FRANÇOISE VAN DIEREN

Écrire pour apprendre et apprendre à démontrer

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4 « Produire et lire des textes de démonstration », , p. 123-145

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_123_0>

Atelier n°4

ECRIRE POUR APPRENDRE ET APPRENDRE A DEMONTRER

Françoise Van Dieren

Introduction

La capacité d'écrire une démonstration signe une maîtrise de la pensée mathématique. Cette aptitude est très inégalement partagée. Lorsqu'elle fait défaut, il est bien difficile de savoir s'il faut accuser une difficulté dans la maîtrise des modes de pensée ou dans celle de l'expression écrite. Dans la pratique enseignante, ces deux aspects sont souvent dissociés : le professeur de mathématiques vise à mettre en place des modes de pensée et laisse à ses collègues de langue maternelle le soin de l'apprentissage de l'écriture. Peut-être aussi imagine-t-il que cela s'acquiert spontanément.

Or l'expression écrite ne se travaille jamais avec autant de pertinence que lorsqu'il y a un contenu à cerner, doublé d'un objectif de communication et de fixation. Par ailleurs, les méandres d'un raisonnement, la portée d'un phénomène mathématique ne se dévoilent bien souvent, que lorsque qu'ils se déploient dans la linéarité de l'écriture.

Nous pensons donc que l'articulation de ces deux aspects produit un effet de résonance qui peut démultiplier les compétences des élèves. Très tôt dans la scolarité, on peut travailler de concert les modes de pensée et l'écriture. Ce double apprentissage doit être présent dans toute activité mathématique, il précède, prépare et accompagne la production de démonstrations.

Nous avons choisi de relater ici et de commenter quelques extraits d'une recherche que nous poursuivons au CREM sur l'enseignement de la géométrie de 3 à 18 ans. Notre contribution à cette recherche consiste à mettre à la disposition des enseignants du début du secondaire une brochure qui montre une façon d'articuler situations-problèmes et construction théorique. Cette brochure sera diffusée sous le titre : *Figures en mouvement.*

Les situations-problèmes sélectionnées sont destinées à des élèves de 11-12 ans. Elles s'enchaînent de manière à ce que les notions acquises dans l'une soient utiles pour travailler les suivantes. Une attention particulière a été apportée à la rédaction des synthèses qui, tout à la fois, clôturent une situation-problème et mettent en évidence des formulations, des modes de pensée et des énoncés qui serviront dans la suite. Nous les avons conçues comme des traces écrites qui servent de référence dans l'élaboration progressive des notions. Dans la pratique, elles sont écrites par les élèves sous la guidance du professeur, elles articulent les formulations, les figures-clefs et les raisonnements qui ont émergé dans la situation-problème.

Ce texte présente donc une suite de trois situations et pour chacune d'elles un « modèle » de synthèse. Les critères qui ont guidé la rédaction des synthèses sont explicités dans la marge, de manière à ce que l'enseignant puisse se libérer de ces modèles, opérer ses propres choix et construire avec ses élèves des textes qui reflètent le plus fidèlement possible ce qui s'est construit en classe.

Pour les élèves, les trois situations inaugurent une approche argumentée de la géométrie. Elles mettent en place des outils d'analyse qui permettent une approche discursive des figures.

Il y a tout d'abord quelques mouvements qui introduisent le temps dans des configurations spatiales. Une partie de figure est regardée avant une autre, on distingue un départ et une arrivée. La recherche du même, du superposable est structurée par ce qui apparaît comme une régularité visuelle.

Ensuite, par le biais de constructions aux instruments, d'autres outils d'analyse des figures sont mis en place. Les tracés aux instruments sont regardés à la lumière des mouvements qui les engendrent.

La troisième activité articule des propriétés des triangles et des quadrilatères à celles des mouvements. On voit ainsi se tisser, à partir d'objets apparemment hétérogènes, des réseaux de propriétés. L'apprentissage de l'argumentation est lui aussi l'oeuvre du temps. De synthèse en synthèse, les phénomènes géométriques sont intégrés dans un langage qui les rend disponibles pour comprendre et formaliser d'autres phénomènes.

1. Papiers peints.

Le professeur dispose pour chaque élève de papiers peints du type de ceux montrés par la Fig.1, dont quelques-uns ont le format de la Fig.2. Il en distribue progressivement, selon l'avancement de chacun[1]. Le professeur dispose aussi de feuilles transparentes pour décalquer des motifs. Les consignes de travail suggérées ci-dessous sont données l'une après l'autre. Elles sont encadrées dans le texte, chacune fait l'objet de commentaires oraux avant que l'on passe à la suivante. A la faveur des comparaisons entre les diverses réalisations, des acquis antérieurs refont surface, des questions surgissent et un vocabulaire commun s'installe. La synthèse est une activité à part entière qui intervient tout à la fin.

L'objectif est de découvrir trois familles de transformations du plan : les translations, les rotations et les symétries orthogonales dans un contexte où elles sont toutes trois présentes. On attend des élèves qu'à l'issue de ce travail, ils puissent distinguer chacune de ces transformations et indiquer les éléments qui la déterminent. Le contexte induit que ce qui se passe localement peut être étendu au plan tout entier. Mais cette extension n'est pas un but à ce stade, qui est celui d'une première initiation. Elle ne figure donc pas dans la synthèse.

1. Colorier différents papiers peints choisis parmi ceux de la Fig.1.

COMMENTAIRES

Cette activité part de ces objets familiers que sont les papiers peints. Des questions analogues peuvent être posées à partir de frises ou de pavages du plan extraits par exemple, d'oeuvres d'Escher. Nous fournissons un choix de papiers peints assez large afin de ménager la surprise : trois procédés seulement permettent d'expliquer comment sont conçus les papiers peints proposés ici. Il n'est pas nécessaire pour cela que tous les élèves travaillent tous les papiers peints. Le professeur peut répartir le travail et l'adapter aux différents rythmes des élèves.

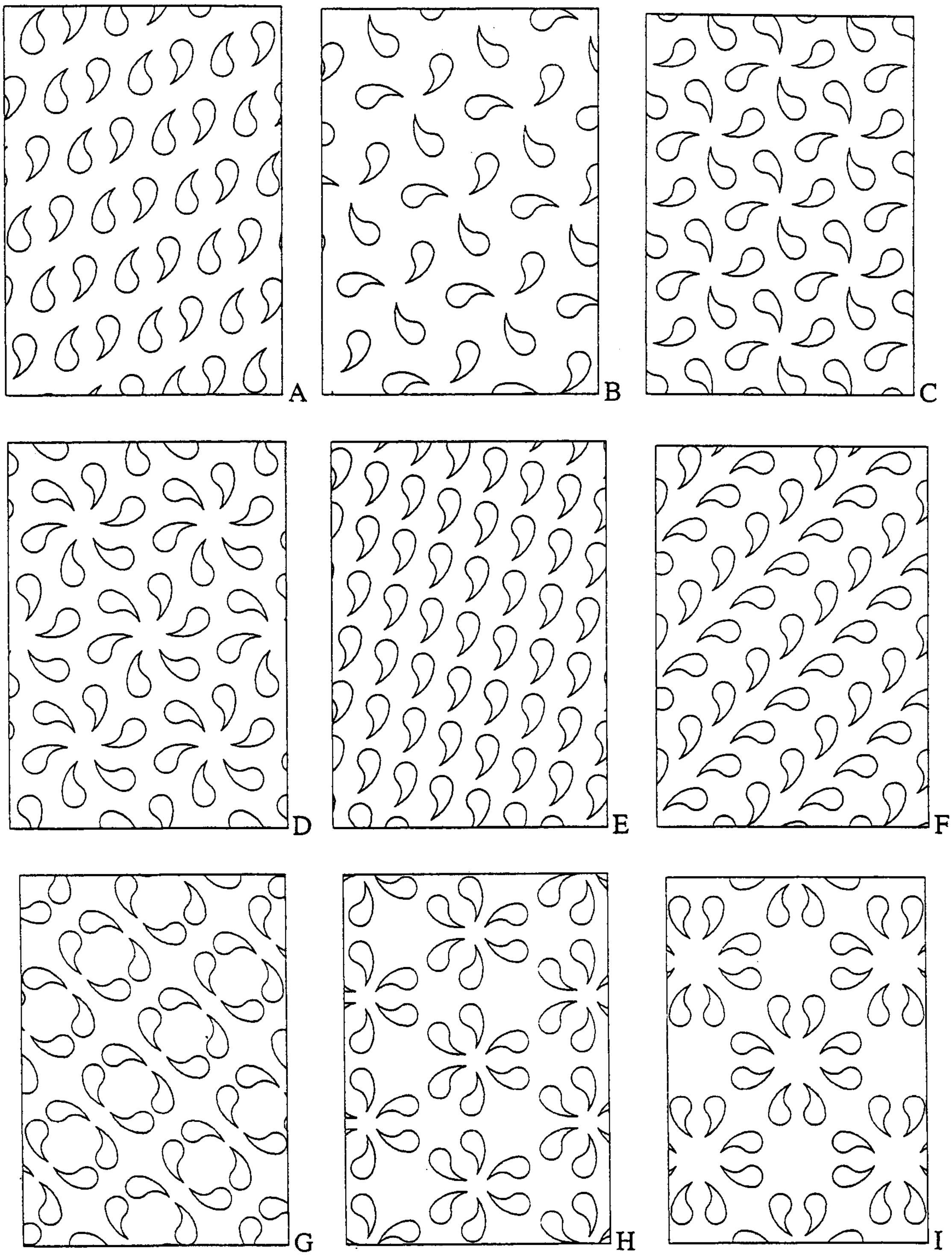
Dans le coloriage libre, les choix spontanés font apparaître des régularités, des rythmes qui structurent chaque papier peint. Cette première phase est fondamentale : les contrastes entre les régularités et les différences (à l'intérieur de chaque papier et d'un papier à l'autre) stimulent la recherche de rythmes visuels qui incitent à découvrir une règle de coloriage. L'explicitation de la règle est liée pour les rotations et les translations, au mouvement du regard qui va d'une goutte à l'autre : on dit que les gouttent glissent, qu'elles tournent d'un demi- tour. A propos des symétries orthogonales, ils reconnaissent ce qu'ils appellent *symétrie en miroir* ou *symétrie* tout court, c'est souvent la seule transformation apprise dans l'enseignement fondamental.

