MICHEL WEBER

À propos d'une démonstration de K. Tandori

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___2_A8_0>

A PROPOS D'UNE DEMONSTRATION DE K. TANDORI

Michel WEBER

Université de Strasbourg

Dans un article bien connu des spécialistes de la théorie des fonctions orthogonales [T], K. Tandori démontre la proposition suivante

Proposition A. ([**T**], Hilfsatz p.249) *Soit $(a_n, 1 \leq n \leq M)$ une suite de réels positifs. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_M)$ un système orthonormal d'un espace $L^2(X, \mu)$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé. Alors*

$$\left\| \max_{1 \leq m \leq M} |a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)| \right\|_{2,\mu}^2 \leq C. \log M. \sum_{k=1}^{M} a_k^2 \log \frac{a_1^2 + \ldots + a_M^2}{a_k^2},$$

où C est une constante universelle.

Cette proposition améliore le résultat séminal de Rademacher-Menchov

Proposition B. ([**A**], 2.3.1. p.79) *Soit $(a_n, 1 \leq n \leq M)$ une suite de réels positifs. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_M)$ un système orthonormal d'un espace $L^2(X, \mu)$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé. Alors*

$$\left\| \max_{1 \leq m \leq M} |a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)| \right\|_{2.\mu}^2 \leq C.(\log M)^2. \sum_{k=1}^{M} a_k^2,$$

où C est une constante universelle.

Ces deux inégalités permettent d'obtenir sans peine par une technique de blocs, des critères pour la convergence presque sûre des séries à termes orthogonaux.

Théorème A. ([**T**], Satz p.249) *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ un système orthonormal d'un espace $L^2(X, \mu)$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé. Sous la condition*

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 (\log k)(\log_+ \frac{1}{a_k^2}) < \infty,$$

la série $\sum_{k\geq 1} c_k \varphi_k$ converge μ-presque sûrement.

AMS Subject Classification 1985: Primary 60F99 , Secondary 28D99.

Keywords: orthogonal series, convergence almost everywhere.

Dans l'énoncé précédent, on a posé

$$\log_+ x = \begin{cases} x & si \quad x \geq e, \\ 1 & si \quad 0 \leq x < e. \end{cases}$$

Théorème B. ([A], 2.3.2. p.80) *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ un système orthonormal d'un espace $L^2(X, \mu)$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé. Sous la condition*

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 (\log k)^2 < \infty,$$

la série $\sum_{k\geq 1} c_k \varphi_k$ converge μ-presque sûrement.

L'énoncé A est, dans l'absolu, strictement meilleur que l'énoncé B. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple suivant:

$$a_k^2 = \begin{cases} n^{-3} & si \quad k = 2^n, \\ b_k^2 & sinon, \end{cases}$$

où $(b_k)_k$ vérifie $\sum_k b_k^2 \left(\log_+ \frac{1}{b_k^2}\right) (\log k) < \infty$. On vérifie facilement que

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 (\log k)^2 = \infty, \qquad \sum_{k\geq 1} a_k^2 (\log k)(\log_+ \frac{1}{a_k^2}) < \infty.$$

Alors que la proposition A se démontre à l'aide du chaînage binaire classique, Tandori introduit pour démontrer la proposition B, un chaînage binaire pondéré par les coefficients a_k^2, ceux-ci agissant comme des poids pour découper l'intervalle $[1, M]$. L'idée consiste en effet à scinder $[1, M]$ en deux sous-intervalles suivant la position de la médiane de la suite $\left(\sum_{l\leq n} a_l^2, n \leq M\right)$, puis à répéter successivement la même opération à chacun des sous-intervalles obtenus, en l'alternant avec le découpage binaire classique, de façon à conserver un épuisement exponentiel de l'intervalle $[1, M]$ en sous-intervalles. La démonstration repose sur un argument combinatoire-clé explicité en (E), et qui est intéressant en lui-même. En effet, il s'agit d'évaluer pour tout $1 \leq k \leq M$, le nombre de sous-intervalles obtenus contenant k. Malheureusement, seuls les passages essentiels de la démonstration sont indiqués dans la preuve originale de K. Tandori. L'estimation (E) par exemple, est énoncée sans démonstration. Ayant passé un certain temps à chercher à obtenir une compréhension rigoureuse de la démonstration de cette proposition, et notamment de l'argument combinatoire-clé, il m'a semblé utile de proposer une rédaction détaillée de la preuve de Tandori, afin d'en faire profiter le lecteur éventuel, en lui évitant ainsi d'avoir à refaire le même travail.

