André Simon

Premiers Pas : un outil d'apprentissage et de révélation d'erreurs

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4
« Produire et lire des textes de démonstration », , p. 147-151
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_147_0>

Atelier n°5

PREMIERS PAS : Un outil d'apprentissage et de révélation d'erreurs

André Simon

Le raisonnement déductif, principalement mis en œuvre en géométrie, est source, chez le jeune élève, de difficultés nombreuses, d'origines diverses, et souvent persistantes.

L'élève ne fait pas la distinction entre un fait prouvé et une simple conjecture. Le changement de statut d'un fait qui de conclusion devient hypothèse au pas suivant est encore plus ignoré. Les hypothèses ne sont pour lui que les données du problème. La nécessité de justifier le passage d'un fait à un autre par un théorème n'est absolument pas perçue. Et si l'utilisation de ce théorème lui est imposée, il n'hésite pas à choisir comme hypothèses toutes les constatations même surabondantes qui peuvent être faites sur la figure.

Il est donc illusoire de songer à un apprentissage de la démonstration tant que n'est pas acquis le principe de **l'inférence**, passage obligé de toute tentative de preuve mathématique.

Certes, nous sommes loin, à ce niveau, des stratégies de résolution d'un problème plus ou moins ouvert, loin également des problèmes de rédaction de la démonstration, lesquels nécessitent bien d'autres compétences. Mais peut-on sérieusement prétendre aborder cet apprentissage tant que ne sont pas franchis les obstacles de nature logique autant que lexicale liés au seul pas de démonstration ?

C'est le chaînage hypothèse-théorème-conclusion qui constitue la principale difficulté.

A la difficulté logique de base qui consiste à lier deux faits dissymétriques à l'aide d'un théorème s'ajoutent les difficultés d'instanciation des faits qui doivent être mis en conformité avec les prémisses et la conclusion du théorème, les confusions souvent dues à un vocabulaire ou à un symbolisme mal choisi, l'incompréhension d'un théorème due à une formulation un peu ambiguë...

Le logiciel "Premiers Pas" a été conçu, dans le cadre d'un groupe de recherche de l'IRMAR[1], pour faciliter le repérage individualisé des erreurs commises par les élèves avant d'apparaître comme un véritable outil d'apprentissage.

---

[1] Groupe de recherche de l'institut de Recherches de Mathématiques et Applications de Rennes, piloté par R.Gras, comportant notamment les membres ayant participé à la conception, la mise au point et l'expérimentation du logiciel : C.Boulard, M.D.Fontaine, I.Giorgiutti, A.Lahrer, A.Nicolas, D.Py, A.Simon.

I. Un double objectif

Un outil de recherche didactique

Il est difficile, voire impossible, pour l'enseignant de repérer de façon systématique dans chaque copie d'élève le type d'erreur commise et surtout la répétition d'erreurs du même type. L'outil informatique a ce mérite de permettre de suivre, a posteriori, le cheminement de chaque élève, surtout si celui-ci, immédiatement sanctionné en cas d'erreur, dispose d'une "seconde chance".

"Premiers Pas" a été conçu initialement comme outil - certes modeste - de recherche, destiné à agir comme révélateur des procédures erronées, en en facilitant le repérage, le diagnostic et l'analyse.

Un outil d'apprentissage

Les enseignants, membres du groupe, et expérimentateurs du logiciel, ont rapidement vu le parti qu'ils pouvaient en tirer au niveau de l'apprentissage -ou du renforcement d'apprentissage- et ont plaidé en faveur d'une réécriture plus "didactique" et ergonomique de celui-ci.

C'est ainsi que se sont succédé plusieurs versions, en permanence étayées par l'avis du groupe. La dernière version est toujours expérimentale !

II. Un exercice simple

Même dans un simple pas de démonstration, le nombre de variables didactiques à contrôler est suffisamment élevé pour qu'ait été fait le choix d'un exercice permettant d'en limiter le nombre afin d'agir plus efficacement sur elles. L'exercice proposé dans "Premiers Pas" consiste en une suite d'inférences à compléter au niveau d'une ou plusieurs hypothèses, ou du théorème ou de la conclusion. Le "trou" peut se situer simplement sur une instance d'objet.

Par exemple, on peut demander à l'élève de compléter le pas de démonstration suivant :

Hypothèses	**Théorème**	**Conclusion**
I est le milieu de [AB] et ...	21	(IJ) // ...

