CHRISTOPHE CUNY

Fonctions harmoniques bornées sur certains groupes de Lie

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___2_A4_0>

Fonctions harmoniques bornées sur certains groupes de Lie

Christophe CUNY
IRMAR, Université de Rennes I
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

1 Résumé

Soit G un groupe de Lie résoluble connexe, μ une mesure de probabilité sur les boréliens de G. On cherche à résoudre l'équation de convolution suivante : $h = h \star \mu$ où h est une fonction borélienne bornée et pour tout $g \in G$, $h \star \mu(g) = \int_G h(gx)\mu(dx)$. Nous appelons fonctions μ-harmoniques bornées les solutions h de ce problème. Sous certaines conditions sur μ (essentiellement une condition d'étalement) on obtient une représentation intégrale de ces solutions.

2 Rappel de quelques résultats

Raugi ([3],1977) obtient, pour G résoluble connexe, μ une mesure étalée ayant un moment d'ordre 1, la représentation intégrale suivante : Il existe une décomposition $G = G_\mu^+ G_\mu^-$, une mesure ν sur G/G_μ^+ tels que toute fonction harmonique bornée h s'écrive :

$$h(g) = \int_{G/G_\mu^+} \hat{h}(g \cdot x)\nu(dx)$$

pour une fonction borélienne bornée sur G/G_μ^+. Et les groupes G_μ^- et G_μ^+ sont explicitement décrit en fonction du comportement de la marche aléatoire droite de loi μ. G/G_μ^+ est appelé μ-frontière.

Jaworski ([2],1996) montre que cette représentation intégrale reste valable sans hypothèse de moment : la μ-frontière est alors un espace homogène de la forme G/H où H est un sous-groupe de G, contenant un groupe Cartan de G. Cette description n'est malheureusement pas explicite.

Nous nous proposons ici de redémontrer ce résultat dans le cas où G est de nilradical abélien en précisant H en fonction du comportement de la marche aléatoire.

3 Construction de la marche aléatoire (X_n) et généralités

Soit Ω, l'espace produit $G^{\mathbb{N}^*}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ les applications coordonnées.
On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ et $\mathcal{F} = \vee_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ et on considère la suite de variables aléatoires (v.a.) $(X_n = Y_1 \dots Y_n)_{n\geq 1}$.
Le théorème de prolongement de Kolmogorov nous assure alors l'existence d'une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour toute fonction borélienne bornée f sur G^n on ait :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y_1, \dots , Y_n)] &= \int_\Omega f(Y_1, \dots . Y_n)d\mathbb{P}(\omega)\\ &= \int_{G^n} f(g_1, \dots , g_n)\mu(dg_1)\dots\mu(dg_n)\end{aligned}$$

On considère aussi sur Ω les deux transformation suivantes :

- θ l'opérateur de décalage sur Ω :

$$\theta(\omega) = \theta((\omega_1, \dots , \omega_n, \dots)) = (\omega_2, \dots , \omega_n, \dots)$$

- η l'application de $G \times \Omega$ dans $G \times \Omega$:

$$\eta(g, \omega) = (g\omega_1 . \theta(\omega))$$

On voit immédiatement que $Y_{n+1} = Y_n \circ \theta$ et que $X_{n+1} = X_n \circ \eta$ (où l'on a identifié Ω et $G \times \Omega$) et il est bien connu que le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ est ergodique. Pour $\tau \in \{\eta, \theta\}$ on appelle variable τ-invariante toute v.a. Z telle que $Z \circ \tau = Z$ et ensemble τ-invariant tout ensemble mesurable B tel que $\tau^{-1}B = B$.

Soit alors h une fonction harmonique bornée ; pour tout $g \in G$ la suite de v.a. $(h(gX_n))_{n\geq 1}$ est une martingale bornée relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Elle converge donc $\mathbb{P}$-$p.s.$ vers une v.a. $Z(g,.)$ bornée, η-invariante telle que $h(g) = \mathbb{E}[Z(g,.)]$.

Réciproquement à toute v.a. Z bornée, η-invariante on associe une fonction harmonique bornée h définie par $h(g) = \mathbb{E}[Z(g,.)]$. En effet, écrivant l'invariance de Z par η, il vient :

$$h(g) = \int_{\Omega} Z(g,\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{G\times\Omega} Z(g\omega_1,\omega)\mu(d\omega_1)d\mathbb{P}(\omega)$$

$$h(g) = \int_{G} h(g\omega_1)d\mu(\omega_1) = h \star \mu(g)$$

On établit ainsi une correspondance biunivoque entre les variables aléatoires bornées η-invariantes et les fonctions harmoniques bornées.

Définition 1 :

Etant donnée une mesure de Haar à gauche m_G on dit que la mesure μ est étalée si elle admet une convolée d'ordre n, μ^{*n}, non étrangère à m_G.

Définition 2 :

Soit h une fonction harmonique bornée. On dit que $x \in G$ est une période pour h si pour tout $g \in G$ on a :

$$h(gx) = h(g)$$

On appelle μ-période tout élément $x \in G$ vérifiant cette relation pour toute fonction μ-harmonique bornée h. On voit immédiatement que l'ensemble des périodes est un groupe et on verra par la suite que sous l'hypothèse d'etalement de μ, h est continue, donc que ce groupe est fermé.

Rappelons quelques résultats importants sur les fonctions harmoniques bornées.