Démonstration.

Etape 1 : (*Emiettement de l'intervalle* $[1, M]$) On suppose $M \geq 3$. Sans restreindre la généralité, on peut aussi supposer que

$$\sigma_0 = \sum_{k=1}^{M} a_k^2 = 1.$$

On pose pour alléger l'écriture

$$c_k = a_k^2, \qquad k = 1, 2, \ldots, M.$$

Pour tous entiers $1 \leq a \leq b$, on note

$$[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\} \qquad [a] = \{a\}.$$

On convient que $\sum_{l \in \emptyset} = 0$. On définit deux correspondances.

$\underline{\mathcal{S}}$ (*césure*): soit $\sigma = \sum_{a \leq k \leq b} c_k$ et notons

$$m = \inf\{k \geq a \ : \ c_a + \ldots + c_k \geq \frac{1}{2}\sigma\}, \qquad N = b - a + 1.$$

On distingue 3 cas:

Cas 1: $N = 1$, $a = b$; alors $\mathcal{S}([a, b]) = \mathcal{S}([a]) := \{\emptyset\}$.

Cas 2: $N = 2$, $a + 1 = b$; alors $\mathcal{S}([a, b]) = \mathcal{S}([a, a+1]) := \{[a], [a+1]\}$.

Cas 3: $N \geq 3$; alors on distingue deux nouveaux cas:

$(3 - \alpha)$ $m = a$ $(c_a \geq \frac{1}{2}\sigma)$; alors $\mathcal{S}([a, b]) = \{[a], [a+1, b]\}$.

$(3 - \beta)$ $a < m \leq b$; alors $a \leq m - 1$ et $\mathcal{S}([a, b]) = \{[a, m-1], [m, b]\}$; et on observe que $\sum_{k \in [a, m-1]} c_k \leq \frac{1}{2}\sigma$.

$\underline{\mathcal{D}}$ (*division*): on distingue 2 cas:

Cas 1: $N = 1$ ou 2; alors $\mathcal{D} = \mathcal{S}$

Cas 2: $N \geq 3$; posons $m = a + [\frac{N+1}{2}]$, alors

$$\mathcal{D}([a, b]) := \{[a, m-1], [m, b]\}.$$

On émiette l'intervalle de départ $I = [1, M]$ par composition successive et alternée des correspondances $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{D} \circ \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{D} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{S} \longrightarrow \ldots$$

Notations :

-étape 0 : c'est $I = [1, M]$.
-étape 1 : c'est le résultat produit par l'action de $\mathcal{S}$ sur I.
-étape 2 : c'est le résultat produit par l'action de $\mathcal{D} \circ \mathcal{S}$ sur I.
(etc...)

-pour tout $k \geq 1$, les intervalles produits à l'étape k sont notés

$$I_{j_1,\ldots,j_k} \qquad\qquad j_1,\ldots,j_k = 0 \ ou \ 1.$$

On note $(m_{j_1,\ldots,j_k})_{j_1,\ldots,j_k}$ les points de divisions (*i.e.* les valeurs de la quantité m intervenant dans la définition des opérations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$) réalisées à l'étape k ($k \geq 1$). Et on pose

$$\sigma_{j_1,\ldots,j_k} = \sum_{l \leq m_{j_1,\ldots,j_k}} c_l.$$

La correspondance $\mathcal{D}$ va garantir un épuisement exponentiel de l'intervalle I; l'exemple de la suite $c_k = 2^{-k}$, $k = 1,\ldots,M$ montre la nécessité de l'introduction de $\mathcal{D}$. Notons ici que cette suite est pourtant une bonne suite pour la convergence presque partout des séries orthogonales.

