EVELYNE BARBIN
RAYMOND DUVAL
JEAN HOUDEBINE
COLETTE LABORDE

Analyse de textes de démonstration dans des cadres théoriques différents

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4
« Produire et lire des textes de démonstration », , p. 259-284
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_259_0>

ANALYSE DE TEXTES DE DEMONSTRATION DANS DES CADRES THEORIQUES DIFFERENTS

Evelyne Barbin
Raymond Duval
Jean Houdebine
Colette Laborde

A propos de trois textes de démonstration, quatre chercheurs expriment des points de vue différents au cours d'une table ronde. Ces quatre exposés sont suivis d'une discussion générale qui est animée par Jean-Paul Guichard.

I. Le choix des textes[1]

Il s'agit d'une propriété géométrique classique à démontrer : "La droite joignant un sommet d'un parallélogramme au milieu d'un côté coupe au tiers l'une des diagonales". Deux énoncés différents autour de cette propriété ont été tirés de deux ouvrages d'époque et de finalité différentes. Les démonstrations proposées par ces ouvrages sont présentées ci-dessous, en respectant autant que possible la disposition et la présentation du texte.

Le premier extrait est un problème et sa solution, tirés du manuel Terracher Seconde (1994, Editions Hachette). C'est un travail pratique sur l'usage des vecteurs pour l'étude d'une configuration (p. 291).

Le deuxième extrait comprend l'énoncé d'un théorème, deux démonstrations de ce théorème et une remarque. Ces textes sont tirés des Exercices de Géométrie de F. G.-M (1920, 6ème édition, p. 245, Editions Jacques Gabay).

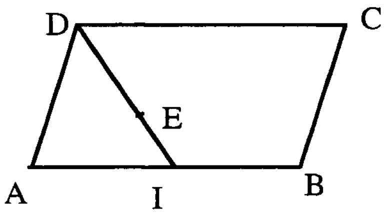
[1] Ce choix a été fait par Colette Laborde

Extrait d'un ouvrage scolaire contemporain

Enoncé

"Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E le point du segment [ID] tel que $IE = \frac{1}{3} ID$. Etablir que les points A, E et C sont alignés et préciser la position de E sur [AC]".

Figure accompagnant l'énoncé



Solution rédigée proposée par le manuel

Nous avons $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ (ABCD est un parallélogramme).

Or $\vec{AB} = 2\,\vec{AI}$ (I est le milieu de [AB]) et $\vec{AD} = \vec{AI} + \vec{ID}$ (Chasles).

Ainsi $\vec{AC} = 2\,\vec{AI} + (\vec{AI} + \vec{ID})$, soit $\vec{AC} = 3\,\vec{AI} + \vec{ID}$. (1)

D'autre part, $\vec{AE} = \vec{AI} + \vec{IE}$ (Chasles) et $\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$ (par hypothèse).

Donc, $\vec{AE} = \vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{ID}$. (2)

Les relations (1) et (2) rendent visible que $\vec{AC} = 3\,\vec{AE}$ ce qui prouve l'alignement de A, E et C et précise la position de E : E est le point de [AC] tel que AC = 3 AE.

Extraits d'un recueil d'exercices du début du XX^e siècle

Théorème

"Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales".

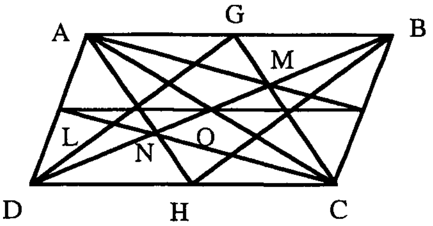
1ère Démonstration

"En effet AF, CG, BO sont les médianes du triangle ACB ; donc $BM = \frac{2}{3}$ BO (n°447)

ou $\quad BM = \frac{2}{3} \times \frac{BD}{2} = \frac{BD}{3}$

de même $\quad DN = \frac{BD}{3}$; donc...

Figure accompagnant les démonstrations



2ème démonstration

Considérons le triangle AOB.
La droite AF, diagonale du parallélogramme ABFE, passe par le point milieu de OG ; or on sait que la droite AM, qui passe par le milieu de la médiane OG du triangle AOB, détermine sur la base OB un segment OM qui est la moitié de BM (n°435) ; donc BM est le tiers de BD.

Remarque :

Les droites AF, AH qui joignent un sommet d'un parallélogramme aux points milieux des côtés opposés à ce sommet, divisent une des diagonales en trois parties égales.

Enoncés des théorèmes 447 et 435

447 : "Les trois médianes d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est situé aux 2/3 de chaque médiane en partant des sommets".

435 : "La droite ALN, qui joint un sommet d'un triangle ADB au point milieu L d'une des médianes des autres sommets, divise le côté BD opposé au sommet considéré, en deux parties, dont l'une est double de l'autre".

II. Intervention d'Evelyne Barbin

Nous examinerons d'abord la démonstration donnée dans le manuel de seconde de Terracher (Hachette, 1994), puis celles des *Exercices de géométrie* de F. G.-M. c'est-à-dire Frère Gabriel-Marie (rééd. Gabay). Leur comparaison nous conduit à pointer la distinction entre démonstration logico-déductive et méthode, à relier la simplicité de la figure à la simplicité du texte démonstratif, et à insister sur l'intrication entre la production d'un texte démonstratif et la lecture d'une figure.

Un "mélange de genres" : discours et graphie

La démonstration du manuel Terracher se présente sous la forme d'un discours ponctué des conjonctions "donc", "or", "ainsi", c'est-à-dire sous la forme d'un discours logico-déductif. Tel qu'il se veut, ce discours peut être critiqué au point de vue de la rédaction française (utilisation d'un "d'autre part" non précédé d'un "d'une part"), et du point de vue de la rédaction mathématique (utilisation des hypothèses et de la relation de Chasles). Mais il n'en reste pas moins que le texte (cf. ci-après) présente un mélange entre le discours logico-déductif et la graphie calculatoire, et nous voulons porter notre attention sur ce mélange.

D'une part, nous avons $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (ABCD est un parallélogramme)

et $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{AI}$ (I est le milieu de AB).

Or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ (relation de Chasles).

Donc, $\overrightarrow{AC} = 3\ \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$. (1).

D'autre part, nous avons $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ (par hypothèse).

Or $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ (relation de Chasles).

Donc, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$. (2).

De (1) et (2), nous concluons que $\overrightarrow{AC} = 3\ \overrightarrow{AE}$.

En effet, ce texte, bien qu'écrit sous forme d'un discours logico-déductif, repose sur la méthode vectorielle. Or le principe même d'une méthode, vectorielle ou algébrique, est de traduire les hypothèses et la conclusion sous forme d'une graphie, vectorielle ou algébrique, afin de pouvoir ensuite mener des calculs sans regarder la figure, mais en regardant les calculs[1]. Il est intéressant de noter que Terracher écrit très justement à la fin de son texte que "les relations (1) et (2) rendent visible" la conclusion. Descartes, inventeur de la méthode algébrique, comme Bellavitis, inventeur de la méthode des équipollences, insistent sur la distinction entre méthode et démonstration, du point de vue de la pratique du géomètre qui ne contemple plus la figure mais des calculs, et du point de vue du texte démonstratif qui

[1] voir mon article "La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif" dans ces *Actes*.

s'appuie sur des règles calculatoires et non sur des règles de logique propositionnelle.

Graphie et méthode vectorielle

Les enseignants de mathématiques se donnent beaucoup de mal pour apprendre aux élèves comment utiliser astucieusement la règle de Chasles. En fait, comme l'explique Bellavitis dans son *Exposition de la méthode des équipollences* de 1854, il suffit d'introduire systématiquement à l'aide de la relation de Chasles un point O dans chacune des relations vectorielles qui traduit les hypothèses du problème. Ce point O doit être différent des points de la figure, on peut imaginer qu'il est même hors du plan de la figure, comme un œil qui regarde la figure. La conclusion doit aussi être traduite en relation vectorielle, puis écrite en introduisant le point O. La résolution demande de réduire les calculs. Donc pas d'astuce géométrique mais une adresse calculatoire, c'est le propre de l'idée de méthode.

Nous avons par hypothèse : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID} = 3\,\overrightarrow{IE}$

(1) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

(2) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\,\overrightarrow{OI} - 2\,\overrightarrow{OA}$

(3) $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OI} = 3\,\overrightarrow{OE} - 3\,\overrightarrow{OI}$

de (1), (2) et (3),

$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\,\overrightarrow{OI} - 2\,\overrightarrow{OA} + 3\,\overrightarrow{OE} - 2\,\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 3\,\overrightarrow{OE} - 3\,\overrightarrow{OA}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AE}$.

