STÉPHANE LE BORGNE

Un problème de régularité dans l'équation de cobord

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___2_A5_0>

Un problème de régularité dans l'équation de cobord

Stéphane Le Borgne

IRMAR, Université de Rennes I, 35042 Rennes Cedex

I Introduction

On dit qu'une fonction f définie sur un système dynamique (X, T, μ) est un cobord s'il existe une fonction h mesurable telle que

$$f = h - Th. \tag{1}$$

Les cobords ont vis à vis de la dynamique T un statut particulier. Par exemple, si h est continue dans (1), la somme des valeurs de f le long d'une orbite périodique quelconque de T est nulle. Dans de nombreux cas cette propriété est une caractérisation des cobords réguliers ([2],[6],[7]).

Nous nous intéressons ici à un problème légèrement différent. Dans (1) lorsque f est régulière que peut-on dire de la régularité de h? Soit h une fonction mesurable telle que $h - Th$ soit régulière. Peut-on trouver dans la classe de h une fonction régulière h' telle que $h - Th = h' - Th'$?

Nous montrons comment on peut aborder ce problème sur deux exemples :
1) La transformation T est un automorphisme ergodique de tore
2) La transformation T est l'application au temps 1 associée au flot géodésique sur une surface compacte de courbure -1.

Dans un premier temps, nous utilisons le théorème suivant pour nous ramener au cas où h est de carré intégrable.

Théorème I.1 *Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sytème dynamique inversible, $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A} \subset T\mathcal{A}$ et f une fonction dans $L^2(\mu)$ d'intégrale nulle telle que*

$$\sum_{n>0} ||E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n<0} ||f - E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty,$$

où $\mathcal{A}_n = T^{-n}\mathcal{A}$. Alors, il existe deux fonctions g et h dans $L^2(\mu)$, telles que g engendrent une suite de différences de martingale et $f = g + h - Th$. Si g n'est pas nulle presque partout la suite $n^{-1/2}S_n(f)$ converge en loi vers une variable gaussienne non dégénérée.

La notation $S_n f$ désigne la somme de Birkhoff $S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$.

Si une fonction f est un cobord mesurable alors $n^{-1/2}S_n(f)$ converge en probabilité vers 0. Si de plus la fonction f vérifie les hypothèses du théorème précédent alors il existe une fonction h de carré intégrable telle que $f = h - Th$ (sinon $n^{-1/2}S_n(f)$ convergerait en loi vers une variable gaussienne non dégénérée).

Cette information étant acquise, nous poursuivons l'étude en utilisant l'analyse de Fourier pour le premier exemple, le théorème de Birkhoff pour le second.

II Exemple 1

Une matrice carrée de taille d, à coefficients entiers et de déterminant ± 1, définit un automorphisme T du tore de dimension d préservant la mesure de Lebesgue m

$$T : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d \ : \ x \longmapsto Mx \bmod 1.$$

Le système dynamique $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$ est ergodique si et seulement si M n'a pas de valeur propre racine de l'unité.

Notons $\mathcal{R}_{\mathbb{T}^d}$ la classe des fonctions $f \in L^2\left(\mathbb{T}^d\right)$ de série de Fourier

$$f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \exp(2i\pi\langle k, \cdot\rangle)$$

telle qu'il existe $R > 0$ et $\theta > 2$ tels que, pour tout $b > 0$,

$$\sum_{||k||>b} |c_k|^2 < \frac{R}{(\log b)^\theta}.$$

Nous avons construit dans [4] une filtration $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la tribu borélienne sur le tore telle que, si f appartient à la classe $\mathcal{R}_{\mathbb{T}^d}$ on a :

$$\sum_{n>0} ||E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n<0} ||f - E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty$$

Proposition II.1 *Soient T un automorphisme ergodique non nécessairement hyperbolique du tore $\mathbb{T}^d$ et f une fonction d fois différentiable de dérivée d^{ime} höldérienne. Si f est un cobord mesurable alors c'est un cobord dans l'ensemble des fonctions höldériennes.*

Sous ces hypothèses la fonction f appartient à la classe $\mathcal{R}_{\mathbb{T}^d}$ donc, si f est un cobord, c'est un cobord dans l'ensemble des fonctions de carré intégrable (*cf.* Introduction). La proposition est alors une conséquence directe de résultats de Livshits (remarque 3 dans [6]) et de Veech (corollaire 5.14 dans [7]).

