FREDDY BONAFÉ
MARIE-CLAIRE COMBES

Narrations de recherche, points d'appui pour la démonstration

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4
« Produire et lire des textes de démonstration », , p. 239-257
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_239_0>

Atelier n°12

NARRATIONS DE RECHERCHE,

POINTS D'APPUI POUR LA DEMONSTRATION

Freddy Bonafé
Marie-Claire Combes

I. Les narrations de recherche

Depuis de nombreuses années, les enseignants du groupe de Géométrie de l' IREM de Montpellier utilisent dans leur pratique enseignante, les "narrations de recherche". Ces productions écrites d'élèves en situation de recherche d'un problème permettent d'étudier assez finement leurs démarches de pensées dans la résolution d'un problème (BONAFE, BRUNET, PELOUZET 1992).

Nous proposons ici d'analyser ces écrits suivant deux points de vue :

- analyse du cheminement qui conduit des procédures de résolution jusqu'à la preuve, à propos d'un problème de type ouvert traité par des élèves de la 6ème à la 1ère ;
- analyse à partir d'une grille de lecture des différents types d'écrits que l'on peut obtenir au cycle central du collège sur des problèmes fermés.

II. Des procédures de résolution à la preuve

II.1 Problématique

De nombreuses études ont mis en évidence les diverses fonctions de la démonstration (BKOUCHE 1989 ; GAUD 1989), ainsi que les obstacles auxquels se heurtent les élèves dans la recherche et la rédaction de démonstrations (HOUDEBINE 1990).

"Lorsqu'on parle de raisonnement, il ne faut pas oublier que son rôle premier est celui d'un dépassement de la connaissance empirique en ce sens qu'il s'agit de faire l'économie de l'expérience, soit parce que celle-ci est fastidieuse, soit parce qu'elle est incertaine, soit encore parce qu'elle est inaccessible".

Cette remarque de BKOUCHE 1989, qui introduit ce qu'il désigne comme "caractère a priori, caractère de nécessité et caractère d'universalité de la démonstration", est à l'origine de notre problématique.

Par quels traitements les élèves peuvent-ils parvenir à partir de cas particuliers à dégager des résultats généraux ? Peut-on parmi leur productions, ou à l'intérieur de ces dernières, établir une frontière nette entre les écrits qui seront qualifiés de démonstrations et les autres ?

II.2 Particulier et général

Il n'est pas rare de rencontrer dans les annotations de copies d'élèves, des remarques du type "ceci n'est qu'un cas particulier", ou bien "ces quelques exemples ne permettent pas de conclure dans le cas général".

Encore faut-il s'entendre sur ce que recouvrent les termes de particulier et de général car parfois, le particulier présente un caractère de généralité... Pour préciser notre propos, voici deux extraits de traités d'arithmétique du siècle dernier.

BURAT E. (1875) : "Traité d'arithmétique à l'usage des élèves des Lycées et Collèges et des candidats aux écoles du Gouvernement".

> *"**Proposition 1** : - Lorsqu'un nombre divise un produit de deux facteurs et qu'il est premier avec l'un des facteurs, il doit diviser l'autre.*
>
> ***Démonstration** : - Soit le nombre 15 qui divise le produit 92×60 ; il est premier avec 92, je dis qu'il divise 60. En effet, le plus grand diviseur commun aux nombres 15 et 92 est 1 ; par conséquent celui des nombres 15×60 et 92×60 est 60. Ceci posé, j'observe que 15 divise 92×60 par hypothèse, et 15×60 qui est un multiple de 15 ; or quand un nombre en divise deux autres, il divise aussi leur plus grand diviseur commun : donc 15 divise 60".*

HUMBERT H. (1893) : "Traité d'arithmétique à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants aux baccalauréats... avec des compléments destinés aux candidats des grandes écoles du Gouvernement".

> *" 1° Lorsqu'un nombre divise un produit de deux facteurs et qu'il est premier avec l'un deux, il divise l'autre.*
>
> *Soit c un nombre qui divise le produit ab de deux nombres donnés, et supposons c premier avec b ; cela veut dire que c et b ont pour plus grand commun diviseur l'unité ; donc les produits ac et ab ont pour plus grand commun diviseur le nombre a. D'autre part le nombre c divise ac dont il est facteur, il divise ab par hypothèse ; donc il divise le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, c'est-à-dire a.*

Il semble qu'il y ait là, sur la notion de preuve en arithmétique, une singularité au regard de ce que l'on appelle communément une preuve. Cela tient à la fois du caractère général que présentent certains cas particuliers à l'égard du contexte, et de la non contradiction.