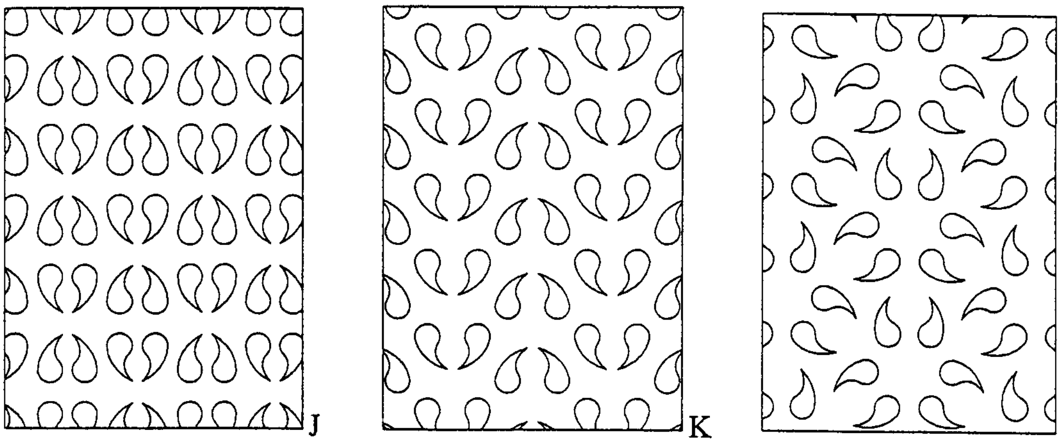
Une règle particulièrement significative consiste à colorier de même toutes les gouttes disposées de la même façon, ce qui correspond à un mouvement de glissement en ligne droite et introduit la notion de translation.

---

[1] Cette activité est inspirée par les travaux de B. SENECHAL (1979), *Groupes et géométries*, Hermann, Paris.

Les dessins de papiers peints reproduits ici ont été redessinés par Luc Lismont.


A
B
C
D
E
F
G
H
I



J K L

Fig.1

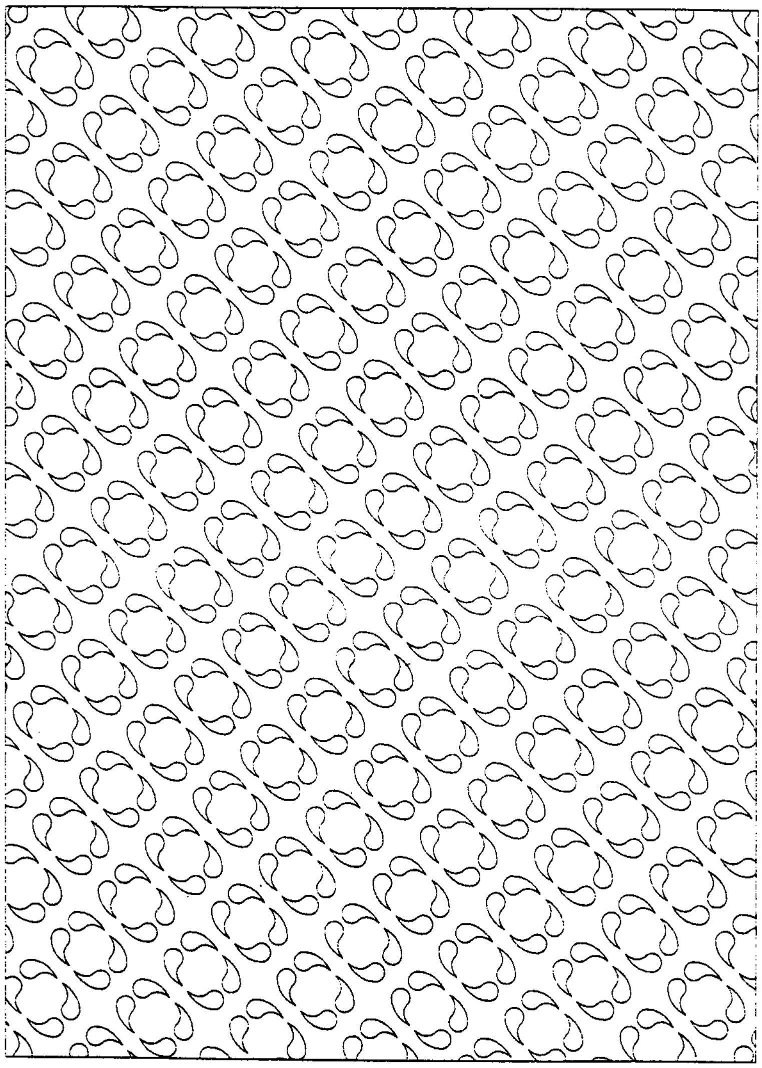
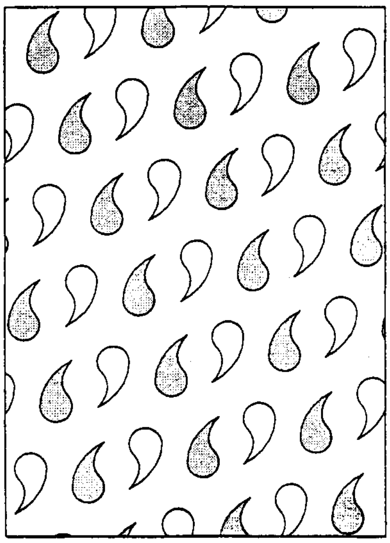
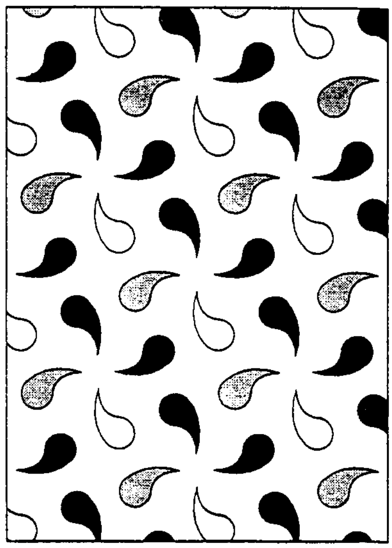


Fig.2

2. Colorier d'une même couleur, toutes les gouttes qui sont images l'une de l'autre par une translation.

La seconde mise en couleur organise la vision des différents papiers peints : on compare le nombre de couleurs employées, la disposition des gouttes de couleurs différentes. On voit apparaître des alignements, des groupes de gouttes de couleurs différentes. Ces observations aident à déterminer la couleur des gouttes tronquées par le cadre. Regardons les papiers peints A et C (Fig.3).


A


C Fig.3

Pour le papier peint A, deux couleurs sont nécessaires pour indiquer les gouttes images l'une de l'autre par translation. Deux gouttes (quelconques) de couleurs différentes sont images l'une de l'autre par une rotation d'un demi-tour (180°).

Pour s'en rendre compte on décalque une goutte, par exemple une blanche, et on tourne le calque pour qu'elle vienne se superposer à une goutte grise. On peut préciser ce mouvement en cherchant avec une pointe de compas (ou une aiguille) le point autour duquel on doit tourner pour que le mouvement corresponde à un seul geste.