Etape 2 : (*Nombre d'étapes*) Si à l'étape $2h$, $h \geq 1$, on trouve encore un intervalle de longueur ≥ 2; c'est qu'il est contenu dans un intervalle existant à l'étape précédente, lui-même moitié d'un intervalle obtenu par $\mathcal{D}$ à l'étape $2(h-1)$. Par suite, en remontant les étapes paires

$$2^h \leq M.$$

Il n'y a donc qu'un nombre fini d'étapes paires pour lesquelles on puisse trouver un intervalle de longueur ≥ 2. Soit $2H$ la dernière étape paire; alors $2^H \leq M$.
L'émiettement de I est donc achevé au plus à l'étape $2H+1$. On a donc montré

$$\textit{nombre maximal d'étapes} \ \leq \ 2\log_2 M + 1 \leq 3\log_2 M.$$

Etape 3 : (*L'estimation-clé*) Notons τ_k, $1 \leq k \leq M$, le nombre d'apparitions de k dans les intervalles $I_{j_1,\ldots,j_l}$, $l \leq 3\log_2 M$. Nous allons établir

$$\tau_k \leq 10\left(\log_+ \frac{1}{c_k} + 1\right). \tag{E}$$

Montrons comment conclure à l'aide de cette estimation. Notons

$$\breve{\sigma}_{j_1,\ldots,j_k} = \sum_{l \in I_{j_1,\ldots,j_k}} a_l \varphi_l.$$

Toute somme partielle peut s'écrire sous la forme

$$a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x) = \breve{\sigma}_{i_1}(x) + \breve{\sigma}_{i_1 i_2}(x) + \ldots + \breve{\sigma}_{i_1,\ldots,i_k}(x).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit

$$|\breve{\sigma}_{i_1}(x) + \breve{\sigma}_{i_1 i_2}(x) + \ldots + \breve{\sigma}_{i_1,\ldots,i_k}(x)|^2 \leq k\sum_{j=1}^{k} \left|\breve{\sigma}_{i_1,\ldots,i_j}(x)\right|^2 \leq 3\log_2 M \sum_{j=1}^{[3\log_2 M]} \left|\breve{\sigma}_{i_1,\ldots,i_j}(x)\right|^2.$$

Par suite

$$\max_{1 \leq m \leq M} |a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)|^2 \leq 3\log_2 M \sum_{j=1}^{[3\log_2 M]} \left|\breve{\sigma}_{i_1,\ldots,i_j}(x)\right|^2.$$

En intégrant

$$\left\| \max_{1\leq m\leq M} |a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_m\varphi_m(x)| \right\|_{2,\mu}^2 \leq 3\log_2 M \sum_{j=1}^{[3\log_2 M]} \sum_{l\in I_{i_1,\ldots,i_k}} a_l^2$$
$$= 3\log_2 M \sum_{l=1}^{M} a_l^2 \tau_l$$
$$\leq 30\log_2 M \sum_{l=1}^{M} a_l^2 \log_+ \frac{1}{a_l^2}.$$

Etape 4 : (*Démonstration de l'estimation-clé*) C'est la partie délicate de la démonstration: le problème réside dans le contrôle des facteurs d'erreur inhérents aux "petits nombres" (voir exposition des cas dans ce qui suit). Introduisons aussi une notation commode:

$$n\times 0,1 = \overbrace{0,\ldots,0}^{n \text{ fois}},1.$$

Notons τ_k^1 le nombre d'apparitions de k dans les intervalles de la forme $[1,x]$, $x\geq 1$, produits par l'émiettement jusqu'à ce que 1 soit isolé. Pour évaluer τ_k, nous commencerons par évaluer τ_k^1. Nous distinguerons plusieurs cas.