Une autre illustration peut en être fournie avec le jeu du quitte ou double. La vue des premiers gains possibles que sont 1, 2, 4, 8, 16 permet de conjecturer 2^{n-1} pour le gain possible à la question n. Devant l'évidence qu'il s'agit de la suite des puissances croissantes de 2 et sans que ce résultat puisse être mis en défaut par des exemples, on s'accorde à dire qu'il est vrai. Ce résultat est-il pour autant démontré ?

II.3 Le problème

Nous avons proposé à 195 élèves des classes de 6ème, 5ème, 4ème, 3ème, 2nde et 1ère S de traiter sous forme de narration de recherche le problème suivant :

> *"Etant donnés quelques points placés sur une feuille, combien peut-on tracer de segments différents joignant deux quelconques de ces points ?"*
>
> *Compléter le tableau suivant :*

Si j'ai ...	Je peux tracer au plus ...
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	6 segments
5 points	
6 points	
7 points	
12 points	
20 points	
108 points	
n points (n est un entier positif)	

Pour ce genre de travail auquel la plus grande partie de nos élèves sont habitués, nous complétons généralement l'énoncé par les consignes ci-après :

> *Vous raconterez sur votre feuille :*
> *1) Les différentes étapes de votre recherche (vous pouvez minuter le temps, joindre vos brouillons...)*
> *2) Les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait progresser, ou changer de méthode (il vaut mieux chercher seul...)*
> *3) La façon dont vous expliqueriez votre solution à un (ou une) camarade que vous devez convaincre.*
>
> *Attention : L'évaluation ne portera pas sur la nature de la solution (juste, fausse, incomplète...) mais sur les trois points évoqués ci-dessus.*

La répartition des élèves était la suivante :

Classe	**6ème**	**5ème**	**4ème**	**3ème**	**2nde**	**1ère S**
Effectif	60	25	22	22	29	37

Nous avions pour objectifs de :
- Repérer les procédures de recherche utilisées par les élèves, observer leurs traitements du passage du particulier au général, de l'équivalence de formules numériques ainsi que l'introduction du nombre n .
- Favoriser l'apprentissage de la démonstration et son enracinement géométrique dans ce cas.

II.4 Méthodes de recherche des élèves

On relève trois directions différentes dans les recherches conduites par les élèves :
- **Comptage effectif** des segments avec ou sans figure.
- Recherche d'une **relation numérique à partir des premiers résultats du tableau**.
- **Transformation d'une formule en une autre** lorsque plusieurs formes de réponses ont été obtenues.

Les deux premières concernent la recherche d'une solution au problème posé. La dernière est une conséquence des résultats entrevus et d'une tentative de réduction du nombre de calculs.

Chacune de ces directions fait référence à un certain nombre de procédures énoncées ci-dessous. Nous n'avons retenu que celles apparaissant au moins dans deux copies différentes.

Comptage effectif des segments

Procédure 1 : "Ajouter point"

L'élève se rend clairement compte que lorsqu'il ajoute un point à la figure déjà tracée et qui en comporte p , il augmente le nombre de segments de p .

Cette procédure conduit à $N_n = N_{n-1} + (n - 1)$.

Procédure 2 : "Compter et ajouter point"

L'élève se rend clairement compte que lorsqu'il ajoute un point à la figure déjà tracée et qui en comporte p , il augmente le nombre de segments de p . Il compte les segments en commençant à partir de 2 points.

Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)$.

Procédure 3 : "Compter avec méthode"

L'élève compte méthodiquement les segments pour n points. Du premier point, il dénombre $n - 1$ segments, du second $n - 2$, etc.

Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + ... + 1$.

Procédure 4 : "Segments et vecteurs"

L'élève compte méthodiquement les segments pour n points. Du premier point, il dénombre $n - 1$ segments, du second $n - 1$ encore, etc. Il ajoute qu'en procédant ainsi chaque segment est compté deux fois.

Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = ((n - 1)\, n) : 2$.

Procédure 5 : "Faire le tour"

L'élève compte méthodiquement les segments pour n points. Il commence par en compter n sur le pourtour de la figure. Ensuite, à partir d'un point quelconque, il en compte $n - 3$, d'un autre point quelconque il en compte également $n - 3$, puis $n - 4$, puis $n - 5$ ...

Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = n + 2(n - 3) + (n - 4)) + \ldots + 1$.

