PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN-PIERRE CONZE

ALBERT RAUGI

Convergence des potentiels pour un opérateur de transfert, applications aux systèmes dynamiques et aux chaînes de Markov

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-52

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___2_A2_0>

Convergence des potentiels pour un opérateur de transfert, applications aux systèmes dynamiques et aux chaînes de Markov

Jean-Pierre Conze, Albert Raugi

IRMAR, Université de Rennes I

Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

Introduction

Dans l'étude des chaînes de Markov et des systèmes dynamiques, de nombreux travaux ont porté sur les propriétés des opérateurs de la forme

$$Qf(x) = \sum_s u_s(x)\ f(sx), \tag{$*$}$$

où $(u_s, s \in S)$ est une famille de fonctions positives et $(x \to sx, s \in S)$ une famille d'applications contractantes sur un espace compact E.

Dans le cas markovien, cet opérateur est l'opérateur de transition associé à une chaîne de Markov à valeurs dans E. En théorie ergodique, ces opérateurs (de transfert) fournissent, via la construction des mesures de Gibbs associées, une large classe de processus aux propriétés stochastiques remarquables et, grâce aux codages réalisés par les partitions markoviennes, permettent d'étudier le comportement stochastique des systèmes dynamiques de type hyperbolique vis-à-vis des mesures de Gibbs (cf. [2], [17], [18]).

Dans le cas markovien, quand les fonctions u_s sont höldériennes, les méthodes spectrales d'opérateurs quasi-compacts permettent d'étudier le comportement asymptotique des chaînes de Markov associées (voir notamment le récent travail [6]).

Ce cadre peut être élargi au cas où les fonctions u_s sont moins régulières par des méthodes de cônes [11], [13], ou par les méthodes introduites dans [3], [15] dans le cas où les poids u_s peuvent s'annuler. Nous reprenons ici cette question, en montrant, à l'aide d'inégalités élémentaires comment on peut encore affaiblir les hypothèses de régularité sur les fonctions u_s.

Parmi les applications envisagées, nous établissons un TCL pour processus associés aux chaînes de Markov définies par des opérateurs de la forme $(*)$ qui étend un résultat de [15]. Nous montrons également un résultat de vitesse dans le TCL pour ces processus, utilisant les résultats de vitesse établis pour les martingales ([7]). Enfin nous établissons un "lemme de Borel-Cantelli" (cf. [14], [10]) pour certaines suites de fonctions positives stationnaires. Nous remercions D. Kleinbock pour ses remarques sur la propriété de Borel-Cantelli pour les suites stationnaires.

Plan de l'article :

1. Hypothèses et notations

(1.1) Soit (E, d) un espace métrique compact. Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, notons $B(x,r)$ [resp. $\overline{B}(x,r)$] la boule ouverte [resp. fermée] de centre x et de rayon r ; $B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$ [resp. $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$].

Considérons une famille finie ou infinie dénombrable S d'applications continues $s : x \to sx$ de E dans lui-même vérifiant l'hypothèse de contraction suivante :

il existe une suite de nombres réels $(\eta_n)_{n \geq 0}$ décroissant vers 0 telle que :

$$s\,\overline{B}(x, \eta_n) \subset \overline{B}(sx, \eta_{n+1}),\ \forall s \in S,\ \forall n \geq 0. \tag{1.1.1}$$

Autrement dit, nous supposons que, pour $x, y \in E$ et $s \in S$,

$$d(x,y) \leq \eta_n \Rightarrow d(sx, sy) \leq \eta_{n+1}.$$

Nous supposerons également que

$$\eta_0 = \mathrm{diam}(E) = \sup\{d(y,z) : y, z \in E\}. \tag{1.1.1'}$$

Notons que les conditions précédentes impliquent que les applications $x \to sx$ vérifient : $d(sx, sy) < d(x,y)$, pour $x \neq y$. Dans de nombreux exemples, elles vérifient une condition de contraction uniforme : il existe $c < 1$ tel que $d(sx, sy) < cd(x,y)$, $\forall x, y \in E$, $x \neq y$. On peut alors prendre $\eta_n = c^n \eta_0$, pour $n \geq 1$, avec $\eta_0 = \mathrm{diam}(E)$.

Nous supposons donnée, d'autre part, une famille de fonctions continues positives ou nulles $\{u_s : s \in S\}$ définies sur E telles que

$$\sum_{s \in S} u_s(x) > 0, \forall x \in E, \text{ et } \sup_{x \in E} \sum_{s \in S} u_s(x) < +\infty, \tag{1.1.2}$$

et nous considérons le noyau positif Q sur E défini par

$$Qf(x) = \sum_{s \in S} u_s(x)\ f(sx). \tag{1.1.3}$$

Ce noyau opère sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur E, ainsi que sur le cône des fonctions positives et le cône $\mathcal{M}^+$ des mesures positives définies sur la tribu des boréliens de E.

(1.2) Définitions : (*proximalité de la famille* $\{u_s : s \in S\}$)

Soit $x \in E$. Nous appelons *trajectoires* de x les sous-ensembles de E de la forme $\{s_n \cdots s_1 x : n \geq 1\}$, où $(s_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de S vérifiant $u_{s_n}(s_{n-1} \cdots s_1 x) \cdots u_{s_1}(x) > 0$, pour tout $n \geq 1$.

Plus généralement, pour un entier $p \geq 1$, nous appelons *p-trajectoires* de x les sous-ensembles de E de la forme $\{s_{np} \cdots s_1 x : n \geq 1\}$, où $(s_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de S vérifiant $u_{s_n}(s_{n-1} \cdots s_1 x) \cdots u_{s_1}(x) > 0$, pour tout $n \geq 1$.

L'adhérence de l'ensemble des trajectoires [resp. des p-trajectoires] de x est un compact de E appelé *orbite* [resp. *p-orbite*] de x. Un compact F de E est dit *p-invariant* (ou *invariant* pour $p = 1$) si, pour tout $x \in F$ et tout $(s_1, \ldots, s_p) \in S^p$ vérifiant $u_{s_p}(s_{p-1} \cdots s_1 x) \cdots u_{s_1}(x) > 0$, on a $s_p \cdots s_1 x \in F$. Un compact F est donc p-invariant s'il contient les p-orbites de chacun de ses points. La p-orbite d'un élément quelconque de E est un exemple de compact p-invariant.