Quatre couleurs sont nécessaires pour le papier peint C. Il y a plusieurs façons de voir un groupe de quatre gouttes, toutes de couleurs différentes. La Fig.4 en présente deux. Dans la première, la rotation d'un quart de tour est beaucoup plus facile à voir car les quatre gouttes pointent vers le centre.

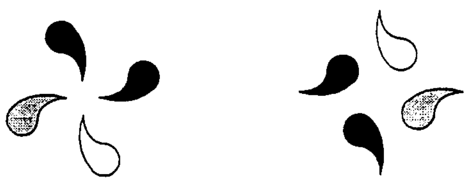


Fig.4

Dans le papier peint K, chaque goutte ne peut être superposée à une goutte de couleur différentes que si l'on retourne le calque (Fig.5).


Fig.5

3. Pour les papiers peints A, B et E, repérer trois translations par des flèches.

La Fig.6 (a) montre trois translations parmi d'autres qui répondent à la question. Il arrive souvent que des élèves considèrent indûment des flèches situées à différents endroits comme des translations distinctes. C'est le cas de la Fig.6 (b). C'est ici qu'on voit l'intérêt de travailler sur une figure qui montre qu'un même mouvement de translation déplace « beaucoup » de motifs. C'est ce que montre la Fig.6 (c). Pour visualiser cela, on peut déposer sur un papier peint, une copie sur papier transparent et faire subir le mouvement au transparent. On voit ainsi que chaque translation qui envoie une goutte sur une autre, fait subir le même mouvement aux autres gouttes (pour peu qu'on imagine que le papier peint peut être prolongé, qu'on n'en voit qu'une « fenêtre »).

On introduit la représentation d'une translation par une flèche : la flèche a en effet les mêmes caractéristiques qu'une translation, elle a une direction, un sens et une longueur.

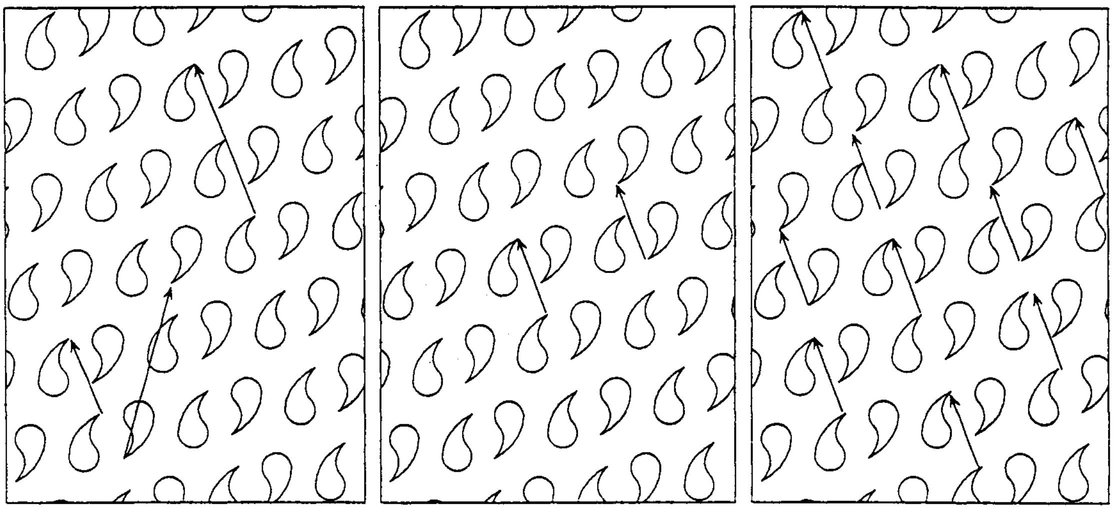


Fig.6 a,b,c

4. Pour les papiers peints F, G, H, I, J, K et L, repérer des symétries orthogonales qui envoient une goutte sur une autre.

En marquant le « pli » qui envoie une goutte sur l'autre, certains élèves, qui ne considèrent qu'une paire de gouttes à la fois, dessinent d'abord des segments. Au fur et à mesure qu'ils marquent les plis pour d'autres paires, les segments s'allongent pour devenir des droites, des axes. On peut observer sur un papier peint reproduit sur transparent que le pliage qui envoie une goutte sur une autre superpose toute autre goutte à une autre.

Le tracé d'un axe, pour être précis, conduit le plus souvent les élèves à déterminer deux de ses points suffisamment éloignés. Rares sont ceux qui utilisent spontanément le fait qu'il est perpendiculaire au segment qui relie deux points qui sont envoyés l'un sur l'autre. Ce fait sera examiné lors de la synthèse.

Les axes font apparaître des *bandes* ou des *boîtes*. Regardons par exemple les papiers peints de la Fig.7.

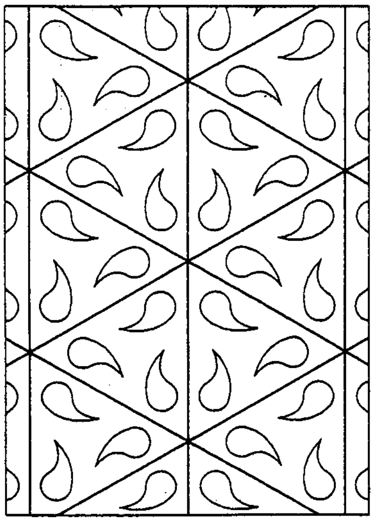
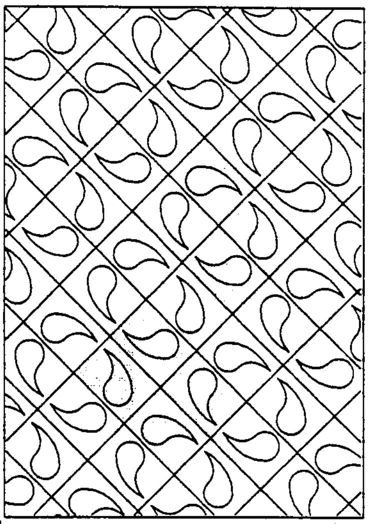
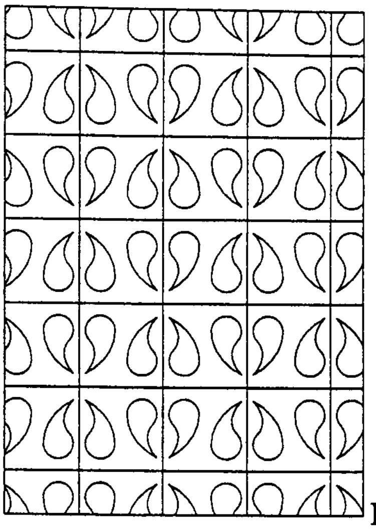

L

G

K

Fig.7

À l'intérieur des triangles du papier peint L, on a des rotations de 120° et 240°. Chaque *boîte* du papier peint G contient une seule goutte, mais on peut aussi y voir des rectangles qui comportent quatre gouttes, images les unes des autres par des symétries orthogonales d'axes perpendiculaires et par une rotation de 180°. Pour le papier peint K, à l'intérieur de chaque *boîte* carrée, les deux gouttes sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°.

5. Sur les papiers peints A, C, D et K, repérer des rotations de 180° qui envoient une goutte sur une autre goutte.

Il importe de traiter cette rotation à part des autres rotations, d'une part parce que sur le plan de la perception on la distingue parfois difficilement de la symétrie orthogonale (chacune à sa façon, est un mouvement de volte-face) et d'autre part, parce qu'elle joue un rôle fondamental dans l'étude du parallélogramme. Ici aussi le mouvement de rotation du calque est éclairant. C'est eu égard à ce mouvement que nous préférons la considérer comme une rotation particulière plutôt que comme une symérie centrale. La recherche d'un centre qui envoie une goutte sur une autre fera entrevoir que le même mouvement concerne d'autres gouttes et même ... le papier peint tout entier.

6. On colorie deux gouttes sur un papier peint. Décrire le mouvement qui permet d'envoyer une goutte sur l'autre.

Cette activité contribue à installer une image mentale pour chaque isométrie. La description demandée comporte la détermination de la flèche, de l'axe ou du centre.

Pour repérer les centres de rotations autres que celles de 180°, il est avantageux d'utiliser du papier calque et de chercher le centre à vue à l'aide d'une pointe de compas. Ceci n'est pas nécessaire pour les papiers peints dans lesquels les centres sont à l'intersection des axes de symétrie (comme le papier G).

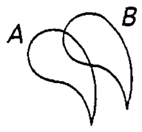
On peut déterminer les angles des autres rotations sans devoir mesurer : ce sont toujours des diviseurs entiers de 360°.

Lorsqu'on sélectionne deux gouttes quelconques et qu'on recherche comment envoyer l'une sur l'autre, on constate qu'on y arrive toujours par un des trois mouvements qu'on a identifiés, suivi (ou précédé) éventuellement d'une translation.