Nous donnons ci-dessous une autre preuve n'utilisant pas ces résultats. Elle repose sur les deux lemmes suivants. On trouvera une preuve du premier dans l'article de Katznelson [3] ou dans le livre de Leonov [5].

Lemme II.2 *Soit M une matrice carrée $d \times d$ à coefficients entiers. Soient V et W deux sous-espaces M-stables de $\mathbb{R}^d$ tels que $\mathbb{R}^d = V \bigoplus W$ et les restrictions de M à V et W n'ont pas de racines communes. Si $V \cap \mathbb{Z}^d = \{0\}$, alors il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, on ait*

$$d(k, V) \geq K||k||^{-q},$$

où q désigne la dimension de V.

Lemme II.3 *Soient f et h dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, c_k et d_k leurs coefficients de Fourier respectifs. Supposons que f et h soient liées par la relation : $f = h - Th$. S'il existe $K > 0$ et $l > 0$ tel que*

$$|c_k| \leq K \; ||k||^{-l},$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe K' tel que

$$|d_k| \leq K' \; ||k||^{\epsilon - l}.$$

Preuve. La série de Fourier de $h - Th$ est donnée par :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (d_k - d_{{}^tM^{-1}k}) \exp(2i\pi\langle k, \cdot\rangle)$$

Les deux fonctions f et $h - Th$ étant égales, elles ont mêmes coefficients de Fourier. Pour tout k dans $\mathbb{Z}^d$, on a :

$$c_k = d_k - d_{{}^tM^{-1}k}.$$

En sommant les relations $c_{{}^tM^jk} = d_{{}^tM^jk} - d_{{}^tM^{j-1}k}$, on obtient :

$$d_k - d_{{}^tM^{-l-1}k} = \sum_{j=0}^{l} c_{{}^tM^{-j}k} \;\text{ et }\; d_{{}^tM^lk} - d_k = \sum_{j=1}^{l} c_{{}^tM^jk}.$$

Si k est un élément non nul de $\mathbb{Z}^d$, lorsque $|l|$ tend vers l'infini, le vecteur ${}^tM^lk$ tend vers l'infini, donc $|d_{{}^tM^lk}|$ tend vers zéro et les égalités précédentes entraînent :

$$d_k = \sum_{j=0}^{\infty} c_{{}^tM^{-j}k} = -\sum_{j=1}^{\infty} c_{{}^tM^jk}.$$

Soit F'_u (resp. F'_s, resp. F'_e) le sous-espace vectoriel ${}^tM$-stable associé aux valeurs propres de module plus grand que (resp. plus petit que, resp. égal à) 1. Pour $a = e, u, s$, notons π_a la projection sur F'_a parallèlement à la somme des deux autres F'_b. Considérons une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^d$ qui soit la somme de normes définies sur chacun des trois espaces F'_a. Il existe $a \in \{e, u, s\}$ tel que $||\pi_a k|| \geq ||k||/3$.

Si $||\pi_u k|| \geq ||k||/3$ alors, comme la restriction de ${}^tM$ à F'_u est dilatante, il existe $R_0 > 0$ et $\alpha > 1$ tel que l'on ait

$$||{}^tM^jk|| \geq ||\pi_u^t M^jk|| = ||{}^tM^j\pi_uk|| \geq R_0\alpha^j||\pi_uk|| \geq \frac{R_0\alpha^j||k||}{3}.$$

En utilisant les relations $d_k = -\sum_{j=1}^{\infty} c_{{}^tM^jk}$ et $|c_k| \leq K\ ||k||^{-l}$, nous obtenons

$$|d_k| \leq K3^lR_0^{-l}\frac{\alpha^{-l}}{1-\alpha^{-l}}||k||^{-l}.$$

Si $||\pi_s k|| \geq ||k||/3$ alors, l'égalité $d_k = \sum_{j=0}^{\infty} c_{{}^tM^{-j}k}$ et le fait que la restriction de ${}^tM^{-1}$ à F'_s soit dilatante fournissent une inégalité similaire.
Si $||\pi_e k|| \geq ||k||/3$ alors, d'une part, comme la restriction de ${}^tM$ à F_e n'a que des valeurs propres de module 1, il existe $R_1 > 0$ tel que

$$||{}^tM^jk|| \geq ||{}^tM^j\pi_ek|| \geq \frac{R_1||\pi_ek||}{j^d} \geq \frac{R_1||k||}{3j^d}.$$