La famille $\{u_s : s \in S\}$ est dite *p-proximale*, si les p-orbites de deux éléments quelconques de E se recoupent. Autrement dit, la famille $\{u_s : s \in S\}$ est p-proximale s'il n'existe pas deux compacts p-invariants disjoints.

C'est le cas si les fonctions u_s, pour tout $s \in S$, sont strictement positives, la p-proximalité résultant alors de la propriété de contraction des applications $x \to sx$. Dans le cas où les "poids" $u_s(x)$ peuvent s'annuler, l'existence de "transitions" $x \to sx$ interdites (quand $u_s(x) = 0$) peut être un obstacle à la proximalité.

La famille $\{u_s : s \in S\}$ est dite *fortement proximale* si elle p-proximale pour tout entier $p \geq 1$.

La proximalité forte permet notamment d'éviter les phénomènes de "classes cycliques". Elle est vérifiée quand les fonctions u_s sont strictement positives.

(1.3) Lemme : *Il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in E$ vérifiant $d(x,y) < \delta$, il existe une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de S telle que $\{s_n \cdots s_1 x; n \geq 1\}$ et $\{s_n \cdots s_1 y; n \geq 1\}$ soient des trajectoires respectivement de x et de y.*

Preuve : a) Cette propriété est satisfaite quand la famille S est finie d'après un argument de [3], preuve de la proposition (3.1). Rappelons cet argument.

Posons $0 < \alpha = (\text{Card } S)^{-1} \inf\limits_{x\in E} \sum\limits_{sS} u_s(x) > 0$. Pour tout $x \in E$, on a $u_{s_1}(x) \geq \alpha$, pour un indice $s_1 \in S$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que les conditions $d(x,y) < \delta$ et $u_{s_1}(x) \geq \alpha$ impliquent $u_{s_1}(y) > 0$.

En choisissant pour x une trajectoire de "plus grand poids" de transition, on construit ainsi une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ dans S définissant une trajectoire permise pour tout y suffisamment proche de x.

b) Dans le cas général d'une famille S dénombrable, on observe qu'il existe un sous-ensemble fini S_0 de S tel que $\inf_{x\in E} \sum_{sS_0} u_s(x) > 0$. On est alors ramené au cas fini.

□

Notons qu'à l'aide du lemme précédent, on peut montrer la densité des trajectoires périodiques dans les compacts invariants supports des mesures invariantes extrémales pour Q.

(1.4) Cas markovien

Si la famille $\{u_s : s \in S\}$ vérifie la condition

$$\sum_{s\in S} u_s(x) = 1, \ \forall x \in E, \tag{1.4.1}$$

l'opérateur Q défini par (1.1.3) est un opérateur *markovien* : $Q1 = 1$.

En particulier, si u est une fonction ≥ 0 sur E telle que $\sum_{s\in S} u(sx) = 1$, on peut prendre $u_s(x) = u(sx), x \in E, s \in S$, et l'opérateur markovien Q s'écrit

$$Qf(x) = \sum_{s\in S} u(sx)\ f(sx). \tag{1.4.2}$$

Désignons par Ω l'espace produit $S^{\mathbb{N}^*}$ et par $(Y_n)_{n\geq 1}$ les applications coordonnées de Ω. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\mathcal{F}_n$ la sous-tribu de la tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ des boréliens de $S^{\mathbb{N}^*}$ engendrée par les applications $Y_k, 1 \leq k \leq n$, en convenant que $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale.

Dans le cas markovien (condition (1.4.1)), la donnée de $\{u_s : s \in S\}$ permet de définir une *chaîne de Markov* à valeurs dans E : à chaque étape, à partir d'un point y, les transitions sont possibles vers les points sy, $s \in S$, avec la probabilité $u_s(y)$.

Plus précisément, pour tout $x \in E$, notons $\mathcal{Q}_x$ l'unique probabilité sur les boréliens de Ω vérifiant :

$$\int_\Omega g(Y_1,\ldots,Y_n)\, d\mathcal{Q}_x = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S^n} u_{s_n}(s_{n-1}\cdots s_1 x)\cdots u_{s_1}(x)\; g(s_1,\ldots,s_n),$$

pour tout entier $n \geq 1$ et toute fonction positive ou bornée g sur S^n.

Posons, pour tout $\omega \in \Omega$, $X_0(x,\omega) = x$ et

$$\forall n \geq 1,\; X_n(x,\omega) = Y_n(\omega)\cdots Y_1(\omega)x.$$

Le processus $\big(X_n(x,\omega)\big)_{n\geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathcal{Q}_x)$ est, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, une chaîne de Markov de probabilité de transition Q, partant de x.

• Conditions de régularité

Nous allons introduire différentes expressions mesurant la régularité des fonctions définies sur E et en particulier de la famille $(u_s, s \in S)$.

(1.5) Notations : Notons $\mathcal{C}(E)$ l'espace des fonctions continues sur E à valeurs réelles ou complexes. Pour tout entier $k \geq 0$ et toute fonction $g \in \mathcal{C}(E)$, nous définissons :

$$v(g,k) = \sup_{\{(x,y):d(x,y)\leq \eta_k\}} \big|g(x) - g(y)\big|. \tag{1.5.1}$$

La régularité de la famille (u_s) est mesurée par la suite $(w(k,0), k \geq 0)$ définie par :

$$w(k,0) = \sup_{\{(x,y):d(x,y)\leq\eta_k\}} \sum_{s\in S} \big|u_s(x) - u_s(y)\big|, \tag{1.5.2}$$

et sa "régularité moyenne" par les quantités $(w(k,n), k \geq 0)$ définies, pour $n \geq 1$, par :

$$w(k,n) = \sup_{\{(x,y):d(x,y)\leq\eta_k\}} \sum_{(s_1,\ldots s_n)\in S^n} u_{s_n}(s_{n-1}\cdots s_1 x)\ldots u_{s_1}(x)$$
$$\sum_{s\in S} \big|u_s(s_n\cdots s_1 x) - u_s(s_n\cdots s_1 y)\big|. \tag{1.5.3}$$