Procédure 6 : "Groupes de points"

Pour dénombrer les segments formés à l'aide de n points, l'élève établit deux groupes de points, un de p points, l'autre de $n - p$ et utilise ces deux résultats.

Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = N_p + N_{n-p} + p\,(n - p)$.

Procédure 7 : "Segments"

Cette procédure est voisine de la 4 mais son début diffère. L'élève compte tous les couples de points, soit n^2 , il enlève les couples composés du même point, soit n , puis précise qu'en procédant ainsi chaque segment est compté deux fois.

Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = (n^2 - n) : 2$.

Recherche d'une relation à partir des premiers résultats du tableau

Procédure 8 : "Proportionnalité"

En observant le tableau de nombres, l'élève émet l'hypothèse que le nombre de points et le nombre de segments sont proportionnels. Il vérifie et rejette cette hypothèse.

Procédure 9 : "Accroissements proportionnels"

En observant le tableau de nombres, l'élève émet l'hypothèse que l'accroissement du nombre de points et l'accroissement du quotient du nombre de segments par le nombre de points sont proportionnels.

Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = ((n - 1)\, n) : 2$.

Procédure 10 : "Induction directe"

En observant le tableau de nombres, l'élève émet une hypothèse autre que la proportionnalité qui est confirmée par les résultats qu'il peut contrôler.

Cette procédure conduit pour le résultat final à un de ceux des procédures 1, 2, 3, 4.

Procédure 11 : "Représentation"

L'élève qui a obtenu quelques résultats par comptage place dans un repère les points ayant pour abscisse le nombre n et pour ordonnée le nombre de segments.

Procédure 12 : "Fonction carrée"

L'élève a conjecturé par un graphique que le nombre de segments était une fonction du second degré de n . Il cherche à partir de cas particuliers les coefficients du trinôme.

Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = 0{,}5n^2 - 0{,}5n$.

Transformation d'une formule

Procédure 13 : "Simplification par symétrie"

L'élève qui a déjà un résultat à partir des procédures 2 ou 3, soit $N_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)$, soit $N_n = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 1$, veut réduire le nombre de calculs. Il y parvient en sommant les termes symétriques de la progression arithmétique.

Procédure 14 : "Simplification par regroupement"

L'élève qui a déjà un résultat à partir des procédures 2 ou 3, soit $N_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)$, soit $N_n = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 1$, veut réduire le nombre de calculs. Il y parvient en regroupant les termes consécutifs de 1 à 9, puis de 10 à 19, de 20 à 29, etc., et constate que les résultats 45, 145, 245 sont les termes d'une suite arithmétique.

Répartition de ces procédures suivant le niveau scolaire

Procédure \ Classe	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère S
1	4	1	8	6	9	2
2	1	1	1	0	5	2
3	12	4	4	3	10	2
4	8	5	1	4	18	9
5	1	2	0	0	0	0
6	2	0	4	0	2	0
7	0	0	1	0	2	0
8	5	3	5	1	2	1
9	3	3	3	7	5	4
10	22	10	12	17	10	8
11	1	0	1	0	2	0
12	0	0	0	0	0	26
13	0	1	0	1	3	2
14	4	0	0	1	0	0
Total	63	30	40	40	68	56

En relativisant par rapport au nombre d'élèves, pour un total de 100 élèves par niveau :

Procédure \ Classe	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère S
1	7	4	36	27	31	5
2	2	4	5	0	17	5
3	20	16	18	14	34	5
4	13	20	5	18	62	24
5	2	8	0	0	0	0
6	3	0	18	0	7	0
7	0	0	5	0	7	0
8	8	12	23	5	7	3
9	5	12	14	32	17	11
10	37	40	54	77	35	22
11	2	0	5	0	7	0
12	0	0	0	0	0	70
13	0	4	0	5	10	5
14	7	0	0	5	0	0
Total	106	120	183	183	234	150

Cette répartition invite à quelques remarques :

- Le classement même de ces procédures constitue une première tentative en vue d'établir une frontière nette entre les écrits qui seront qualifiées de démonstration et les autres. En effet, il nous a semblé que tous les travaux opérant uniquement sur les nombres, sans un retour sur le comptage, ne pouvaient constituer une preuve, ils relèvent exclusivement du passage au cas général à partir de cas particuliers.