D'autre part, le lemme II.2 (avec $V = F'_e + F'_s$ et $W = F'_u$) permet d'affirmer l'existence d'un nombre $R_2 > 0$ tel que

$$||{}^tM^jk|| \geq ||{}^tM^j\pi_uk|| \geq R_0\alpha^j||\pi_uk|| \geq R_0\alpha^jR_2||k||^{-d}.$$

Il existe $A > 0$ et un entier $j(k) \leq A\log||k||$ tel que, pour j plus grand que $j(k)$, on ait

$$R_0\alpha^jR_2||k||^{-d} \geq \alpha^{j/2}||k||.$$

On peut alors écrire

$$|d_k| \;=\; |\sum_{j=1}^{j(k)} c_{{}^tM^jk} + \sum_{j=j(k)+1}^{\infty} c_{{}^tM^jk}|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{j(k)} K\left(\frac{R_1||k||}{3j^d}\right)^{-l} + \sum_{j=j(k)+1}^{\infty} K\left(\alpha^{j/2}||k||\right)^{-l}$$

$$\leq Kj(k)\left(\frac{R_1||k||}{3j(k)^d}\right)^{-l} + K\frac{\alpha^{-l/2}}{1-\alpha^{-l/2}}||k||^{-l}.$$

Cela prouve l'existence d'un nombre $R_3 > 0$ tel que

$$|d_k| \leq R_3 \left(\log ||k||\right)^{ld+1} ||k||^{-l}.$$

Le résultat est maintenant clair. □

Preuve de la proposition. Si la fonction f vérifie les hypothèses de la proposition II.1 alors il existe des nombres K et β strictement positifs tels que les nombres $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$, les coefficients de Fourier de f, vérifient les inégalités

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad |c_k| \leq K\ ||k||^{-d-\alpha}.$$

Si de plus f est un cobord, il existe une fonction h de carré intégrable de coefficients de Fourier $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ telle que $f = h - Th$. D'après le lemme II.3, il existe des nombres K' et γ strictement positifs tels que les coefficients de Fourier de h vérifient les inégalités

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \quad |d_k| \leq K'\ ||k||^{-d-\gamma}.$$

Ceci entraîne que h est égale presque partout à une fonction höldérienne (la somme de sa série de Fourier). □

III Exemple 2

Une surface compacte de courbure constante S est le quotient du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ par un sous-groupe discret co-compact Γ de $SL(2,\mathbb{R})$:

$$S = \mathbb{H}^2/\Gamma.$$

En identifiant T^1S, le fibré tangent unitaire de S, au quotient $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$, on peut représenter le flot géodésique sur T^1S comme l'action sur $SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ du groupe à un paramètre

$$\left\{ g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les flots horocycliques sont définis par l'action des deux groupes à un paramètre suivants :

$$\left\{h_t^u = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / t \in I\!R\right\},$$

$$\left\{h_t^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} / t \in I\!R\right\}.$$

On vérifie immédiatement les deux égalités :

$$g_t h_r^u g_t^{-1} = h_{e^t r}^u \qquad g_t h_r^s g_t^{-1} = h_{e^{-t} r}^s. \tag{2}$$

L'application

$$T : SL(2, I\!R)/\Gamma \longrightarrow SL(2, I\!R)/\Gamma \ : \ x\Gamma \longmapsto g_1 x\Gamma$$

préserve la mesure de probabilité homogène m.

Nous munissons T^1S d'une distance Riemannienne quelconque, notée d, et désignons par $B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r. Soit A un nombre strictement positif. Les égalités (2) permettent d'établir l'existence d'une constante $P_A > 0$ telle que l'on ait, pour tout $x \in T^1S$, tout $t \in [-A, A]$ et tout $k \in I\!N$:

$$d(g_k x, g_k h_t^s x) \leq P_A e^{-k}\ d(x, h_t^s x) \ \text{ et } \ d(g_{-k} x, g_{-k} h_t^u x) \leq P_A e^{-k}\ d(x, h_t^u x). \tag{3}$$

Proposition III.1 *Soit f une fonction höldérienne sur T^1S d'ordre $\beta \leq 1$ sur T^1S. Si f est un cobord mesurable alors il existe une fonction ψ höldérienne d'ordre $\beta/2$ telle que $f = \psi - T\psi$.*

