demonstr.	26.1	hi = bc,
		2 concl.	
11.2.1	< hge = < gef,	c.16.3	Θ gi tang : dc & ba.
34.1	hg // & = cf.		*Determinat.*
constr.			
1.concl.	z = ef,		§n.1 figur.
1.2.1	hg = z,		2z = gi.

Démonstrations grecque et chinoise : pourquoi ça s'exprime ?

Nous sommes habitués depuis notre plus jeune âge au discours démonstratif, aussi la lecture de démonstrations chinoises a-t-elle la vertu de nous dépayser, de nous faire penser que "cela ne va pas de soi". Ce qui est toujours tout bénéfice pour notre façon d'aborder l'enseignement. Nous allons comparer la démonstration du "théorème de

Pythagore" des *Éléments* Euclide et celle des *Neufs chapitres sur l'art du calcul* de Liu Hui, un mathématicien chinois du 3ème siècle de notre ère[21].

La démonstration d'Euclide contemple une figure où ont été ajoutées les droites nécessaires au discours déductif, à savoir la perpendiculaire AL, et les droites FC, BK, AD et AE (fig.9). Il faut démontrer que le carré BCDE est égal (en aire) à la somme des carrés ABFG et ACKH. Cette proposition est l'avant-dernière du livre I, et la démonstration est donc déduite d'un bon nombre de propositions qui précèdent, en particulier, des propositions qui énoncent que deux parallélogrammes de même base et situés entre les mêmes parallèles sont égaux (en aire), et qu'un triangle est égal (en aire) à un parallélogramme de même base et situé entre les mêmes parallèles. Elle est assez longue, car Euclide prend soin de démontrer l'alignement de AC avec le côté AG du carré construit sur AB. Elle utilise donc bon nombre de "puisque" et de "donc"[22].

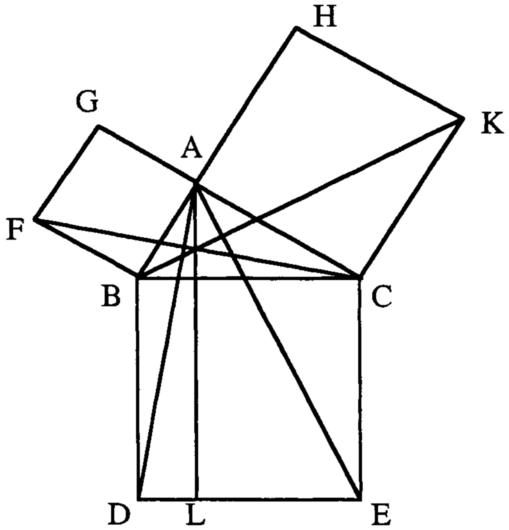
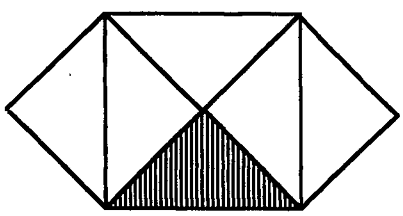


fig.9

Schopenhauer, dans *Le monde comme volonté et comme représentation*, qualifie cette démonstration d'étrange et d'absurde. Il écrit : "Elle se donne une peine infinie pour détruire l'évidence, qui lui est propre, et qui d'ailleurs est plus à sa portée, pour lui substituer une évidence logique. [...] A nos yeux, la méthode d'Euclide n'est qu'une brillante absurdité. [...] La démonstration boiteuse et même captieuse d'Euclide nous abandonne au pourquoi, tandis que la simple figure, [...] nous fait entrer du premier coup, et bien plus profondément que la démonstration, au cœur même de la question ; elle nous amène à une plus intime conviction de la nécessité de cette proposition et de sa liaison avec l'essence même du rectangle"[23]. La "simple figure" est la suivante :



La nécessité que réclame Schopenhauer est celle que nous avons appelée plus haut la nécessité de l'entendement. Remarquons que sa figure s'obtient par "copier-coller" de quatre triangles rectangles isocèles qui peuvent être disposés de deux façons. Le jeu du

---

[21] se reporter à MARTZLOFF, Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon, 1990, pp.131-153.
[22] EUCLIDE, op.cit., p.283.
[23] SCHOPENHAUER, *Le monde comme volonté et comme représentation*, pp.106-110.

"même et change" permet d'énoncer que le carré construit sur la diagonale du triangle est bien la somme des deux carrés construits sur les côtés de ce triangle (fig.10).

Pour Schopenhauer, la démonstration euclidienne est absurde parce qu'elle s'appuie sur l'évidence logique au lieu de s'appuyer sur l'évidence géométrique, sur un discours et non sur la perception d'une figure. La démonstration est captieuse, elle "nous abandonne au pourquoi", parce que nous ne savons pas pourquoi il faut tracer toutes les lignes supplémentaires qui permettent de conclure, et parce qu'elle ne dit pas non plus pourquoi le géomètre a pensé cet énoncé vrai, ce qu'il fallait bien avant d'entamer une démonstration.

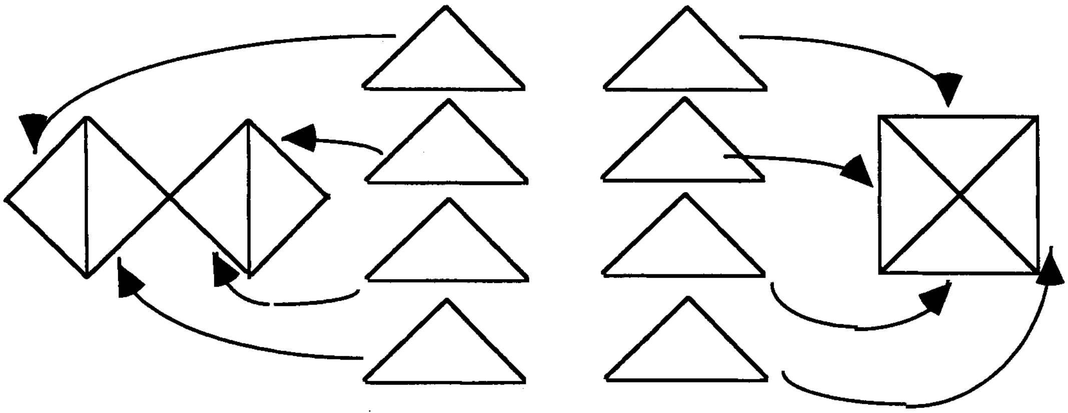


fig.10

Il est intéressant de rapprocher la figure de Schopenhauer de celle du dialogue du *Ménon* de Platon, où Socrate demande à un esclave de construire un carré dont l'aire soit double de l'aire d'un carré donné[24]. Grâce au dialogue, Platon nous donne à lire une par une les différentes étapes de la construction (fig.11) : il faut "adjoindre" un second carré au premier, puis un troisième, puis "combler l'espace que voici dans le coin", puis dessiner quatre diagonales des quatre carrés. La nécessité de la conclusion, le grand carré est double du premier, s'obtient par le "même et change" puisque chaque diagonale "a retranché une moitié à l'intérieur de chacun d'eux".