- Concernant le total du nombre de procédures par niveau, le cas des élèves de 1ère S mis à part, une augmentation apparaît. On peut émettre comme hypothèse que l'aptitude à changer de méthode dans la recherche d'un problème croît avec le niveau scolaire. Mais comment expliquer alors le cas des élèves de 1ère S ? Justement par l'accroissement du niveau scolaire ! En effet, le travail réalisé sur les fonctions à ce niveau a eu comme conséquence une utilisation massive de la procédure 12 qui conduit à conjecturer $N_n = 0{,}5\ n^2 - 0{,}5\ n$. Ce résultat n'étant pas mis en défaut par les vérifications réalisées, il est accepté par les élèves.

- Concernant la répartition des procédures, le seul résultat notable concerne la procédure 1 qui semble plus fortement présente à partir de la classe de 4ème, mais il est très difficile de la distinguer de la 2.

- Enfin, on peut relever le poids important de la procédure 10 qui consiste à délaisser à partir d'un certain rang le comptage pour céder la place au travail sur les nombres. Cette procédure conduit dans presque tous les cas à une conjecture correcte, non rejetée car le résultat n'est pas mis en défaut par les vérifications réalisées.

II.5 Le nombre " n "

Au delà de ces procédures, nous avons centré notre intérêt sur l'introduction du nombre n dans les copies, aussi bien pour les élèves ayant utilisé des procédés de comptage que pour ceux qui ont travaillé sur les nombres.

Le nombre n apparaît dans les copies à travers 5 formules différentes :

$$N_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$$
$$N_n = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1$$
$$N_n = ((n - 1)\ n) : 2$$
$$N_n = (n^2 - n) : 2$$
$$N_n = n + 2(n - 3) + (n - 4) + \dots + 1$$

On peut tout d'abord relever que les résultats concernant n points n'apparaissent pas dans toutes les copies, d'ailleurs en 6ème ce n'était pas demandé. D'autre part, l'introduction d'une généralisation prend des formes diverses : elle peut être verbale, à l'aide d'une phrase générale ou bien symbolique, par l'intermédiaire d'une lettre x, a, n ou autre.

En voici la répartition pour un total de 100 élèves par niveau :

Classe	6ème	5ème	4ème	3ème	2nde	1ère S
Elèves ayant généralisé	2	12	45	59	89	89

L'évolution selon le niveau est remarquable. L'aptitude à formuler une règle observée par l'introduction d'une variable, à donner à un résultat son caractère fonctionnel, croît avec le niveau scolaire.

II.6 Démontré ou pas

Les élèves ayant utilisé des procédés de comptage peuvent, en toute rigueur, démontrer leur résultat en généralisant leur raisonnement au cas de n points. Pour les autres, ayant travaillé sur les nombres, la seule preuve possible est un raisonnement par récurrence avec un retour sur la géométrie pour dégager la relation de récurrence. Un tel raisonnement ne peut être fourni à ce niveau.

Concernant le passage au cas général et la trace ou non d'une démonstration, on constate trois comportements différents :

① L'élève fait correctement le raisonnement pour quelques points et le refait ensuite pour n, montrant par là que son traitement des cas particuliers se généralise. Cette généralisation intervient parfois en fin de copie quand il doit raconter à un camarade comment il procède.

② L'élève ne ressent pas la nécessité de faire correctement le raisonnement pour quelques points, après un bref comptage pour les premières valeurs de n, il le fait directement pour n quelconque. Ce raisonnement est parfois illustré par l'application simultanée à un cas particulier.

③ L'élève fait correctement le raisonnement pour quelques points et donne la formule conjecturée pour n. Parfois il la vérifie sur quelques cas et conclut à sa véracité.

Observons la répartition de ces comportements, pour un total de 100 élèves par niveau :

Classe	6ème	5ème	4ème	3ème	2nde	1ère S
①	0	0	0	4	31	37
②	0	0	0	4	27	6
③	2	12	45	51	31	67

Les comportements de type ① ou ② sont effectivement des preuves du résultat avancé. C'est à partir de la classe de 3ème que l'on peut les observer dans les copies.

Le comportement de type ③ ne peut être considéré a priori comme une preuve, même lorsqu'il est accompagné de vérifications. Pourtant ... **on peut se demander si l'exemple, ici, ne peut pas avoir valeur de preuve, car la valeur choisie pour raisonner n'altère en rien la généralité du raisonnement.**

Dans notre problème, le caractère de généralité se dégage de la figure. Dès qu'a été observé le procédé de génération des segments et le procédé de comptage qui s'en dégage, son caractère récurrent ne peut être mis en défaut. Que doit-on attendre des élèves ayant observé ce procédé de génération ? Autrement dit, une fois que les élèves ont perçu le caractère général qui peut être attribué à tout cas particulier, est-il nécessaire pour eux d'en établir la généralité ou bien leur suffit-il de constater qu'il n'est pas contredit ?