(1.6) Inégalités :

1) Pour tous entiers naturels k, n, nous avons :

$$w(k,n) \leq \|Q^n 1\|_\infty \; w(k+n,0) \leq \|Q^n 1\|_\infty \sum_{s\in S} v(u_s, k+n). \tag{1.6.1}$$

2) Lorsque les fonctions $u_s, s \in S$, ne s'annulent pas, nous avons :

$$\begin{aligned}\big|u_s(x) - u_s(y)\big| &= \big(1 - e^{-\left|\operatorname{Log} \frac{u_s(x)}{u_s(y)}\right|}\big) \max\{u_s(x), u_s(y)\} \\ &\leq \left|\operatorname{Log} \frac{u_s(x)}{u_s(y)}\right| \big(u_s(x) + u_s(y)\big),\end{aligned}$$

et par suite :

$$\sum_{s\in S} v(u_s, k+n) \leq 2\|Q\,1\|_\infty \; \sup_{s\in S} v(\operatorname{Log} u_s, k+n). \tag{1.6.2}$$

Il en résulte que :

$$w(k,n) \leq 2 \; \|Q^n 1\|_\infty \; \|Q\,1\|_\infty \; \sup_{s\in S} v(\operatorname{Log} u_s, k+n), \; \forall \; k,n \geq 0. \tag{1.6.3}$$

3) Pour toute fonction borélienne bornée f sur E, tout entier $n \geq 1$ et tous éléments x, y de E, la différence $Q^n f(x) - Q^n f(y)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}&\sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S^n} u_{s_n}(s_{n-1}\cdots s_1 x)\ldots u_{s_1}(x) \; \big(f(s_n\cdots s_1 x) - f(s_n\cdots s_1 y)\big) \\ &\quad + \sum_{s_1\in S} \big(u_{s_1}(x) - u_{s_1}(y)\big) \; Q^{n-1} f \; (s_1 y) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n} \; \sum_{(s_1,\ldots,s_j)\in S^j} u_{s_{j-1}}(s_{j-2}\cdots s_1 x)\ldots u_{s_1}(x) \\ &\qquad \big(u_{s_j}(s_{j-1}\cdots s_1 x) - u_{s_j}(s_{j-1}\cdots s_1 y)\big) \; Q^{n-j} f \; (s_j\cdots s_1 y).\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Dans le cas markovien, cette égalité s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}Q^n f(x) - Q^n f(y) &= \mathbb{E}_x[f(X_n(x,\cdot)) - f(X_n(y,\cdot))] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s\in S} \mathbb{E}_x\big[(\; u_s(X_{j-1}(x,\cdot)) - u_s(X_{j-1}(y,\cdot)) \;) \; Q^{n-j} f \; (s \; X_{j-1}(y,\cdot))\big].\end{aligned}$$

De (1.6.4), on déduit :

(1.7) Lemme : *Pour toute fonction f sur E et pour tous entiers naturels k, n, nous avons :*

$$v(Q^n f, k) \leq \|Q^n 1\|_\infty \; v(f, k+n) + \sum_{j=1}^{n} w(k, j-1) \; \|Q^{n-j} f\|_\infty. \qquad (1.7.1)$$

2. Equicontinuité des itérées $Q^n f$ (Q à puissances bornées)

(2.1) Hypothèses : Dans cette section, nous considérons l'hypothèse de *régularité* suivante :

$$\sum_{n\geq 0} w(0, n) < +\infty. \qquad (2.1.1)$$

Cette conditions est satisfaite si $\sum_{k\geq 0} w(k, 0) < +\infty$.

Nous supposons de plus que l'opérateur Q est à puissances bornées (cf. la remarque (2.8)), c'est-à-dire vérifie :

$$C = \sup_{n\geq 1} \; \|Q^n 1\|_\infty < +\infty. \qquad (2.1.2)$$

Nous avons donc, compte-tenu de la majoration $w(k, n) \leq C w(k+n, 0)$:

$$\lim_{k\to+\infty} \downarrow \sum_{n\geq 0} w(k, n) = \sum_{n\geq 0} \lim_{k\to+\infty} \downarrow w(k, n) = 0. \qquad (2.1.3)$$

(2.2) Proposition : *Sous les hypothèses (2.1), pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\{Q^n f \; : n \geq 0\}$ est équicontinue et bornée.*

Lorsque Q est markovien, la famille de probabilités $\{\mathbb{Q}_x \; : x \in E\}$ sur les boréliens de $\Omega = S^{\mathbb{N}^*}$ est continue en variation. Plus précisément, pour toute fonction borélienne bornée F sur Ω, nous avons :

$$\left|\mathbb{E}_x[F] - \mathbb{E}_y[F]\right| \leq \|F\|_\infty \; \sum_{k\geq 0} \sum_{s\in S} \mathbb{E}_x\left[\left|u_s(X_k(x,\cdot)) - u_s(X_k(y,\cdot))\right|\right]. \qquad (2.2.1)$$

Preuve : Soit f une fonction continue (et donc uniformément continue) sur E. Nous avons $\|Q^n f\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ et, d'après le lemme (1.7),

$$\sup_{n\geq 0} \; v(Q^n f, k) \leq C \; \left(v(f, k) + \|f\|_\infty \; \sum_{j\geq 0} w(k, j)\right).$$

La première assertion du lemme résulte alors de (2.1.3).