La graphie peut être rendue plus lisible, si on introduit le calcul des points pondérés qui consiste à remplacer :

$$\overrightarrow{OM} \text{ par } M.$$

Nous avons par hypothèse :

(1) $C - A = B - A + D - A$
(2) $B - A = 2I - 2A$
(3) $D - I = 3E - 3I$

de (1), (2) et (3),

$C - A = 2I - 2A + 3E - 2I - A = 3E - 3A.$

Les remarques précédentes conduisent à s'interroger sur l'enseignement du discours logico-déductif et des méthodes algébrique et vectorielle. Il serait formateur que les enseignants présentent ces trois façons de démontrer des résultats géométriques dans leurs spécificités et comme concurrentes, et qu'ils proposent aux élèves de démontrer un même résultat de plusieurs façons. Cela permettrait, par exemple, de pointer que la méthode analytique est une méthode algébrique qui repose sur l'introduction d'un segment unité, sur le "théorème de Thalès" et sur le "théorème de Pythagore".

Simplicité du discours démonstratif et simplicité de la figure

La lecture des démonstrations de F. G.-M. frappe par le caractère succinct des textes et par l'extrême complexité de l'unique figure qui accompagne ces textes. Ici, nous sommes dans le cadre d'une démonstration logico-déductive, pour laquelle le travail du géomètre sur la figure est essentiel. Il faut regarder la figure, pour y retrouver des configurations déjà examinées dans des propositions précédentes, ordre logico-déductif oblige. Les deux démonstrations consistent justement à voir deux configurations différentes. Mais l'unique figure mêle les deux configurations, ce qui est proprement absurde vis-à-vis de la compréhension du raisonnement du géomètre.

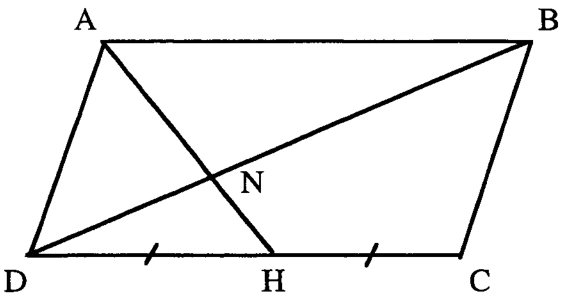
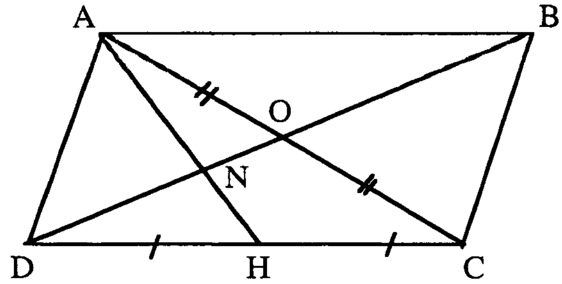


fig.1

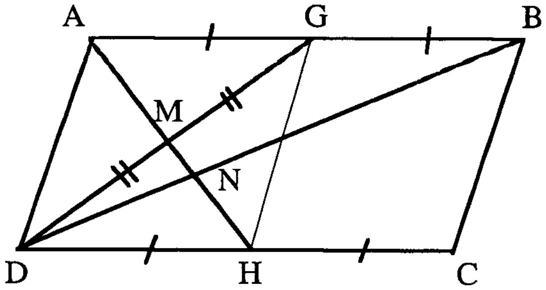
1ère démonstration



Constructions : mener AC

fig.2

2ème démonstration



Constructions : G milieu de AB
Mener GH
Mener DG

fig.3

Dans l'une des démonstrations, F. G.-M. conclut que BD est trois fois DN, et dans l'autre que BD est trois fois BM. Une façon de simplifier la figure initiale est de considérer uniquement le point N et de montrer à chaque fois que BN est le double de DN (fig.1). Comme dans beaucoup de démonstrations logico-déductives, le géomètre regarde la figure initiale pour introduire des segments ou des points supplémentaires. Il se livre à un découpage de la figure initiale. Dans la première démonstration de F. G.-M., il faut découper le parallélogramme ABDC en deux triangles, et dans la seconde en deux parallélogrammes dont l'un d'eux sera encore découpé en deux triangles. En effet, ces deux démonstrations vont s'appuyer sur des résultats concernant les triangles. Mais cet aspect heuristique est complètement caché dans le texte de F. G.-M. Si nous voulons laisser trace de la démarche du géomètre dans le texte démonstratif, il faut rendre visible les constructions supplémentaires sur la figure et les dire dans le texte.

Le triangle que regarde le géomètre dans la première démonstration est le triangle ADC, dans lequel il voit le point N comme intersection de deux médianes (fig.2). Le triangle que regarde le géomètre dans la seconde démonstration est le triangle ADB dans lequel il voit le point M comme milieu d'une médiane et N comme intersection du prolongement de AM avec BD (fig.3). Voir médiane ou milieu demande de savoir que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Comparer des démonstrations

Pourquoi donner ces deux démonstrations ? Il serait dommage que le but soit seulement l'exercice pédagogique. Il arrive que les mathématiciens apportent de nouvelles démonstrations à des résultats déjà démontrés, autrement dit cela a un sens dans la pratique mathématique. Le premier argument qui est donné alors est celui de la simplicité. Le second argument est d'introduire de nouveaux outils et donc de nouvelles connexions. Comparons donc ces deux démonstrations. Du point de vue de la figure, la première démonstration est plus simple.

Examinons la simplicité des discours, du point de vue du nombre d'arguments utilisés. Dans la première démonstration, la conclusion passe par trois arguments d'égalité de segments :

AO = OC, DN = 2 ON (n°447) et NB = ON + OB = DN + 2 ON = 2 DN

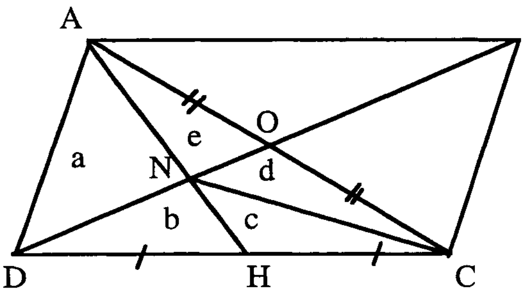
et la seconde démonstration passe par deux arguments d'égalité de segments :

DM = MG et NB = 2 DN (n°435).

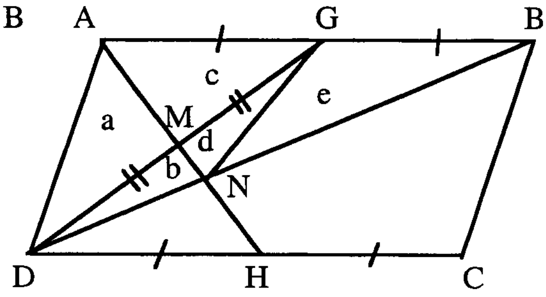
Il resterait ensuite à examiner la simplicité des démonstrations des propositions n°447 et n°435, sur lesquelles reposent la nouvelle proposition. Puis à examiner la simplicité des propositions sur lesquelles reposent celles du n°447 et du n°435 ... discours logico-démonstratif oblige toujours. Alors, de quoi partir ? Partons de ce qui est à la base de bon nombre de démonstrations euclidiennes, à savoir que deux triangles de même hauteur et de même base ont des aires égales. Nous obtenons ainsi deux démonstrations par les aires.

Même si la première démonstration, du point de vue de la figure et du nombre d'arguments apparaît finalement plus simple, il n'en reste pas moins que les argumentations sont semblables : découpage en triangles et raisonnement sur les médianes des triangles. Il serait plus intéressant de proposer une démonstration radicalement différente.

Démonstration du n°447



Démonstration du n°435



b = c	(car DH = HC)
e = d	(car AO = OC)
a+b = e+d+c	(car DH = HC)
donc a = 2e	(DN = 2 ON)

a = c	(car DM = MG)
b = d	(car DM = MG)
a+c = b+d+e	(car AG = GB)
e = c+d	(car AG = GB)

donc c+d+e = 2(a+b) (NB = 2DN)

Pourquoi faire compliqué ?

Pourquoi passer par les médianes de triangles et utiliser la propriété des diagonales du parallélogramme, plutôt que la définition du parallélogramme et le parallélisme ? Prenons l'énoncé initial de F. G.-M. et démontrons directement sans ajout de ligne supplémentaire que DN est égal à NM et à MB (fig.4).

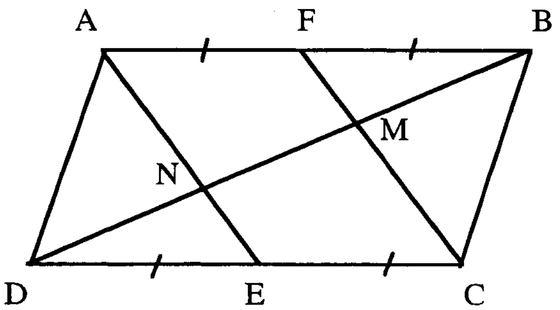
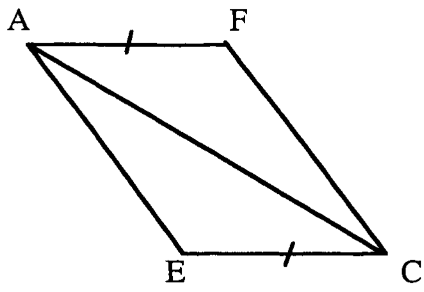


fig.4

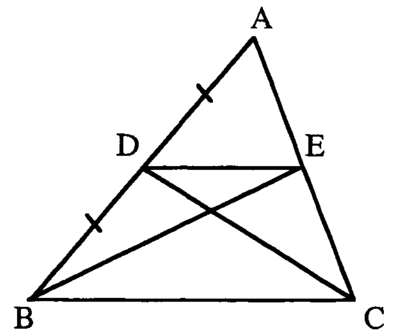
La démonstration passe par quatre arguments :

1. AF = EC et AF // EC donc AFCE est un parallélogramme.
2. AE est parallèle à FC et AF = FB donc NM = MB.
3. AE est parallèle à FC et DE = EC donc NM = DN.
4. Donc DN = NM = MB.