• $(\boldsymbol{\tau_k^1 \geq 3})$: Donc, il existe au moins trois intervalles de la forme $[1,x]$, $x\geq 1$, différents et contenant k. Il existe par conséquent un unique entier $j\geq 2$ tel que:

$$k\in [m_{j\times 0,1}, m_{(j-1)\times 0,1}].$$

Nécessairement,

$$k\leq m_{0,1} < m_1 < M.$$

Et l'on a aussi

$$\sigma_{j\times 0,1} \leq \sum_{l=1}^{k} c_l \leq \sigma_{(j-1)\times 0.1}.$$

On montre que pour tout entier $a\geq 0$

$$\sigma_{a\times 0,1} \leq 2^{-(b+1)}\sigma_0,$$

si $a=2b+1$ ou $a=2b$. Montrons-le dans le cas impair; dans le cas pair, le raisonnement est similaire.

$$\sigma_{a\times 0,1} < \sigma_{(a-1)\times 0,1} < \frac{1}{2}\sigma_{(a-2)\times 0,1} < \ldots < \frac{1}{2^b}\sigma_{0,1} < \frac{1}{2^b}\sigma_1 < \frac{1}{2^{b+1}}\sigma_0.$$

D'où:

$$\sum_{l=1}^{k} c_l \leq \sigma_{(j-1)\times 0,1} \leq 2^{[\frac{j-1}{2}]}\sigma_0 \leq 2^{[\frac{j+1}{2}]}\sigma_0.$$

En raisonnant suivant que $m_{j\times 0.1} = 1$ ou > 1, on montre que $\tau_k^1 = j$ ou $j+1$. Et donc $j+1 \geq \tau_k^1$. D'où,

$$2^{[\frac{1}{2}\tau_k^1]} \sum_{l=1}^{k} c_l \leq \sigma_0. \tag{α}$$

Mais quel que soit $c \geq 3$ entier, $[\frac{c}{2}] \log 2 \geq \frac{c}{5}$. D'où l'on tire

$$\exp(\frac{1}{5}\tau_k^1) \left(\sum_{l=1}^{k} c_l \right) \leq \sigma_0. \tag{α'}$$

Notons U_k^1 l'intervalle résiduel dans lequel se trouve k à l'étape τ_k^1. On a encore

$$\exp(\frac{1}{5}\tau_k^1) \left(\sum_{l \in U_k^1} c_l \right) \leq \sigma_0. \tag{β}$$

• $\boldsymbol{\tau_k^1 = 2}$ Ou bien $k = 1$, et donc $\tau_k = \tau_k^1 = 2$. D'où (E) directement. Ou bien $1 < k \leq M$: comme on suppose $M \geq 3$, nous tombons dans le cas (3) de la définition de la correspondance $\mathcal{S}$. Alors, ou bien $m = 1$, et dans ces conditions la césure $\mathcal{S}$ produit les intervalles $[1]$, $]m, M]$. Mais comme $\tau_k^1 = 2$, cela implique nécessairement que $k = 1$, ce qui est exclu. Enfin si $m > 1$, la césure $\mathcal{S}$ produit les intervalles $[1, m-1]$ et $[m, M]$. Donc $k \in [1, m-1]$, et l'on sait que $\sum_{l \in [1, m-1]} c_l \leq \frac{1}{2}$.

Il en résulte ici aussi que $\sum_{l \in U_k^1} c_l \leq \sum_{l \in [1, m-1]} c_l \leq \frac{1}{2}$. Et par conséquent, là encore (β) est réalisée puisque

$$e^{\frac{1}{5}.2} \sum_{l \in U_k^1} c_l \leq 2 \sum_{l \in U_k^1} c_l \leq \sigma_0.$$

• $\boldsymbol{\tau_k^1 = 1}$ Alors k apparaît dans $[1, M]$ seulement. En utilisant la définition de m dans la correspondance $\mathcal{S}$, on a $m \leq k \leq M$.

a) - ou bien $m < k \leq M$; alors $\sum_{l \in U_k^1} c_l \leq \sum_{l \in]m, M]} c_l \leq \frac{1}{2}$. Et ceci implique

$$e^{\frac{1}{5}\tau_k^1} \sum_{l \in U_k^1} c_l \leq 2 \sum_{l \in U_k^1} c_l \leq \sigma_0.$$

D'où (β).

b) - ou bien $m = k$; on distingue encore deux sous-cas (cette situation correspond au cas où on étudie le nombre d'apparitions de 1 dans les intervalles de la forme $[1, z]$)

i) $k + 1 = M$; alors $\tau_k = 3$, cela correspond à $([1, M], [M-1, M], [M-1])$

ii) $k + 1 < M$; donc $Card([k, M]) \geq 3$.