Supposons maintenant Q markovien. Pour toute fonction F borélienne bornée $\mathcal{F}_n$-mesurable (i.e. ne dépendant que des n premières coordonnées), nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}_x[F] - \mathbb{E}_y[F]\right| &\leq \|F\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s \in S} \mathbb{E}_x\left[\left|u_s(X_k(x,\cdot)) - u_s(X_k(y,\cdot))\right|\right] \\ &\leq \|F\|_\infty \sum_{k \geq 0} \sum_{s \in S} \mathbb{E}_x\left[\left|u_s(X_k(x,\cdot)) - u_s(X_k(y,\cdot))\right|\right].\end{aligned}$$

Dans le cas général d'une fonction borélienne bornée F, si $\mathbb{P}$ désigne la probabilité $\frac{\mathbb{Q}_x + \mathbb{Q}_y}{2}$, la suite des espérances conditionnelles $\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F|\mathcal{F}_n]\right)_{n \geq 0}$ est bornée par $\|F\|_\infty$ et converge, $\mathbb{P}$-p.s. et dans $L^1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$, vers F. L'inégalité (2.2.1) passe donc par densité des fonctions boréliennes bornées $\mathcal{F}_n$-mesurables aux fonctions boréliennes bornées.

□

Nous utilisons le résultat suivant démontré dans [15] par des méthodes de martingale (voir aussi les travaux de K. De Leeuw, I. Glicksberg, M. Rosenblatt, B. Jamison (voir par exemple [9])).

(2.3) Proposition : *Si P est un noyau markovien sur un espace compact E tel que, pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\{P^n f : n \geq 0\}$ soit équicontinue, alors l'espace $C(E)$ des fonctions continues sur E est la somme directe de deux sous-espaces fermés $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ tels que :*
i) $\mathcal{W}_1$ est le sous-espace fermé engendré par les fonctions propres de P de module 1 ;
ii) pour toute fonction f de $\mathcal{W}_2$, la suite de fonctions $(P^n f)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Dans le cas d'un noyau markovien Q de la forme (1.1.3), l'hypothèse de forte proximalité permet de montrer que l'espace $\mathcal{W}_1$ de la proposition précédente est réduit aux constantes.

(2.4) Proposition : *Supposons que Q soit markovien et que, pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\{Q^n f : n \geq 0\}$ soit équicontinue. Supposons que la famille $\{u_s : s \in S\}$ soit fortement proximale. Alors il existe une unique mesure de probabilité Q-invariante ν et, pour toute fonction f continue sur E, la suite de fonctions $(Q^n f)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E vers $\nu(f)$.*

Preuve : Reprenons les notations de la proposition (2.3). Compte-tenu de ce lemme, il nous reste à montrer que l'espace $\mathcal{W}_1$ est réduit aux fonctions constantes. Toute fonction continue s'écrira alors sous la forme $f = f_2 + \nu(f)$, avec $f_2 \in \mathcal{W}_2$, ν étant l'unique mesure de probabilité Q-invariante.

Si h est une fonction Q-invariante continue, les ensembles où h atteint son minimum et son maximum sont invariants. L'hypothèse de 1-proximalité implique alors que h est constante.

Soit h une fonction propre continue de Q, associée à une valeur propre λ de module 1. Nous avons $Q|h| \geq |h|$. D'où l'on déduit que le compact F des points de E où $|h|$ atteint son maximum est un compact invariant. Pour toute trajectoire $\{s_n \cdots s_1 x; n \geq 1\}$ de $x \in F$, la fonction $g = \frac{h}{|h|}$ vérifie alors :

$$g(s_n \cdots s_1 x) = \lambda^n \, g(x), \tag{2.4.1}$$

D'après le lemme (1.3), si y est proche de x, il existe une suite (s_n) dans S telle que $\{s_n \cdots s_1 y; n \geq 1\}$ et $\{s_n \cdots s_1 x; n \geq 1\}$ soient des trajectoires de x et de y. Les suites $(g(s_n \cdots s_1 x))$ et $(g(s_n \cdots s_1 y))$ ont alors une valeur d'adhérence commune et d'après (2.4.1), g est localement constante sur F. Elle ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs sur F. Par suite $\lambda^p = 1$, pour un certain entier $p \geq 1$. La fonction h est alors Q^p-invariante et l'hypothèse de p-proximalité entraîne que h est nécessairement constante.

□

(2.5) Remarque : La proposition (2.3) que nous avons utilisée repose sur l'analyse de Fourier des groupes abéliens compacts. Nous donnons ci-dessous une démonstration directe simple de la proposition (2.4).

Soit ν une mesure de probabilité Q-invariante sur les boréliens de E, obtenue par exemple comme valeur d'adhérence étroite de la suite de probabilités $\left(\frac{Q(x,\cdot)+\ldots+Q^n(x,\cdot)}{n}\right)_{n\geq 1}$, où x est un point quelconque de E.

Soit f une fonction de $\mathcal{C}(E)$ telle que $\nu(f) = 0$. Soit h une valeur d'adhérence, pour la convergence uniforme, de la suite $(Q^n f)_{n\geq 0}$. Le procédé diagonal permet de construire une suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ telle que, pour tout entier naturel k, la suite $Q^{\varphi(n)-k} f$ converge uniformément vers une fonction h_k, avec $h_0 = h$.

Nous avons alors $Qh_k = h_{k-1}$, $\forall k \geq 1$. La suite $(\min(h_k))_{k\geq 0}$ des minima des fonctions h_k est donc décroissante. Elle est minorée. Soit α sa limite.

Montrons que toute valeur d'adhérence de la suite (h_k) est nulle. Soit h_∞ la limite d'une sous-suite uniformément convergente extraite de la suite (h_k). Pour tout entier $\ell \geq 0$, les fonctions $Q^\ell h_\infty$ ont toutes le même minimum α. On obtient de même qu'elles ont le même maximum β.

Il en résulte qu'il existe, pour tout $\ell \geq 0$, des points x_ℓ et y_ℓ et des éléments $s_1, \cdots, s_\ell \in S$ tels que

$$h(s_1 \cdots s_\ell x_\ell) = \alpha, \;\; h(s_1 \cdots s_\ell y_\ell) = \beta.$$

En utilisant la propriété de contraction, on en déduit que $\alpha = \beta$. La fonction h_∞ est constante, donc nulle, car $\nu(h_\infty) = 0$.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc k tel que $\|h_k\|_\infty \leq \epsilon$; d'où : $\|h\|_\infty = \|Q^k h_k\|_\infty \leq \epsilon$. Ceci implique que h est identiquement nulle. D'où le résultat.