Lemme 1 (résultat dû à Azencott [1])
Toute fonction harmonique bornée est uniformément continue à droite dès lors que μ est étalée.

preuve :

L'uniforme continuité à droite signifie l'équicontinuité de la famille $(h(g\cdot))_{g\in G}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que μ^{*n} soit non étrangère à m_G.
Alors $\mu^{*n} = \alpha_n + \beta_n m_G$ où $\beta_n \in L^\infty_+(G)$ et α_n est une mesure vérifiant $\alpha_n(G) = \alpha < 1$. Quitte à considérer μ^{*2n} on peut supposer que β_n est uniformément continue sur G.
De plus lorsque l'on convole une mesure de densité continue par rapport à m_G et une mesure de Radon quelconque on trouve une mesure ayant une densité continue par rapport à m_G. Donc on peut écrire pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$\mu^{*np} = \alpha_n^{*p} + \beta_{n,p} m_G$$

Soit alors h harmonique bornée, pour tout $x, g \in G$ on a :

$$\begin{aligned} |h(gx) - h(g)| &= \left| \int_G (h(gxz) - h(gz))\mu^{*np}(dz) \right| \\ &\leq 2\|h\|_\infty \alpha^p + \int_G |h(gu)|.|\beta_{n,p}(x^{-1}u) - \beta_{n,p}(u)| m_G(du) \end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$.
On choisit p tel que $\alpha^p \leq \frac{\varepsilon}{2\|h\|_\infty}$.
L'uniforme continuité de $\beta_{n,p}$ nous permet alors de trouver un voisinage V de $\mathbf{e}$, élément neutre de G, tel que pour tout $x \in V$:

$$|\beta_{n,p}(x^{-1}u) - \beta_{n,p}(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2\|h\|_\infty} \quad \text{pour tout} \quad u \in G.$$

Donc pour tout $(g, x) \in G \times V$

$$|h(gx) - h(g)| \leq \varepsilon \qquad \square$$

Au cours des démonstrations, nous serons amenés à utiliser des fonctions

harmoniques uniformément continues à gauche :
On se donne une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbf{N}}$ de fonctions continues sur G à support compact dont les supports forment une base fondamentale de voisinage de l'élément neutre $\mathbf{e}$ de G et vérifiant $\int_G \alpha_m(g)\ m_G(dg) = 1$. On associe alors à toute fonction harmonique bornée h la suite de fonctions harmoniques bornées $(h_m(\cdot) = \int_G h(g\cdot)\alpha_m(g)\ m_G(dg))$ qui sont uniforméments continues à gauche et convergent simplement vers h (ce dernier point découlant immédiatement de la continuité de h). On leur associe les v.a. η-invariante Z_m.
Montrons l'uniforme continuité à gauche des h_m. Soit $m \geq 1$ fixé et $x, g \in G$, on a :

$$\begin{aligned}|h_m(xg) - h_m(g)| &\leq \int_G |h(ug)| \cdot |\Delta(x^{-1})\alpha_m(ux^{-1}) - \alpha_m(u)| \\ &\leq \|h\|_\infty \int_G |\Delta(x^{-1})\alpha_m(ux^{-1}) - \alpha_m(u)| m_G(du)\end{aligned}$$

où Δ est le module du groupe G.
Soit V un voisinage compact de $\mathbf{e}$ alors les fonctions $(\alpha_m(\cdot x^{-1}))_{x\in V}$ ont leur support inclus dans un compact. Cela permet d'utiliser le théorème de la convergence dominée dans la dernière expression obtenue et de montrer le résultat désiré.
L'introduction de ces fonctions se justifie par la séparabilité de $C(G)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts et par le lemme suivant, généralisant un résultat dû à Azencott [1], th 1.3 .
Ce lemme nécessite la notion suivante :

Définition 3 :

Soit G un groupe localement compact, X un espace homogène (i.e. un espace sur lequel G opère continument et transitivement) localement compact. On appelle mesure quasi-invariante sur X, toute mesure α telle que $g\alpha$ et α soit équivalente pour tout $g \in G$.
On reprend les notations de la définition dans le lemme.

Lemme 2 (extension d'un résultat d'Azencott [1])
Supposons qu'il existe une mesure ν sur X absolument continue par rapport à

α telle que toute fonction μ-harmonique h, uniformément continue à gauche, s'écrive :

$$h(g) = \int_X \hat{h}(g \cdot x)\nu(dx)$$

pour une fonction $\hat{h} \in L^\infty(X, \alpha)$.
Alors il en est de même pour toute fonction μ-harmonique.

preuve :

Soit h une fonction μ-harmonique. On lui associe une suite (h_m) de fonctions μ-harmoniques uniformément continue à gauche, convergeant uniformément sur les compacts vers h. On associe alors à (h_m) la suite $(\hat{h}_m)$ comme dans le lemme.
Soit F_p une suite dense dans $L^1(m_G)$. Considérons la suite (H_p) de $L^\infty(X)$ définie par :

$$H_p(x) = \int_G F_p(g) \frac{dg\nu}{d\alpha}(x) m_G(dg)$$

Par construction les H_p sont dans $L^1(X, \alpha)$. D'autre part, les $\hat{h}_m$ sont bornées par $\|h\|_\infty$ donc forment une famille relativement compacte pour la topologie $\sigma(L^\infty(X, \alpha), L^1(X, \alpha))$. Quitte à extraire une sous-suite, il existe donc une fonction $\hat{h}$ de $L^\infty(X, \alpha)$ telle que :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_X \hat{h}_m(x) H_p(x) d\alpha(x) = \int_X \hat{h}(x) H_p(x) d\alpha(x)$$

Posons $h' = \hat{h} \star \nu$ et montrons que $h' = h$. On a :

$$\int_X \hat{h}_m(x) H_p(x) d\alpha(x) = \int_G h_m(g) F_p(g) m_G(dg)$$

Or, la convergence uniforme sur les compacts de (h_m) vers h, implique que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_G h_m(g) F_p(g) m_G(dg) = \int_G h(g) F_p(g) m_G(dg).$$

On en déduit que pour tout $p \geq 1$, $\int_G h'(g) F_p(g) m_G(dg) = \int_G h(g) F_p(g) m_G(dg)$.
Mais h et h' étant μ-harmonique, avec μ étalée, elles sont continues et donc $h = h'$. □

Nous allons maintenant redémontrer le résultat obtenu par Jaworski dans le cas particulier d'un groupe de Lie résoluble connexe de nilradical abélien en précisant cependant les liens entre l'espace homogène intervenant dans la description des fonctions μ-harmoniques et le comportement de la marche aléatoire. Puis nous appliquerons ce théorème à des groupes de matrices particuliers pour lesquels l'espace homogène sera caractérisé précisément.