EXERCICE

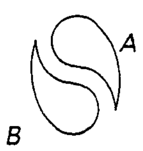
1. Identifier dans les figures ci-dessous, le mouvement qui envoie le motif A sur le motif B.
2. Selon le cas, tracer l'axe ou la flèche, ou encore repérer le centre.

1

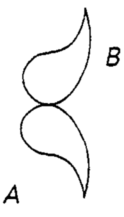


2

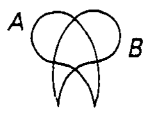
3



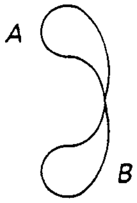
4



5

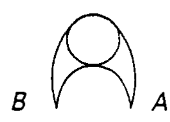


6

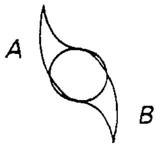


7

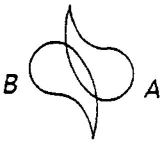
8



9



10



On réalise en faisant cet exercice que l'indication qui distingue une figure et son image n'est nécessaire que pour les translations. On réalise aussi que dans une symétrie orthogonale, chaque fois qu'un point de départ et d'arrivée coïncident, ils appartiennent à l'axe.

En examinant les différents papiers peints, nous avons décrit comment un motif est envoyé sur un autre. Nous avons utilisé un calque pour observer les différents mouvements.

Le premier paragraphe évoque la situation qui a servi à élaborer les notions.

Translation

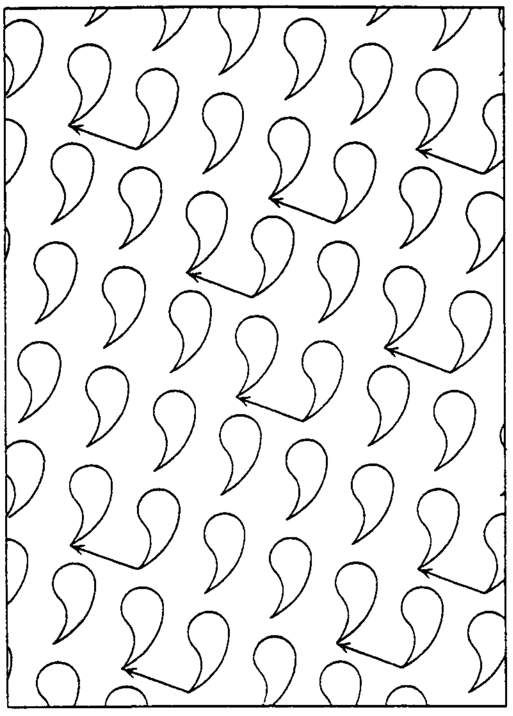


Fig.8

La figure porte deux informations implicites :

- ce qui se passe localement peut être étendu autant qu'on le veut.
- l'image d'une translation est installée à partir d'une multiplicité de flèches.

Les phrases écrites en italique sont destinées à servir de référence dans des situations ultérieures.

Dans une translation, le calque glisse en ligne droite.

1. Pour déterminer une translation, on peut dessiner une flèche qui relie n'importe quel point de départ à son image à l'arrivée.

Toutes les flèches d'une même translation sont parallèles ; elles ont même sens et même longueur. Il suffit donc de dessiner une seule flèche pour déterminer une translation.

Le verbe « déterminer » est apporté par le professeur ; en un premier temps les élèves utilisent par exemple les verbe montrer, indiquer, dire comment ça glisse... La détermination d'un objet sera conceptualisée progressivement, au fil des activités et des synthèses.

L'expression *n'importe quel*, traduit la multiplicité évoquée par la Fig.8. Ce mot joue ici le rôle de quantificateur.

La spécification du *départ* et de l'*arrivée* sont importants car le mot *image* n'a pas encore été associé à l'idée de fonction.

Rotation de 180°

La figure 9 montre plusieurs segments qui relient chaque fois un point de départ et son image à l'arrivée pour une même rotation de 180°

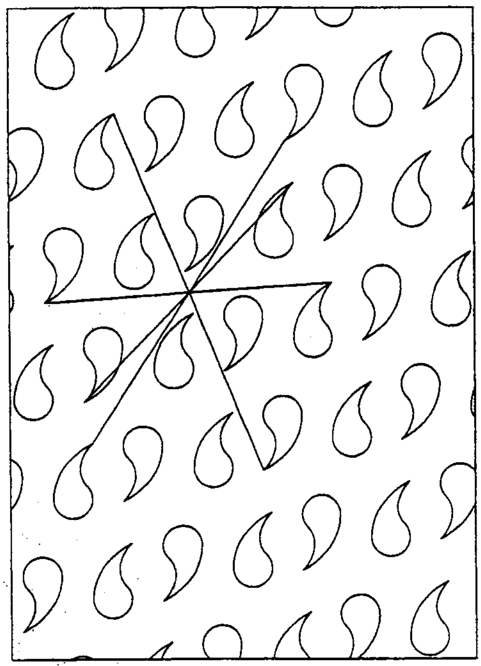


Fig.9

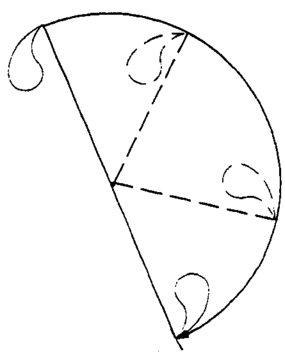


Fig.10

Dans une rotation de 180°, le calque tourne autour d'un point.

Lorsqu'on relie un point quelconque du motif au centre, le segment tracé balaie la moitié d'un disque dans le plan de la feuille. À l'arrivée, il se trouve dans le prolongement de sa position de départ.

2. Pour déterminer une rotation de 180°, on peut indiquer son centre.

Pour trouver le centre, on peut relier un point de départ à son image à l'arrivée. Le centre est au milieu de ce segment.

On peut aussi tracer deux segments qui relient chaque fois un point de départ à son image à l'arrivée, le centre appartient aux deux segments. Il est déterminé à condition que les deux segments se coupent.

Parmi les rotations rencontrées, celles de 180° et de 90° seront utilisées dans l'étude des relations de parallélisme et de perpendicularité ainsi qu'à propos des propriétés des quadrilatères. Notre synthèse porte uniquement sur celle de 180°. Un synthèse analogue doit être faite pour les rotations de 90°.

Nous l'identifions comme une rotation plutôt que comme une symétrie centrale car le mouvement de rotation autour d'un point du plan permet une comparaison avec celui de retournement autour d'un axe dans l'espace.

La Fig.9 montre plusieurs points et leurs images pour une même rotation de 180°.

La Fig.10 détaille le mouvement pour un motif particulier.

Le mouvement est décrit en langage courant, il s'agit de faire « parler » une figure.

La détermination d'une rotation de 180° par son centre est présentée de manière pragmatique, telle qu'on l'a découverte dans la situation. Nous pensons qu'à ce stade, il n'est pas opportun d'attirer l'attention sur le cas particulier où le point choisi est le centre lui-même.

On rencontre au passage, deux façons de déterminer un point.

Symétrie orthogonale

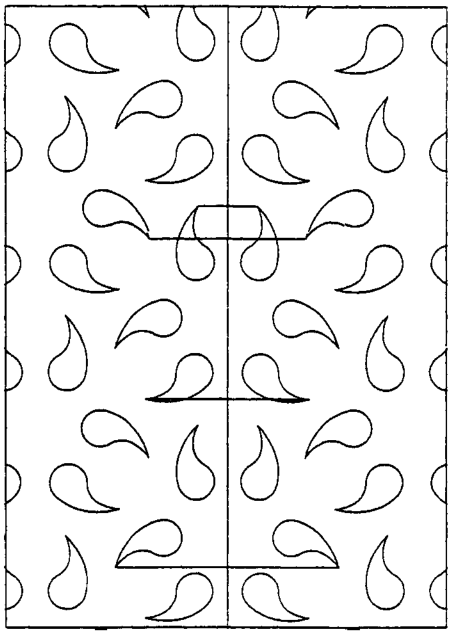


Fig.20

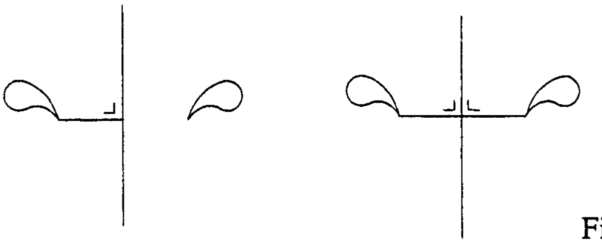


Fig.21 a et b

Dans la Fig.21(a) on a mené un segment issu d'un point du motif de départ, perpendiculaire à l'axe et s'arrêtant à celui-ci. La Fig. 21(b) montre cette perpendiculaire à l'arrivée après un mouvement autour de l'axe (comme celui d'une porte qui tourne autour de sa charnière).