(2.6) Les conclusions de la proposition (2.4) s'appliquent en particulier sous les hypothèses (2.1), lorsque Q est markovien et la famille $\{u_s : s \in S\}$ fortement proximale, compte-tenu de la proposition (2.2) qui établit l'équicontinuité des familles $\{Q^n f : n \geq 0\}$ pour f continue.

Revenons maintenant au cas d'un opérateur Q à puissances bornées.

Sous les hypothèses (2.1), la suite de fonctions $\left(h_n = \frac{1+Q1+\ldots+Q^{n-1}1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est équicontinue (proposition (2.2)) et vérifie, $\forall x \in E$, $0 \leq h_n(x) \leq C$. Elle est donc relativement compacte dans $(\mathcal{C}(E), \|\ \|_\infty)$. Toute valeur d'adhérence h de cette suite est une fonction continue positive Q-invariante vérifiant, d'après le lemme (1.7), $v(h,k) \leq C\ \sum_{j\geq 0} w(k,j)$.

De plus, toute fonction continue positive Q-invariante f vérifie, $\forall x \in E$,

$$f(x) = \frac{f(x) + Qf(x) + \ldots + Q^{n-1}f(x)}{n} \leq \|f\|_\infty \ \frac{1 + Q1(x) + \ldots + Q^{n-1}1(x)}{n} \ ;$$

ce qui montre que toutes les fonctions qui sont valeurs d'adhérence de la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ ont les mêmes zéros.

Dans le cas où l'ensemble $\{h = 0\}$ est vide, nous pouvons nous ramener au cas markovien. En effet, il suffit de considérer l'opérateur markovien (relativisé) $\widetilde{Q}$ défini par :

$$\forall x \in E,\ \widetilde{Q}f(x) = \frac{1}{h(x)}\ Q(hf)(x),$$

pour toute fonction borélienne positive f sur E. L'opérateur $\widetilde{Q}$ correspond à la famille de fonctions $\{\widetilde{u}_s\ :\ s \in S\}$ définie par

$$\forall s \in S,\ \forall x \in E,\ \widetilde{u}_s(x) = \frac{h(sx)}{h(x)}\ u_s(x).$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}(E)$ et tout $n \geq 1$, nous avons $\widetilde{Q}^n f = \frac{1}{h} Q^n(hf)$; ce qui montre que la suite $(\widetilde{Q}^n f)_{n\geq 0}$ est équicontinue.

Nous avons donc le résultat suivant :

(2.7) Proposition : *Plaçons-nous sous les hypothèses (2.1). Supposons de plus que la famille $\{u_s\ : s \in S\}$ soit fortement proximale et qu'il existe une fonction continue strictement positive Q-invariante h.*

Alors il existe une (unique) mesure de probabilité Q-invariante ν sur les boréliens de E telle que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}(E)$, la suite de fonctions $(Q^n f)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E vers $h\ \nu(f)$.

(2.8) Remarques : a) L'existence d'une fonction continue strictement positive Q-invariante (par exemple dans le cas markovien) implique évidemment que l'opérateur Q est à puissances bornées. Nous rappelons en complément (section 9) comment, dans le cas où les fonctions u_s sont > 0, les méthodes de cônes à base compacte permettent d'établir l'existence d'une fonction propre continue > 0 pour l'opérateur Q. Si λ est la valeur propre, l'opérateur $\lambda^{-1}Q$ est alors à puissances bornées et les résultats des sections 2 et 4 s'appliquent à cet opérateur.

b) Sous les hypothèses (2.1), lorsque Q est markovien, on peut montrer que l'espace $\mathcal{W}_1$ de la proposition (2.3) associé à Q est de dimension finie (cf. [3]).

(2.9) Donnons une extension de ce qui précède à certains opérateurs non positifs considérés plus loin dans la section 8.

Si Q est un opérateur de la forme (1.1.3) avec $u_s \geq 0$ à puissances bornées et si ψ est une fonction sur E de module 1, alors Q_ψ défini par

$$Q_\psi f(x) = \sum_s u_s(x)\,\psi(sx)\,f(sx), \tag{2.9.1}$$

est aussi à puissances bornées.

Pour indiquer qu'elle dépend du choix des fonctions u_s, notons $w_u(k,n)$ la quantité $w(k,n)$ introduite en (1.5.3) pour mesurer la régularité de la famille $u = (u_s, s \in S)$. Un calcul élémentaire donne pour la famille $(u_s\psi(s.), s \in S)$ la majoration suivante :

$$w_{u\psi}(k,n) \leq w_u(k,n) + \|Q^{n+1}1\|_\infty v(\psi, k+n+1). \tag{2.9.2}$$

L'argument de la première partie de la proposition (2.2) s'applique alors :

(2.10) Proposition : *Sous les hypothèses (2.1) et si $\sum_{n\geq 0} w(\psi,n) < +\infty$, pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\{Q_\psi^n f \ : n \geq 0\}$ est équicontinue et bornée.*

3. Un exemple

Nous allons traiter un exemple de chaîne de Markov illustrant les différentes hypothèses de régularité.

(3.1) Considérons l'intervalle $E = [0,1]$, un entier $q \geq 1$ et un réel β vérifiant $0 < \beta \leq 1$. Notons t l'application de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ définie par :

$$\forall x \in E,\ t(x) = \frac{x}{1+q\,x^\beta}.$$

Nous avons, $\forall x > 0$,

$$t'(x) = \frac{1-\beta}{1+q\ x^\beta} + \frac{\beta}{(1+q\ x^\beta)^2},$$
$$t''(x) = -q\ \beta\ x^{\beta-1}\Big(\frac{1-\beta}{(1+q\ x^\beta)^2} + \frac{2\ \beta}{(1+q\ x^\beta)^3}\Big).$$

Les fonctions t et t' sont donc respectivement croissante et décroissante sur $[0,+\infty[$. En particulier, on en déduit que $t(x+y) \leq t(x) + t(y)$, $\forall x, y \in [0,+\infty[$, et par suite :

$$\forall x, y \in [0,+\infty[,\ \big|t(x) - t(y)\big| \leq t(|x-y|) \leq |x-y|. \qquad (3.1.1)$$

La fonction t envoie l'intervalle $[0,1]$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{1+q}]$.