Le premier argument repose sur le premier cas d'égalité des triangles appliqué aux triangles AEC et AFC :



Les deuxième et troisième arguments reposent sur la proposition suivante : la parallèle menée par le milieu d'un côté d'un triangle à un second côté du triangle coupe le troisième côté en son milieu. Cette proposition se démontre par les aires : les triangles ADE et DEB ont même aire car les bases AD et BD sont égales et ils ont même hauteur, et les triangles DEB et DEC ont même aire car ils ont la même base DE et les hauteurs sont égales. Donc les triangles ADE et DEC ont même aire. Ils ont la même hauteur menée du point D, donc leurs bases AE et EC sont égales.



Finalement, cette démonstration repose ultimement, comme les précédentes, sur des découpages en triangle et sur des arguments d'aires. Cette remarque nous incite à une nouvelle vision de la figure 4 : le parallélogramme initial peut être vu comme quatre copies collées d'un même triangle. Nous entrons alors dans une autre façon de voir les figures, qui se traduit par une autre stratégie de démonstration : au lieu de découper la figure initiale, on peut la copier à nouveau et raisonner sur un puzzle.

Démonstration "à la chinoise" : copier et coller

La figure initiale est obtenue par l'accolement de quatre copies d'un même triangle (fig.5). Dans cette géométrie, il faut voir (comprendre) d'emblée le parallélogramme (et le parallélisme) comme une figure composée (à l'aide) de deux triangles égaux.

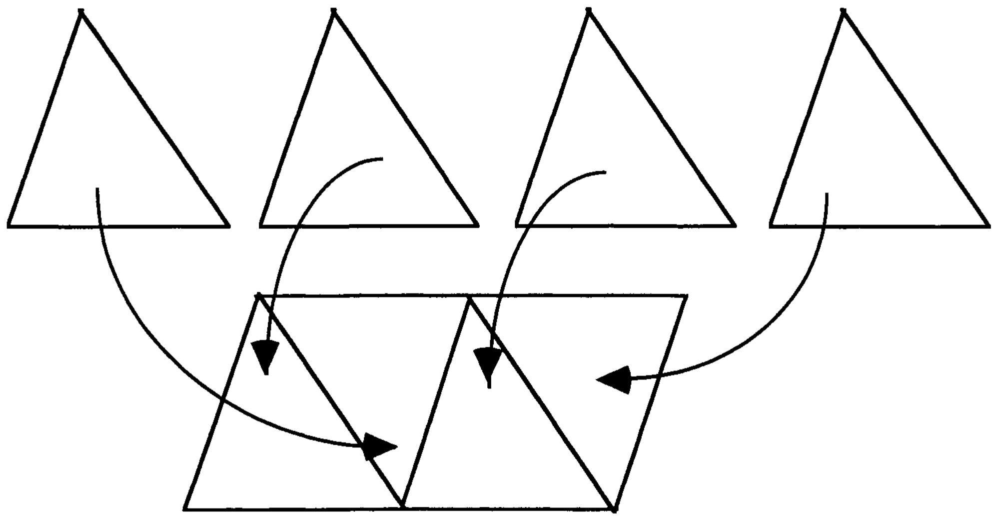


fig.5

Le puzzle de départ est composé de huit pièces a, b, c, d, e, f, g, h (fig.6). En accolant deux fois cette figure (fig.7), on obtient successivement :

a = h, e = d, b + c = f + g, b + f = c + g, b = g, f = c,

en voyant (comprenant) chaque fois les parallélogrammes comme découpés en deux triangles égaux par leurs diagonales.

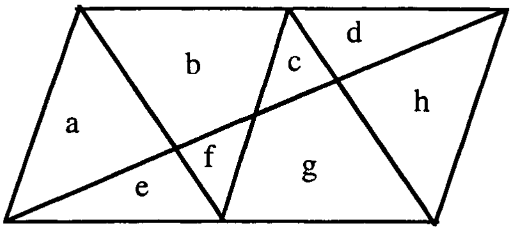


fig.6

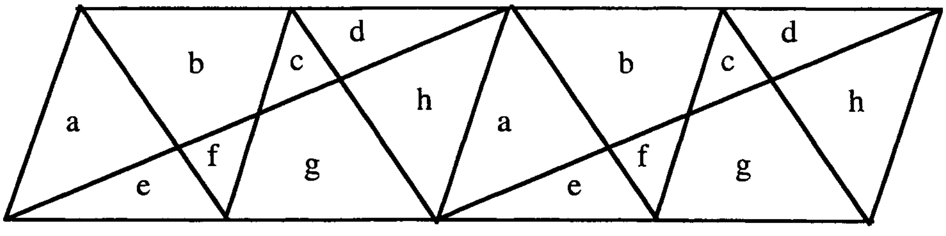


fig.7

Le puzzle de départ (fig.8) indique d'emblée que la diagonale est coupée en trois parties dont deux sont égales, en tant que côtés du triangle a ou du triangle d. De plus, toujours en voyant le parallélogramme coupé en deux triangles égaux par la diagonale, on obtient que

a + d = b + c.

Pour obtenir le résultat, il faut accoler trois fois la figure initiale. Le parallélogramme qui "chevauche" les trois copies, est constitué d'un puzzle de huit pièces tel que

$$a + a + d + d = c + b + c + b,$$

c'est-à-dire que la diagonale est coupée au deux-tiers.

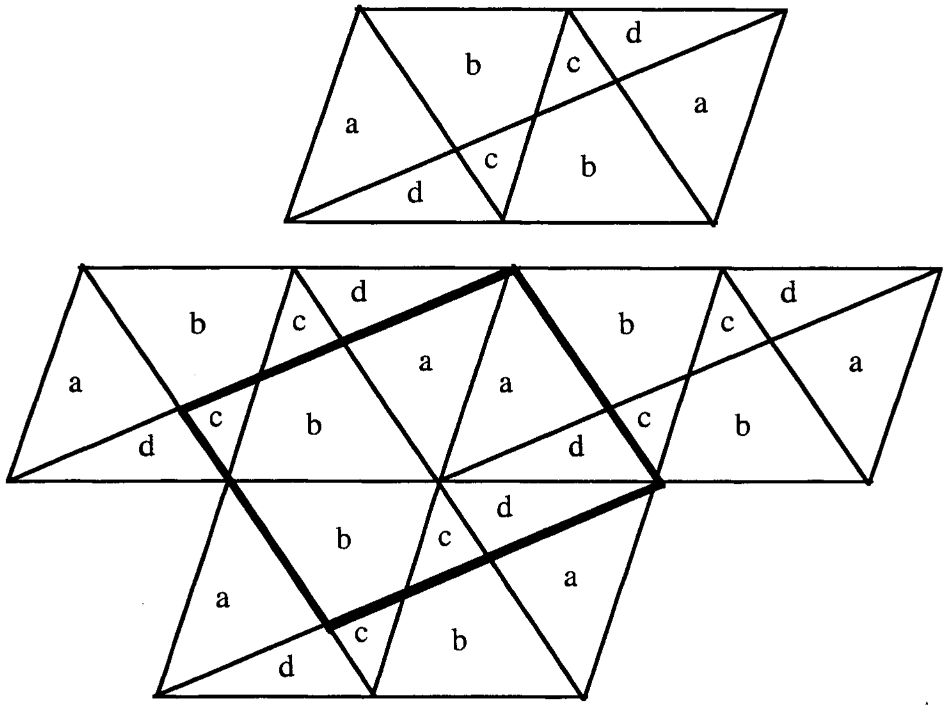


fig.8

Nous avons ajouté, aux trois démonstrations examinées à la table-ronde, d'autres démonstrations, pour insister sur le point suivant : produire et lire des textes de démonstrations géométriques demande de produire et de lire des figures. La figure du problème initial a été transformée par ajout de droites qui la découpe ou par copie. Une même figure a été lue de plusieurs façons : comme assemblages de vecteurs, de points pondérés, de triangles, vus eux-mêmes comme assemblages de droites ou comme des aires. La variation de lecture des figures est au fondement même de la variation des textes démonstratifs. Ceci devrait être un argument décisif pour que notre enseignement utilise systématiquement la comparaison de démonstrations avec les élèves, y compris et surtout quand les variabilités ne sont pas seulement langagières, mais touchent au plus profond du travail du géomètre sur les figures.