4 théorème

Théorème 1
Soit G un groupe de Lie résoluble connexe de nilradical abélien N, μ une mesure de probabilité étalée sur G. Alors il existe un sous-groupe de Lie H de G et une mesure de probabilité ν sur G/H tels que toute fonction μ-harmonique bornée h sur G s'écrive $h(g) = \int_{G/H} \hat{h}(g \cdot x)\nu(dx)$ pour une fonction borélienne bornée sur G/H et une mesure de probabilité ν sur G/H. Le groupe H contient un groupe de Cartan P de G et si l'on note π la projection de G sur G/H , H est le plus petit sous-groupe de Lie de G contenant P tel que, avec les notations précédentes $(\pi(X_n))$ converge $\mathbb{P}$ p.s..

remarque:

Un résultat de Jaworski [2] montre qu'un sous-groupe de Lie H d'un groupe de Lie résoluble connexe G contenant un sous-groupe de Cartan de G est connexe, fermé et est son propre normalisateur.

preuve :

On supposera dorénavant que le semi-groupe fermé engendré par le support de μ est G tout entier. Cette hypothèse est nécessaire pour appliquer le lemme 5 ci-après.

Nous allons construire le groupe H par récurrence. Soit P un groupe de Cartan de G, N son nilradical. Rappelons que tous les groupes de Cartan

d'un groupe résoluble sont conjugués.
Soit $\mathcal{G}$, l'algèbre de Lie de G, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ les sous-algèbres associées à P et N. Soit Ξ, l'ensemble des poids de la représentation adjointe ad de $\mathcal{P}$ sur l'algèbre complexifiée $\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{N}$. Comme $\mathcal{N}$ est nilpotente, tout poids de la représentation adjointe Ad de G dans $\mathcal{N}$ est nul sur N et donc chaque poids de la représentation de G dans $\mathcal{N}$ s'identifie à un poids de la restriction à P de Ad. Soit $\{\phi_\beta, \beta \in \Xi\}$ les poids de Ad, $p = \dim\mathcal{N}$.

$$\text{Posons } \mathcal{N}_\beta^{\mathbb{C}} = \bigcap_{H \in \mathcal{P}} \operatorname{Ker}(\operatorname{ad}(H) - \beta(H)I)^p.$$

$$\text{Alors} \quad \mathcal{N}^{\mathbb{C}} = \oplus_{\beta \in \Xi} \mathcal{N}_\beta^{\mathbb{C}}$$

On peut se ramener au cas où $\mathcal{N} \cap \mathcal{P} = \{0\}$ et aucun ϕ_β n'est de module 1 grâce au lemme suivant :

Lemme 3
Soit β_0 tel que $\limsup_{n\to+\infty} |\phi_{\beta_0}|(X_n) > 0$ et $U \in \cap_{H\in\mathcal{P}} Ker(Ad(H) - \phi_{\beta_0}(H)I)$. Alors si β_0 est complexe, exp $(U + \overline{U})$ est dans les μ-périodes et si β_0 est réel, exp U est dans les μ-périodes.

preuve :

Soit h une fonction μ-harmonique.
Supposons β_0 complexe, la preuve est identique si β_0 est réel. Soit U comme dans le lemme. Alors :
$(X_n^{-1}\exp(U+\overline{U})X_n = \exp(\phi_{\beta_0}(X_n^{-1})U + \overline{\phi_{\beta_0}}(X_n^{-1})\overline{U})_{n\geq 1}$ admet une sous-suite convergente. Soit donc n_k telle que :
$(X_{n_k}^{-1}\exp(U + \overline{U})X_{n_k})$ converge vers un élément $w \in \mathcal{G}$. Alors, d'après l'uniforme continuité à droite des fonctions μ-harmoniques on a $\mathbb{P}$-*p.s.* :

$$\lim_{n\to+\infty} h(g \exp(U + \overline{U})X_n) = \lim_{n\to+\infty} h(gX_n w)$$

Pour tout $g \in G$.
Le lemme 5 que nous montrerons en annexe, nous permet d'affirmer que $(h(gX_{n_k}w))$ et $(h(gX_{n_k}))$ ont $\mathbb{P}$-*p.s.* même limite.
Le groupe $\{\exp\alpha(U + \overline{U}) \ , \alpha \in \mathbf{R}\} = Q$ étant distingué, on peut quotienté par Q et si π est la projection de G sur G/Q les fonctions μ-harmoniques

s'identifie à des fonctions $\pi(\mu)$-harmoniques sur G/Q. $\square$

On est ramené au cas où $\lim_{n\to+\infty}\phi_\beta(X_n)=0$ $\mathbb{P}$-*p.s.* et alors $\mathcal{N}\cap\mathcal{P}=\{0\}$. En effet, ad $\mathcal{P}$ agit sur $\mathcal{N}\cap\mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P}$ est nilpotente, le seul poids de cette représentation est le poids nul et le poids ϕ_β associé vérifie les conditions du lemme. On peut ainsi se ramener au cas où $\mathcal{N}\cap\mathcal{P}$ est trivial. Alors $\mathcal{P}$ est abélienne. Un résultat de Raugi [3] prop 4.3 nous assure que $N\cap P=\{\mathbf{e}\}$ et que N est simplement connexe, donc s'identifie à son algèbre de Lie via l'application exponentielle.
On utilisera alors la décomposition en produit semi-direct $G=N\times P$ et on écrira $X_n=N_nA_n$, $g=N(g)A(g)$, l'application A ainsi définie est un homomorphisme continu de G sur P, et $N_n=exp\,\mathcal{N}_n$.
On écrira pour $g\in N$, $g=\prod_{\beta\in\Xi}g^\beta$ où g^β s'identifie via l'application exponentielle à un élément de $\mathcal{N}_\beta^{\mathbb{C}}$.