- ou bien le nombre d'apparitions de k dans les intervalles de la forme $[k, z]$ est ≤ 2; et alors $\tau_k \leq 2 + 1 = 3$. Ici encore, (E) est directement établi, car le processus s'arrête.

- ou bien il est ≥ 3. On tombe alors dans le premier cas de figure. D'où, $\tau_k \leq 1 + c$ avec $c \geq 3$ et $2^{[\frac{c}{2}]} c_k \leq 1$.

On a donc $e^c (c_k)^5 \leq 1$; par suite $c \leq 5 \log \frac{1}{c_k}$. Le processus s'arrête, et l'on a l'estimation

$$\tau_k \leq 1 + 5 \log \frac{1}{c_k} \leq 5 \left(1 + \log \frac{1}{c_k} \right). \tag{γ}$$

Par suite. le cas $(\tau_k^1 = 1)$-b) implique (γ).
Seules les configurations $(\tau_k^1 \geq 2)$ et $(\tau_k^1 = 1)$-a) permettent de réenclencher le processus d'émiettement. Notons $U_k^1 = [\alpha, \beta]$. Pour compter le nombre d'apparitions de k dans les intervalles de la forme $[\alpha, z]$, $\alpha \leq z \leq \beta$, on opère comme précédemment. Soit τ_k^2 ce nombre. Rappelons (β):

$$\sum_{l \in U_k^1} c_l \leq \exp(-\frac{1}{5}\tau_k^1)\sigma_0,$$

et notons U_k^2 l'intervalle résiduel correspondant. Dans les cas $(\tau_k^2 \geq 2)$ ou $(\tau_k^2 = 1)$-a), on a

$$\exp(\frac{1}{5}(\tau_k^1 + \tau_k^2)) \left(\sum_{l \in U_k^2} c_l \right) < 1.$$

Sinon, dans le cas $(\tau_k^2 = 1)$-b), $\tau_k \leq 3 + \tau_k^1$ ou $\tau_k \leq \tau_k^1 + c + 1$ avec $2^{[\frac{1}{2}c]}c_k \leq 1$. Ceci implique

$$\tau_k \leq 10 \left(1 + \log \frac{1}{c_k} \right).$$

Soit $r \geq 1$ l'entier tel que l'on puisse écrire

$$\tau_k = \tau_k^1 + \ldots + \tau_k^r.$$

Suivant que τ_k^r tombe dans l'une ou l'autre des classes de configurations, on aura soit

$$\exp(\frac{1}{5}\tau_k).c_k = \exp(\frac{1}{5}\tau_k^1 + \ldots + \tau_k^r).c_k < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tau_k \leq 5 \log \frac{1}{c_k},$$

soit

$$\exp(\frac{1}{5}\tau_k^1 + \ldots + \tau_k^{r-1})c_k \leq \exp(\frac{1}{5}\tau_k^1 + \ldots + \tau_k^{r-1}) \sum_{l \in U_k^{r-1}} c_l < 1;$$

Et $\tau_k \leq 3 + \tau_k^1 + \ldots + \tau_k^{r-1}$ ou $\tau_k \leq \tau_k^1 + \ldots + \tau_k^{r-1} + c + 1$ avec $c \geq 3$ et $e^c c_k^5 \leq 1$. Donc, soit $\tau_k \leq 5 \log \frac{1}{c_k}$, soit $\tau_k \leq 3 + 5 \log \frac{1}{c_k}$ ou soit $\tau_k \leq 5 \log \frac{1}{c_k} + 5 \log \frac{1}{c_k} + 1$.
En définitive, on a montré

$$\tau_k \leq 10 \left(\log_+ \frac{1}{c_k} + 1 \right).$$

■

Références:

[A] **Alexits**, 1961. *Convergence problems of orthogonal series*, Hungarian Acad. Sci., Budapest.

[T] **Tandori**, 1965. *Bemerkung zur Konvergenz der Orthogonalreihen*, Acta Sci. Math. (Szeged) **26**, p.249-251.

M. Weber: Mathématique, Université Louis-Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France, e-mail: weber@math.u-strasbg.fr