Nous considérons la famille de transformations continues de E définie par :

$$S = \{t_k : x \to t(x) + \frac{k}{1+q} : 0 \leq k \leq q\}.$$

Des inégalités (3.1.1), il résulte que :

$$\forall s_1, \ldots, s_n \in S,\ \big|s_1 \cdots s_n\ x - s_1 \cdots s_n\ y\big| \leq t^n(|x-y|) \leq t^n(1).$$

Pour la suite $(\eta_k)_{k\geq 0}$ sur E définie par $\eta_k = t^k(1)$, l'hypothèse de contraction de (1.1.1) est alors satisfaite.

Donnons-nous une famille de fonctions $\{u_s : s \in S\}$, vérifiant la condition $\sum_{s\in S} u_s(x) = 1$, $\forall x \in E$, pour laquelle il existe une fonction continue croissante Φ de $[0,1]$ dans $[0,1]$, nulle en zéro, telle que :

$$\sum_{s\in S} |u_s(x) - u_s(y)| \leq \Phi(|x-y|),\ \forall\ x, y \in [0,1]. \qquad (3.1.2)$$

Nous avons :

$$w(n,0) = \Phi\big(t^n(1)\big),\ \forall n \in I\!N.$$

La suite réelle $(u_n = t^n(1))_{n\geq 0}$ décroît vers zéro et vérifie la relation

$$\frac{1}{u_{n+1}^\beta} - \frac{1}{u_n^\beta} = \frac{(1+qu_n^\beta)^\beta - 1}{u_n^\beta} = q\ \beta + o(u_n^\beta).$$

Il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ u_n^\beta} = q\ \beta$, c'est-à-dire, $u_n = (1+o(1))(n\ q\ \beta)^{-\frac{1}{\beta}}$.

Pour $\Phi(x) = x^\alpha$, avec $0 < \alpha \leq 1$, la condition $\sum_{k\geq 0} w(k,0) < +\infty$ n'est donc satisfaite que pour $\frac{\alpha}{\beta} > 1$. Pour $\Phi(x) = \frac{1}{1+|\mathrm{Log}\ x|^\alpha}$, avec $\alpha > 0$, la condition $\sum_{k\geq 0} w(k,0) < +\infty$ n'est jamais satisfaite.

Nous allons voir que la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} w(0,n)$ peut être établie sous des conditions moins restrictives.

(3.2) Proposition : *S'il n'existe pas d'élément z de $[0,1]$ tel que, pour tout entier naturel n, $u_t(t^n z) = 1$, alors il existe un entier $r \geq 1$ et des réels ρ et γ de $[0,1[$ tels que, pour tous $x, y \in E$, pour tout $n \geq r+1$, pour tout $\beta > 0$,*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\big[\Phi(\beta|X_n(x,\cdot) - X_n(y,\cdot)|)\big] \\
&\quad \leq (1-\gamma)\ \mathbb{E}_x\big[\Phi(\rho\beta\ |X_{n-r-1}(x,\cdot) - X_{n-r-1}(y,\cdot)|)\big] \\
&\qquad + \gamma\ \mathbb{E}_x\big[\Phi(\beta|X_{n-r-1}(x,\cdot) - X_{n-r-1}(y,\cdot)|)\big].
\end{aligned}
$$

Preuve : Observons d'abord qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que

$$\gamma\ =\ \sup_{y\in E} \mathbb{P}_y\big[\{Y_1 = \ldots = Y_r = t\}\big]\ = \sup_{y\in E} u_t(t^{r-1}y)\cdots u_t(y) < 1.$$

[En effet dans le cas contraire, il existerait une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_t(t^{n-1}x_n)\cdots u_t(x_n) = 1$. Pour toute valeur d'adhérence z de cette suite, nous aurions alors $u_t(t^n z) = 1$, pour tout $n \geq 0$.]

Pour tous $0 < x \leq y \leq 1$, nous avons :

$$t\ y - t\ x = \frac{y - x + q\ (x\ y^\beta - y\ x^\beta)}{(1+q\ x^\beta)(1+q\ y^\beta)} \leq \frac{y-x}{(1+q\ x^\beta)(1+q\ y^\beta)}$$

et par suite, pour tous $x, y \in E$,

$$|t\ x - t\ y| \leq \frac{|y-x|}{(1+q\ x^\beta)(1+q\ y^\beta)}. \tag{3.2.1}$$

Ces inégalités sont plus précises que les inégalités (3.1.1) ; cependant elles coïncident pour $x = 0$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{1+q}$. Pour tous $x, y \in [\varepsilon, 1]$, nous avons :

$$|t\ x - t\ y| \leq \rho\ |x-y|,\ \text{avec}\ \rho = \frac{1}{(1+q\ \varepsilon^\beta)^2} < 1.$$

Il en résulte que, pour tous $s_1, \ldots, s_r \in E$:
$\big|ts_r\cdots s_1\ x - ts_r\cdots s_1\ y\big| \leq \big|x-y\big|$, si $s_1 = \ldots = s_r = t$,
$\big|ts_r\cdots s_1\ x - ts_r\cdots s_1\ y\big| \leq \rho\ \big|x-y\big|$, sinon.