III. Intervention de Raymond Duval

Nous allons nous limiter aux deux «textes » tirés des *Exercices de Géométrie* de F. G-M. (1920) parce qu'ils permettent de bien voir la complexité de l'utilisation de la langue naturelle et de celle des figures dans les démarches de démonstration. Ces «textes» présentent aussi l'intérêt d'impliquer une interaction nécessaire entre les propositions qu'ils articulent et les différentes figures qui leur correspondent. Cette interaction est nécessaire, non pour appuyer les démonstrations elles-mêmes, mais pour comprendre, on serait même presque tenté de dire pour rendre lisible, le contenu de chaque proposition énoncée. A travers ces deux «textes», ce sont donc plusieurs phénomènes essentiels pour l'apprentissage des mathématiques que nous allons pouvoir observer.

Notre analyse sera conduite d'un point de vue cognitif. Pour l'effectuer, nous utiliserons les distinctions et les notions exposées dans *Sémiosis et pensée humaine* (respectivement ce qui concerne les fonctions discursives d'une langue et les analyses, fonctionnelle et structurale, du raisonnement). Nous procéderons en deux étapes. Dans la première, nous analyserons chacun des deux textes. Dans la seconde, nous commenterons les observations faites.

Analyse des deux textes de démonstration de F. G.-M.

Pour comprendre le texte de la première démonstration, il faut commencer par lire cette première proposition :

(0) Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales.

Première démonstration

Le texte est introduit par un «en effet». Nous pouvons le segmenter dans les cinq unités apophantiques (unités susceptibles de prendre une valeur de vérité ou une valeur épistémique) suivantes :

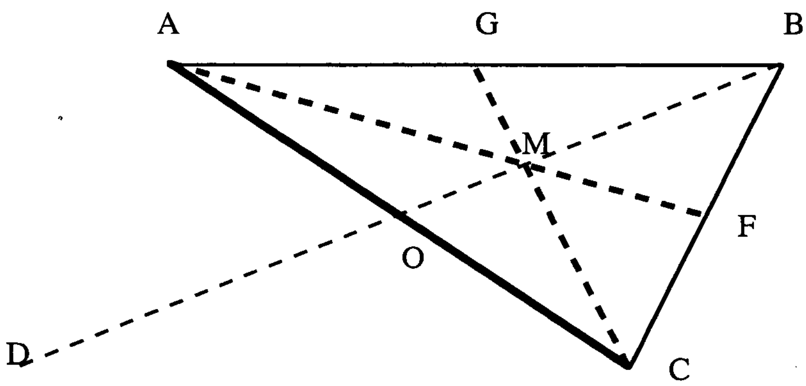
(1) En effet, AF, CG, BO sont les médianes du triangle ACB
(2) donc BM = 2/3 BO (n° 447)
(3) ou $BM = 2/3 \times BD/2 = BD/3$
(4) De même DN = BD/3
[5] donc.....

Deux lectures peuvent être faites pour [1] et [2], **la première prend en compte le statut des propositions** dans l'organisation du pas de déduction. Mais **la seconde se focalise sur le contenu des propositions**, et alors la démarche discursive apparaît comme une argumentation.

On peut y reconnaître l'organisation ternaire d'un pas de déduction : [1] correspond aux prémisses, le n° 447 est l'énoncé tiers et [2] a le statut de conclusion marqué ici par «donc». Dans cette lecture, l'énoncé tiers fonctionne comme règle de détachement et l'on peut vérifier si l'application de la règle est valide (prémisses correspondant à la partie conditions de l'énoncé-tiers).

Mais on peut tout aussi bien lire ce texte comme s'il s'agissait d'une argumentation : **[1] et [2] se contentent d'instancier l'énoncé général**, indexé sous le n° 447 : les trois médianes d'un triangle se rencontrent en un même point, situé au 2/3 en partant des sommets. Ce rapport d'instanciation se détermine uniquement à partir du contenu des deux propositions, sans que l'on ait à s'occuper de leur statut. La situation de partage du parallélogramme, que l'énoncé [0] décrit, n'est qu'un exemple ou un cas particulier de ce théorème des médianes. «[1] donc [2]» répète d'une certaine manière tout l'énoncé 447. Dans cette lecture, l'énoncé-tiers ne fonctionne plus comme une règle de détachement et il n'y a pas de contrôle de validité. La force du lien tient à ce que l'on reconnaît que les contenus respectifs des deux propositions se réfèrent en réalité à la même situation. Cela peut être renforcé par le fait que les deux figures correspondant sont les mêmes (la variables visuelles de grandeur et d'orientation dans le plan étant non pertinentes). On parlera pour cette lecture de lecture argumentative, car l'argumentation fonctionne par rapport au contenu des propositions et que l'instanciation et la subsumption en sont deux procédures classiques.

Cette deuxième lecture peut s'imposer si on commence par lire [1] et le n°447, plus aisément compréhensibles que la proposition [0], et si l'on substitue la sous-figure ci-dessous, à la figure, brouillée par la surcharge de traits, qui accompagne la démonstration. Cette sous-figure sert indifféremment d'appui figural à [1] et au n°447.



Il n'y a pas à choisir entre ces deux lectures de **l'ensemble {[0], [1] donc [2], n° 447} pris comme un «texte».** Cet ensemble se prête aux deux lectures. Le choix de l'une dépend de l'entrée du lecteur et surtout du fait qu'il soit ou non parvenu au stade de prise de conscience de la différence de fonctionnement entre un raisonnement déductif valide et une argumentation. Celui qui n'est pas encore parvenu à ce stade et qui a contourné la complexité descriptive de [0] risque d'assimiler l'utilisation du n° 447 à celle d'un argument de portée générale, comme dans une discussion sur un problème de société...

L'unité [2] constitue un changement de registre par rapport à l'énoncé du théorème n°447. La proposition finale de l'énoncé «... ce point *est situé aux 2/3 de chaque médiane en partant* des sommets» est convertie en l'égalité : « BM = 2/3 BO». Ce passage à une écriture symbolique va permettre ensuite de poursuivre par un calcul élémentaire. Ce calcul effectué en [3] est introduit par «Ou». Une reprise parallèle de la même démarche pour le segment DN est introduite par «De même» [4]. Pour cette reprise, il faut évidemment regarder une autre sous-figure, complémentaire en quelque sorte de la précédente par rapport à la figure : le triangle ACD, formé par trois sommets du parallélogramme, et ses médianes. Enfin, [5] marque la jonction des ces démarches.

Deuxième démonstration

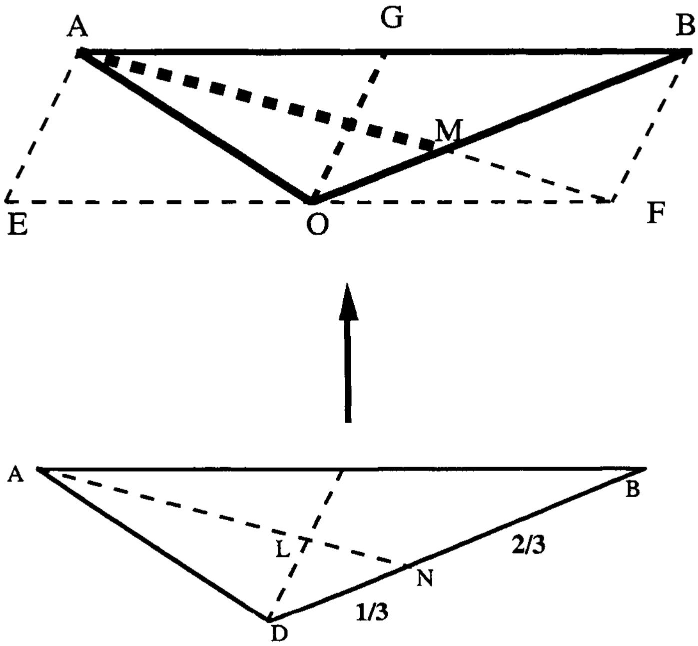
Comme précédemment nous segmentons le texte en unités apophantiques numérotées de [0a] à [5] et nous segmentons l'unité [2] en trois unités apophantiques [2a] [2b], [2c]. Il faut évidemment reprendre la proposition [0]. Et de la figure accompagnant les démonstrations dans l'ouvrage de F. G-M, nous extrayons la sous-figure pertinente pour cette démonstration.