L'étude des comportement de type ③ pour lesquels la preuve semble absente, montre deux grandes tendances concernant la généralisation du mode de calcul lorsque celui-ci est effectué à partir d'une procédure de comptage et donc enraciné dans la géométrie :

- L'élève donne comme démonstration la vérification sur des cas pour lesquels il sait qu'elle fonctionne. C'est la **non contradiction** comme le montre la copie en annexe 1.
- L'élève donne sur un cas particulier un raisonnement présentant un caractère général irréfutable. C'est **l'évidence du caractère général** comme le montre la copie en annexe 2.

Ces pratiques étant présentes à tous les niveaux de l'enseignement secondaire, nous avons là deux points d'appui concernant l'apprentissage de la démonstration. La phase de mise en commun et de correction doit montrer l'insuffisance du procédé de non contradiction et la relative faiblesse du procédé dégageant l'évidence du caractère général de quelques cas particuliers.

II.7 Conclusions

Au travers des multiples procédures rencontrées dans ce type de problème, on peut penser que, pour traiter les questions d'exhaustion, on relève deux principales directions de travail :

- du particulier au général avec essai d'explication du général ;
- du particulier au général sans contradiction avérée lors du retour sur le particulier.

La première conduit à terme à la notion de preuve quand elle n'en est pas déjà une. C'est la nécessité d'une explication du cas général lorsque celle-ci est de même nature que les cas particuliers traités qu'il faut faire émerger.

Pour la deuxième, il nous faut amener les élèves à comprendre que dans ce passage du particulier au général vérifié par des exemples, l'utilisation d'un langage formel ne peut masquer l'absence d'une preuve. Nous devons donc dégager des situations pour lesquelles leur façon de faire sera mise en défaut.

Ce n'est pas pour autant que cela suffira, le travail effectué par les élèves de 1ère S le montre bien. Nous savons tous, pour avoir parfois cherché sans succès... que toutes les conjectures sont dans un premier temps acceptables, surtout quand on ne peut les contredire (voir le grand théorème de Fermat par exemple). On doit accepter et même souhaiter que des élèves soient mis dans une situation de recherche et livrent de tels résultats ni démontrés ni contredits. C'est en montrant la multiplicité des approches, en privilégiant le débat que nous parviendrons à semer quelques doutes sur l'évidence et la non contradiction et que pourra surgir la nécessité de la preuve.

III. Exemples d'écrits au cycle central

III.1 Problématique

Lors de la résolution d'un problème, l'élève se trouve face à deux tâches distinctes et successives : la recherche de la solution (phase heuristique) et la rédaction de la solution (phase rédactionnelle).

Il est clair que ces deux tâches doivent faire l'objet d'un enseignement (DUVAL, EGRET 1995), mais rares sont les productions des élèves qui concrétisent la première phase. Les devoirs habituels sont pauvres d'informations concernant l'accès à la démonstration pour l'élève, ce qui rend difficile toute tentative de remédiation.

Les narrations de recherche portant sur des problèmes fermés font très souvent état d'éléments de la première phase et nous renseignent par conséquent sur le degré d'évolution de l'élève quant à la compréhension du statut de la démonstration, au-delà de tout formalisme.

Peut-on dégager des narrations de recherches produites par les élèves quelques critères repérables permettant de mesurer leur évolution dans l'apprentissage de la démonstration ?

Nous avons observé sur de nombreuses classes et dans la durée, au sein d'une même classe, l'articulation entre la forme de l'écrit, le langage utilisé et les procédures des élèves dans leurs travaux de narration. Ces observations décrites par SAUTER 1997 ont permis de mettre en évidence quelques critères repérables.

III.2 Les critères

Nous avons classé en deux catégories les critères observables dans les narrations de recherche portant sur des **problèmes fermés de géométrie**.

Critères sur la forme et le langage

L'écrit est-il personnalisé ? (utilisation de "je")
L'élève a-t-il utilisé un organigramme ?
Peut-on dire des verbes utilisés qu'ils traduisent :
- une observation visuelle ?
- de l'incertitude ?
- de l'assurance ?

Critères sur le contenu et les procédures

La figure est-elle décrite ?
Relève-t-on des confusions entre les données et leurs conséquences observables ?
Peut-on déceler une utilisation des instruments de dessin :
- pour effectuer des tracés ?

pour valider un résultat observable ?
Relève-t-on une référence au mot "théorème" :
marquant la nécessité de sa présence ?
pour citer un résultat du cours sans le positionner dans le contexte ?
pour citer un résultat du cours en le positionnant dans le contexte ?
Observe-t-on un (ou des) changement(s) de stratégie lié(s) à la prise de conscience d'erreurs ?