De la relation (1) :$N_{n+1}=N_1A_1(N_n\circ\theta)A_1^{-1}$, on déduit que le borélien $B=\{\limsup_{n\to+\infty}\|\mathcal{N}_n\|=+\infty\}$ est θ-invariant, donc de $\mathbb{P}$-mesure 0 ou 1.

Supposons que $\mathbb{P}(B)=0$.

Montrons que (N_n) converge $\mathbb{P}$-*p.s.*.
On montre en fait que N_n^β est $\mathbb{P}$-*p.s.* convergente pour tout $\beta\in\Xi$.
Soit donc $\beta\in\Xi$ et m le plus petit entier, $1\le m\le p$, tel que :

$$W_m=\bigcap_{H\in\mathcal{P}}\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(H)-\beta(H)I)^m=\bigcap_{H\in\mathcal{P}}\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(H)-\beta(H)I)^{m+1}.$$

Alors il existe des entiers $1\le i_1\le\cdots\le i_m=p$ et des éléments $e_1,\dots,e_p\in\mathcal{N}$ tel que pour tout $1\le k\le m$, $e_1,\dots,e_{i_k}$ soit une base de $\cap_{H\in\mathcal{P}}Ker(ad(H)-\beta(H)I)^k$. Il s'agit d'une base dans laquelle les ad H se représentent tous par des matrices triangulaires supérieures.
Soit $(f_1,\dots,f_p)$ la base duale associée.

Montrons par récurrence descendante sur $1\le k\le m$ que $(f_j(\mathcal{N}_n))$ converge $\mathbb{P}$-*p.s.* pour tout $i_{k-1}+1\le j\le i_k$.
Soit $g\in G$, alors pour $i_{m-1}+1\le l\le i_m$

$$Ad\ g(e_l)\equiv\phi_\beta(g)e_l\mod W_{p-1}.$$

$$\text{Donc}\quad f_l(\mathcal{N}_{n+1})=f_l(\mathcal{N}_1)+\phi_\beta(A_1)\ f_l(\mathcal{N}_n)\circ\theta.$$

Nous avons alors besoin du lemme suivant qui constitue un résultat intéressant en soit :

Lemme 4 *Soit* (U_n) *et* (V_n) *des suites de variables aléatoires complexes sur* Ω *telles que* V_n *converge* $\mathbb{P}$*-p.s. et* γ *un homomorphisme continu sur* G*, à valeurs dans* $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$*, non constant en module. Si :*

$$U_{n+1} = V_n + \gamma(X_1) U_n \circ \theta$$

Alors (U_n) *est* $\mathbb{P}$*-p.s. non bornée ou* $\mathbb{P}$*-p.s. convergente.*

Nous ferons la démonstration de ce lemme en annexe.

On applique alors le lemme en prenant $\gamma = \phi_\beta \circ A$, $(U_n) = (f_l(\mathcal{N}_n))$, $(V_n) = f_l(\mathcal{N}_1)$.
Ce qui prouve le résultat au rang m.
Supposons le résultat acquis pour $2 \leq k \leq m$.
Soit $i_{k-1} + 1 \leq l \leq i_k$.
On a, d'après la relation (1) :

$$f_l(\mathcal{N}_{n+1}) = f_l(\mathcal{N}_1) + \sum_{i=i_k+1}^{p} f_i(\mathcal{N}_n) f_l(Adg(e_i)) + \phi_\beta(A_1) f_l(\mathcal{N}_n) \circ \theta$$

Par hypothèse de récurrence, on voit de suite que l'on est en mesure d'appliquer le lemme 4 et donc d'établir la convergence de $(f_l(\mathcal{N}_n)$.
Au total nous avons bien démontré que (N_n) converge $\mathbb{P}$-*p.s.* . Soit N_∞ sa limite.
Comme dans la démonstration du lemme 2, on considère une suite (h_m) de fonctions μ-harmoniques, uniformément continues à gauche et convergeant vers h uniformément sur les compacts.
Soit $g \in G$.
D'après l'uniforme continuité à gauche des h_m et la convergence de (N_n), $h_m(gA_n)$ converge $\mathbb{P}$-*p.s.* pour tous $m \geq 1$ vers une variable aléatoire $\psi_{m,g}(\cdot)$ clairement η-invariante. Par construction, la fonction μ-harmonique associée admet le groupe N pour période et s'identifie donc à une fonction harmonique bornée sur le groupe abélien P pour la mesure étalée $\pi(\mu)$ où π est la projection de G sur G/N.
D'après le théorème de Choquet-Deny sur les groupes abéliens, $\psi_{m,g} = \psi_m(g)$

est $\mathbb{P}$-$p.s.$ constante et vérifie $\psi_m(ga) = \psi_m(g)$ pour tout $a \in P$.
Soit $(g_i)_{i\geq 1}$ une suite dense dans G. On a donc construit un borélien $C \subset \Omega$ de $\mathbb{P}$-mesure 1, tel que pour tout $\omega \in C$, tout $i, m \geq 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} h_m(g_i A_n(\omega)) = \psi_m(g_i) \quad (2)$$

L'uniforme continuité à gauche des h_m permet de voir que les ψ_m sont limites simples sur un ensemble dense de suites de fonctions équicontinues, ce qui implique la convergence uniforme sur les compacts. En particulier la relation (2) vaut sur tout $g \in G$, les ψ_m sont continues sur G et s'identifient à des fonctions sur G/P.