La disposition ci-dessous associe les unités apophantiques et les figures obtenues par conversion des unités apophantiques. Ainsi, [0] et [1] correspondent à la première figure, et les unités [2b] et [2c] correspondent à la deuxième figure, modulo certains changement de désignations. Pour construire cette deuxième figure à partir de l'énoncé du théorème n°435 de l'ouvrage, nous avons repris, en «copier-coller», le triangle ABC de la première figure et le tracé des deux médianes. Et cela parce que **le rapport entre le contenu des unités [1] et [2b]-[2c] est un rapport d'instanciation,** même si les statuts opératoires dans l'organisation du pas de déduction ne sont pas les mêmes. Nous avons «grossi» certains tracés de la deuxième figure pour souligner **le changement de focalisation du regard requis si l'on veut aller non pas de l'énoncé à la figure (construction) mais au contraire de la figure à l'énoncé (description).** Le texte n'est compréhensible que dans ce va-et-vient. Nous examinerons plus loin les raisons de la difficulté de compréhension du texte seul.

$$\text{TEXTE} \; \underset{\textit{Description}}{\overset{\textit{Construction}}{\rightleftarrows}} \; \text{FIGURES}$$

(0a) Considérons le triangle AOB
(1) La droite AF, diagonale du parallélogramme ABFE,
passe par le point milieu de OG;

(2a) Or on sait que
(2b)la droite AM, qui passe par le milieu de la médiane OG du triangle AOB, détermine sur la base OB ***un segment OM qui est la moitié de BM***
(2c n°435) la droite ALN, qui joint un sommet d'un triangle ADB au moins milieu L des médianes des autres sommets, ***divise*** *le côté BD opposé au sommet considéré,* ***en deux parties, dont l'un est le double de l'autre.***
(3) donc BM est ***le tiers de BD***



Quatre constatations immédiates s'imposent :

- cette démonstration se réduit à un seul pas de déduction (prémisse [1], énoncé-tiers [2b]-[2c], conclusion cible [3]),
- cette démonstration, comme le premier pas de la démonstration précédente, donne lieu à une double lecture, l'une déductive prenant en compte les statuts (ici ils sont explicites : [2a] et le «donc» de [3], et l'autre argumentative centrée sur le contenu. La nécessité de recourir aux deux figures pour comprendre le texte peut renforcer la prédominance de la lecture argumentative sur la lecture déductive. Nous avons marqué par une flèche le sens d'instanciation dans le registre des figures.
- l'unité [2b] est une paraphrase de l'unité [2c] énoncé du théorème n°435. Cette paraphrase explicite l'instanciation en changeant les désignations de certains points.

- la détermination décisive pour cette démonstration (le partage d'un segment selon les rapports 1/3 et 2/3 : expressions en caractères gras dans le texte ci-dessus) est formulée de façon différente dans chacune des trois propositions [2b], [2c], [3].

Comparaison des deux textes de démonstration et questions relatives au fonctionnement cognitif impliqué par l'activité mathématique

Nous allons commencer par distinguer les deux côtés «texte de démonstration» et «démonstration» sans chercher à dire lequel est «face» et lequel est «pile», ou lequel est «l'endroit» et lequel est «l'envers».

Les textes : délimitation, rédaction et compréhensibilité

La délimitation des textes n'est pas une question triviale. Il y a une délimitation liée à la mise en page, à la typographie, aux sous-titres (voir la première partie de la conférence «écriture et compréhension...»). En acceptant le découpage imposé par la mise en page, il faudrait exclure du texte de la première démonstration les propositions [0] et [2c], et du texte de la deuxième démonstration les propositions [0] et l'énoncé du numéro 447. Mais cette délimitation est inacceptable, car elle revient à tronquer le texte.

En effet, c'est [0] qui donne les hypothèses sans lesquelles la démonstration ne peut pas démarrer. Et l'énoncé des théorèmes est indispensable. Certes, on peut toujours penser que le lecteur est censé connaître les théorèmes et les définitions, les avoir appris. Ils peuvent alors être passés sous silence pour éviter une répétition fastidieuse. Mais cela veut dire que l'on tronque le texte de la démonstration en l'abrégeant. En d'autres termes, on fait un peu *dans l'écriture des textes de démonstration* comme dans celle des textes de chanson : on ne répète pas le refrain entre chaque couplet, il suffit qu'il ait été écrit une seule fois, en tête. Quand une proposition a été démontrée, on ne la réécrit pas dans toutes les démonstrations où elle est ensuite utilisée, il suffit parfois de la mentionner par allusion. Il est donc important, *au moins pour ce qui concerne la lecture* d'une démonstration, de ne pas en réduire le texte à ce que la mise en page éditoriale du manuel présente comme tel. On voit donc apparaître une distorsion entre **le texte comme discours effectuant une démarche** et **le texte comme organisation visuelle d'un espace pour classer ou ranger des unités des discours,** de façon à ce que le lecteur puisse aller directement à ce dont il a besoin.

Nous pourrions pousser plus loin cette analyse, conformément aux indications de la première partie de la conférence en nous interrogeant sur le rôle de la figure donnée : ne doit-elle pas être incluse dans le texte pour sa compréhensibilité ?

Les deux textes de démonstrations présentent les mêmes caractéristiques rédactionnelles et soulèvent tous les deux un problème de compréhension car il faut soit les lire très lentement en allant se reporter sur la figure, soit les relire **pour pouvoir identifier les différents objets auxquels ils réfèrent**. Il est en effet impossible qu'un lecteur, élève ou non-mathématicien, se contente d'une simple pratique orale du texte pour le comprendre. Ce sont véritablement les opérations discursives relatives à la fonction référentielle qui constituent les difficultés de ce texte. Par exemple :

> points **milieux des** deux côtés **opposés de** la figure (l'unité [0])
> le milieu **de** la médiane OG **du** triangle AOB (unité [2b])

Et comme l'énoncé [2b] identifie au moins quatre objets selon ces opérations discursives de catégorisation et de description, on voit le travail de déchiffrage que sa lecture requiert pour appréhender les relations que le texte établit entre ces objets (opération discursive de prédication).

Cette illisibilité du texte disparaît dès qu'on change de registre et que l'on construit une figure pour chaque unité apophantique, et non pas une figure supermarché où l'on est supposé trouver toutes les sous-figures dont on pourra avoir besoin pour les différentes unités apophantiques du texte. D'ailleurs, sur cette figure supermarché, on ne peut s'avancer qu'en aveugle, en y pointant du doigt les différents tracés au fur et à mesure que l'on suit l'énoncé, un peu comme on suit un parcours sur une carte. Autrement dit, cette figure ne montre pas, au premier coup d'oeil, les objets désignés dans le texte.

On remarquera enfin que la figure qui accompagne les textes, dans le cas de ces deux démonstrations, remplit **uniquement une fonction d'illustration.** Elle sert uniquement à comprendre les énoncés en langue naturelle. Elle ne remplit pas une fonction heuristique, c'est-à-dire elle ne sert pas à trouver quel théorème utiliser pour la démonstration. Cela se vérifie encore mieux si l'on en extrait les sous-figures utiles. En effet, pour analyser le rôle d'une figure dans un processus de résolution de problème, il faut prendre en compte l'interaction entre l'appréhension discursive de la figure et son appréhension opératoire. Il y a deux cas possibles.

Dans certaines situations, c'est seulement à partir d'un théorème ou d'une définition que l'on peut sélectionner la sous-figure pertinente pour résoudre : il faut déjà avoir présent à esprit le théorème à appliquer pour pouvoir voir la sous-figure à détacher de la figure donnée.

Dans d'autres situations, au contraire, c'est la seule exploration de la figure qui met sur la voie de la solution et qui permet soit de trouver une solution pouvant au moins avoir une valeur de conjecture, soit de penser au théorème à appliquer : dans ce cas, la figure joue un rôle heuristique et relève d'un traitement purement figural (Duval 1998, p. 41-45). Ici, nous sommes dans le premier cas : il faut partir en quelque sorte du théorème à appliquer pour arriver à voir dans la figure.

Dans la deuxième démonstration, par exemple, c'est la figure correspondant au n°435 qui permet non seulement de sélectionner la sous-figure utile mais également de l'organiser en une unité de premier plan (le triangle) sur les unités d'arrière-plan (le parallélogramme ABFE). On pourrait presque avancer la conjecture suivante :

Pour toute utilisation d'un théorème assimilable à une instanciation, le rôle de la figure ne peut être qu'illustratif.

Les démonstrations

Si les deux textes de démonstration relèvent du même fonctionnement, en revanche les démonstrations ne sont pas les mêmes, tout simplement parce que ce n'est pas le même théorème que l'on utilise. Cela se traduit par le fait que la première démonstration implique un calcul, et donc un changement de registre, et la seconde, non. Mais d'un point de vue cognitif, ce n'est pas cela le plus intéressant.

La seconde démonstration se réduit à un pas et la première ne comporte qu'un pas impliquant un fonctionnement déductif explicite (cf. la conférence «écriture et compréhension» IIIa). Et comme nous l'avons vu, ces pas donnent lieu à une double lecture, l'une déductive et l'autre argumentative. Autrement dit, ces deux démonstrations requièrent une démarche de raisonnement minimale, laquelle peut être effectué selon un mode qui requiert un contrôle conscient de la validité du pas effectué, ou selon un mode plus constatif du cas d'instanciation d'un énoncé plus général. La difficulté apparente de la démarche tient essentiellement au coût descriptif inévitable qu'entraîne la désignation de chacun des objets de la situation géométrique envisagée. Ce n'est donc pas sur de telles démonstrations, c'est-à-dire des démonstrations qui ne requièrent qu'un seul théorème, et dont l'utilisation peut se réduire à un seul pas proprement déductif, que les élèves peuvent prendre conscience à la fois de la spécificité, de la nécessité et de la fécondité du raisonnement déductif par rapport à de simples justifications argumentatives.