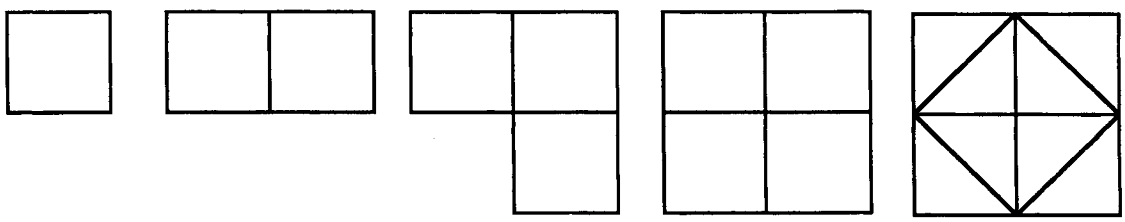


fig.11

Schopenhauer écrit qu'il serait facile de généraliser sa figure au cas où le triangle rectangle n'est pas isocèle. Cette affirmation peut venir du fait que si on s'interroge sur la provenance de l'énoncé, c'est-à-dire pourquoi il a pu être pensé comme vrai, il y a tout lieu d'imaginer qu'il a d'abord été une généralisation d'un énoncé manifeste pour le cas du triangle rectangle isocèle. Cette affirmation peut être corroborée par la démonstration de Liu-Hui. Cette démonstration n'utilise pas de discours, et seulement quatre mots "bleu, "rouge", "sort" et "entre". L'utilisation de couleurs pourrait même réduire cette liste à deux mots : "entre "et "sort" (fig.12).

24 PLATON, op.cit., pp.534-535.

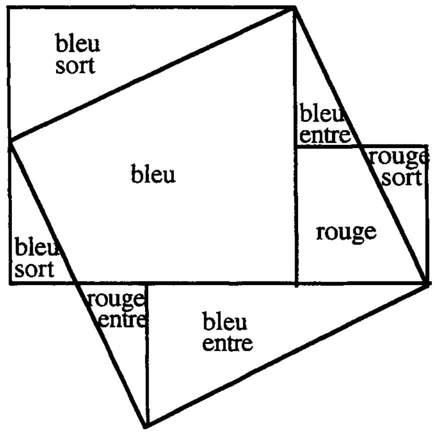


fig.12

Les mots de "entre" et "sort" indiquent les mouvements de corps, et les mots "bleu" et "rouge" les mouvements de l'œil qui perçoit les figures qui sont les mêmes. La figure de Liu Hui s'obtient à partir de celle de Platon-Schopenhauer par décalage des diagonales. Comme nous pouvons le voir en rétablissant une à une les étapes de la construction qui part des deux carrés construits sur les côtés du triangle rectangle pour obtenir le carré construit sur la diagonale (fig.13).

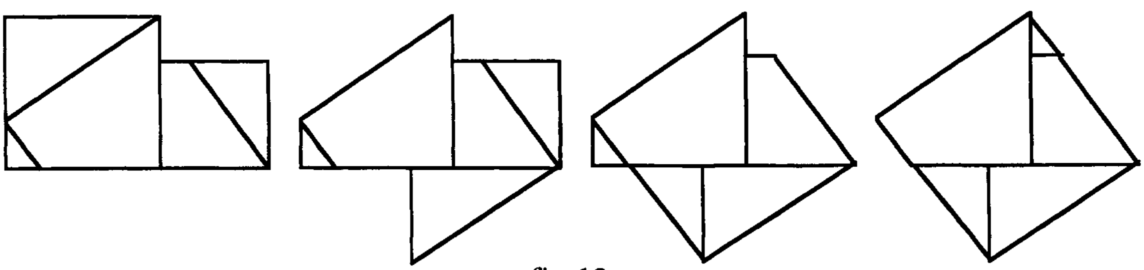


fig.13

La nécessité de l'énoncé n'est pas indiqué par le chemin du discours, mais le mouvement et les couleurs suggèrent un cheminement à l'entendement. Liu Hui écrit : "si nous élucidons par prose et illustrons par des images, alors nous serons capables d'atteindre la concision aussi bien que la compréhension, la clarté aussi bien que la rigueur"[25]. Entre les démonstrations grecque et chinoise, il y a un renversement du fixe et du mobile. La première contemple une figure immobile et déroule son discours, la seconde repose sur la mobilité de la figure et offre un dire qui n'est pas mobilisé dans un discours.

Clairaut : le discours de l'entendement

Dans ses *Éléments de géométrie* de 1765, Clairaut va montrer comment on peut effectivement passer du cas d'un triangle rectangle isocèle au cas général, et il va donner un discours du mouvement. Dans son ouvrage, il veut à la fois "intéresser et éclairer" le lecteur, et il propose une géométrie organisée autour de problèmes[26].

---

[25] cité par MAN-KEUNG SIU dans Proof and pedagogy in Ancient China : examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang Suan Shu, in *Educationnal Studies*, 24, 1993, pp.345-357.

[26] voir BARBIN, Les Eléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée, in *Repères IREM*, n°4, juil.1991, pp.119-133. Nous analysons, en particulier, dans cet article la démonstration de Clairaut concernant la somme des angles d'un triangle.

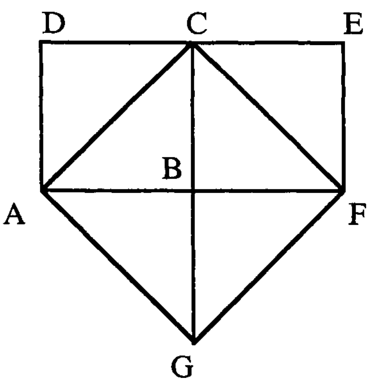


fig.14

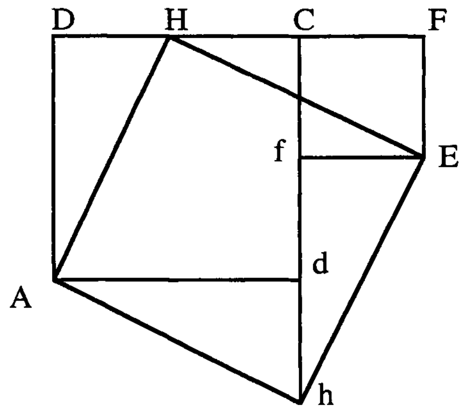


fig.15

Supposons présentement qu'on veuille faire un carré égal à la somme des deux carrés inégaux ADCd, CFEf, ou, ce qui revient au même qu'on se propose de changer la figure ADFEfd en un carré. En suivant l'esprit de la méthode précédente, on cherchera s'il n'est point possible, de trouver dans la ligne DF, quelque point H, tel

1° Que tirant les lignes AH et HE, et faisant tourner les triangles ADH, EFH, autour des points A et E, jusqu'à ce qu'ils aient les positions Adh, Efh, ces triangles se joignent en h ;

2° Que les quatre côtés AH, HE, Eh, hA, soient égaux et perpendiculaires les uns aux autres.

Or ce point H se trouvera en faisant DH égal au côté CF ou EF. Car de l'égalité supposée entre DH et CF, il suit premièrement que si l'on fait tourner ADH autour de son angle A, en sorte qu'on lui donne la position Adh, le point H arrivé en h sera distant du point C d'un intervalle égal à DF.

De la même égalité supposée entre DH et CF, il suit encore que HF égalera DC, et qu'ainsi le triangle EFH tournant autour de E pour prendre la position Efh, le point H arrivera au même point h, distant de C d'un intervalle égal à DF.

Donc la figure ADFEfd sera changée en une figure à quatre côtés AHEh. Il ne s'agit donc plus que de voir si ces quatre côtés sont égaux et perpendiculaires les uns aux autres.

Or l'égalité de ces quatre côtés est évidente, puisque Ah et hE seront les mêmes que AH et HE, et que l'égalité de ces deux derniers se tirera de ce que DH étant égale à CF ou à FE, les deux triangles ADH, HEF, seront égaux et semblables.

Il ne reste donc plus qu'à voir si les côtés de la figure AHEh formeront des angles droits ; c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que pendant que HAD tournera autour de A, pour arriver en hAd, il faudra que le côté AH fasse le même mouvement que le côté AD. Or le côté AD fera un angle droit DAd, en devenant Ad. Donc le côté AH fera aussi un angle droit HAh en devenant Ah.

Quant aux autres angles H, E, h, il est visible qu'ils seront nécessairement droits. Car il ne serait pas possible qu'une figure terminée par quatre côtés égaux eût un angle droit, sans que les trois autres fussent pareillement droits.