On a alors pour tout $g \in G$, $m \geq 1$,$\omega \in C$:

$$\lim_{n \to +\infty} h_m(gX_n)(\omega) = \psi_m(gN_\infty)(\omega)$$

$$\text{Et donc} \quad h_m(g) = \mathbb{E}(\psi_m(gN_\infty))$$

Ce qui grâce aux arguments développés précédemment et dus à Azencott [1], démontre le théorème dans le cas où $\mathbb{P}(B) = 0$.

Considérons donc le cas $\mathbb{P}(B) = 1$. On va en fait se ramener au cas précédent par récurrence.

Pour ce faire, considérons, l'application ψ définie sur Ω, à valeur dans l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts de $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \psi : \Omega &\to \mathcal{K} \\ \omega &\mapsto \psi(\omega) \end{aligned}$$

Où si $\omega \in B$, $\psi(\omega)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences de :

$$(W_n(\omega) = (\frac{\mathcal{N}_n(\omega)}{\|\mathcal{N}_n(\omega)\| + 1}, \frac{1}{\|\mathcal{N}_n(\omega)\| + 1}))_{n\geq 1}$$

Si $\omega \notin B$, $\psi(\omega) = \emptyset$. Nous munissons alors l'ensemble $\mathcal{K}$ de la topologie associée à la base d'ouverts suivante : Pour $\mathcal{O}$ une famille finie d'ouverts de $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_*^+$, K un compact de $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_*^+$, on note :

$\mathcal{B}(K,\mathcal{O}) = \{F \in \mathcal{K} : F \cap K = \emptyset\ ,\ F \cap O \neq \emptyset\ \ \forall O \in \mathcal{O}\}$ et on rajoute le singleton $\{\emptyset\}$. Fell [5] montre que cette topologie peut être associée à la famille $\mathcal{A} = \{f_i = \min(1, \mathrm{d}(x_i, \cdot)), i \in \mathbf{N}\}$ de fonctions (où $\mathrm{d}(x_i, \cdot)$ est la fonction distance de x_i à $\cdot$) sur $\mathcal{K}$, où $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite dense dans $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_*^+$, puis il établit que cette famille sépare les points de $\mathcal{K}$.
Montrons que l'application ψ est mesurable relativement à la tribu borélienne associée à cette topologie. La tribu borélienne considérée est en fait engendrée par les ensembles mesurables $A(K)$ suivants : à K compact de $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_*^+$, on associe le borélien $A(K) = \{H\ : H$ est compact, $H \subset K\}$, $A(K)$ est bien un borélien : $A(K) = (\mathcal{B}(\emptyset, K^c)^c$.
De plus si K est un compact et $\mathcal{O} = \{O_k, 1 \leq k \leq M\}$ une famille d'ouverts de $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_*^+$, en considérant une suite d'ouverts $(U_n)_{n\geq 1}$ telle que $\cap_{n\geq 1} U_n = K$ et une famille de compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ telle que $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_*^+ = \cup_{n\geq 1} K_n$ on voit que :

$$\mathcal{B}(K,\mathcal{O}) = \cup_{j\geq 1} A(K_j \cap \mathcal{O}^c)^c \cap (\cup_{n\geq 1}(A(U_n^c \cap K_n))$$

où $\mathcal{O}^c = \cup_{O\in\mathcal{O}} O^c$. Donc la famille des $A(F)$ engendrent bien la tribu borélienne.
Nous sommes alors en mesure de montrer la mesurabilité de l'application ψ. Soit K un compact de $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_*^+$. Alors :

$$\psi^{-1}(A(K)) = \{\omega \in \overline{\Omega}\ :\ \lim_{n\to+\infty} d(W_n(\omega), K) = 0\}$$

qui est clairement mesurable.

Considérons alors l'application ϕ de $\mathcal{K}$ dans l'ensemble $\mathcal{K}'$ des sous-algèbres de $\mathcal{N}$ définie par :

$$\phi(K) = Alg(\{(y_1, \dots, y_p)\ : (y_1, \dots, y_p, 0) \in K\})$$

Où $Alg(\cdot)$ signifie algèbre engendrée par et comme $\mathcal{N}$ est abélienne il s'agit en fait de l'espace vectoriel engendré par. Si l'on munit $\mathcal{K}'$ de sa tribu borélienne (elle est engendrée par les boréliens $B(F)$: espaces vectoriels contenus dans la sous-algèbre F de $\mathcal{N}$), ϕ est mesurable. En effet, pour F sous-algèbre de $\mathcal{N}$:

$$\phi^{-1}(B(F)) = A(F).$$

D'autre part $\phi^{-1}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \cup_{n\geq 1} \mathcal{B}(K_n' \times \{0\}, \{\mathcal{N} \times \mathbf{R}_*^+\})$. Où les K_n'

sont des compacts tels que $\mathcal{N} = \cup_{n\geq 1} K'_n$.
Au total ϕ est mesurable.

Montrons que $\phi \circ \psi$ est $\mathbb{P}$-*p.s.* constante.
Il est clair par construction que $\phi \circ \psi$ est η-invariante. Soit (f_j) la famille de fonctions réelles séparant les points de $\mathcal{K}'$, soit $j \in \mathbf{N}$, f_j est bornée sur $\mathcal{K}'$. Alors $f_j \circ \phi \circ \psi$ est une variable aléatoire η-invariante, donc associée à une fonction μ-harmonique bornée i:

$$i(g) = \mathbb{E}[f_j \circ \phi \circ \psi(g, \cdot)].$$

Soit alors $g \in G$, $\omega \in \Omega$, $U \in \mathcal{N}$ et (n_k) une sous-suite telle que :
$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathcal{N}_{n_k}}{||\mathcal{N}_{n_k}||}(\omega) = U$
$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{||\mathcal{N}_{n_k}||}(\omega) = 0$
Or $\mathcal{N}_{n_k}(g,\omega) = \mathcal{N}(Y_1(\omega)) + \text{Ad } g(\mathcal{N}_{n_k}(\omega))$.