Preuve. Nous avons construit dans [1] une filtration $(\mathcal{A}_n)_{n \in I\!N}$ de la tribu borélienne sur T^1S telle que, pour toute fonction g höldérienne, on a :

$$\sum_{n>0} ||E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty \ \text{ et } \ \sum_{n<0} ||f - E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty$$

L'argument présenté dans l'introduction s'applique à f : f est un cobord mesurable donc c'est un cobord dans l'ensemble des fonctions de carré intégrable. En particulier, il existe ϕ intégrable d'intégrale nulle telle que $f = \phi - T\phi$. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $S_n f$ et $S_{-n} f$ les sommes

$$S_n f = \sum_0^{n-1} T^k f,$$

$$S_{-n} f = \sum_{-n}^{-1} T^k f.$$

L'égalité de cobord fournit les identités suivantes :

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} S_n f = \phi - \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} T^n\phi,$$

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} S_{-n} f = -\phi + \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} T^{-n}\phi.$$

Notons X_0 l'ensemble des points x tels que la valeur de ϕ en x soit donnée par les limites

$$\phi(x) = \lim \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} S_n f(x) = -\lim \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} S_{-n} f(x).$$

Les transformations T et T^{-1} étant ergodiques, l'ensemble sur lequel les suites $\frac{1}{N}\sum_1^N T^n\phi$ et $\frac{1}{N}\sum_1^N T^{-n}\phi$ tendent vers 0 est de mesure 1, donc X_0 est de mesure 1.

Soit t un nombre réel appartenant à $[-A, A]$. Supposons que x et $h_t^s x$ appartiennent tous les deux à X_0. Soit $R > 0$ tel que, pour tout x et y dans T^1S, on ait $|f(x) - f(y)| \leq R\, d(x,y)^\beta$. La propriété (3) de contraction de T le long des flot horocycliques conduit à l'inégalité suivante :

$$|f(T^k x) - f(T^k h_t^s x)| \leq Rd(T^k x, T^k h_t^s x)^\beta \leq RP_A^\beta e^{-k\beta} d(x, h_t^s x)^\beta.$$

On en déduit

$$|S_n f(x) - S_n f(h_t^s x)| \leq RP_A^\beta (\sum_{0}^{n-1} e^{-k\beta}) d(x, h_t^s x)^\beta,$$

puis

$$|\phi(x) - \phi(h_t^s x)| \leq RP_A^\beta (\sum_{0}^{\infty} e^{-k\beta}) d(x, h_t^s x)^\beta. \tag{4}$$

Notons R'_A le réel $RP_A^\beta(\sum_0^\infty e^{-k\beta})$. Si x et $h_t^u x$ appartiennent tous les deux à X_0 on montre de la même façon en utilisant l'égalité $\phi(x) = -\lim \frac{1}{N}\sum_1^N S_{-n} f$ que l'on a

$$|\phi(x) - \phi(h_t^u x)| \leq R'_A d(x, h_t^u x)^\beta. \tag{5}$$

Cela signifie que la restriction de ϕ à X_0 est régulière le long des orbites des flots horocycliques et suffit à prouver que ϕ coïncide preque sûrement avec une fonction höldérienne. La raison en est que deux points x et y de T^1S peuvent être joints par quatre morceaux d'orbites des flots horocycliques de longueurs comparables à $\sqrt{d(x,y)}$. C'est ce qu'exprime le lemme suivant dont on trouvera une démonstration plus bas. L'énoncé un peu compliqué donné ici est nécéssaire à cause du fait que nous disposons des inégalités (4) et (5) uniquement si x, $h_t^u x$, $h_t^s x$ appartiennent à X_0.

Lemme III.2 *Il existe $C>0$, $\alpha>0$ et X_4 de mesure 1 tels que pour tout $x\in X_4$, pour presque tout $y\in B(x,\alpha)$, il existe $(t_1,t_2,v_1,v_2)\in[-C\sqrt{d(x,y)},C\sqrt{d(x,y)}]^4$ tel que x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y=h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à X_0.*