Le "théorème de Pythagore" se trouve dans un chapitre consacré à "la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes", où il s'agit de "rassembler dans une même figure, plusieurs figures qui lui sont semblables, ou de décomposer une figure en d'autres figures de même espèce". Clairaut commence par le problème de comparer deux rectangles, et il explique qu'il suffit pour cela de savoir "changer un rectangle en un autre, qui ait une hauteur donnée". Ce qui permet également d'ajouter deux rectangles pour en obtenir un troisième. Clairaut pose ensuite le problème d'ajouter deux carrés pour obtenir, non un rectangle, mais un carré. Il commence par ajouter deux carrés égaux, à l'aide d'une figure où les deux carrés sont juxtaposés (fig.14). Il écrit : "Il est aisé de remarquer que si on tire les diagonales AC et CF, les triangles ABC et CBF, feront ensemble la valeur d'un carré. Donc en transportant au dessous de AF les deux autres triangles DCA et CEF, on fera le carré ACFG, dont le côté AC sera la diagonale du carré ABCD, et dont la superficie égalera celle des deux carrés proposés ; ce qui n'a pas besoin d'être démontré"[27]. "Ce qui n'a pas besoin d'être démontré" signifie que tout discours est inutile, car l'évidence suffit pour en concevoir la vérité.

Pour ajouter deux carrés inégaux, il faut, en "suivant la méthode qui a servi" dans le cas des carrés égaux, juxtaposer les deux carrés ADCd et CFEf, et chercher la position d'un point H de DF qui jouera le rôle du point C de la figure précédente[28] (fig.15).

Le discours de cette démonstration n'est pas celui de la nécessité logique, c'est plutôt la narration d'un cheminement de pensée autour de la perception d'une figure que le géomètre met en mouvement. Clairaut utilise les expressions telles que "il ne s'agit plus que de voir", "or l'égalité est évidente", et "il est visible que". Mais il n'y a pas là recours à un "témoignage des yeux", il y a un appel à la perception, au regard et à l'entendement. Les constructions ne sont plus décrites au passif mais au participe présent, le géomètre est présent dans sa démonstration et il s'adresse à l'intelligence de son lecteur.

Clairaut écrit dans la préface à son ouvrage qu'on pourra peut-être lui reprocher de s'en "rapporter trop au témoignage des yeux", mais il rétorque : "j'en use de la sorte [...] parce que j'ai remarqué que ceux qui avaient de la disposition à la géométrie, se plaisaient à exercer un peu leur esprit ; et qu'au contraire ils se rebutaient, lorsqu'on les accablait de démonstrations, pour ainsi dire, inutiles"[29]. Il excuse Euclide d'avoir donné bien des démonstrations "inutiles", parce qu'à l'époque de celui-ci, il fallait "fermer la bouche à la chicane". Il ajoute : " Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les lecteurs".

Limite du discours de la nécessité : le mouvement

Les paradoxes de Zénon d'Élée concluent tous par l'impossibilité du mouvement. Examinons par exemple, celui de la dichotomie. Pour aller de A à B, on doit passer par le milieu C de AB, et pour aller de C à B, on doit passer par le milieu D de CB. Il faudrait passer en un temps fini par un nombre infini de points, ce qui est impossible. En fait, l'impossibilité du mouvement est plutôt une impossibilité de dire, celle de dire l'infinité des points d'une figure immobile (fig.16). Le déroulement du discours sur les points de la droite ne peut pas avoir le continu de la droite.

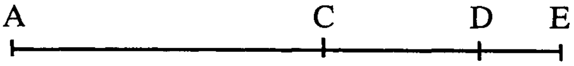


fig.16

L'impossibilité de dire une infinité de figures joue un rôle important dans les démonstrations grecques concernant les aires de figures curvilignes. Ainsi, Archimède dans son traité de la *Mesure du cercle* démontre qu'un cercle est égal (en aire) au triangle rectangle ayant la circonférence et le rayon du cercle pour côtés de l'angle droit. Il procède par une double démonstration par l'absurde : l'égalité est une conséquence logique des preuves que le cercle ne peut être ni plus grand, ni plus petit que le triangle rectangle. Il faut démontrer que chacune des deux hypothèses, cercle plus grand et cercle plus petit, conduit à une absurdité. C'est donc par le détour de la logique du tiers exclus que s'établit

27 CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, I, p.76.
28 CLAIRAUT, op.cit., pp.77-78.
29 CLAIRAUT, op.cit., préface p.XIII.

la vérité de l'énoncé. Ce type de démonstration, appelée plus tard démonstration par exhaustion, est celle que les géomètres grecs utilisent exclusivement pour les quadratures des aires curvilignes, mais aussi pour les cubatures des volumes.

Pour établir que l'hypothèse que le cercle est plus grand que le triangle rectangle conduit à une absurdité, Archimède montre que, sous cette hypothèse, il existe un polygone inscrit dans le cercle qui est plus grand (en aire) que le triangle E (fig.17). Or, ceci est impossible, car le polygone est égal (en aire) à la moitié du rectangle ayant pour côtés l'apothème NH et le périmètre du polygone, et le triangle est égal (en aire) à la moitié du rayon du cercle par la circonférence du cercle, or l'apothème est plus petite que le rayon, et le périmètre est plus petit que la circonférence.

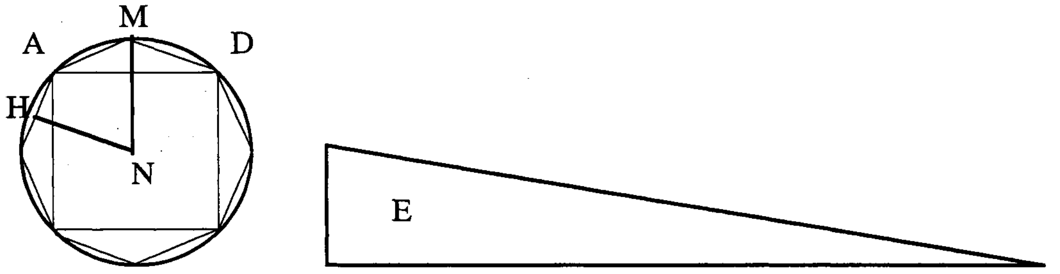


fig.17

Les démonstrations par exhaustion vont être vivement critiquées au XVII^e siècle, car elles sont longues et elles demandent d'exhiber à chaque fois des polygones inscrits et circonscrits à la figure curviligne adéquates à la preuve de l'absurdité. Mais elles ont un autre inconvénient majeur : ce sont des démonstrations indirectes, et elles supposent donc que l'on sache par ailleurs le résultat à démontrer. Les mathématiciens du XVII^e siècle écrivent que les Anciens avaient pour cela une "méthode de découverte", mais qu'ils l'ont caché. Ils avaient raison, Archimède avait une "méthode mécanique" pour trouver les résultats, et ils avaient tort, celui-ci a divulgué sa méthode dans une lettre à Eratosthène. Cette lettre n'a été retrouvée qu'au début du XX^e siècle. Le XVII^e siècle invente une méthode directe, la méthode des indivisibles, qui est une étape dans l'édification du calcul infinitésimal[30].

Les mathématiciens du XVII^e siècle vont oser travailler avec l'infini, mais aussi avec le mouvement, dire l'infini et dire le mouvement. En particulier, Descartes, pour trouver la tangente en un point de la cycloïde va considérer qu'un cercle est un polygone avec un nombre infini de côtés. Au siècle suivant, Clairaut dit l'infini et le mouvement pour donner une démonstration courte et directe de la mesure du cercle (fig.18).