Il sera donc difficile de voir apparaître des dysfonctionnements dans le raisonnement, dysfonctionnements qu'il ne faut pas confondre avec des lacunes ou des trous dans la démonstration. En revanche, ces deux démonstrations peuvent convaincre du caractère arbitraire et inutile de toute démonstration, étant donné leur congruence avec les figures nécessaires à la compréhension des énoncés. Il suffit de comparer la colonne de droite à la colonne de gauche plus haut.

Conclusion

Si la démonstration ne se réduit jamais à son texte, il n'y a pas de démonstration sans texte. En ce sens, l'analyse d'un texte de démonstration ne peut pas se réduire à l'analyse de la seule démonstration, car alors on glisse tout de suite vers la recherche d'une autre méthode pour démontrer et on est conduit à produire un autre texte.

Un texte de démonstration ne soulève pas seulement des problèmes de rédaction mais des problèmes de délimitation. Pour faire l'analyse des deux textes ci-dessus, nous avons dû prendre en compte un bloc ou un ensemble de propositions qui n'étaient pas toutes dans le même espace page éditorialement organisé.

Est-ce accidentel ou cela vaut-il pour n'importe quel texte de démonstration ? La réponse est évidente : cela vaut pour n'importe quel texte de démonstration. Il ne faut pas oublier qu'**une démonstration peut être envisagée à l'échelle d'un extrait et à l'échelle d'une œuvre** (conférence «écriture et compréhension» fin de la première partie). Didactiquement, c'est toujours à l'échelle de l'extrait, localement dans le *hic* et *nunc* du raisonnement effectué que l'on envisage la démonstration. Le texte de démonstration correspond alors au découpage de la mise en page, ou de la production de l'élève qui suit l'énoncé donné par l'enseignant. Mais c'est une illusion de perspective, car la démonstration doit aussi être envisagée à l'échelle de l'œuvre, ne serait-ce que par le fait que les théorèmes ou les définitions à utiliser ont été exposées, lues, démontrées dans un chapitre antérieur, dans une séance antérieure et qu'ils sont nécessaires, non en tant que connaissances mais en tant qu'énoncés qui font fonctionner l'expansion discursive de la démonstration, c'est-à-dire en tant que règles de détachement. Ce ne sont donc pas des connaissances «**décontextualisées**» dont il faut se rappeler, connaissances qui resteraient «hors texte», ce sont les éléments moteurs de la progression du texte et de la démonstration. Ainsi, pour les deux démonstrations de F. G.-M. , il a fallu aller rechercher dans l'ouvrage les énoncés indexés sous les numéros 435 et 447. Un texte de démonstration se situe nécessairement dans ce va-et-vient entre l'échelle de l'extrait et l'échelle de l'œuvre, laquelle en mathématique correspond à une construction théorique.

Les problèmes de rédaction sont doubles. Ils concernent à la fois la compréhensibilité des formulations et la validité de ce qui est énoncé. Nous laissons ici de côté la question de l'implicite.

La compréhensibilité des formulations tient à la complexité des opérations discursives parfois nécessaires pour arriver à désigner un objet. Les deux textes de F. G.-M. en offrent un bel exemple. Certes, il y a une opération discursive très simple pour désigner un objet, c'est celle que nous avons appelé «désignation pure» : on prend une lettre, un caractère comme nom de cet objet (un point) et on peut ainsi désigner d'autres objets, un triangle par exemple, en concaténant des lettres (AOB). Pour désigner des segments, cela a l'avantage de pouvoir passer à des traitements type calcul algébrique. Le premier texte de démonstration proposé, celui extrait du manuel de Terracher, s'inscrit dans cette dynamique plus économique.

La validité du raisonnement est très facile à contrôler dans la mesure où il se réduit à un pas pour une démonstration et un pas et un calcul élémentaire pour l'autre.

En résumé la difficulté de ces deux textes ne tient pas aux raisonnements mais au coût discursif de la désignation des objets. Celui-ci peut détourner l'attention de l'organisation déductive du discours.

Nous nous en sommes tenus dans toute cette analyse aux deux textes les plus anciens, ceux qui font une large place à la langue naturelle. Nous avons laissé de côté celui plus récent qui privilégie l'écriture symbolique et permet de court-circuiter le coût discursif de la désignation des objets en langue naturelle. Ces écritures techniques posent d'autres problèmes pour l'apprentissage, en particulier des problèmes de discrimination et d'identification des unités discursives symboliques ou formelles. De toutes façons, négliger le recours à la langue naturelle au profit de ces écritures plus techniques et plus puissantes ne serait pas seulement dommageable pour la prise de conscience du fonctionnement d'un raisonnement valide, ce serait également dommageable pour la prise de conscience des contraintes inhérentes à l'élaboration et à l'utilisation de définition.

Dans l'analyse d'un texte de démonstration, il ne faut donc pas seulement prendre en compte les objets mathématiques et leurs propriétés, il faut également tenir compte des opérations discursives effectuées, sans lesquelles d'ailleurs aucun raisonnement ne serait possible. C'est seulement à partir de ces opérations que l'on peut analyser et évaluer la pertinence des formulations et des enchaînements, ainsi que le degré acceptable de ce que l'on laisse implicite dans le déroulement discursif de la démonstration.

IV. Intervention de Jean Houdebine

La comparaison des trois démonstrations me conduit à formuler cinq remarques.

Nommer des points, tracer des droites

La première démonstration peut facilement s'analyser comme une suite de pas alors que, pour les deux dernières, on introduit dans le texte des points et des droites qui ne font pas partie des données. Le fait que ces points soient introduits sur la figure ne supprime pas la différence ; la production des deux dernières démonstrations demande de répondre à la question : "quels points faut-il introduire, quelles droites faut-il tracer ?"

Pour mettre mieux en évidence ces démarches, on aurait pu commencer la deuxième démonstration par : *considérons le centre O du parallélogramme ABCD et le point F milieu de [BC].*

Démonstration et résolution de problème

La première démonstration se présente vraiment comme un enchaînement de pas. Il n'y a aucune indication sur la façon dont on a découvert la solution du problème. Un tel texte sera probablement de peu d'utilité pour résoudre des problèmes du même type.

La deuxième démonstration, au contraire est plus un texte décrivant les idées essentielles de la solution du problème qu'un texte où les structures déductives sont mises en évidence. Trois indices vont dans ce sens : les points nouveaux ne sont introduits que par la figure ; la troisième médiane *(AF),* citée dans le texte, est inutile pour la démonstration ; la figure contient aussi de nombreuses droites inutiles.

Pour la troisième, la structure déductive est un peu plus mise en évidence : le texte ne contient pas de droite inutile et la formulation "*considérons le triangle AOB*" fait mieux apparaître que l'on va instancier un théorème que la formulation "*du triangle ACB*". Il est probable que la figure trop riche a été dessinée pour la deuxième démonstration.

Des énoncés différents

Le premier propose de montrer un alignement, le second donne l'alignement. Cette différence ne change sans doute pas de manière significative la difficulté du problème.

Mais elle change la difficulté de produire une démonstration.

Si l'on utilise le calcul vectoriel, le premier énoncé conduit à une démonstration plus simple, car elle se réduit à une traduction simple des données en termes vectoriels suivi d'un enchaînement de pas.

Dans le cas du second énoncé, la traduction en termes vectoriels des données est nettement plus complexe. Pour traduire, en effet, la donnée "*A, E et C sont alignés* "en termes vectoriels, il faudrait introduire un objet qui ne fait pas partie des données, soit le coefficient k tel que :

$$\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AC}$$

De même pour écrire que I, E et D sont alignés il faut introduire un k' tel que :

$$\overrightarrow{IE} = k'\ \overrightarrow{ID}$$

Si l'on adopte ce point de vue on pourrait obtenir le texte suivant :

Texte 1 : Comme E est le point de rencontre de (AC) et de (ID), il existe k et k' tels que

$$\vec{AE} = k\,\vec{AC} \quad et \quad \vec{IE} = k'\,\vec{ID}$$

On a d'après la relation de Chasles :

d'une part : $k'\,\vec{ID} = k'\,\vec{IA} + k'\,\vec{AD}$

d'autre part : $\vec{IE} = \vec{IA} + \vec{AE} = \vec{IA} + k\,\vec{AC} = \vec{IA} + k\,(\vec{AB} + \vec{AD})$

Comme $\vec{AB} = 2\,\vec{AI}$ *on obtient :* $\vec{IE} = (1 - k)\,\vec{IA} + k\,\vec{AD}$.

De l'égalité $\vec{IE} = k'\,\vec{ID}$ *on déduit : k' = k et k' = 1 - 2k, car* $\vec{IA}$ *et* $\vec{AD}$ *ne sont pas colinéaires. D'où k = k' = 1/3.*

Une autre solution serait d'introduire le point *F* situé au tiers de *[DI]* et de montrer que *E = I.* Dans les deux cas, on introduit une démarche globale : nommer un objet dont on connaît l'existence.