III.3 Les types d'écrits

L'utilisation de ces critères et de leurs interactions nous a permis de dégager les cinq types d'écrits suivants. On trouvera en annexes 3, 4, 5, 6 et 7 des illustrations de chacun de ces types.

Type 1 : Les narrations descriptions
L'écrit montre un désarroi face à un problème de géométrie, il est personnel mais uniquement descriptif. On relève quelques traces de raisonnement mais pas de référence au mot "théorème".

Type 2 : Les narrations pseudo-démonstrations
L'écrit est totalement ou partiellement impersonnel, c'est parfois un organigramme. Il présente une solution sans mention à une recherche. Sa forme et le vocabulaire employé sont ceux attendus dans une démonstration, le mot "théorème" est présent mais en l'absence d'une analyse de la figure, il y a confusion entre hypothèses et résultats observables.

Type 3 : Les narrations recherches de théorèmes
L'écrit est personnel, rédigé dans un langage naturel. Il traduit une recherche active et parfois le doute. La référence à un théorème est toujours présente, mais le travail n'est pas abouti et les élèves en ont conscience.

Type 4 : Les narrations diagrammes
L'écrit très schématique présente une recherche pertinente. La mise en forme correcte de la solution, avec théorème, se présente sous forme d'organigramme.

Type 5 : Les narrations solutions
L'écrit peut être personnel ou impersonnel (sa forme est parfois voisine de ceux du type 2), mais il fait référence à des théorèmes (cités ou non) qui sont correctement utilisés.

Nous pensons que, de ces cinq types, se dégage une certaine évolution, les types 1, 2, 3, 4 constituent des écrits intermédiaires médiateurs facilitant l'accès au type 5. Mais nous ne pouvons pas affirmer qu'ils constituent un passage obligé. Le type 4 est particulier aux élèves qui ont déjà fréquenté un apprentissage de cette forme de rédaction.

On observe que l'accès au type 5 n'est pas définitif et que suivant la nature du problème posé, il peut y avoir un retour vers d'autres types en fonction de la difficulté relative du questionnement. Un nouveau type intermédiaire entre 3 et 5 apparaît, montrant une grande importance de la phase heuristique et un échec partiel dans la mise en forme de la rédaction de la démonstration.

III.4 Conclusions

Les narrations de recherche, qui donnent aux élèves un espace de liberté, leur permettent souvent de prendre conscience de l'enjeu de la démonstration et facilitent ainsi leur évolution. L'implication personnelle que nécessite ces travaux leur permet d'être plus actifs et plus critiques envers eux-mêmes. Ils peuvent, dans tous les cas, démarrer une recherche et montrer l'état de leur travail à l'enseignant qui peut en faire une analyse.

Les caractères dégagés et notre essai de classification nous ont permis de repérer divers stades de l'élève quant à la compréhension du statut de la démonstration, au-delà de tout formalisme. Il nous a également permis de repérer par le passage d'un type à un autre une réelle évolution de certains d'entre eux.

Bien que l'on ne puisse pas affirmer que les divers types constituent des passages obligés, repérer le type correspondant à un élève donné offre la possibilité de faire porter l'effort sur la phase particulière (heuristique ou rédactionnelle) qui nécessite remédiation.

Références Bibliographiques

BONAFE F. , BRUNET R. , PELOUZET B. (1993)
La narration de recherche : instrument méthodologique d'observations.
Actes du colloque inter IREM Géométrie, Limoges 1992.
IREM de Limoges.

BKOUCHE R. (1989)
De la démonstration.
Actes du colloque inter IREM Géométrie, Mèze 1988.
IREM - USTL Montpellier.

BURAT E. (1875)
Traité d'arithmétique à l'usage des élèves des Lycées et Collèges et des candidats aux écoles du Gouvernement.
Librairie classique BELIN.

DUVAL R. , EGRET M.A. (1993)
Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif.
Repères IREM n° 12.
Topiques.

GAUD D. (1989)
Les deux fonctions de la démonstration.
Actes du colloque inter IREM Géométrie, Mère 1988.
IREM - USTL Montpellier.

HOUDEBINE J. (1990)
Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question.
Repères IREM n°1.
Topiques.