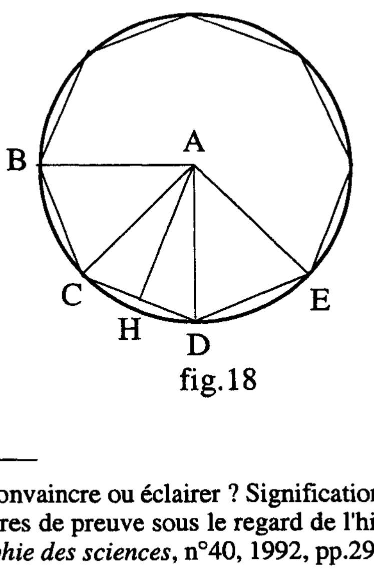


fig.18

[30] voir BARBIN, Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVIIème siècle, in Les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences et des techniques, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n°40, 1992, pp.29-49.

Clairaut écrit dans ses *Éléments de géométrie* : "On observera qu'en lui [le cercle] inscrivant un polygone régulier BCDE, etc., plus ce polygone aura de côtés, plus il s'approchera d'être égal au cercle. On a vu que l'aire de cette figure [...] a pour mesure le produit du contour entier BCDE, etc., par la moitié de l'apothème. Donc, en poussant jusqu'à l'infini le nombre des côtés du polygone, son aire, son contour, son apothème, égaleront l'aire, le contour et le rayon du cercle, la mesure du cercle sera le produit de la circonférence par la moitié de son rayon". Il ne s'agit plus de dire les polygones, le discours dit le mouvement dans sa globalité : "le polygone s'approchera du cercle"[31].

II. Voir et dire un calcul : la graphie démonstrative

Nous allons examiner des graphies démonstratives, celles des équations et celle des équipollences, dans l'établissement de résultats géométriques. Ceci pour examiner comment le calcul algébrique et ce qui deviendra le calcul vectoriel disent des figures géométriques. Le calcul peut se "passer" de la contemplation continuelle des figures, mais la pratique du calcul demande de voir des symboles, de les faire apparaître et disparaître, pour simplifier et pour conclure. Le regard du mathématicien porte sur des symboles disposés sur la feuille selon une certaine géométrie. Par exemple, la notation exponentielle par la disposition de l'exposant au dessus de l'inconnue permet de distinguer des symboles qui s'ajoutent ou se multiplient indépendamment de la lettre qu'elles multiplient. Par exemple, la flèche au dessus de lettres permet de distinguer des objets géométriques complexes, à la fois grandeur et direction.

Al-Khwarizmi : algèbre et graphie géométrique

Si nous demandons à un étudiant de mathématiques ce qu'est l'algèbre, il répond "les structures comme groupe, anneau et corps". La même question posée à des élèves ou à des enseignants obtient souvent pour réponse "les petit x". Or l'algèbre, à son origine, est la science de l'inconnue. Au IX^{e} siècle, Al-Khwarizmi, dans le *Traité de l'al-jabr et de l'al-muqabala*, observe que bien des problèmes consistent à trouver un nombre et il va désigner par un vocable ce nombre. Ainsi, l'algèbre consiste d'abord en la désignation de l'inconnue. Il appelle "racine" ce que l'on cherche, "trésor" son carré, et "nombre simple" un nombre "qui peut être prononcé sans référence à racine ou trésor"[32].

Ainsi la phrase "Racines et trésors égales nombres" désigne une équation du second degré. Il n'y a pas de symbolisme pour désigner l'inconnue, et encore moins pour désigner les paramètres. C'est donc sur des valeurs particulières qu'Al-Khwarizmi va expliquer les algorithmes de résolution. Ainsi, pour l'équation ci-dessus il écrit : "c'est comme si tu dis "un trésor et dix racines du même égalent trente-neuf dirhems" ; c'est-à-dire, quel sera le trésor qui, quand on l'augmente de dix de ses propres racines, se monte à trente-neuf ?". Il poursuit en donnant l'algorithme : "la solution est celle-ci : Tu divises en deux les racines, ce qui dans la question présente donne cinq. Tu multiplies cela par lui-même ; ce sera vingt-cinq. Ajoute ceci à trente-neuf ; la somme est soixante-quatre. prends-en maintenant la racine, qui est huit, et enlèves-en la moitié des racines, qui est cinq ; reste trois. C'est la racine du trésor que tu cherchais : le trésor lui-même est neuf".

---

31 CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, II, p.7.

32 nous utilisons la traduction de Jens Hoyrup in HOYRUP, *"Algèbre d'al-jabr" et "algèbre d'arpentage" au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne*, Université de Roskilde, n°2, 1990.

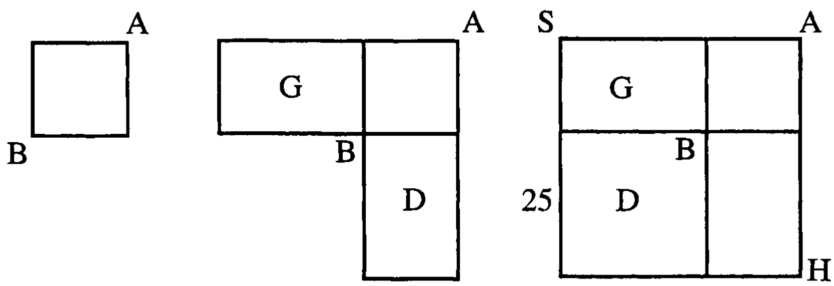


fig.19

C'est la surface AB qui représente le trésor. Nous voulons donc lui ajouter ses dix racines. Pour ce faire nous divisons les dix en deux, et nous construisons deux surfaces sur deux côtés d'AB, à savoir les surfaces G et D, dont les longueurs égalent cinq, tandis que la largeur de chacun d'eux égale le côté du carré AB. Alors cinq sur cinq nous manque opposé au coin de AB ; ce cinq étant cette moitié des dix racines que nous avons ajoutées à deux des côtés de la première surface. Nous savons donc que la première surface, qui est le trésor, et les deux surfaces sur deux côtés, qui sont les dix racines, font ensemble trente neuf. Pour compléter la grande surface en carré seul cinq sur cinq fait défaut. Nous ajoutons ceci à trente-neuf, pour compléter la surface SH. La somme est soixante-quatre. Nous extrayons sa racine, huit, qui est un des côtés de la grande surface. En lui enlevant la même quantité que nous lui avons ajoutée antérieurement, à savoir cinq, nous obtenons trois comme reste. Ceci est le côté de la surface AB, qui représente le trésor ; c'est la racine de ce trésor et le trésor lui-même est neuf.

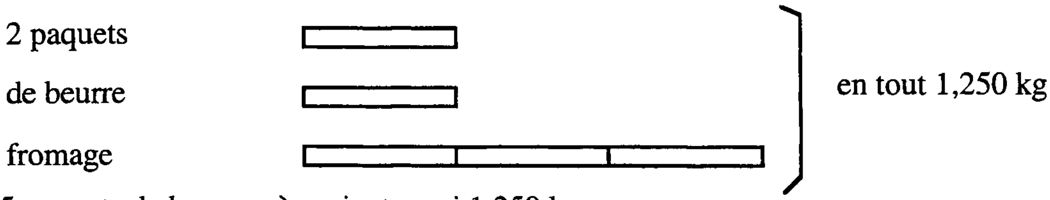
Cet algorithme se trouve dans des tablettes babyloniennes datant de 1750 av. J.-C. sans justification. Al-Khwarizmi en donne une explication géométrique : "La figure pour expliquer ceci est un carré, dont les côtés sont inconnus". A partir de ce carré, il donne les différentes étapes d'une construction géométrique qui correspondent aux étapes de l'algorithme (fig.19).

Cette algèbre n'utilise pas de symbolisme, si nous pensons au symbole en tant que lettre, mais elle utilise un symbolisme géométrique, si nous pensons que l'inconnue est représentée par un segment. L'algèbre ne signifie pas la lettre. L'explication géométrique d'Al-Khwarizmi donne à voir les transformations algébriques de l'équation initiale. En particulier, la complétion du carré est au sens propre une opération géométrique de complétion d'une figure en un carré géométrique.