(le théorème 21 - "théorème des milieux" - n'est pas demandé ici)

Un exercice est une suite de pas incomplets, indépendants ou non, associés ou non à une même situation géométrique (et donc à une même figure).

Intérêt de l'exercice à trous

Cet exercice qui peut sembler d'une simplicité suspecte pour l'apprentissage d'une notion aussi complexe que la démonstration, fût-elle à un seul pas, offre pourtant un double intérêt :

- Pour l'enseignant-didacticien, celui déjà signalé de limiter le nombre de variables et de les localiser facilement : à ce titre, l'exemple ci-dessus, dont le seul but est de montrer les possibilités d'emplacement des trous à compléter, n'est d'ailleurs probablement pas un bon exemple de ce qu'il est souhaitable de faire !

- Pour l'élève, celui d'offrir un "modèle" pré-construit de démonstration, même incomplète, sur lequel il a néanmoins un rôle actif ; en effet, beaucoup s'accordent à penser qu'un élève ne sera pas capable de s'aventurer dans une démonstration - même à un pas - s'il n'a pas été déjà familiarisé par un certain nombre d'exemples "magistraux". Hélas, on sait la valeur quasi-nulle d'un joli corrigé de devoir, polycopié, distribué aux élèves ; en effet, même si ceux-ci jouent le jeu de le **lire** attentivement, leur absence totale d'investissement et d'activité de recherche ne leur permet en aucun cas de se heurter à des difficultés qu'ils ne pressentent même pas. Et le réinvestissement est plus qu'hypothétique.

Intérêt de l'ordinateur

Pourquoi dans ces conditions utiliser l'ordinateur plutôt que réaliser ce travail sur papier ?

On connaît les **avantages généraux** -et reconnus- de l'outil informatique.

1 - L'aspect ludique du travail demeure, contre toute attente, chez des élèves qui baignent de plus en plus dans un monde informatisé et que plus rien n'étonne. Et il reste toujours surprenant de voir certains élèves peu motivés par un travail écrit se prendre au jeu de l'ordinateur et réaliser des performances étonnantes.

2 - Le travail est individualisé. L'élève a son parcours propre, son rythme propre. Il ne craint pas l'erreur. L'ordinateur est un intermédiaire neutre et plutôt bienveillant entre lui et le maître. L'instantanéité de la sanction de son erreur est un avantage considérable, d'autant plus que la correction lui en est demandée aussitôt.

3 - Comme il l'a été dit plus haut, le parcours entier de l'élève peut ensuite être observé par l'enseignant.

"Premiers Pas" recèle par ailleurs quelques **avantages spécifiques**.

1 - C'est un logiciel personnalisable

Le logiciel "connaît" une soixantaine de théorèmes couvrant approximativement le programme de géométrie de quatrième. L'enseignant peut intervenir sur ces théorèmes comme on le verra plus loin.

Il a de plus l'entière liberté, mais aussi l'entière responsabilité, de son exercice. C'est lui qui choisit les théorèmes mis à la disposition de l'élève, lui qui écrit, bien entendu, les pas de démonstration, qui place les "trous" à remplir par l'élève. C'est le module PREPA qui le lui permet.

2 - Les figures

Comme nous l'avons indiqué plus haut, les pas de démonstration peuvent, à l'intérieur d'un même exercice, être totalement indépendants, ceci dans un souci d'analyse d'une variable didactique précise. Une démonstration chaînée ne le permet généralement pas. Dans une phase de fin d'apprentissage, il peut être préférable de commencer à familiariser les élèves avec des pas chaînés constituant une vraie démonstration, ce qui nécessite généralement une figure. Celle-ci peut-être faite par l'élève dans un but "d'appropriation" de la situation géométrique. Mais, si ce n'est pas là un objectif principal, la figure peut être fournie par le logiciel, à des fins de simple repérage des noms d'objets par exemple.

Plus important encore, un certain nombre de théorèmes sont illustrés d'une figure "évolutive" à plusieurs états, mettant en évidence les prémisses PUIS la conclusion du théorème, associées en outre à des couleurs différentes. Cela constitue, pour un élève en difficulté, un avantage certain sur la figure figée d'un livre. Il suffit de penser aux figures illustrant deux théorèmes réciproques, parfaitement identiques sur le papier !
Un petit éditeur graphique permet l'élaboration de ces figures.

3 - Les théorèmes équivalents

Le texte -discutable- des théorèmes, emprunté à des ouvrages de collège, peut, on le sait, être une importante source d'erreurs et de confusion. L'enseignant peut non seulement en modifier le texte, mais encore ajouter des théorèmes équivalents, formulés différemment, afin d'étudier, par exemple, l'influence de telle ou telle formulation sur les erreurs commises par l'élève.