Finissons la preuve de la proposition III.1. Soit x un élément de X_4. Pour presque tout $y\in B(x,\alpha)$, il existe $(t_1,t_2,v_1,v_2)\in[-C\sqrt{d(x,y)},C\sqrt{d(x,y)}]^4$ tel que x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y=h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à X_0. En prenant pour A le nombre $C\sqrt{\alpha}$, les inégalités (4) et (5) entraînent :

$$\begin{aligned}|\phi(x)-\phi(y)| &\leq |\phi(x)-\phi(h^s_{t_1}x)|+|\phi(h^s_{t_1}x)-\phi(h^u_{v_1}h^s_{t_1}x)|\\ &\quad +|\phi(h^u_{v_1}h^s_{t_1}x)-\phi(h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x)|\\ &\quad +|\phi(h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x)-\phi(h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x)|\\ &\leq R'_A(d(x,h^s_{t_1}x)^\beta+d(h^s_{t_1}x,h^u_{v_1}h^s_{t_1}x)^\beta\\ &\quad +d(h^u_{v_1}h^s_{t_1}x,h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x)^\beta+d(h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x,h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x)^\beta)\end{aligned}$$

Les applications $t\mapsto h^u_t z$ et $t\mapsto h^s_t z$ sont lipschitziennes (uniformément en z) et le quadruplet (t_1,t_2,v_1,v_2) appartient à $[-C\sqrt{d(x,y)},C\sqrt{d(x,y)}]^4$ donc les quatre distances apparaissant ci-dessus sont comparables à $\sqrt{d(x,y)}$: il existe $L>0$ tel que

$$|\phi(x)-\phi(y)|\leq Ld(x,y)^{\beta/2}.$$

Pour tout $x\in T^1S$, notons $P(x,\alpha)$ l'ensemble des points y de $B(x,\alpha)$ tels que $|\phi(x)-\phi(y)|\leq Ld(x,y)^{\beta/2}$. Convenons de plus que $P^1(x,\alpha)$ est égal à $P(x,\alpha)$ tandis que $P^{-1}(x,\alpha)$ désigne ${}^cB(x,\alpha)$. Nous avons montré que si $x\in X_4$ alors $m(P(x,\alpha))=m(B(x,\alpha))$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une famille d'éléments de X_4, dénombrable, dense dans T^1S. Pour tout n, on a

$$m\left(\bigcup_{\epsilon\in\{-1,1\}^n}\bigcap_{k=1}^{n}P^{\epsilon_k}(x_k,\alpha)\right)=1.$$

La famille d'ensembles

$$\left(\bigcup_{\epsilon\in\{-1,1\}^n}\bigcap_{k=1}^{n}P^{\epsilon_k}(x_k,\alpha)\right)_{n\geq 1}$$

étant décroissante, si on note X_∞ sa limite, on a

$$m(X_\infty)=m\left(\bigcup_{\epsilon\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}}\bigcap_{k=1}^{\infty}P^{\epsilon_k}(x_k,\alpha)\right)=1.$$

Soient x et y deux points de X_∞ tels que $d(x,y)<\alpha$ et $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite tendant vers x. Si i est suffisamment grand, comme x et y sont éléments de X_∞, on a :

$$|\phi(x)-\phi(y)|\leq|\phi(x)-\phi(x_{k_i})|+|\phi(x_{k_i})-\phi(y)|\leq L(d(x,x_{k_i})^{\beta/2}+d(x_{k_i},y)^{\beta/2}).$$

On en déduit que la restriction de ϕ à X_∞ est höldérienne d'ordre $\beta/2$. La fonction ψ continue sur T^1S, égale à ϕ sur X_∞ est höldérienne d'ordre $\beta/2$ et vérifie $f = \psi - T\psi$.

□

Lemme III.2 *Il existe $C > 0$, $\alpha > 0$ et X_4 de mesure 1 tels que pour tout $x \in X_4$, pour presque tout $y \in B(x, \alpha)$, il existe $(t_1, t_2, v_1, v_2) \in [-C\sqrt{d(x,y)}, C\sqrt{d(x,y)}]^4$ tel que x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y = h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à X_0.*

Preuve. En tout point x, l'application $(t, v, w) \longmapsto h^u_t g_v h^s_w x$ fournit un système de coordonnées locales en x de T^1S. La variété T^1S étant compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini d'ouverts dans lesquels ces coordonnées sont définies. En appliquant le théorème de Fubini, on montre qu'il existe $a > 0$ (lié à la taille des cartes locales choisies) tel que :
Il existe X_1 de mesure 1 tel que, si x appartient à X_1, alors $h^s_t x \in X_0$ pour presque tout $t \in [-a, a]$,
Il existe X_2 de mesure 1 tel que, si x appartient à X_2, alors $h^u_v h^s_t x \in X_0$ pour presque tout $(t, v) \in [-a, a]^2$.
Posons $X_3 = X_0 \cap X_1 \cap X_2$. Si x appartient à X_3 alors, pour presque tout $(t, v) \in [-a, a]^2$, x, $h^s_t x$ et $h^u_v h^s_t x$ appartiennent à X_0.