Il y a quelques années, dans les cours de CM2, on résolvait des problèmes en représentant l'inconnue par un segment. Ce procédé permet de comprendre l'algèbre en tant que science de l'inconnue, c'est une étape qui permet de ne pas cumuler la double difficulté que doivent surmonter aujourd'hui les élèves de collège, comprendre ce qu'est l'algèbre et utiliser des lettres. Nous trouvons encore ce procédé dans le *Calcul, cours moyen, 2ème année* de Delagrave, daté de 1970, dans le chapitre "partages inégaux". La terminologie est intéressante puisque qu'effectivement, il s'agit de ramener des partages inégaux à des égalités, c'est-à-dire à des équations. Ici, le partage inégal conduit à l'équation : cinq paquets de beurre pèsent aussi 1,250 kg.

Partages inégaux

Problème : Deux paquets de beurre de même poids et un fromage pèsent en tout 1,250 kg. Le fromage pèse autant que 3 paquets de beurre. Quel est le poids d'un paquet de beurre et celui du fromage ?



5 paquets de beurre pèseraient aussi 1,250 kg.

Poids d'un paquet de beurre : 1,250 kg : 5 = 0,250 kg
Poids du fromage : 0,250 kg x 3 = 0,750 kg

Vérification : 0,250 kg + 0,250 kg + 0,750 kg = 1,250 kg

Exercices

Pour chaque problème faites un graphique.

[...]

D'après un examen d'entrée en 6°.
On veut partager 144 billes entre 3 enfants de façon que le 1° ait 3 fois la part du 2° et le 2° 2 fois la part du 3°. Quelle sera la part de chacun ?

Les règles du calcul algébrique : faire apparaître et faire disparaître

Le titre du traité d'Al-Khwarizmi correspond aux deux opérations de l'algèbre : "al-jabr" est l'opération de "restauration" qui permet de faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre, "al-muqabala" est l'opération de "confrontation" qui permet de supprimer un terme commun aux deux membres de l'équation. Ces opérations permettent d'équilibrer les deux membres de l'équation comme les deux plateaux d'une balance[33]. Elles permettent de faire apparaître et de faire disparaître des termes dans les membres d'une équation donnée pour parvenir à la forme canonique d'une équation que l'on sait résoudre. Le calcul algébrique consiste en un savoir, celui de cette mobilité d'apparition et de disparition des lettres, et en un savoir-faire, celui de savoir mettre à l'œuvre cette mobilité par le regard sur les lettres et les symboles[34]. A une époque où l'on enseignait l'algèbre, les auteurs d'ouvrage d'algèbre ne manquaient pas de donner aux lecteurs le "discours de la méthode algébrique". Examinons[35], par exemple, les *Éléments d'algèbre* de Lacroix de 1803.

Pour reprendre l'expression de Lacroix, le calcul algébrique sur les équations consiste à "effacer" des termes, à les faire disparaître, et ceci est la signification en tant qu'action des règles de l'algèbre. Plus loin, Lacroix explique comment résoudre une équation quelconque du second degré mise sous la forme :

33 voir FRIEDELMEYER, "Recherche inconnue désespérément", in IREM, *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, pp.306-307.
34 voir GUITART, *La pulsation mathématique*, p.77.
35 LACROIX, *Eléments d'algèbre*, pp.17-19.

$$x^2 + px = q.$$

Il faut "rendre le premier membre de l'équation proposée un quarré parfait, en y ajoutant ainsi qu'au second, le quarré de la moitié de la quantité donnée qui multiplie la première puissance de l'inconnue"[36]. Il s'agit cette fois de faire apparaître un carré parfait. Le carré n'est plus constitué à partir d'une figure géométrique, à partir du regard sur une figure, mais par le regard sur des lettres qui voit dans le premier terme de l'équation le début du carré parfait

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

L'algorithme de résolution du second degré ne se justifie plus par un "collage" de figures géométriques, mais par une manipulation réglée de lettres. Notons que Lacroix ne donne pas la forme condensée de l'algorithme, c'est-à-dire l'écriture des solutions de l'équation initiale sous la forme :

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Cette condensation de l'algorithme est aussi un oubli de la mise en carré qui, de façon figurale ou littérale, constitue l'essence du procédé ou manifeste la ruse du mathématicien.

On a déjà vu que résoudre une équation, c'est arriver à une expression dans laquelle l'inconnue seule dans un membre soit égalée à des quantités connues combinées entre elles par des opérations qu'on sache effectuer. Il suit de là qu'il faut, pour amener une équation à cet état, dégager l'inconnue des quantités connues avec lesquelles elle se trouve combinée. [...]

Par exemple, dans l'équation

$$7x - 5 = 12 + 4x,$$

il faut passer le terme 4x du second membre dans le premier, et le terme - 5 du premier dans le second. Pour cela, on doit observer qu'en effaçant + 4x dans le second membre, on le diminue de la quantité 4x, et qu'il faut opérer la même soustraction dans le premier membre, pour conserver l'égalité des deux membres ; on écrira donc - 4x dans le premier membre, qui deviendra 7x - 5 - 4x, et l'on aura

$$7x - 5 - 4x = 12.$$

Effacer - 5 du premier membre, c'est supprimer la soustraction indiquée de 5 unités ; c'est par conséquent augmenter ce nombre de 5 unités ; on doit donc, pour conserver l'égalité, augmenter le second membre de 5 unités, ou écrire + 5 dans ce membre ; et il deviendra 12 + 5, et l'on aura

$$7x - 4x = 12 + 5.$$

En effectuant les opérations indiquées, il en résultera l'équation

$$3x = 17.$$

[...]

Règle générale : *Pour faire passer un terme quelconque d'une équation, d'un membre dans l'autre, il faut l'effacer dans le membre où il se trouve, et l'écrire dans l'autre avec un signe contraire à celui qu'il avait d'abord.*

Descartes : géométrie et graphie algébrique

La géométrie cartésienne répond à une insatisfaction à la lecture du discours de la nécessité. Cette insatisfaction est, d'une certaine façon, la même que celle qu'exprimera

[36] LACROIX, op.cit., p.166.

plus tard Schopenhauer. Dans la Règle IV des *Règles pour la direction de l'esprit*, Descartes écrit à propos des textes mathématiques des Anciens : "Certes, j'y lisais sur les nombres une foule de développements dont le calcul me faisait constater la vérité ; quant aux figures, il y avait beaucoup de choses qu'ils me mettaient en quelque sorte sous les yeux mêmes et qui étaient la suite de conséquences rigoureuses. Mais pourquoi il en était ainsi et comment on parvenait à le trouver, ils ne me paraissaient pas suffisamment le montrer à l'intelligence elle-même[37]". Les textes ne disent pas pourquoi le mathématicien se propose de démontrer tel résultat, ni comment il parvient à le démontrer. La forme logique permet de constater la vérité des résultats, mais elle ne permet pas de résoudre de nouveaux problèmes.

L'évidence qui intéresse Descartes est celle du géomètre travaillant sur des objets évidents, c'est-à-dire simples. Pour cela, il ramène tous les objets de la géométrie à des objets simples, à des segments, qui seront unifiés à l'aide d'un segment unité. Connaître une figure, c'est la décomposer en segments, et résoudre un problème, c'est établir des relations entre des segments connus et inconnus. La géométrie cartésienne procède donc à une déconstruction des figures en droites. Dès la première phrase de *La géométrie* de 1637, Descartes annonce : "Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire". Un problème peut se traduire à l'aide de relations simples entre droites qui ne sont autres que les relations arithmétiques, et ainsi la géométrie cartésienne procède à une arithmétisation de la géométrie. Descartes poursuit : "Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations [...]. Ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter [...] etc.". Les opérations de l'arithmétique sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction de racines. Descartes explique ici que pour que la multiplication de deux segments soit encore un segment, ou pour que l'extraction de la racine carrée d'un segment soit encore un segment, il faut introduire un segment unité.