Pour tout entier $n \geq r$, nous avons alors :

$$\mathbb{E}_x\big[\Phi(\beta|X_{n+1}(x,\cdot) - X_{n+1}(y,\cdot)|)\big] = \mathbb{E}_x\big[\Phi(\beta|tX_n(x,\cdot) - tX_n(y,\cdot)|)\big]$$
$$\leq \mathbb{E}_x\big[\Phi(\beta\rho\ |X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|)\ 1_{\bigcup_{0\leq k\leq r-1}\{Y_{n-k}\neq t\}}\big]$$
$$+ \mathbb{E}_x\big[\Phi(\beta|X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|)\ 1_{\{Y_{n-r+1}=\ldots=Y_n=t\}}\big]$$
$$\leq \mathbb{E}_x\big[\Phi(\rho\beta\ |X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|)\big] + \mathbb{E}_x\Big[\big(\Phi(\beta|X_{n-r}(x,\cdot)-$$
$$X_{n-r}(y,\cdot)|) - \Phi(\rho\beta\ |X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|)\big)\ 1_{\{Y_{n-r+1}=\ldots=Y_n=t\}}\Big]$$
$$\leq \mathbb{E}_x\big[\Phi(\rho\beta\ |X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|)\big] + \mathbb{E}_x\Big[\big(\Phi(\beta|X_{n-r}(x,\cdot)-$$
$$X_{n-r}(y,\cdot)|) - \Phi(\rho\beta\ |X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|)\big)\ \mathbb{P}_{X_{n-r}(x,\cdot)}\big[\{Y_1 = \ldots = Y_r = t\}\big]\Big]$$
$$\leq \mathbb{E}_x\big[\Phi(\rho\beta\ |X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|)\big]$$
$$+\gamma\ \mathbb{E}_x\Big[\Phi(\beta|X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|) - \Phi(\rho\beta\ |X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|)\Big]$$
$$\leq (1-\gamma)\ \mathbb{E}_x\Big[\Phi(\rho\beta\ |X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|))\Big]$$
$$+ \gamma\ \mathbb{E}_x\big[\Phi(\beta|X_{n-r}(x,\cdot) - X_{n-r}(y,\cdot)|))\Big].$$

D'où le résultat.

□

(3.3) Corollaire : *S'il n'existe pas d'élément z de $[0,1]$ tel que, pour tout entier naturel n, $u_t(t^n z) = 1$, alors il existe un entier $r \geq 1$ et des réels ρ et γ de $[0,1[$ tels que,*

$$\forall\ k,n \in \mathbb{N},\ w(k,n) \leq \sum_{j=0}^{\ell} C_\ell^j\ (1-\gamma)^j\ \gamma^{\ell-j}\ \Phi(\rho^j\ u_k),$$

où ℓ désigne la partie entière de $\frac{n}{r+1}$.

(3.4) Prenons $\Phi(x) = x^\alpha$, avec $0 < \alpha \leq 1$. Nous avons, avec les notations du corollaire (3.3) :

$$\forall\ k,n \in \mathbb{N},\ w(k,n) \leq \big(\gamma + (1-\gamma)\ \rho^\alpha)\big)^\ell\ u_k^\alpha,$$

ce qui implique la convergence exponentielle des séries $\sum_{n\geq 0} w(k,n)$, $k \geq 0$.

(3.5) Prenons $\Phi(x) = \frac{1}{1+|\mathrm{Log}x|^\alpha}$, avec $\alpha > 0$. Nous avons de même que, pour tous $k,n \in \mathbb{N}$,

$$w(k,n) \leq \sum_{j=0}^{\ell} C_\ell^j\ (1-\gamma)^j\ \gamma^{\ell-j}\ \frac{1}{1+\big(j\ \mathrm{Log}\frac{1}{\rho} + \mathrm{Log}\frac{1}{u_k}\big)^\alpha}.$$

Posons $a = \mathrm{Log}\frac{1}{\rho}$, $b = \frac{1-\gamma}{2}$ et désignons par $(U_j)_{j\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1-\gamma$. Nous avons :

$$
\begin{aligned}
w(k,n) &\leq \mathbb{E}\Big[\frac{1}{1+\big(a\ (U_1+\ldots+U_\ell)+\mathrm{Log}\frac{1}{u_k}\big)^\alpha}\Big].\\
&\leq \frac{1}{1+\big(a\ b\ \ell+\mathrm{Log}\frac{1}{u_k}\big)^\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{Log}^\alpha\frac{1}{u_k}}\ \mathbb{P}\Big[\{U_1+\ldots+U_\ell<b\ \ell\}\Big]\\
&\leq \frac{1}{1+\big(a\ b\ \ell+\mathrm{Log}\frac{1}{u_k}\big)^\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{Log}^\alpha\frac{1}{u_k}}\ e^{b\ \ell}\ \mathbb{E}\Big[e^{-(U_1+\ldots+U_\ell)}\Big]\\
&\leq \frac{1}{1+\big(a\ b\ \ell+\mathrm{Log}\frac{1}{u_k}\big)^\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{Log}^\alpha\frac{1}{u_k}}\ e^{b\ \ell}\ (\gamma+\frac{1-\gamma}{e})^\ell\ ;
\end{aligned}
$$

ce qui montre, puisque $e^{\frac{1-\gamma}{2}}\ (\gamma+\frac{1-\gamma}{e})<1$, pour $0\leq\gamma<1$, la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} w(k,n)$, pour tout $\alpha>1$.

4. Etude en norme uniforme des potentiels (Q à puissances bornées)

(4.1) Hypothèses : Nous supposons dorénavant que la famille de fonctions $\{u_s\ :\ s\in S\}$ est *fortement proximale* et qu'il existe une fonction continue strictement positive Q-invariante h. (Nous sommes donc dans le cas d'un opérateur à puissances bornées et la fonction invariante h est unique à un facteur scalaire près).

Nous supposons d'autre part vérifiée l'hypothèse de *régularité* (2.1.1), i.e.

$$\sum_{n\geq 0} w(0,n) < +\infty.$$

Sous ces hypothèses, d'après la proposition (2.7), il existe une unique mesure de probabilité Q-invariante ν et, pour toute fonction f de $\mathcal{C}(E)$, la suite de fonctions $(Q^n f)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E vers $\nu(f)\,h$.

Considérons une fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $]0,+\infty[$ telle que $\sum_{k\geq 0}\varphi(k)=+\infty$ et

$$\sum_{k\geq 0}\varphi(k)\ \sum_{n\geq 0} w(k,n) < +\infty. \tag{4.1.1}$$

L'existence d'une telle fonction résulte du fait que l'on a : $\lim_{k\to+\infty}\downarrow\sum_{n\geq 0} w(k,n)=0$.