Le segment tracé a balayé la moitié d'un disque dans l'espace. À l'arrivée, le segment est perpendiculaire à l'axe.

Lorsqu'on superpose la figure de départ et la figure à l'arrivée par l'intermédiaire d'un transparent, il faut que le calque soit posé sur l'autre face.

3. Pour déterminer une symétrie orthogonale, on peut tracer son axe.

Pour tracer l'axe, on peut relier un point de départ à son image à l'arrivée et repérer le milieu de ce segment. L'axe est la perpendiculaire à ce segment et passe par ce point milieu.

On peut aussi tracer deux segments qui relient chaque fois un point de départ à son arrivée et repérer les milieux de ces segments. L'axe passe par ces deux milieux. Il est déterminé à condition que les milieux ne coïncident pas.

Dans une symétrie orthogonale, lorsqu'un point de départ et son image à l'arrivée coïncident, ils appartiennent à l'axe.

Ceci sera explicité dans la synthèse suivante.

La figure montre plusieurs couples pour une même symétie orthogonale.

Texte et dessin explicitent le mouvement et font comprendre pourquoi la trace est perpendiculaire à l'axe.

La recherche de l'axe est décrite telle qu'elle a été effectivement travaillée. Pour ne pas alourdir le texte, nous n'avons pas précisé qu'il faut que le point n'appartienne pas à l'axe.

On apprend au passage deux facons de déterminer une droite.

2. *Tracer des perpendiculaires et des parallèles*

Les élèves disposent d'instruments de dessin simples (pas d'équerres multifonctions) et de feuilles qu'ils peuvent plier ou découper.

On demande de tracer trois ou quatre perpendiculaires à une droite donnée, passant par des points donnés. Ces points sont tantôt sur la droite, tantôt en dehors. Il s'agit de découvrir un procédé qui n'utilise pas de mesures.

On demande le même chose pour des parallèles.

COMMENTAIRES

Ce qui fait problème ici, c'est d'inventer un procédé qui ne recourt ni aux mesures, ni aux parallèles dessinées sur les équerres à usages multiples. Au cours de l'activité les élèves sont invités à décrire oralement le procédé utilisé, de manière à ce qu'un autre élève puisse l'appliquer. On procède ensuite à une rédaction écrite collective. On met évidence pour l'un ou l'autre procédé, les mouvements sous-jacents et les propriétés qui apparaissent.

Nous commentons ci-après ce que peuvent apporter des constructions par pliage et des constructions avec équerre et règle non graduées.

On plie la feuille le long de la droite donnée. On choisit un point par lequel la perpendiculaire doit passer ; on replie de manière à ce que ce premier pli se superpose à lui-même. On ouvre et obtient deux plis perpendiculaires (Fig.1).

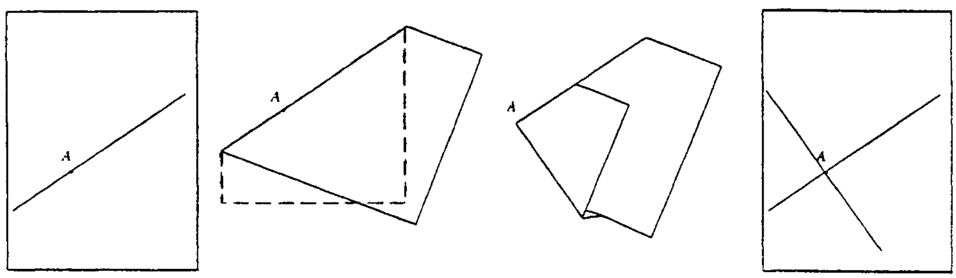


Fig.1

Si on plie à nouveau de la même façon, de manière à ce que le pli passe par un autre point donné, on détermine une seconde perpendiculaire à la droite donnée.

Lorsqu'on place l'équerre de façon à ce qu'un côté qui borde l'angle droit glisse le long de la droite donnée (Fig.2), chaque fois que l'autre côté de l'angle droit rencontre un point donné, on peut tracer une perpendiculaire. L'équerre fait un mouvement de translation et toutes les perpendiculaires à la droite donnée sont parallèles entre elles.

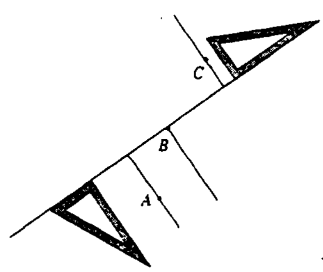
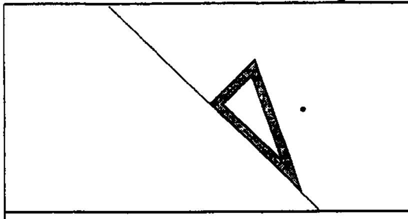
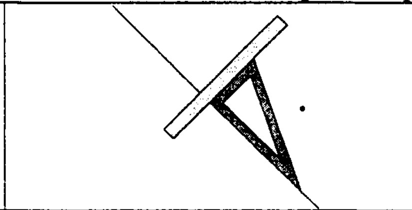
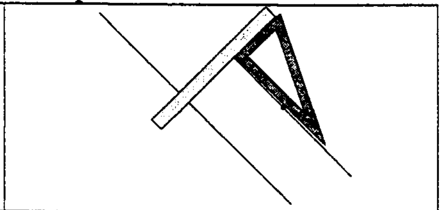


Fig.2

Pour construire des parallèles sans procéder à aucune mesure, les élèves passent le plus souvent par la construction de deux perpendiculaires. La construction aux instruments qui consiste à remplacer le tracé de la perpendiculaire commune par une règle que l'on fixe le long de l'équerre n'arrive pas spontanément. Il est nécessaire de l'introduire. La coordination des actions pour positionner la règle et de l'équerre est difficile à acquérir pour beaucoup d'élèves. Nous pensons cependant que cette conquête contribue de manière substantielle à saisir les relations entre droites, points et le mouvement de translation. Ce procédé apparaît efficace lorsqu'on est amené à construire plusieurs parallèles comme par exemple dans les dessins en perspective cavalière.

Lorsque la manoeuvre est bien maîtrisée, le professeur distribue une suite de figures montrant certaines étapes de la construction. Les élèves rédigent les légendes. Quelques textes sont reproduits au tableau, ils sont corrigés et remaniés. Dans l'exemple ci-dessous le commentaire met en évidence le mouvement de translation.

Pour tracer une parallèle à une droite donnée passant par un point donné :

		
On place l'équerre contre la droite. Un de côtés de l'angle droit doit longer la droite.	On place une règle le long de l'autre côté de l'angle droit de l'équerre.	On maintient la règle dans sa position et on glisse l'équerre le long de la règle. On arrête ce mouvement de translation lorsque l'autre côté de l'angle droit de l'équerre passe par le point donné.

On peut aussi tracer des parallèles en utilisant l'un des angles aigus de l'équerre (Fig.3). Ici aussi l'équerre fait un mouvement de translation le long de la droite donnée. Toutes les parallèles forment avec la droite donnée, des angles de même amplitude. Il s'ensuit un remaniement du commentaire qui évite de particulariser l'angle droit de l'équerre.

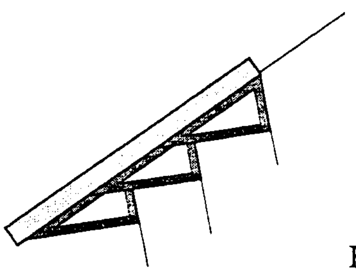


Fig.3

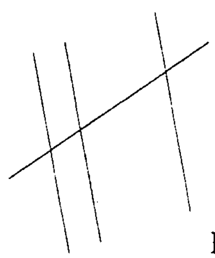


Fig.4

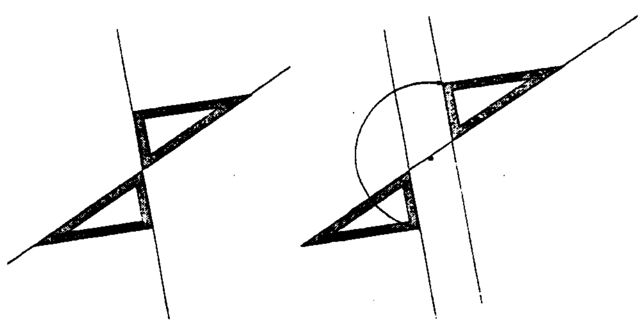


Fig.5 a et b

Les tracés aux insruments ne montrent que les demi-droites situées d'un même côté de la droite donnée, il faut donc les prolonger (Fig.4). Apparaît ainsi une figure clé : un faisceau de parallèles coupées par une sécante. La Fig.5 montre qu'on peut placer le même « coin » de l'équerre de l'autre côté de la droite donnée. Elle montre aussi la rotation de 180° qui permet de passer d'une position à l'autre. Ce phénomène sera expliqué lors de la synthèse.