Une fois la figure déconstruite en segments, et le problème traduit par des relations entre ces segments, seule la manipulation de ces segments importe et elle peut se faire de manière littérale. Descartes continue : "Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule". Il énonce de la sorte la méthode de résolution d'un problème de géométrie : "Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un moyen d'exprimer une même quantité en deux façons ce qui se nomme une équation"[38].

La méthode cartésienne est une analyse dans le sens qu'elle va de l'inconnu au connu, mais ici le connu n'est pas la ou les propositions considérées comme évidentes, le connu désigne des segments donnés ou des relations entre segments. La satisfaction de l'esprit vient de la démarche méthodique du géomètre qui décompose la figure en objets simples et manipule les symboles algébriques représentant ces objets. La figure n'est pas seulement contemplée, elle est disséquée en un calcul. L'évidence visuelle se poursuit en une évidence calculatoire. La principale rupture introduite par Descartes est d'introduire l'évidence comme critère de vérité, ceci contre les préceptes de la logique. Dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, il reproche à ces préceptes de vouloir régir la raison humaine en lui prescrivant des formes de raisonnement, qui sont peut-être concluantes,

---

37 DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. Sirven, p.23.

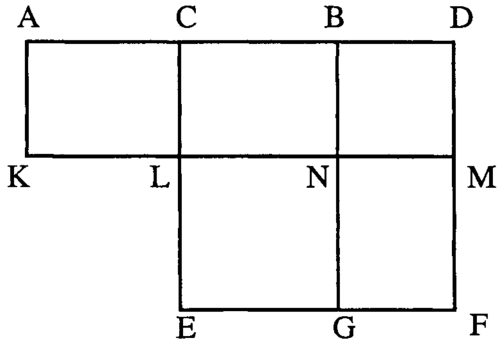
38 DESCARTES, *Discours de la méthode*, p.335.

mais qui demandent de bannir l'évidence. Pour lui, la logique est un système extérieur à l'individu, alors que l'évidence est un sentiment intime[39].

Lamy : une géométrie sans figure

Descartes va trouver un adepte en la personne de Lamy qui écrit dans ses *Éléments de géométrie* de 1695 :"Enfin pour bien apercevoir il faut attendre la clarté avant que de consentir. On ne le doit point faire qu'après qu'on s'y sent forcé par l'évidence de la vérité" [40]. Lamy reprend complètement le livre II des *Éléments* d'Euclide en l'algébrisant, de sorte que tous les résultats pourront être démontrés par une manipulation de lettres en se passant de la contemplation de la figure. Examinons la démonstration de la proposition VI du Livre II des *Éléments* d'Euclide[41].

Qu'une certaine droite AB soit coupée en deux parties égales au point C, et qu'une certaine droite BD, lui soit ajoutée en alignement. Je dis que le rectangle contenu par AD, DB, pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD.



En effet, que le carré CEFD soit décrit sur CD. Et que DE soit jointe ; et, d'une part que par le point B soit menée BG parallèle à l'une ou l'autre des droites EC, DF ; et d'autre part, que par le point H, soit menée KM parallèle à l'une ou l'autre des droites AB, EF ; et que par le point A, soit encore menée AK parallèle à l'une ou l'autre des droites CL, DM.

Or, puisque AC est égale à CB, AL est aussi égal à CH (I, 36). mais le [complément] CH est égal au [complément] HF (I,43), et donc AL est égal à HF. Que CM soit ajouté de part et d'autre. AM tout entier est donc égal au gnomon NOP. Mais AM est le [rectangle contenu] par AD, DB car DM est égal à DB. Que LG -qui est égal au carré sur BC- soit ajouté de part et d'autre. Le rectangle contenu par AD, DB avec le carré sur CB, est donc égal au gnomon NOP avec LG. Mais le gnomon NOP et LG sont le carré CEFD -tout entier- qui est celui décrit sur CD. Donc le rectangle contenu par AD, DB pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD.

Le discours euclidien peut être remplacé dans une démonstration à la chinoise très simple (fig.20). L'évidence de la démonstration chinoise est celle du regard sur une figure en mouvement, celle de Lamy est une évidence du regard sur des lettres qui apparaissent et disparaissent.

[39] voir BARBIN, La démonstration géométrique, acte d'invention et critère de vérité, in Legrand éd., *Les maths en collège et en lycée*, pp. 348-366.
[40] LAMY, *Entretiens sur les sciences*, p.86.
[41] EUCLIDE, *Les éléments*, pp.335-336.

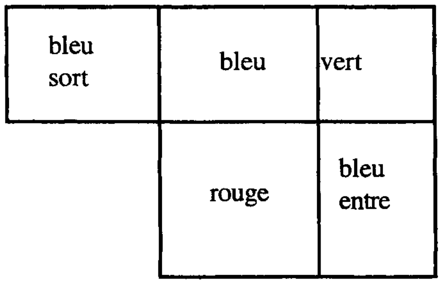


fig.20

En effet, Lamy traduit la construction géométrique de juxtaposition de segments par l'opération d'addition, et il montre que la construction géométrique d'un rectangle se traduit par l'opération de multiplication[42]. Il écrit alors que "ce qu'on a dit touchant les opérations qu'on a enseignées dans la première section, fait voir évidemment tout ce qu'enseigne Euclide dans ces propositions [du Livre II]" [43]. Il s'agit cette fois d'une évidence calculatoire. Examinons la proposition VII du Livre III de son ouvrage, qui correspond à la proposition VI d'Euclide examinée plus haut.

Dans les "Éclaircissements" donnés à la fin de son ouvrage, Lamy écrit : "j'ai cru qu'il était bon de s'accoutumer à concevoir ces sortes de vérités sans se représenter des figures. Elles ne sont point nécessaires ; car pour comprendre que le carré b + d est égal aux quarrés de ses parties, savoir à bb et à dd, plus deux fois le plan de ses parties, c'est-à-dire à 2 bd ; il suffit que je conçoive b + d multipliée par b + d produit bb + 2 bd + dd, où je vois aussi évidemment et aussi sensiblement que dans une figure ce qu'il fallait prouver. Je prie qu'on y fasse réflexion, on verra dans la suite qu'il est important de s'accoutumer à se passer de figures, qui en plusieurs occasions ne peuvent être que confusion" [44]. Euclide démontre le résultat par la géométrie figurale, Lamy le démontre par une géométrie littérale.

SEPTIEME PROPOSITION

b est la moitié de z. Si on ajoute d à z, je dis que le plan de z + d multiplié par d avec le carré de b est égal au carré de b + d.
Il faut démontrer que

$$zd + dd + bb = bb + 2\,bd + dd.$$

Retranchant de part et d'autre bb et dd, reste zd = 2 bd. Ainsi il n'est question que de montrer que cela est ; c'est-à-dire que zd est égal à 2bd. Or z = b + b, car b est la moitié de z ; donc zd = db + db, ou zd = 2bd, ce qu'il fallait démontrer.

Les règles du calcul des équipollences : faire apparaître et disparaître

En 1854, Bellavitis expose une nouvelle méthode pour résoudre les problèmes de géométrie. Elle consiste aussi à décomposer les figures en droites simples, mais ici, les droites seront considérées comme des grandeurs et des directions. Bellavitis appelle équipollentes deux droites parallèles et dirigées dans le même sens. Il écrit dans l'avant-propos de son *Exposition de la méthode des équipollences* : "cette méthode donne satisfaction au désir, exprimé par Carnot, de trouver un algorithme qui représente à la fois

---

[42] voir BARBIN, *La révolution mathématique du 17ème siècle. Méthode et invention du courbe*, chap.VI.
[43] LAMY, *Eléments de géométrie ou de la mesure du corps*, 2ème éd., p.134.
[44] LAMY, op.cit., p.381.

la grandeur et la position de diverses parties d'une figure ; il en résulte directement des solutions graphiques, élégantes et simples, des problèmes de géométrie"[45]. Il indique que les opérations sur les équipollences sont "analogues à celles qu'on pratique sur les équations algébriques". Puis il énonce quatre règles, où $\underline{\Omega}$ désigne l'équipollence, "gr." désigne la grandeur d'une droite et "inc." son inclinaison prise à partir d'une origine des inclinaisons choisie arbitrairement[46].