Donc $\frac{\mathcal{N}_{n_k}(g,\omega)}{||\mathcal{N}_{n_k}(g,\omega)||}$ et $\frac{||\mathcal{N}_{n_k}||}{||\text{Ad } g(\mathcal{N}_{n_k}(\omega))||}\text{ Ad } g\frac{\mathcal{N}_{n_k}}{||\mathcal{N}_{n_k}||}$ ont même limite (quitte à prendre une sous-suite pour que le deuxième terme converge.
On en déduit que $\phi \circ \psi(g,\omega) = \text{Ad } g\ (\phi \circ \psi(\omega) = \text{Ad } A(g)\phi \circ \psi(\omega)\quad (*)$ car $\mathcal{N}$ est abélienne.
Donc i admet N pour période et s'identifie à une fonction harmonique sur le groupe abélien G/N. On a déjà vu qu'alors, d'après le théorème de Choquet-Deny pour les groupes abéliens $f_j \circ \phi \circ \psi$ est $\mathbb{P}$-*p.s.* constante.
Comme, d'après Fell, la famille dénombrable f_j séparent les points de $\mathcal{K}'$ donc $\phi \circ \psi$ est $\mathbb{P}$-*p.s.* constante, égale à une sous-algèbre $\mathcal{M}$.
Posons donc $C = \{\phi \circ \psi = \mathcal{M}\}$ et notons M le sous-groupe associé.
Montrons que M est dans les μ-périodes.
De la relation $(*)$, on déduit que $Adg\ (\mathcal{M}) = \mathcal{M}\ \forall g \in G$. Donc ad $H\ (\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est un idéal de $\mathcal{G}$.
On a alors la décomposition :

$$\mathcal{M} = \oplus_{\beta\in\Xi}\mathcal{M} \cap \mathcal{N}_\beta^{\mathbf{C}} = \oplus_{\beta\in\Xi}\mathcal{M}_\beta^{\mathbf{C}}$$

Soit $\beta \in \Xi, U \in \mathcal{M}_\beta^{\mathbf{C}}$ et H tel que $\beta(H) \neq 0$. Alors il existe $V \in \mathcal{M}_\beta^{\mathbf{C}}$ tel que $\text{ad}H(V) = U$. Par définition de $\mathcal{M}$, V s'écrit $V_1 + \ldots + V_l$ pour des V_i dans F.

Montrons que pour tout $H \in \mathcal{P}$, tout $W \in F$, exp $(\mathrm{ad}H(W))$ est dans les μ-périodes.
Soit $H \in \mathcal{P}$, $W \in F$, $\omega \in B$, il existe $t \in \mathbf{R} - \{0\}$, $W' \in \mathcal{N}$ et une sous-suite (n_k) tels que :

$$W = tW'$$
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathcal{N}_{n_k}}{\|\mathcal{N}_{n_k}\|} = W'$$
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\|\mathcal{N}_{n_k}\|} = 0$$

Posons alors $a_n = \exp\left(\frac{tH}{\|\mathcal{N}_n\|}\right)$, a_{n_k} converge donc vers $\mathbf{e}$.
On a :

$$u_{n_k} = a_{n_k} N_{n_k} a_{n_k}^{-1} N_{n_k}^{-1} = \exp\left[[\mathrm{Exp\ ad}\frac{tH}{\|\mathcal{N}_{n_k}\|} - I](\mathcal{N}_{n_k})\right]$$

qui converge vers exp $\mathrm{ad}tH(W') = \exp\ \mathrm{ad}H(W)$.
Comme a_{n_k} converge vers $\mathbf{e}$ et d'après l'uniforme continuité des h_m on a pour tout $g \in G$:

$$\lim_{k\to+\infty} h_m(gX_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} h_m(gu_{n_k}X_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} h_m(g\exp\ \mathrm{ad}H(W)X_{n_k})$$

ce qui prouve le résultat.
En résumé nous avons construit un idéal $\mathcal{M}$ non nul tel que le groupe distingué exp $\mathcal{M}$ soit dans les périodes. On peut donc passer au quotient et se ramener à un groupe résoluble connexe de dimension strictement plus petite. Soit $\tilde{\pi}$ la projection de G sur G/M. Cependant, le nilradical $\tilde{N}$ de G/M n'est pas nécessairement $\tilde{\pi}(N)$. Dans le cas contraire, cela signifie que le groupe de Cartan $\tilde{\pi}(P)$ ($\tilde{\pi}(P)$ est un groupe de Cartan de G/Md'après [4], cor. 2 p.20) est d'intersection non triviale avec $\tilde{N}$. Soit L cette intersection, il s'agit d'un sous-groupe distingué qui est dans les $\tilde{\pi}(\mu)$-périodes, d'après le lemme 5.
On se ramène donc à démontrer le résultat, pour G/ML. En itérant ce procédé, on construit un sous-groupe distingué H, tel que si π est la projection de G sur G/H, $(\pi(X_n))$ converge $\mathbb{P}$-$p.s.$ et tel que tout élément de $H \cap N$ soit dans les μ-périodes.

Il ne reste alors plus qu'à prouver que H est le plus petit sous-groupe de G, contenant P tel que, si l'on note π la projection de G sur G/H, $\pi(X_n)$ converge $\mathbb{P}$ $p.s.$, appelons $(**)$ cette propriété vérifiée par H.