Perpendiculaires et parallèles

4. Quand on a un point et une droite, on peut toujours construire une perpendiculaire à la droite de façon à ce que cette perpendiculaire passe par le point. On ne peut en construire qu'une.

Il est particulièrement difficile pour un élève d'exprimer dans une seule phrase, sans ambiguïté, la double contrainte de cette construction. L'objectif est ici non pas de construire une axiomatique mais de garder mémoire de la chose et de mettre en place un vocabulaire et une phraséologie pour en parler. L'affirmation de l'existence est concomitante à la possibilité de construction.

5. Quand on a un point et une droite, on peut toujours construire une parallèle à cette droite de façon à ce que la parallèle passe par le point.

Les deux énoncés sont rédigés strictement de la même façon. Quelle que soit la formulation choisie, il importe que des analogies de structure soient traduites dans des phraséologies identiques.

6. Une droite est déterminée quand on connaît deux de ses points.
7. Une droite est déterminée quand on connaît un de ses points et sa direction.

Ces deux énoncés ont été expérimentés une première fois à propos de la détermination d'un axe de symétrie.

8. Quand des droites sont perpendiculaires à une même autre droite, on est sûr que ces droites sont parallèles entre elles.

Deux figures éclairent l'énoncé : l'une évoque la construction et l'autre induit une reconnaissance de la propriété indépendamment d'un contexte.

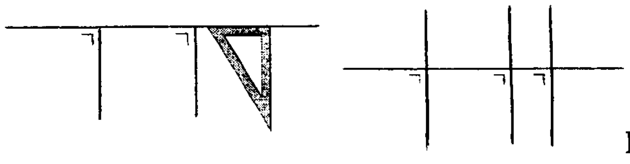


Fig.6

9. Quand des droites sont parallèles, elles forment avec une oblique qui les coupe des angles aigus de même amplitude (de même pour les angles obtus).

La manoeuvre qui consiste à glisser une équerre contre une règle pour tracer des parallèles repose sur l'intuition que des droites parallèles sont inclinées de la même façon par rapport à une même droite. La formulation de cette intuition conduit à une figure clé qui montre de manière concomitante des égalités d'angles et le parallélisme.

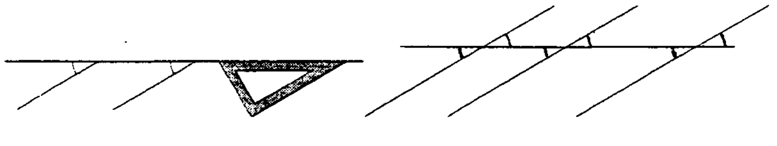


Fig.7

Translation et droites parallèles

10. Dans une translation, une droite à l'arrivée est parallèle à la droite de départ

On aperçoit d'emblée la parenté de cet énoncé avec la détermination d'un parallélogramme.

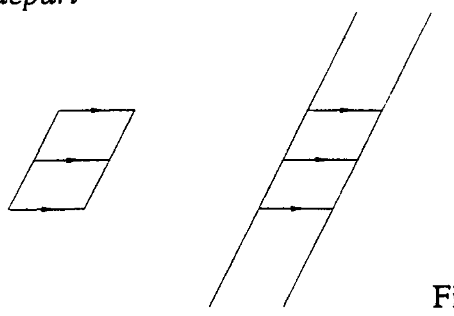


Fig.8

11. Quand deux droites sont parallèles, on peut déterminer beaucoup de translations qui envoient une droite sur l'autre.

Cet énoncé fait référence à la liberté de choix concernant la direction de la droite contre laquelle on fait glisser l'équerre dans une construction aux instruments. La Fig.10 fait référence à ce contexte.

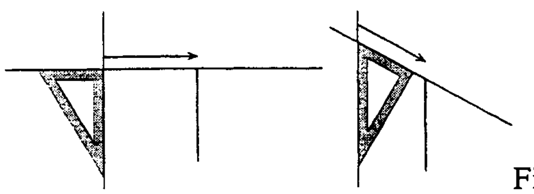


Fig.10

La Fig.11 fait abstraction du contexte, elle rappelle qu'une même translation peut être représentées par une infinité de flèches et tente d'éviter une confusion entre translations distinctes et flèches placées à des endroits différents.

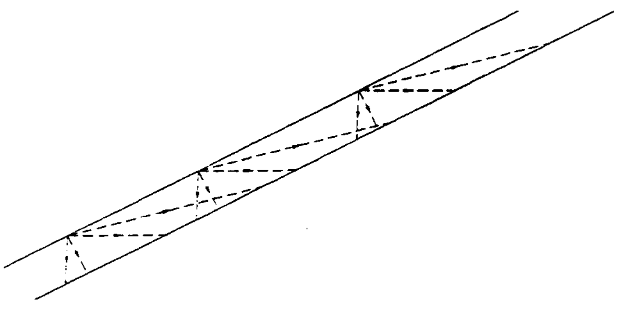


Fig.11

La Fig.11 montre quatre translations qui peuvent envoyer une des deux droites sur l'autre.

Plus tard, lorsque les élèves auront été amenés à engager ces énoncés dans des raisonnements, on peut reformuler les énoncés pour les rendre d'emblée disponibles pour un raisonnement déductif. Cette initiation peut se faire sous la forme d'un tableau à compléter.

Si on sait que	**on peut conclure que**
une droite est image l'une de l'autre par une translation,	*ces droites sont parallèles.*
des droites sont parallèles,	*une droite est image de l'autre par une translation.*
des droites sont parallèles,	*elles forment avec une oblique qui les coupe, des angles aigus de même amplitude. Idem pour des angles obtus.*
des droites sont perpendiculaires à une même troisième,	*ces droites sont parallèles.*

Rotation de 180° et droites parallèles

Le mouvement des aiguilles d'une horloge donne une bonne image des rotations. La rotation de 180° par exemple, correspond au mouvement de l'aiguille des minutes d'une demi-heure à l'autre. Après une demi-heure, cette aiguille vient se placer dans le prolongement de sa position de départ.

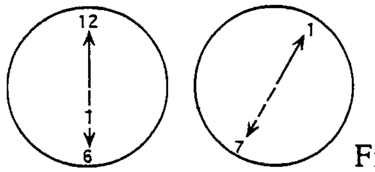


Fig.12

Si on colle une droite à la flèche pour qu'elle suive le même mouvement, on voit qu'après une demi-heure, la direction à l'arrivée est la même que la direction au départ.

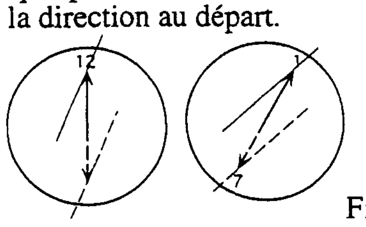


Fig.13

12. Lorsqu'une droite tourne de 180° autour d'un de ses points, elle vient se superposer à elle-même.
13. Lorsqu'une droite tourne de 180° autour d'un point extérieur, la droite à l'arrivée est parallèle à celle de départ.

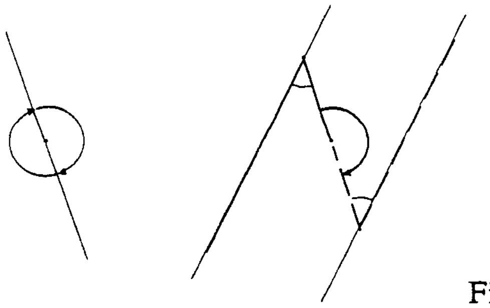


Fig.14

L'horloge est un modèle particulièrement éclairant pour les mouvements de rotation appliqués à des segments de droites issus du centre : le centre est présent, les segments sont reliés au centre et un intervalle de temps bien précis sépare la figure de départ de la figure d'arrivée.

Ce phénomène est lié à la conservation des angles.

Une configuration en forme de « Z » apparaît. Cette figure-clé montre de manière concomitante la rotation de 180°, le parallélisme et la conservation des angles par cette rotation.

Plus tard ces énoncés peuvent être reformulés de manière à ce qu'ils soient d'emblée disponibles pour l'argumentation.

Si on sait que	on peut conclure que
deux droites sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°,	*ces droites sont parallèles.*
deux droites sont parallèles,	*ces droites sont images l'une de l'autre par une rotation de 180°.*

EXERCICE

On donne un dessin en perspective cavalière d'un assemblage de trois cubes identiques (module A). Fabriquer six modules composés de quatre cubes. Tous les modules doivent être différents. Compléter les dessins ci- dessous chaque fois qu'un nouveau module est découvert.