Règle I : Quels que soient les trois points A, B, C on a toujours

$$AB + BC \,\underline{\Omega}\, AC.$$

Règle II : Si $m\,IL \,\underline{\Omega}\, n\,MN$ et $\text{inc.}IL \neq \text{inc.}MN$
alors $m = n = 0$.

Règle III : si $LM + MN + NL \,\underline{\Omega}\, 0$ et $\text{inc.}LM = \text{inc.}MN$
alors $\text{inc.}NL = \text{inc.}MN \pm 180°$
et $\text{gr.}NL = \text{gr.}LM + \text{gr.}MN$.

Règle IV : si $LM + MN + NL \,\underline{\Omega}\, 0$
et $\text{inc.}LM + \text{inc.}LN = 2\,\text{inc.}MN$
alors $\text{gr.}LM = \text{gr.}NL$.

Bellavitis écrit à propos de la première règle : "cette règle est d'un continuel usage pour substituer une droite à d'autres [...]. Nous y joindrons une règle pour distinguer d'un coup d'œil quelles sont les équipollences identiques, de manière qu'on puisse s'assurer de leur exactitude sans aucun effort d'esprit, et sans regarder le moins du monde la figure". Il illustre cette remarque par un exemple. pour démontrer que

$$AB + BC \,\underline{\Omega}\, AD - CD$$

est une équipollence identique, il suffit en introduisant systématiquement un point Z, d'utiliser la première règle pour voir que :

$$AZ - BZ + BZ - CZ \,\underline{\Omega}\, AZ - DZ - (CZ - DZ).$$

Ainsi, la méthode des équipollences peut se passer du regard sur la figure, mais elle repose sur le regard sur des lettres, car on pourra s'assurer "d'un coup d'œil" de la véracité d'une identité. La méthode consiste à faire apparaître une lettre Z qui fait disparaître toutes les autres. Il est intéressant de relever que la méthode de Bellavitis ne demande pas de savoir adroitement utiliser ce que l'on appelle aujourd'hui la relation de Chasles, mais, tout au contraire de l'utiliser "sans aucun effort d'esprit". En effet, cela doit nous permettre d'imaginer un enseignement du calcul vectoriel bien différent de celui des "fiches méthodes" de nos manuels.

Bellavitis : géométrie et graphie des équipollences

Bellavitis remarque que toute formule algébrique sur des quantités peut être considérée comme un théorème relatif à plusieurs points situés en ligne droite. Il va lui aussi revisiter le livre II des *Éléments* d'Euclide, pour déduire des formules algébriques à la Lamy de nouveaux théorèmes de géométrie plane. Il remarque que les théorèmes sont

---

45 BELLAVITIS, *Exposition de la méthode des équipollences*, p.2.

46 BELLAVITIS, op.cit., pp.9-20.

dans toute leur généralité trop compliqués, mais que, limités à des cas particuliers, ils permettent de "tomber" sur des théorèmes déjà connus. Il s'agit d'une nouvelle méthode de démonstration dont Bellavitis montre la fécondité sur plusieurs exemples.

THÉORÈME GÉNÉRAL. - *Toute propriété des points d'une droite donne un théorème relatif aux points d'un plan, par le seul changement des équations en équipollences.*

Prenons pour exemple la formule algébrique

$$b\,(b + 2c) + c^2 = (b + c)^2$$

qui conduit à la sixième proposition du second livre d'Euclide : si une droite BD est divisée en C également, c'est-à-dire si BC = CD, et que A soit un point quelconque dans son prolongement, on aura

$$AB.AD + (BC)^2 = (AC)^2.$$

Pour vérifier cette équation [...], observons si l'équation

$$(AZ - BZ)\,(AZ - DZ) + (BZ - CZ)^2 = (AZ - CZ)^2$$

devient identique dans l'hypothèse BC = CD, c'est-à-dire BZ - CZ = CZ - DZ. Après avoir fait cette vérification, nous avons le théorème suivant :

Si un côté BD du triangle ABD est divisée par le milieu en C, l'équipollence suivante aura toujours lieu

$$AB.AD + (BC)^2 \;\underline{\Omega}\; (AC)^2.$$

[...]

"*Corollaire I.* Si 2 inc.CB = 2 inc.AC ± 180°, les deux premiers termes de l'équipollence trinôme auront la même inclinaison ; d'où, par la règle III,

$$gr.(AB.BD) = gr.(AC.CA) = gr.(CB)^2.$$

et, en outre,

$$inc.BA + inc.AD = 2\ inc.CB = 2\ inc.DB.$$

Cette dernière relation, appliquée à l'équipollence

$$BA + DB + AD \;\underline{\Omega}\; 0,$$

donne, d'après la règle IV,

$$gr.AB = gr.AD.$$

La condition inc.CB - inc.AC = ± 90° signifie que l'angle ACB est droit, et les deux équations relatives aux grandeurs donnent le théorème de Pythagore

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2.$$

Ainsi, la proposition VI d'Euclide linéarisée reçoit une nouvelle démonstration littérale, puis en la délinéarisant, le théorème de Pythagore devient une conséquence de cette proposition.

Limite de la graphie algébrique : le mouvement

La méthode cartésienne pour résoudre un problème géométrique par la graphie algébrique permet aussi de traiter des problèmes sur les courbes. En effet, dans le livre II de sa *Géométrie*, consacré à "la nature des lignes courbes", Descartes explique que l'on peut toujours associer aux courbes qu'il appelle "géométriques" une équation algébrique. Il donne ainsi une méthode pour trouver la tangente à une courbe, mais cette méthode ne s'applique pas aux courbes qu'on appelle aujourd'hui transcendantes. En revanche, la méthode infinitésimale de Leibniz, ou celle de Newton, permet de trouver les tangentes aux courbes transcendantes, et de résoudre de nombreux autres problèmes sur les courbes. Cette méthode demande de désigner par des lettres, non seulement des segments, mais des portions infiniment petites de ces segments. Le calcul infinitésimal remplace ainsi les démonstrations géométriques par l'absurde des Anciens dans l'étude des courbes[47].

La méthode infinitésimale de Newton repose explicitement sur le mouvement. Dans sa *Méthode des fluxions* , il définit les notions de fluentes et de fluxions en écrivant : "j'appellerai quantités *fluentes*, ces quantités que je considère comme augmentées graduellement et indéfiniment, je les représenterai par les dernières lettres de l'alphabet v, x, y et z, [...] et je représenterai par les mêmes dernières lettres surmontées d'un point

$$\dot{v},\ \dot{x},\ \dot{y} \text{ et } \dot{z}$$

les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit, et que par conséquent on peut appeler *fluxions*"[48]. Dans le problème I, il explique comment, étant donnée la relation entre quantité fluentes, trouver la relation entre leurs fluxions. La démonstration de l'algorithme de ce qui est pour nous une dérivation, demande de désigner par un symbolisme les moments infiniment petits dont augmentent les fluentes[49].