On montre de la même façon qu'il existe X_4, un ensemble de mesure 1, tel que si x appartient à X_4 alors, pour presque tout $(t, v) \in [-a, a]^2$, x, $h^s_t x$ et $h^u_v h^s_t x$ appartiennent à X_3. Lorsque $h^u_v h^s_t x$ appartient à X_3, pour presque tout $(t', v') \in [-a, a]^2$, $h^u_v h^s_t x$, $h^s_{t'} h^u_v h^s_t x$ et $h^u_{v'} h^s_{t'} h^u_v h^s_t x$ appartiennent à X_0. Finalement, si x appartient à X_4 alors, pour presque tout $(t, v, t_2, v_2) \in [-a, a]^4$, x, $h^s_t x$, $h^u_v h^s_t x$, $h^s_{t_2} h^u_v h^s_t x$ et $h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_v h^s_t x$ appartiennent à X_0.

Pour tout $r \in I\!R$, posons

$$v_1 = \sqrt{|e^{-r} - 1|}, \quad v_2 = -e^r v_1, \quad t_2 = \epsilon(r)\sqrt{|e^{-r} - 1|} \quad \text{et} \quad t_1 = -e^r t_2,$$

où $\epsilon(r)$ vaut 1 ou -1 selon que $(e^{-r} - 1)$ est positif ou négatif. On vérifie immédiatement la relation

$$h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} = g_r.$$

Ceci permet d'affirmer qu'il existe $\alpha \le a$ et $C > 0$ tel que, pour tout x et dans T^1S et tout $r \le \alpha$, l'application

$$[C\sqrt{r/2}, C\sqrt{r/2}]^4 \longrightarrow T^1S \quad : \quad (t_1, v_1, t_2, v_2) \longmapsto h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$$

est surjective sur un voisinage de x contenant la boule $B(x, r)$. Comme l'image d'un ensemble de mesure nulle par cette application est de mesure nulle, si x appartient à X_4 et r est inférieur à α ce qui précède montre que, pour presque tous les points y de $B(x,r)$, il existe $(t_1,t_2,v_1,v_2) \in [-C\sqrt{r/2}, C\sqrt{r/2}]^4$ tel que x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y = h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à X_0. En particulier, pour tout entier k, pour presque tous les points y de de $B(x,2^{-k}\alpha) \setminus B(x,2^{-k-1}\alpha)$, il existe $(t_1,t_2,v_1,v_2) \in [-C\sqrt{2^{-k-1}\alpha}, C\sqrt{2^{-k-1}\alpha}]^4$ tel que x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y = h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à X_0. Dans ce cas $2^{-k-1}\alpha$ est inférieur à $d(x,y)$. Comme $B(x,\alpha) = \cup_k B(x,2^{-k}\alpha) \setminus B(x,2^{-k-1}\alpha)$ le lemme est prouvé. □

IV Références

[1] **J.-P.Conze, S.Le Borgne**, *Méthode de martingale et flot géodésique sur une surface compacte de courbure constante*, en préparation.

[2] **A.Katok, A.Kononenko**, *Cocycles' stability for partially hyperbolic systems*, Math. Res. Lett.,3, 1996, 2, 191–210.

[3] **Y.Katznelson**, *Ergodic automorphisms of T^n are Bernoulli shifts*, Israel J. Math., 10, 1971, 186–195.

[4] **S.Le Borgne**, *Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus*, Israel J. Math., à paraître.

[5] **V.P.Leonov**, Nekotorye primeneniya starshikh semiinvariantov k teorii statsionarnykh sluchaĭnykh protsessov, Izdat. "Nauka", Moscow, 1964.

[6] **A.N.Livshits**, *Homology properties of Y-systems*, Math. Notes, 1971, 10, 758–763.

[7] **W.A.Veech**, *Periodic points and invariant pseudomeasures for toral endomorphisms*, Ergodic Theory Dynamical Systems, 6, 1986, 3, 449–473.