Ajoutons que dans une version ultérieure du logiciel, le texte même du théorème devrait faire apparaître, si tel est le souhait de l'enseignant, les prémisses et la conclusion avec des couleurs différentes qui sont celles des figures précédemment évoquées.

4 - Le retour-professeur

Le module BILAN fournit, a posteriori, l'intégralité du parcours de chaque élève et propose une pré-analyse par compteurs (par exemple, nombre d'erreurs sur la conclusion, nombre de confusions théorème direct et réciproque, nombre de répétitions du fait hypothèse en conclusion, etc.).

Les temps de réponses, enregistrés, sont également une indication intéressante sur la réflexion de l'élève.

Il existe enfin une interface avec des outils d'analyse statistique (analyse implicative notamment).

Il ne serait pas objectif de taire les **limites du logiciel** :

Il ne permet aucune liberté dans l'enchaînement des pas de démonstration : ce n'est pas son objectif.

Le choix de l'élève, en ce qui concerne le théorème, est réduit à celui que lui propose l'enseignant, et dans un échantillon trop réduit, ce choix peut s'apparenter à une loterie. Mais force est de constater que c'est très rarement le cas, la majorité des élèves jouant le jeu du choix raisonné.

L'exercice n'a d'intérêt que celui que peut lui donner l'enseignant !

III. Quelques constatations

Les expérimentations réalisées sur "Premiers Pas" et surtout l'utilisation qui en a été faite dans le groupe ont permis de faire un certain nombre de constatations.

Annie Lahrer[1], dans sa thèse, a répertorié, mesuré et analysé certaines procédures erronées et a pu montrer que, par exemple :

- il existe des confusions fréquentes entre les relations de parallélisme et d'égalité, confusions non symétriques, qui ne relèvent pas seulement d'un symbolisme voisin (// et =) ;

- il est également fréquent de constater la répétition d'un fait hypothèse en conclusion, des confusions entre différents objets (droites, longueurs, segments, par exemple) et naturellement les erreurs provoquées par la formulation même de certains théorèmes.

Une comparaison entre un travail sur "Premiers Pas" et un travail écrit a été réalisée avec un même groupe d'élèves à une quinzaine de jours d'intervalle. Il s'agissait d'une vraie démonstration -à compléter dans le cas du travail sur ordinateur-. La réussite sur machine a été naturellement nettement supérieure alors que les résultats écrits faisaient apparaître une dispersion accentuée, dispersion justifiée par l'intervention, dans ce dernier cas, de facteurs complémentaires tels que présentation, expression... On a pu, en revanche, constater à l'écrit un réinvestissement très net de la démarche "je sais que" (pour hypothèse), "or" (pour théorème), "alors" (pour conclusion) et ceci de façon apparemment efficace.

Une autre comparaison a été faite entre deux groupes d'élèves, l'un ayant utilisé "Premiers Pas", l'autre non. Il a pu être constaté que le logiciel favorise un traitement des données sous forme de faits élémentaires et la décomposition claire de la démonstration

---

[1] A.Lahrer : "Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique" (Thèse d'université - Université de Rennes 1- Février 1991)

en pas individualisés, ainsi que la stabilité du réinvestissement d'un pas à l'autre. Il favorise enfin une certaine cohérence et homogénéité des comportements d'élèves.

Conclusion

L'apprentissage du mécanisme de l'inférence est une tâche modeste, combien moins valorisante que celle de la résolution de problème, de la recherche d'heuristiques pour une "belle" démonstration. Mais c'est un passage obligé, beaucoup plus difficile qu'il n'y paraît au premier abord.

L'utilisation d'outils adaptés est une aide incontestable, pour l'élève comme pour l'enseignant.

On perçoit les difficultés énormes que peut introduire une formulation mal choisie dans le texte d'un théorème. S'il est totalement absurde de figer cette formulation dans un stéréotype pauvre et terriblement réducteur, il n'en reste pas moins vrai qu'au tout début de l'apprentissage, une formulation faisant clairement apparaître les prémisses et la conclusion parait hautement souhaitable.

Il n'est pas davantage question de consacrer le modèle de rédaction "on sait que ..., or ..., donc ..." ; il faut pourtant bien reconnaître que chez l'élève débutant, le caractère systématique de ce schéma -sinon de cette formulation- est un élément de clarté, rassurant, aidant largement à la compréhension du mécanisme de l'inférence.