> Les moments des quantités fluentes (c'est-à-dire leurs parties indéfiniment petites, par l'accession desquelles, dans des parties indéfiniment petites de temps, elles sont continuellement augmentées) sont comme les vitesses de leur flux ou accroissements.
>
> Si donc le produit de la vitesse $\dot{x}$ par une quantité indéfiniment petite o, c'est-à-dire, si $\dot{x}o$ représente le moment d'une quantité quelconque x, les moments des autres v, y, z, seront représentés par
>
> $$\dot{v}o,\ \dot{x}o,\ \dot{y}o \text{ et } \dot{z}o$$
>
> parce que $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ et $\dot{z}o$ sont chacun comme $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$.
>
> Puis donc que les moments comme
>
> $$\dot{x}o,\ \dot{y}o$$
>
> sont les successions ou augmentations indéfiniment petites des quantités fluentes x et y pendant les indéfiniment petits intervalles de temps o , ces quantités x et y après un intervalle indéfiniment petit de temps deviennent
>
> $$x+\dot{x}o \text{ et } y+\dot{y}o$$
>
> et par conséquent l'équation qui en tout temps exprimera la relation des quantités, exprimera la relation entre
>
> $$x+\dot{x}o \text{ et } y+\dot{y}o \ .$$

Newton considère ensuite l'exemple d'une relation entre fluentes de degré 3. Pour simplifier, prenons l'exemple d'un relation de degré 2, en suivant son raisonnement et en conservant ses expressions de "substituer", effacer" et "rejeter".

Considérons l'équation $x^2 - axy + y = 0$, "je substitue" $x+\dot{x}o$ pour x et $y+\dot{y}o$ pour y, j'ai

$$x^2 - axy + y + 2x\dot{x}o - a\dot{x}yo - ax\dot{y}o + \dot{y}o + \dot{x}^2o^2 - a\dot{x}\dot{y}o^2 = 0.$$

---

47 voir BARBIN, op.cit., chap.IV et chap.V.

48 NEWTON, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, p.21.

49 NEWTON, op.cit., pp.25-26.

Maintenant, j'ai par la supposition $x^2 - axy + y = 0$, "j'efface" donc ces termes dans l'équation précédente, et ayant divisé par *o* tous les termes qui restent j'ai

$$2x\dot{x} - a\dot{x}y - ax\dot{y} + \dot{y} + \dot{x}^2 o - a\dot{x}\dot{y}o = 0.$$

Mais comme *o* a dû être supposé infiniment petit, les termes qu'il multiplie sont nuls en comparaison des autres, "je les rejette" donc, et il me reste

$$2x\dot{x} - a\dot{x}y - ax\dot{y} + \dot{y} = 0.$$

Ainsi, les règles algébriques qui permettent de faire apparaître ou disparaître des lettres dans des équations algébriques sont mises en défaut dans les équations infinitésimales. En effet, on peut "rejeter" des symboles, et non plus seulement les "effacer" par le simple "couper-coller" autorisé par les règles de l'algèbre classique. Ceci marque la limite de la simple graphie algébrique par laquelle Descartes pensait résoudre tous les problèmes de la géométrie, et ceci permet aussi de donner raison à la limitation cartésienne des courbes géométriques aux seules courbes algébriques.

La pulsation entre le discursif et le visuel

Le texte de la démonstration est figé sur la page ou sur l'écran, mais l'écriture ou la lecture de ce texte s'effectue dans une pulsation incessante de la pensée entre le fixé du texte et la possibilité du bougé des figures et des lettres. L'intention des mouvements de la main qui trace une ligne ou un symbole, ou celle des mouvements de l'œil qui regarde les figures ou les calculs n'est pas dite dans le texte. Mais paradoxalement, l'intelligibilité du texte nécessite que ce qui n'est pas dit soit emprunté par la pensée. René Guitart écrit : "voir ce que l'on dit, dire ce que l'on voit, c'est impossible intégralement ; entre voir ce que l'on pense et dire ce que l'on pense, il y a une dialectique non-résolutive qui reste toujours un procès ouvert qui ne se referme que sur lui-même, soit plus précisément ce que j'appelle une *pulsation*. C'est la vivacité de cette pulsation, son incessante traversée sue et insue par l'entendement, qui forme la trame qu'emprunte le penser mathématique"[50].

Le texte démonstratif, qu'il soit discours ou graphie, est inscrit dans la matérialité, et si la pensée démonstrative ne peut pas être transcrite dans cette matérialité, elle laisse trace. Celui qui écrit, comme celui qui lit, est dans cette pulsation entre ce qui est écrit et ce qui est pensé. Ce travail spéculatif peut passer inaperçu, comme l'écart entre ce qui est écrit et ce qui est pensé. Merleau-Ponty écrit que "la merveille du langage est qu'il se fait oublier : je suis des yeux les lignes sur le papier, à partir du moment où je suis pris par ce qu'elles signifient, je ne les vois plus. [...] L'expression s'efface devant l'exprimé, c'est pourquoi son rôle médiateur peut passer inaperçu"[51]. Dans le cas du texte mathématique, le langage discursif ou graphique peut se faire oublier par celui qui est pris par la signification de ce qui est écrit. En l'absence de cette signification, l'erreur est alors de croire que les mathématiques sont seulement un langage, et de prendre les mathématiques à la lettre. Erreur d'autant plus facile à commettre que la rigidité du texte mathématique peut laisser croire que cette rigidité est l'essence même du mathématique.

Références bibliographiques

ARISTOTE, *Organon IV*, *Les seconds analytiques,* trad.Tricot, Vrin, Paris, 1987.
BARBIN, Les Éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée, in *Repères IREM*, n°4, juil.1991, pp.119-133.

[50] GUITART, op.cit., p.103.
[51] MERLEAU-PONTY, op.cit., p.459.

BARBIN, Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVII^{e} siècle, in *Les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences et des techniques*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, n°40, 1992, pp.29-49.

BARBIN, *La révolution mathématique du XVII^{e} siècle. Méthode et invention du courbe*, thèse à l'Université de Lille I, 1997.

BARBIN, La démonstration géométrique, acte d'invention et critère de vérité, in Legrand éd., *Les maths en collège et en lycée*, Hachette, 1997.

BELLAVITIS, *Exposition de la méthode des équipollences*, trad. Laisant, Gauthier-Villars, Paris, 1874.

BERNARD, Le triparti du temps, p. 179, in *Temps et mathématique*, thèse à l'Université de Strasbourg, 1996.

CLAIRAUT, *Éléments de géométrie*, rééd. Gauthier-Villars, Paris, 1920.

DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. Sirven, Vrin, Paris, 1970.

DESCARTES, *Discours de la méthode*, rééd. fayard, Paris, 1987.

EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Vitrac, PUF, Paris, 1990.

FREGE, *Écrits logiques et philosophiques*, trad. Imbert, Le Seuil, Paris, 1971.

FRIEDELMEYER, "Recherche inconnue désespérément", in IREM, *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Ellipses, Paris, 1993.

GUITART, *La pulsation mathématique*, à paraître.

HOYRUP, *"Algèbre d'al-jabr" et "algèbre d'arpentage" au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne*, Université de Roskilde, n°2, 1990.

LACROIX, *Éléments d'algèbre*, 3ème éd., De Crapelet, Paris, 1803.

LAMY, *Entretiens sur les sciences*, 3ème éd.(1706) PUF, Paris, 1966.

LAMY, *Éléments de géométrie ou de la mesure du corps*, 2ème éd., Pralard, Paris, 1695.

MAN-KEUNG SIU, Proof and pedagogy in Ancient China : examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang Suan Shu, in *Educationnal Studies*, 24, 1993, pp.345-357.

MARTZLOFF, Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon, 1990.

MERLEAU-PONTY, *Phénoménologie de la perception* (1945), rééd. Gallimard, Paris, 1968.

NEWTON, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, trad. Buffon, rééd. Blanchard, Paris, 1966.

PLATON, La république, trad. Chambry, Les Belles Lettres, Paris, 1932.

PROCLUS, *Les commentaires sur le premier livre d'Euclide*, trad. Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.

SCHOPENHAUER, *Le monde comme volonté et comme représentation*, trad. Burdeau, PUF, Paris, 1966.

WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, trad. Lescourret, Gallimard, Paris, 1983.