HUMBERT H. (1893)
Traité d'arithmétique à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants aux baccalauréats... avec des compléments destinés aux candidats des grandes écoles du Gouvernement.
Librairie Nony & Cie.

SAUTER M. (1997)
Les narrations de recherche.
Rapport de recherche INRP (à paraître).

Annexe 1

Non contradiction

J'ai trouvé un moyen :

Il faut multiplier le nombre de points par le nombre de points moins 1 puis diviser le résultat obtenu par 2

Démonstration :

$\frac{3 \times 2}{2} = 3$ ou $\frac{3 \times (3-1)}{2} = 3$

$\frac{4 \times 3}{2} = 6$ ou $\frac{4 \times (4-1)}{2} = 6$

$\frac{5 \times 4}{2} = 10$ ou $\frac{5 \times (4-1)}{2} = 10$

Donc pour calculer les gros nombres je vais me servir de cette méthode.

$\frac{12 \times 11}{2} = \frac{132}{2} = 66$

$\frac{20 \times 19}{2} = \frac{380}{2} = 190$

$\frac{108 \times 107}{2} = \frac{11556}{2} = 5778$

Annexe 2

Evidence du caractère général

Pour tracer un segment il faut nécessairement 2 points. Puisqu'il nous faut tout d'abord calculer pour 5 points, le nombre de segments possibles à tracer, nous allons nommer ceux-ci par des lettres (A, B, C, D, E) et nous allons faire un tableau pour chercher ces segments.

	A	B	C	D	E
A	AA	AB	AC	AD	AE
B	BA	BB	BC	BD	BE
C	CA	CB	CC	CD	CE
D	DA	DB	DC	DD	DE
E	EA	EB	EC	ED	EE

5 segments impossibles

10 segments en double (AB = B-

10 segments possibles

Si on essaye de joindre a avec a c'est impossible de même que B et B, C et C, D et D et E et E.

Dans mon tableau il y a 5 colonnes et 5 lignes donc 25 réponses éventuelles. J'élimine les 5 solutions impossibles. J'élimine la 1/2 soit ici 10 solutions identiques car AB = BA, AC = CA, AD = DA, AE = EA, BC = CB, BD = DB, BE = EB, CD = DC, CE = EC, DE = ED.

Donc à partir de là nous pouvons établir une formule. Soit N le nombre de points nous avons

$$\frac{(N \times N) - N}{2} = \text{nombre de segments}$$

Pour 5 points

$$\frac{(5 \times 5) - 5}{2} = \frac{25 - 5}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ segments}$$

Annexe 3

Narration description

Je commence par tracer le losange ARST puis le cercle, le point H(?) et I(?) (AS); ces droites se coupent en I.

1) Pour prouver que (TH) est une hauteur du triangle ATR je relie (TR) et je trace ensuite les 3 hauteurs (dont celle que je pense en être une (TH)) après avoir fait ceci, je constate que (TH) est l'une des 3 hauteurs du triangle ATR. L'ennoncé est donc exact. (*)

2) Pour prouver que (RK) est perpendiculaire à (AT) je relie (RK) et je constate ensuite que cette dernière est une des 3 hauteurs du triangle ATR. Je recherche parmis mes théorèmes et stupeur, je ne trouve pas la bonne fiche. après ce petit incident, je me dis que si (RK) est une des 3 hauteurs du triangle ATR, elle coupe AT perpendiculairement. Donc (RK) est perpendiculaire à (AT).

3) Pour demontrer que T, K, H et R sont sur un même cercle, il me suffit de construire ce cercle ~~coupde~~ chance! ce cercle ayant pour centre I, est

(*) ⇒

déjà construit. Il me reste plus qu'à constater que T, K, H et R sont sur un même cercle que je vais appeler $\mathcal{C}$.

après tout ceci je constate avec emmerveillement que le 1), le 2), et le 3) sont des ennoncés, plutôt des demonstrations exactes.

(*) Je constate également que dans ATR, sur (TH), (KR), et (AI), le centre de gravité se trouve aux $\frac{2}{3}$ en partant du sommet et au $\frac{1}{3}$ en partant de la base. Je pense donc que mon raisonnement est exact, et surtout que la configuration est juste.

Annexe 4

Narration pseudo-démonstration

1) Dans le losange RAST les diagonales (AS) et (TR) se coupent en leur milieu perpendiculairement. Donc pour le triangle ATR, le milieu de [TR] est l'intersection de la hauteur issue de A. Si on trace un circonscrit cercle ~~circonscrit~~ à partir du point d'intersection des droites (AS) et (TH) nommé I on voit que ce cercle passe par tous les points donc cela nous prouve que le point d'intersection est l'orthocentre

2) (RI) est perpendiculaire à (AT) car si ~~elle~~ la droite passe par le sommet R et l'orthocentre I, c'est obligatoirement une hauteur donc elle est perpendiculaire.