Soit H' le sous-groupe, intersection des sous-groupes vérifiant $(**)$. Par un argument de dimension sur les algèbres correspondant à ces sous-groupes, on voit que H' est l'intersection finie de tels sous-groupes. De plus, l'intersection de 2 sous-groupes vérifiant $(**)$, vérifie $(**)$, donc H' est le plus petit sous-groupe vérifiant $(**)$.
Donc $H' \subset H$. Supposons que $H' \subsetneq H$. Soit alors $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ les algèbres de H et H' respectivement. Alors $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$) s'écrit $\mathcal{P} \oplus \mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{P} \oplus \mathcal{M}$) pour des sous algèbres $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{N}$. Soit $\mathcal{I}$ un supplémentaire de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}$, I le sous-groupe associé. Alors par définition de H', si l'on note π' la projection de G sur G/PM' alors $(\pi'(X_n))$ converge. Notons ν' sa loi limite. Alors pour toute fonction borélienne bornée $\hat{h}$ sur G/PM', la fonction $h(\cdot) = \int_{G/PM'} \hat{h}(\cdot x)\nu'(dx)$ est harmonique et admet, par construction de H, $\pi'(I)$ pour périodes ce qui est absurde car ν' étant une mesure finie sur G/PM' elle ne peut être invariante par translation par $\pi'(I)$.
Donc I ne peut qu'être trivial et $H = H'$, ce qui termine la démonstration du théorème.

5 Quelques exemples

Regardons le cas du produit direct de p groupes affines. Soit $G = (\mathbf{R}_*^+)^p \times \mathbf{R}^p$ muni du produit :

$$((a_1, \dots, a_p), (x_1, \dots, x_p)).((b_1, \dots, b_p), (y_1, \dots, y_p))$$
$$= ((a_1b_1, \dots, a_pb_p), (a_1y_1 + x_1, \dots, a_py_p + x_p).$$

On reprend les notations précédentes, A s'identifie à $(\mathbf{R}_*^+)^p$ et N à $\mathbf{R}^p$.
Posons $k = k_\mu = card\ \{j \in \{1, \dots, p\}\ /\ (x_j(X_n))\ converge\ \mathbb{P}\text{-}p.s.\ \}$ et notons $(N_n(k))$ la suite convergente correspondante, à valeurs dans $\mathbf{R}^k$.

Théorème 2
Soit μ une mesure de probabilité étalée sur le produit direct G de p groupes affines, h une fonction μ-harmonique bornée.
Si $k = 0$, les fonctions μ-harmoniques sont les constantes.

Sinon $(N_n(k))$ *converge* $\mathbb{P}$*-p.s. vers une v.a. de loi* ν *et il existe une fonction borélienne bornée* $\hat{h}$ *sur* $\mathbf{R}^k$ *telle que* $h(g) = \int_{\mathbf{R}^k} \hat{h}(g \cdot x)\nu(dx)$

Pour $1 \leq l \leq p$, considérons les ensembles mesurables :

$$B_l \;=\; \{\; \limsup_{n\to+\infty} |x_l(X_n)| = +\infty\}.$$

Ils sont clairement θ-invariant, donc de $\mathbb{P}$-mesure 0 ou 1.
Le lemme 4 en annexe prouve que si $\mathbb{P}(B_l) = 0$ alors $(x_l(X_n))$ converge $\mathbb{P}$-*p.s.*.
$\mathbf{R}^k$ s'identifie alors au sous-groupe de N correspondant à $\{l, 1 \leq l \leq p, \mathbb{P}(B_l) = 0\}$.

Passons au cas d'un groupe tel que l'action de Ad P ne soit pas semi-simple.
Soit $G = \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}^2$, muni du produit :

$$(a,(x_1,x_2)) \cdot (b,(y_1,y_2)) = (ab,(x_1 + ay_1 + a\log a\ y_2, x_2 + ay_2))$$

Ici P s'identifie à $\mathbf{R}_*^+$ et N à $\mathbf{R}^2$. Explicitons l'espace homogène G/H du théorème 1, dans les divers cas qui se présente.
Le borélien $B = \{\limsup_{n\to+\infty} \|N_n\| = +\infty\}$ est θ-invariant, donc de $\mathbb{P}$-mesure 0 ou 1.

cas 1 : $\mathbb{P}(B) = 0$

Le lemme 4 en annexe nous permet d'en déduire que G/H s'identifie à $N = \mathbf{R}^2$.

cas 2 : $\mathbb{P}(B) = 1$

On sait, d'après la relation $x_2(X_{n+1}) = x_2(Y_1) + A(Y_1)X_2(X_n) \circ \theta$ que le borélien $C = \{\limsup_{n\to+\infty} |x_2(X_n)| = +\infty\}$ est θ-invariant. On est alors ramené à étudier 2 nouveaux cas.

sous-cas 1 : $\mathbb{P}(C) = 1$

D'après le théorème 1, dans ce cas H contient un élément $(0,(x_1,x_2))$ avec $x_2 \neq 0$.

Pour tout $a > 0$, les éléments :
$g_a = (a, (0,0))(0, (x_1, x_2))(a^{-1}, (0,0)) = (0, (ax_1 + a\log a\ x_2, ax_2))$ sont aussi dans H (ce qui permet de supposer $x_1 \neq 0$).
Donc $g_a^2 \cdot g_{2a}^{-1} = (0, (2a\log 2\ x_1, 0)) \in H$ et H contient $\{(0,(t,0)),\ t \in \mathbf{R}\}$. D'où, comme $x_2 \neq 0$, $H = G$ et les fonctions μ-harmoniques bornées sont les constantes.

sous-cas 2 : $\mathbb{P}(C) = 0$

Comme $\mathbb{P}(B) = 1$ donc $(x_1(X_n))$ est $\mathbb{P}$-*p.s.* non bornée et G/H s'identifie à $\{0\} \times \mathbf{R}$.

6 Annexe

Démontrons le lemme utilisé au début de la démonstration du théorème.