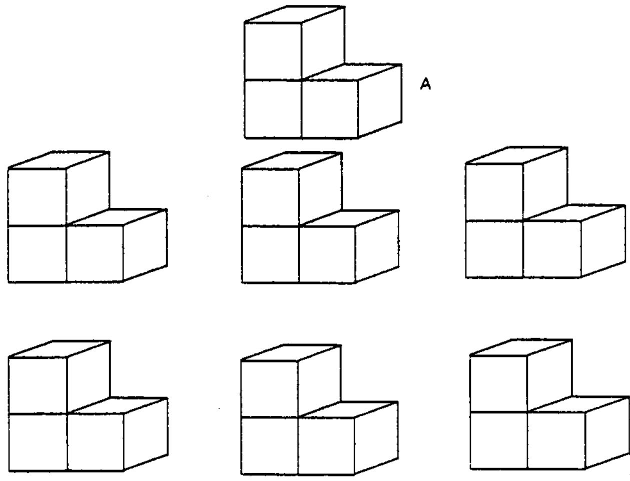


Fig.15

COMMENTAIRES

Cet exercice de dessin vise à exercer le tracé de parallèles dans un contexte où l'usage de la règle et de l'équerrre permet de construire rapidement plusieurs arêtes parallèles. Il peut être exécuté sans qu'aucune propriété de la perspective cavalière n'ait été donnée au préalable. Il faut néanmoins que les élèves diposent de cubes réels pour concevoir les modules et pour les comparer à leurs représentations. Des tracés précis, aux instruments, peuvent être précédés d'un premier travail à main levée.

Il arrive souvent dans les classes que sept solides apparaissent comme distincts. Ils sont montrés par la Fig.16

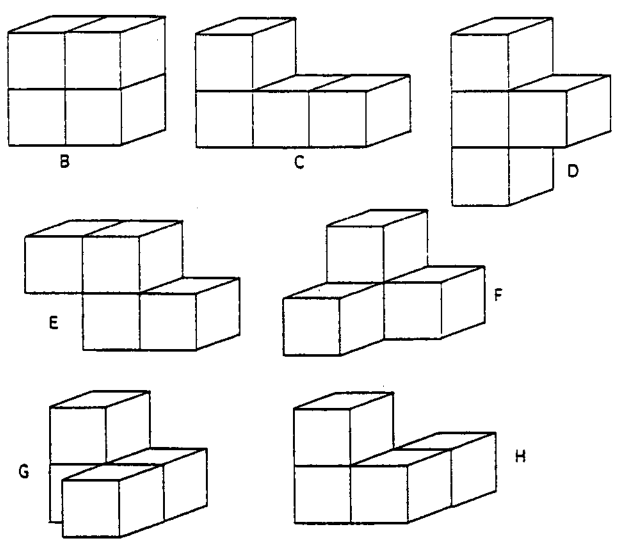


Fig.16

Il est intéressant alors de placer les solides G et H *en miroir* pour faire voir qu'ils sont symétriques.

Signalons que les sept solides A, B, C, D, E, F et G peuvent être assemblés pour former un cube. On peut aussi former un cube en assemblant les solides, A, C, D, E, F, G et H.

3. *Assembler des triangles quelconques*

Les élèves disposent de deux triangles quelconques superposables, découpés dans du papier fort. Il est nécessaire pour y voir clair de discerner les deux faces d'un même triangle en les coloriant de couleurs différentes. Deux triangles posés sur des faces d'une même couleur sont superposables par déplacement, deux triangles posés sur des faces de couleurs différentes sont superposables par retournement.

> 1. Combien de quadrilatères distincts peut-on former en accolant deux triangles quelconques superposables ?

COMMENTAIRES

Les élèves gardent une trace des quadrilatères obtenus en contournant au fur et à mesure les figures déposées sur le cahier.

Lorsqu'on utilise deux triangles à l'endroit, on obtient trois parallélogrammes différents : ils ne sont pas superposables, on repère facilement des côtés et des angles qui ne sont pas égaux d'un parallélogramme à l'autre (Fig.1).

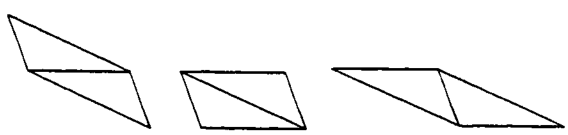


Fig.1

Lorsqu'on utilise deux triangles à l'envers, on obtient aussi trois parallélogrammes. Chacun d'eux est superposable par retournement à l'un des trois précédents. On s'en assure soit en reportant un quadrilatère sur l'autre, soit en comparant angles et côtés des différents quadrilatères et en vérifiant que d'un quadrilatère à l'autre, ils se succèdent dans le même ordre et ont même mesure.

On convient d'appeler cerf-volants, les quadrilatères que l'on obtient lorsqu'on utilise un triangle à l'endroit et un triangle à l'envers.

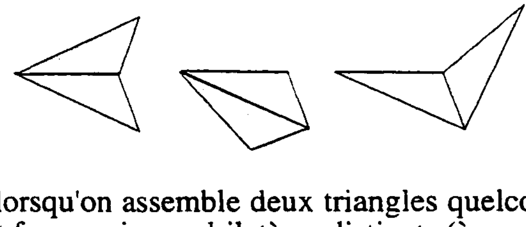


Fig.2

On conclut donc que lorsqu'on assemble deux triangles quelconques superposables le long d'un de leur côté, on peut former six quadrilatères distincts (à savoir, qui ne sont superposables ni par déplacement, ni par retournement).

Cette activité de dénombrement ouvre une question : comment se fait-il que tous les assemblages par déplacement aboutissent à des parallélogrammes ? On y répond en regardant le mouvement qui amène un triangle contre l'autre, comme une rotation de 180° autour du milieu d'un côté du premier triangle. La Fig3 montre un tel mouvement : le second triangle d'abord posé sur le premier, vient se placer ensuite contre celui-ci. La démonstration qui s'ensuit est présentée dans la synthèse.

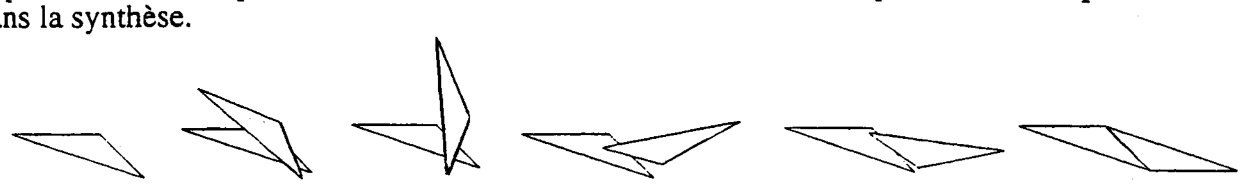


Fig.3

SYNTHESE

Parallélogramme et rotation de 180°

14. Lorsque deux polygones sont superposables les côtés correspondants ont même longueur et les angles correspondants ont même amplitude.

Cet énoncé traduit en égalités de mesures, le fait que deux triangles que l'on superpose coïncident.

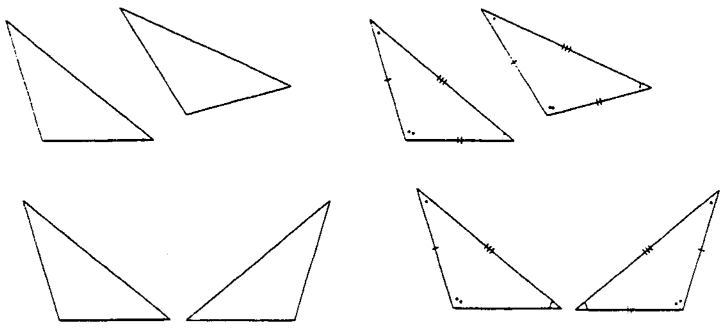
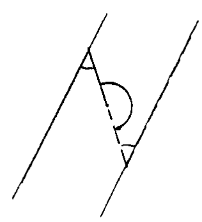


Fig.4

15. Lorsqu'on assemble deux triangles superposables de façon à ce que l'un soit envoyé sur l'autre par la rotation de 180° dont le centre est le milieu du côté commun aux deux triangles, le quadrilatère obtenu est un parallélogramme.

La démonstration de cette propriété est motivée par un étonnement : voir appaître un quadrilatère particulier au départ de triangles quelconques. La démonstration consiste ici à éclairer ce phénomène à la lumière d'un autre. On évoque la figure-clé qui relie rotation de 180° et parallélisme.