Au contraire, dans le cadre de la géométrie élémentaire c'est le second énoncé qui conduit à une démonstration plus simple. Comme nous l'avons indiqué plus haut les démonstrations correspondant à cet énoncé utilise des objets qui ne sont pas dans l'énoncé, mais une figure suffit à les définir et, au niveau du texte, cette démarche peut être complètement sous-entendue. En revanche, dans le cas du premier énoncé, il me semble qu'on ne peut éviter une démarche du type point dédoublé : on introduit F point d'intersection de *(DI)* avec *(AC)* et on montre que *E = F.* Pour éviter ce type de démarche, il faudrait avoir à sa disposition un énoncé du type : "*si une droite passe par un sommet d'un triangle et par le point qui se trouve aux deux tiers d'une médiane issue d'un autre sommet, c'est aussi un médiane*". Mais les élèves ne disposent que du théorème : "*le point de rencontre des médianes est au deux tiers de celles-ci*".

Cela donnerait par exemple :

Texte 2 : Soit F le point d'intersection de (DI) et (AC). Dans le triangle ABD, (DI) et (AC) sont deux médianes. Donc F est au tiers de [ID]. Donc F = E et E est sur la droite (AC).

Dans une telle démonstration, non seulement on voit apparaître la démarche globale : *nommer un point dont on connaît l'existence* dans une situation où elle ne peut être sous-entendue, mais encore un point de la figure est définie de deux manières et il est difficile dans l'écriture de la démonstration de bien distinguer à chaque moment les propriétés de ce point qui sont démontrées de celles qui sont à démontrer.

Méthode et démonstration

La démonstration avec la méthode vectorielle contient d'une certaine manière un algorithme, ce qui n'est sans doute pas le cas des deux dernières démonstrations.

Une fois que le sous-but : *montrer l'égalité* $\vec{AC} = 3\,\vec{AE}$ est identifié, l'algorithme à appliquer serait :

- on traduit les données en égalité vectorielle,

- on exprime les deux membres de l'égalité en fonction de vecteurs de bases bien choisis, en utilisant la relation de Chasles et les égalités obtenues à partir des données. Cet aspect n'est pas du tout mis en valeur par le premier texte.

Le texte suivant le mettrait mieux en valeur :

Texte 3 : On a par hypothèse $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AI} = 1/2\ \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{IE} = 1/3\ \overrightarrow{ID}$.

Calculons $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{ID}$. *On obtient :*

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AI} + 1/3\ \overrightarrow{ID}$$

et

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} + 2\ \overrightarrow{AI} = 3\ \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$$

Donc $\overrightarrow{AC} = 3\ \overrightarrow{AE}$.

Le texte proposé est au contraire rédigé pour mettre en valeur l'enchaînement des pas de démonstration ; les énoncés de théorèmes sont sous-entendus mais faciles à rétablir :

Si ABCD est un parallélogramme : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Si I milieu de [AB] : $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{AI}$.

La relation de Chasles.

Seules les dernières lignes des deux paragraphes se présentent comme des calculs.

Équivalence sémantique ou pas de démonstration

Pour les élèves comme pour les mathématiciens, il arrive qu'une proposition intervenant dans la démonstration soit considérée comme une donnée alors qu'elle n'est pas explicite dans l'énoncé. La démarche n'est pas un pas de démonstration sous-entendu, mais plutôt l'idée que la proposition en question n'est qu'une autre manière d'exprimer ce qui est dans l'énoncé.

Par exemple la proposition $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{AI}$ peut être ressentie par les élèves comme une équivalence sémantique de *I milieu de [AB]*. Le premier texte la présente plutôt comme la conclusion d'un pas (énoncé du théorème entre parenthèses comme dans les pas précédents).

Au contraire, le texte 3 ci-dessus la présente comme une équivalence sémantique : *on a par hypothèse*.

Pour des élèves peu habitués au jeu de la démonstration, il est difficile de comprendre l'utilité de pas de démonstration de ce type, quand ils pensent en termes d'équivalence sémantique.

V. *Intervention de Colette Laborde*

Choix du problème et de ses énoncés

Les énoncés de problèmes dont les solutions ont été soumises à la discussion de la table ronde gravitent autour du même problème qui peut être résumé par l'énoncé de la propriété bien connue : les droites joignant un milieu d'un côté d'un parallélogramme à l'un des sommets opposés au côté partagent en trois segments égaux la diagonale issue de ce sommet (Fig.1).

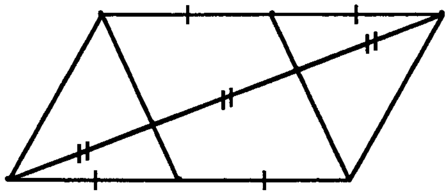


Fig.1

Le problème est classique à la fois dans les mathématiques et dans leur enseignement. C'est un cas particulier de la construction du segment de longueur 1/n (Guillerault, 1997) (Fig.2).

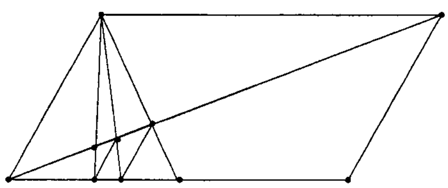


Fig.2

Il figure dans de nombreux traités du début du XX^{e} siècle dont le fameux recueil d'exercices et problèmes de F. G.-M. (1920) dont deux solutions sont ici présentées. On peut le trouver dans un ouvrage plus récent de géométrie comme Carral (1995, ex 48 p.40). Il est analysé dans Pluvinage (1992-3) comme ayant été proposé à des élèves de collège lors de recherches sur la démonstration conduites à l'IREM de Strasbourg.

Il s'agit donc à la fois d'un problème qui rend compte d'une propriété fondamentale sur le parallélogramme et d'un problème qui suscite de l'intérêt dans l'enseignement par le type de démonstration qu'il permet (Pluvinage *op.cit.*) ou par la multiplicité des cadres dans lesquels il peut être traité : solutions géométrique, vectorielle, barycentrique. C'est la raison pour laquelle le manuel Terracher de Seconde (1994) présente ce problème à deux reprises dans un TP, l'un avec une solution géométrique (p. 226), l'autre avec une solution vectorielle (p.291).

Les énoncés du problème retenus pour la discussion diffèrent. Dans le Terracher, le point E est défini quasi vectoriellement par l'intermédiaire du segment [IE]. Sont donnés en effet, la direction du vecteur $\overrightarrow{IE}$, son sens et sa norme sans qu'il soit explicitement question du vecteur $\overrightarrow{IE}$.

On peut voir là un choix délibéré du manuel pour produire un exemple simple d'usage du vectoriel permettant de justifier une propriété géométrique. Si E avait été défini comme le point d'intersection de la droite (AC) avec la droite (ID), la démonstration aurait été plus complexe (cf. la contribution de Houdebine à la même table ronde) et le TP aurait perdu *de facto* son caractère exemplaire de l'efficacité d'une démonstration par les vecteurs. L'énoncé de F. G.-M. présente en revanche le point N (jouant le rôle de E) comme le point d'intersection de (AH) avec la diagonale du parallélogramme, car il s'agit bien là de l'énoncé le plus intéressant pour un usage ultérieur de la propriété démontrée.

Trois textes de démonstration : trois styles

Trois registres

Au premier coup d'œil même pour un néophyte, la forme des trois textes de démonstration diffère. Celui du Terracher a essentiellement recours à l'écriture symbolique et en particulier au registre symbolique vectoriel dont les marques visibles sont les flèches.

La première solution du F. G.-M. fait surtout appel à l'écriture symbolique d'égalités de distance tandis que la deuxième solution est écrite en langue naturelle comprenant des désignations d'objets géométriques droite, segment, parallélogramme. Une des phrases est d'ailleurs particulièrement complexe :
« or on sait que la droite AM, qui passe par le milieu de la médiane OG du triangle AOB, détermine sur la base OB un segment OM qui est la moitié de BM. »

Il s'agit d'un effet de concision habituel au discours mathématique de démonstration ; en particulier, l'auteur juxtapose dans une même phrase les prémisses et la conclusion d'un pas de démonstration. La complexité tient au souci de l'auteur d'exprimer le plus complètement possible l'énoncé de la règle d'inférence par l'exposé des prémisses. La relative appositive « qui passe par le milieu de la médiane OG du triangle AOB » joue ce rôle de rappel de la règle d'inférence. Dit encore autrement, le texte compense l'absence de structure ternaire du pas de démonstration (règle d'inférence non explicitée en tant que telle) par une formulation des prémisses destinée à évoquer la règle d'inférence.

Il est intéressant de constater que la première démonstration du F. G.-M. est au contraire constituée de phrases courtes sans rappel dans les prémisses des propriétés qui permettent d'appliquer la règle d'inférence. La raison en tient peut être au caractère plus usuel des théorèmes ou définitions utilisés (définition de la médiane, position du centre de gravité sur la médiane). Le théorème numéroté 435 dans le F. G.-M. est en effet moins classique et se présente plus comme le résultat d'un problème se révélant particulièrement efficace dans ce nouveau problème qui n'est qu'une « sur-configuration » de la configuration du 435. On peut voir dans ces variations chez un même auteur l'incidence du statut institutionnel des règles d'inférence sur la forme des pas de démonstration.