Lemme 5 *Soit h une fonction μ-harmonique bornée. Alors pour tout $g \in G$ et tout x dans le semi-goupe fermé T_μ engendré par le support de μ $h(gX_n)$ et $h(gX_nx)$ ont $\mathbb{P}$-p.s. même limite .*

preuve :

Soit $x, g \in G$. On considère la suite $(u_n(x,\omega) = (h(gX_nx) - h(gX_n))^2)_{n\geq 1}$
Comme $(h(gX_n))_{n\geq 1}$ est une $\mathbb{P}$-martingale relativement à $\mathcal{F}_n$ on voit que

$$\int_G \mathbb{E}[u_n(x,.)]\mu(dx) = \mathbb{E}[h^2(gX_{n+1}] - \mathbb{E}[h^2(gX_n)] = v_n$$

Donc les sommes partielles de la série $\sum v_n$ forment une suite croissante, bornée par $||h||_\infty^2$, donc converge.
Donc $\sum u_n$ converge normalement, pour la norme L^1 sur $G \times \Omega$.
En particulier, d'après le théorème de convergence monotone, $u_n(\cdot,\cdot)$ converge donc $\mu \otimes \mathbb{P}$ *p.s.* vers 0. Donc pour μ-presque tout x $(u_n(x,.))$ converge $\mathbb{P}$ -*p.s.* vers 0. Mais les propriétés de continuité de h entraîne que $\{\ x \ \in \ G/\ h(gX_nx)$ et $h(gX_n)$ ont $\mathbb{P}$ p.s.même limite $\}$ est un fermé de G de complémentaire de μ-mesure 1, donc contient le support de μ. Sachant

qu'une fonction μ-harmonique est aussi μ^{*r}-harmonique, le résultat vaut pour tout $x \in T_\mu$.
En particulier si un élément g du centre de G, appartient à $T_\mu T_\mu^{-1}$ alors g est dans les périodes.
En effet, g s'écrit st^{-1} avec $s, t \in T_\mu$. D'après ce qui précède on a alors, pour tout $u \in G$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} h(ugX_n) &= \lim_{n\to+\infty} h(ugX_nt) && \text{car } t \in T_\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} h(uX_ns) && \text{car } g = st^{-1} \text{ est central} \\
&= \lim_{n\to+\infty} h(uX_n) && \text{car } s \in T_\mu
\end{aligned}$$

Au total $h(ug) = h(u)$ et g est dans les périodes.
On retrouve ainsi le théorème de Choquet-Deny : les fonctions harmoniques bornées sur un groupe abélien, pour une mesure de probabilité étalée, sont les constantes. □

Démontrons le lemme 4 :

lemme 4

Soit (U_n) et (V_n) des suites de variables aléatoires complexes sur Ω telles que V_n converge $\mathbb{P}$ *p.s.* et γ un homomorphisme continu sur G, à valeurs dans $(\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$, non constant en module. Si :

$$U_{n+1} = V_n + \gamma(X_1)U_n \circ \theta$$

Alors (U_n) est $\mathbb{P}$ *p.s.* non bornée ou $\mathbb{P}$ *p.s.* convergente.

preuve :

La relation vérifiée dans l'énoncé du lemme montre immédiatement que le borélien $\{\limsup_{n\to+\infty} |U_n| < +\infty\}$ est θ-invariant, supposons-le de mesure pleine.
Soit alors χ l'application de Ω dans l'ensemble κ des compacts de $\mathbf{C}$ qui à ω associe $\emptyset$ si $\omega \in J^c$ et les valeurs d'adhérences de (U_n) sinon. Nous avons déjà établi la mesurabilité d'une telle application pour les tribus ad hoc au cours de la démonstration du théorème.
Soit alors δ de κ dans $\mathbf{R}_+^*$ qui à $K \in \kappa$ associe son diamètre pour le module.

Montrons que δ est mesurable pour la tribu borélienne sur $\mathbf{R}^+$.
Soit $a \in \mathbf{R}_*^+$, soit $(q_n)_{n\geq 1}$ les rationnels. Alors :

$$\delta^{-1}(]a,+\infty[) = \bigcup_{p\geq}\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{B}\left(\emptyset \, , \, \left\{]-\infty, q_n - \frac{1}{p}[,]q_n + a + \frac{1}{p}, +\infty[\right\} \right)$$

donc δ est mesurable.

De la relation supposée dans le lemme, résulte la relation pour $\omega \in J$:

$$\delta \circ \chi(\omega) = \gamma(X_1(\omega)) \ \delta \circ \chi(\theta(\omega))$$

Donc le borélien $\{\delta \circ \chi = 0\}$ est θ-invariant, supposons-le de mesure nulle et appelons α la loi image de $\mathbb{P}$ par l'application $\log(\delta \circ \chi)$. Nous avons alors :

$$\alpha = \log(|\gamma|)(\mu) \star \alpha$$

Comme γ est un homomorphisme donc $(\log(|\gamma|)(\mu))^{*n} = \log(|\gamma|)(\mu^{*n})$ et comme γ est continu, de module non constant égal à 1 donc $\log(|\gamma|)(\mu)$ est étalée. On peut donc conclure comme dans la démonstration du lemme 1 à l'absurdité de la relation de convolution. Au total $\delta \circ \chi$ est $\mathbb{P}$-*p.s.* nulle et donc (U_n) converge $\mathbb{P}$-*p.s.*. $\square$

References

[1] Azencott, R. : *Espaces de Poisson des groupes localement compacts.* Lecture Notes in Mathematics.,vol 148, Springer, Berlin 1970.

[2] Jaworski, W. : *A Poisson formula for solvable Lie groups.* Preprint.

[3] Raugi, A. :*Fonctions harmoniques sur les groupes localement compacts à base dénombrable.* Bull. Soc. Math. France, Mémoire **54**, 5-118 (1977).

[4] Bourbaki, N. :*Eléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie.* Chaps VII et VIII. Hermann, Paris 1975.

[5] Auslander, L. et Moore, C.C. : *Unitary representations of solvable Lie Groups.* Mémoires of A.M.S., No 62 (1966).