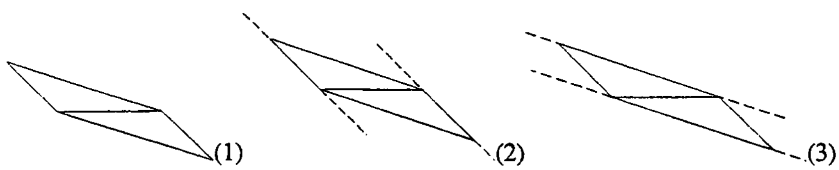


Fig.5

(1) Le quadrilatère est formé de deux triangles superposables par rotation de180°.
(2) On prolonge un côté du parallélogrammme pour identifier une droite qui tourne de 180° autour d'un point extérieur, la droite à l'arrrivée est parallèle à celle de départ [énoncé 13] .
(3) On fait le même raisonnement pour l'autre paire de côté.

16. Le cerf-volant est formé de deux triangles superposables, images l'un de l'autre par une symétrie orthogonale.

2. Assembler deux triangles pour former un parallélogramme et coder les éléments qui ont même mesure. Compléter la figure pour établir une liste des propriétés du parallélogramme.

COMMENTAIRES

Le codage des éléments qui sont superposables par une rotation de 180° fait apparaître les propriétés des côtés et des angles du parallélogramme qui sont liées à cette rotation. Pour relier les propriétés des diagonales et des médianes à celles des mouvements de rotation ou de translation, il faut ajouter quelques éléments à la figure.

SYNTHESE

Côtés et angles du parallélogramme

Le parallélogramme étant formé de deux triangles superposables par rotation de180°, il a les propriétés suivantes :

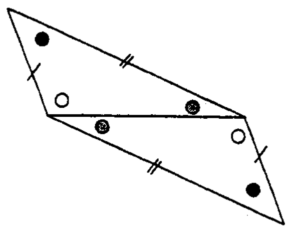


Fig.3

17. Le parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.

18. Le parallélograme a ses angles opposés de même amplitude.

Diagonales du parallélogramme

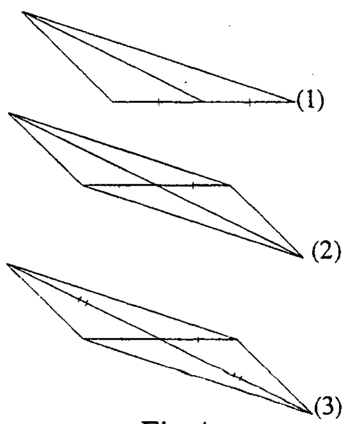


Fig.4

(1) Sur chacun des deux triangles identiques on trace le segment qui joint un sommet au centre de rotation. On commence par superposer les triangles.

(2) On fait tourner un des deux triangle de 180° autour du centre. Le segment de départ et son image à l'arrivée sont alignés [énoncé *12*].

(3) On code les élélments superposables.

On conclut :

19. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

Les propriétés, pour la plupart déjà connues, sont attachées à une figure-clé et à un mouvement.

Présenter une suite de figures, chacune se rapportant à une étape de la démonstration, évite de mettre des lettres sur la figure. Cela simplifie significativement le va-et-vient entre figure et texte.

Médianes

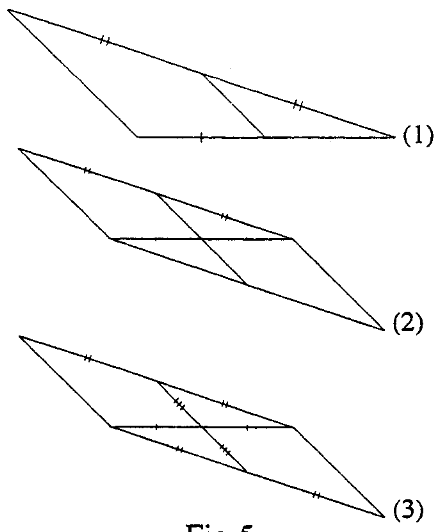


Fig.5

(1) On joint le milieu d'un côté au centre de rotation pour les deux triangles que l'on commence par superposer.

(2) On fait tourner un des deux triangles de 180° autour du centre. Le segment de départ et son image à l'arrivée sont alignés [énoncé *12*].

(3) On code les éléments superposables.

On fait de même pour l'autre médiane. On conclut :

20. Dans un parallélogramme, les médianes et les diagonales se coupent en un même point.

21. Les médianes se coupent en leur milieu.

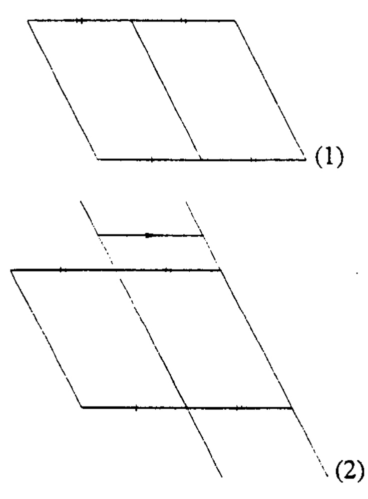


Fig.6

(1) On trace une médiane du parallélogramme et on code les segments de même longueur.

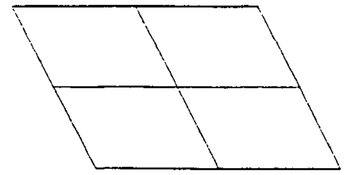
(2) Chaque médiane peut glisser par translation sur un côté du parallélogramme [énoncé 1].

On fait de même pour l'autre médiane. On conclut [énoncé 10]:

22. Chaque médiane est parallèle à deux côtés du parallélogramme.

Puisqu'une même idée préside aux deux démonstrations, on incite les élèves à s'inspirer de la structure, de la prrésentation et de la phraséologie propres à la première pour rédiger eux-mêmes cette synthèse.

Pour démontrer le parallélisme qui lie les médianes aux côtés du parallélogramme, on a recours à une translation. On peut ajouter à cette synthèse la configuration qui montre que les parallélogrammes formés par les médianes sont superposables.



3. Coder les segments et les angles du cerf-volant qui ont même mesure.

COMMENTAIRES ET SYNTHESE

Dans un cerf-volant, on passe d'un triangle à l'autre en retournant le premier autour du côté commun pris comme charnière. Dans ce mouvement, le triangle sort du plan. Dans le plan, chaque triangle est image de l'autre par une symétrie orthogonale dont l'axe est le côté commun.

Le travail codage conduit aux propriétés du cerf-volant en les rapprochant de celles de la symétrie orthogonale.

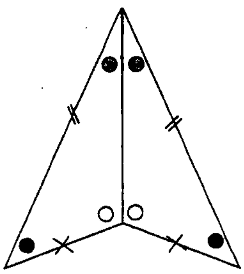


Fig.6

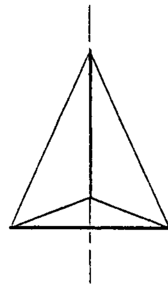


Fig.7

Les codages de la Fig.6 montrent que :

23. Une diagonale du cerf-volant est l'axe de symétrie qui envoie un triangle sur l'autre.
Cette diagonale est bissectrice des angles qu'elle partage.
Deux côtés consécutifs dont le sommet commun appartient à l'axe ont même longueur.

Traçons la diagonale qui relie les sommets qui n'appartiennent pas à l'axe (Fig.7). Comme ces sommets sont images l'un de l'autre par une symétrie orthogonale, le segment qui les relie est perpendiculaire à l'axe.

Dans un cerf-volant, les diagonales sont perpendiculaires .

On poursuit le travail en assemblant des triangles rectangles, des triangles isocèles, des triangles isocèles-rectangles. L'univers des figures géométriques prend une cohérence nouvelle : les propriétés des triangles ont des liens avec celles des quadrilatères. Les propriétés s'organisent autour des propriétés de quelques mouvements et de quelques figures-clés.

Conclusion

Tout comme le mouvement introduit la dimension du temps dans l'espace des figures, les synthèses rythment les apprentissages et introduisent le temps de l'argumentation. Ce n'est qu'avec le temps qu'on apprend à recourir à un énoncé, à une figure pour construire les étapes d'un raisonnement et qu'on réalise l'intérêt d'engranger au fur et à mesure ce que l'on a appris.

Ces trois situations inaugurent une géométrie argumentée. Elles peuvent être remplacées par d'autres qui rencontrent les mêmes objectifs en termes de rédaction de synthèses. Le choix de ces situations est guidé, en outre, par deux préoccupations :

1. montrer l'importance des transformations. Les liens naturels qu'elles entretiennent avec la perception contribuent à en faire des outils de pensée efficaces, accessibles à des débutants. Il nous semble que les analyses qui ont souligné les difficultés de cet apprentissage se basent sur des pratiques pédagogiques qui procèdent d'une conceptualisation prématurée quand elles partent de définitions très générales et font d'emblée abstraction du mouvement.

2. montrer l'importance des constructions aux instruments. L'enseignement par logiciels que nous préconisons par ailleurs ne peut se substituer entièrement à une appréhension de la géométrie par les mains. La réalisation de figures mobilise une coordination des mouvements du regard et des mains et requiert un va-et-vient entre propriétés des instruments et des figures.