Le manuel Terracher mentionne de façon systématique mais lapidaire la justification de la relation vectorielle écrite en la plaçant entre parenthèses : « Chasles », « ABCD est un parallélogramme » « I est le milieu de [AB] ». On peut penser que ces parenthèses indiquent le caractère temporaire de ces mentions faites ici dans un souci pédagogique mais amenées à disparaître une fois que les maniements des relations vectorielles iront de soi pour les élèves.

La référence au dessin

Dans les deux ouvrages, Terracher et F. G.-M. figure un dessin accompagnant l'énoncé. Mais la référence au dessin y diffère profondément.

Elle est inexistante dans le manuel Terracher alors que le support visuel du dessin aide à écrire les traductions vectorielles de configuration géométrique comme celles du parallélogramme ou du milieu ($\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{AI}$). Il est encore plus frappant que la relation $\overrightarrow{AC} = 3\ \overrightarrow{AE}$ soit qualifiée de « visible » à partir des relations vectorielles $\overrightarrow{AC} = 3\ \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + 1/3\ \overrightarrow{ID}$. Il ne s'agit absolument pas de voir sur le dessin par la représentation des sommes vectorielles en jeu (Fig.3) mais de reconnaître la colinéarité directement sur les écritures vectorielles. Il s'agit très probablement d'une intention didactique visant à établir le calcul vectoriel comme outil d'étude des configurations ; mais cet outil est externe à ces dernières et possède des règles spécifiques indépendantes des configurations et donne lieu à ce que Bkouche (1994, p.204) appelle des démonstrations langagières

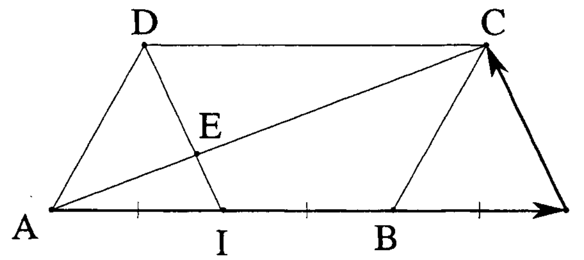


Fig.3

La référence au dessin n'est pas explicite dans le F. G.-M. mais se fait de façon indirecte par les désignations des points non introduites dans le texte mais identifiables sur le dessin. Il est donc impossible de lire les deux démonstrations du F. G.-M. sans recours fréquent au dessin, à la fois pour repérer les éléments dont il est question et pour vérifier des assertions sur ces éléments non justifiées comme : « AF, CG, BO sont les médianes du triangle ACB », « La droite AF, diagonale du parallélogramme ABFE », « la médiane OG du triangle AOB ». Le recours au dessin s'impose, une mémorisation de ce dernier étant quasi-impossible compte tenu de sa complexité. Le recours au dessin permet de retrouver les hypothèses de l'énoncé non rappelées dans le texte de la démonstration qui permettrait de justifier l'assertion. Ainsi, sur le dessin, on peut constater perceptivement que G est le milieu de AB et par là remonter à l'énoncé du problème qui stipulait que l'on joignait un sommet au point milieu du côté opposé.

Le fonctionnement du dessin dans la démonstration est donc très différent dans les deux ouvrages : évité dans le manuel de Seconde qui veut éliminer le recours au dessin dans la démonstration vectorielle, il est omniprésent implicitement dans le traité de F. G. - M. qui offre deux démonstrations, toutes les deux dans le cadre géométrique.

Les implicites

On a déjà évoqué plus haut l'absence de prémisses et de règles d'inférence dans les deux textes de F. G.-M. Citons d'autres implicites de ces textes. La réécriture de BO en BD/2 (1ère démonstration) n'est pas justifiée. De même, la raison pour laquelle la diagonale (AF) du parallélogramme ABFE passe par le milieu de la droite des milieux (OG) n'est pas mentionnée. Il apparaît à l'évidence des choix de l'auteur dans le jeu entre explicite et implicite dans ses textes de démonstration. Les justifications considérées comme allant de soi (théorèmes connus) pour le lecteur ne sont pas explicitées. Le texte de démonstration se situe dans une situation discursive entre un locuteur et un ou des lecteurs et est donc susceptible de variabilité suivant les intentions de l'auteur dans la recherche d'un équilibre entre l'économie d'écriture poursuivie et ce qu'il imagine des connaissances ou d'absence de connaissances de ses lecteurs potentiels.

De l'élaboration de la démonstration au texte

Une caractéristique commune

Les trois textes en revanche présentent la solution comme se déroulant séquentiellement sans retour sur des points non justifiés ou sans indication d'heuristique. Et pourtant, d'une part la sous-configuration de départ dans les deux textes de F. G.-M., d'autre part la décomposition du vecteur $\overrightarrow{AC}$ en les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dans le texte du Terracher, sont cruciales quant au type de démonstration fourni, voire quant à sa faisabilité. Une caractéristique du problème est pourtant la multiplicité des démonstrations possibles, que ce soit en calcul vectoriel ou en géométrie des configurations.

Multiplicité des démonstrations

Le ressort de la démonstration vectorielle tient en fait à la possibilité d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sur une base de deux vecteurs. Les démonstrations vectorielles diffèrent de par le choix de cette base. Il y a donc une grande variété possible de démonstrations suivant que l'on choisit d'exprimer les vecteurs à comparer sur les bases comme ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$), ($\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$), ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DB}$) ou ($\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$).

Le ressort de la démonstration géométrique tient à la reconnaissance d'une sous-configuration construite autour d'un triangle et de ses médianes, ou d'un triangle, d'une médiane et de la droite qui joint un sommet au milieu de la médiane. Deux solutions sont proposées par F. G.-M., la première autour de la première sous-configuration et la deuxième autour de la deuxième sous-configuration. Il est à noter qu'au lieu de partir du triangle AOB dans la deuxième démonstration, il aurait pu partir du triangle ADB, montrer que L est le milieu de [AH] et conclure par le même théorème que DN est le tiers de DB (Fig.4).

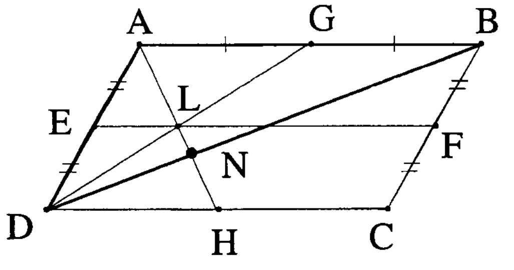


Fig.4

Une autre démonstration possible repose sur le double usage de la même sous-configuration : un triangle et une droite des milieux qui est en fait sous-jacente aux deux sous-configurations évoquées plus haut. Il s'agit du triangle ANB et de [GM] et du triangle DMC et de [NH] (images l'un de l'autre par symétrie centrale autour de O) (Fig.5). On démontre dans le triangle ANB que BM = NM et dans le triangle DMC que NM = DN.

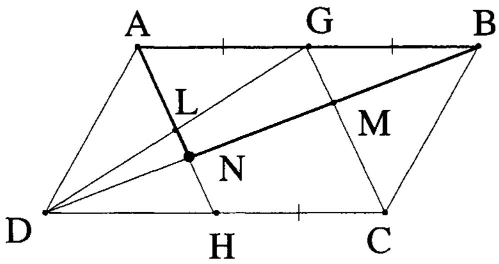


Fig.5

Effacement de la démarche d'élaboration

Ces exemples illustrent à merveille que le texte de démonstration est un produit construit qui ne donne aucune trace du processus et des choix afférents qui lui ont donné naissance, que ce soit dans un texte proposé par un manuel scolaire à titre d'exemple ou dans un traité destiné à des lecteurs plus spécialisés. Cette rupture a déjà été soulignée, en particulier par Duval (1991) qui s'est penché sur la phase de rédaction. La phase heuristique de recherche a été l'objet de nombreux travaux depuis longtemps. Le lien entre les deux phases a peut-être en revanche été plus laissé dans l'ombre.

Références bibliographiques

BKOUCHE R. (1994)
De la démonstration en géométrie In : *Le dessin géométrique de la main à l'ordinateur,* (pp. 189-232) Actes du colloque Inter-IREM Géométrie 1994, Editions : IREM de Lille.

CARRAL M. (1995)
Géométrie Paris : Editions Ellipses.

F.G.-M. (1920)
Exercices de Géométrie 6ème édition Mame et De Gigord, réimpression Paris : Editions Jacques Gabay.

DUVAL R. (1991)
Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics, 22*, p. 233-261.

GUILLERAULT M. (1997)
« Euclide, Fibonacci, Sketchpad, et Cabri-géomètre » ou comment déterminer le 1/n-ième d'un segment, *exposé à la séance du 9 janvier 1997 du Cercle des Géomètres disparus,* Laboratoire Leibniz-IMAG, 46 av Félix Viallet 38 000 GRENOBLE.

PLUVINAGE F. (1992-3)
Didactique de la résolution de problèmes, *Petit x*, n° 32, p. 5-24