3) Les points I K H R sont sur le même cercle car déjà au départ, il y a le cercle construit qui a pour diamètre (AR). Après le cercle coupe la droite (AB) en H donc le point d'intersection des droites (TH) et (AS) est I. Puis le point K est une hauteur donc si elle passe par l'orthocentre elle arrive sur le cercle donc le point d'intersection du cercle et de la droite (AT). Donc I, K, H et R sont sur le même cercle.

4) Quand j'ai fini le tous les démonstrations j'ai réfléchi avant de écrire donc je n'ai pas eu de difficultés donc je n'ai pas changé de méthode.

Annexe 5

Narration recherche de théorèmes

1°) J'ai construit la figure, ensuite j'ai cherché dans les outils et j'ai trouvé :
" si une droite passe par un sommet et l'orthocentre alors il s'agit d'une hauteur."
(TH) passe par le sommet T et je pense que I est l'orthocentre mais il faut le démontrer ; (AS) est une hauteur de ART car dans un losange les diagonales se coupe perpendiculairement et (AS) et (TR) sont les diagonales donc comme (AS) est une hauteur ... et passe par I, I est le point d'intersection des 3 hauteurs.

2°) (RI) est perpendiculaire à AT car (RI) est une hauteur (puisqu'elle passe par un sommet et l'orthocentre) et une hauteur est perpendiculaire

au côté opposé du sommet où elle passe.

3°) D'abord, j'ai essayé avec mon compas si ces points pouvait se trouver sur un cercle et je n'ai pas réussi.
J'ai cherché dans mes outils et j'ai trouvé :
si un triangle est rectangle alors il est inscrit dans un cercle de diamètre l'hypoténuse.
A vue d'oeil le triangle TRH est rectangle mais il faut le démontrer :

Annexe 6

Narration diagramme

1) ARST est un losange. Le cercle de diamètre [TR] coupe [AR] en H.
(TH) et (AS) se coupent en I.

Si une droite passe par un sommet et l'orthocentre alors il s'agit d'une hauteur

(TH) est une hauteur de ATR.

J'ai fait des organigrammes.
J'ai cherché dans mes outils et j'ai trouvé celui qu'il fallait

2) J'ai encore fait des organigrammes.

(RI) coupe (AT) en K

Si deux droites sont parallèles, toutes perpendiculaires à l'une est perpendiculaires à l'autre.

(RI) ⊥ (AT)

Annexe 7

Narration solution

1°) Je sais que le triangle THR est un triangle inscrit dans le cercle de diamètre [TR] et je sais que le diamètre du cercle est un côté du triangle donc THR est un triangle rectangle. Puisque je sais cela alors je sais que (TH) est perpendiculaire à [AR] et la droite (TH) passe par le sommet T et coupe perpendiculairement le segment [AR] c'est donc une hauteur du triangle ATR

Je peux marquer l'angle droit de l'angle H.

2°) La droite (RI) coupe la droite (TH) et le segment [AS] en I.
Je sais que (TH) est la hauteur du triangle ATR. Comme la droite (IR) passe par le point I et par le sommet R, on peut dire que I est l'orthocentre du triangle ATR donc R

est la hauteur issue de R du triangle ATR. Je peux donc dire que (RI) est perpendiculaire à [AT]

Je peux marquer l'angle droit de l'angle K

3°)

1°) Je sais que le triangle THR est un triangle rectangle en H et qu'il est inscrit dans le cercle de diamètre [TR] qui est son hypoténuse. Donc H est un point du cercle de diamètre [TR]

2°) Je sais que le triangle TKR est un triangle rectangle en K et qu'il est inscrit dans le cercle de diamètre [TR] qui est son hypoténuse
Donc K est un point du cercle de diamètre [TR]

3°) Les points T et R sont les deux points du cercle de diamètre [TR]. Donc ils sont forcément sur le cercle de diamètre [TR]

- les points T, K, H, R sont tous sur le même cercle

Donc

Quand j'ai cherché à démontrer que (RI) était perpendiculaire à (AT) j'ai remarqué que I était l'orthocentre du triangle ATR car la hauteur (TH) et la droite (RI) se coupaient toutes les deux en I et en plus (RI) passait par le sommet R et coupait le segment [AT]