Nous pouvons prendre, par exemple,

$$\varphi(k)=\big(\sum_{n\geq 0} w(k,n)\big)^{-\alpha}\big(\sum_{n\geq 0}(w(k-1,n)-w(k,n))\big)\quad \text{avec } 1\leq\alpha<2.$$

Notations : Pour tout entier $n \geq 0$, nous posons

$$r(n) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ w(k,n), \tag{4.1.2}$$

$$\rho = \sum_{n\geq 0} r(n). \tag{4.1.3}$$

Rappelons que nous avons noté $C = \sup_{n\geq 1} \|Q^n 1\|_\infty$.

Pour toute fonction f sur E, nous posons :

$$m_\varphi(f,n) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ v(f,k+n),\ n\geq 0 \tag{4.1.4}$$

$$m_\varphi(f) = m_\varphi(f,0) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ v(f,k), \tag{4.1.5}$$

$$\begin{aligned} M_\varphi(f) &= \sum_{n\geq 0} m_\varphi(f,n) \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ v(f,k+n) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k) \sum_{n\geq k} v(f,n). \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Remarque : L'introduction des pondérations $\varphi(k)$ permet d'affaiblir la condition de régularité des fonctions u_s qui apparaît habituellement (portant sur la convergence de la série des restes des variations) dans l'étude des noyaux markoviens associés à des applications contractantes ou des mesures de Gibbs.

La somme $\sum_{n\geq 0} w(k,n)$ est majorée par le reste d'ordre k de la série $\sum_k w(k,0)$. Si le terme général de cette série est par exemple en $O(\frac{1}{k^\alpha})$, l'introduction des poids $\varphi(k) = \frac{1}{k+1}$ permet d'obtenir la condition (4.1.1) pour $\alpha > 1$.

De même, la classe de fonctions à laquelle s'applique le théorème suivant est astreinte à une condition de régularité plus faible que la condition habituelle.

(4.2) Théorème : *Sous les hypothèses (4.1), il existe un réel positif D tels que, pour toute fonction continue f sur E vérifiant $\nu(f) = 0$ et $M_\varphi(f) < +\infty$, la série du potentiel $Gf = \sum_{n\geq 0} Q^n f$ converge et définit une fonction continue sur E vérifiant*

$$m_\varphi(Gf) \leq \sum_{n\geq 0} m_\varphi(Q^n f) \leq 2C\ M_\varphi(f) + D\ \|f\|_\infty, \tag{4.2.1}$$

et nous avons :

$$\|Gf\|_\infty \leq \sum_{n\geq 0} \|Q^n f\|_\infty < \varphi(0)^{-1}\big(2C\ M_\varphi(f) + D\ \|f\|_\infty\big). \tag{4.2.2}$$

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du théorème (4.2).

(4.3) Lemme : *L'ensemble* $\mathcal{C}_1 = \{f \in \mathcal{C}(E) : \nu(f) = 0$ *et* $m_\varphi(f) \leq 1\}$ *est un compact de* $(\mathcal{C}(E), \| \ \|_\infty)$ *et nous avons :*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \Big\{ \frac{\|Q^n f\|_\infty}{m_\varphi(f)} : f \in \mathcal{C}(E) \setminus \{0\},\ \nu(f) = 0 \ \text{et}\ m_\varphi(f) < +\infty \Big\} = 0.$$

Preuve : Pour toute fonction f de $\mathcal{C}(E)$ vérifiant $\nu(f) = 0$, nous avons :

$$|f(x)| = |f(x) - \nu(f)| \leq \int_E |f(x) - f(y)|\ \nu(dy) \leq v(f, 0),\ \forall x \in E,$$

et donc $\sup\{\|f\|_\infty : f \in \mathcal{C}_1\} \leq \varphi(0)^{-1}$; l'ensemble $\mathcal{C}_1$ est donc un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}(E)$.

D'autre part, pour toute fonction continue f sur E et tout entier naturel k, nous avons, la suite $(v(f,j))_{j \geq 0}$ étant décroissante :

$$\Big(\sum_{j=0}^{k} \varphi(j)\Big)\ v(f,k) \leq \sum_{j=0}^{k} \varphi(j)\ v(f,j) \leq m_\varphi(f);$$

d'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup\{v(f,k) : f \in \mathcal{C}_1\} \ \leq\ \Big(\sum_{j=0}^{k} \varphi(j)\Big)^{-1}.$$

La famille de fonctions $\mathcal{C}_1$ est donc équicontinue. La première assertion du lemme résulte alors du théorème d'Ascoli.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N(\varepsilon)$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_{N(\varepsilon)}$ de $\mathcal{C}_1$ tels que les boules $B(f_k, \varepsilon)$, $1 \leq k \leq N(\varepsilon)$, recouvrent le compact $\mathcal{C}_1$ de $(\mathcal{C}(E), \| \ \|_\infty)$. Les suites de fonctions $(Q^n f_k)_{n \geq 0}$, $1 \leq k \leq N(\varepsilon)$, convergent uniformément vers zéro, d'après (2.7). Il existe donc un entier $K(\varepsilon)$ tel que, pour tout $1 \leq k \leq N(\varepsilon)$ et tout $n \geq K(\varepsilon)$, $\|Q^n f_k\|_\infty \leq \varepsilon$. Il s'ensuit alors, puisque Q est à puissances bornées dans $L^\infty(E, \nu)$, que

$$\forall f \in \mathcal{C}_1,\ \forall n \geq K(\varepsilon),\ \|Q^n f\|_\infty \leq (1 + \sup_n \|Q^n 1\|_\infty)\ \varepsilon.$$

D'où la seconde assertion du lemme.

□

Notons $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'espace des suites réelles sommables muni de la norme $\| \ \|_1$ ($\|u\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u(n)|$, pour $u = (u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$) et de la convolution (notée $*$). Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant :

(4.4) Lemme : *Si α, β, γ sont trois suites positives dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, vérifiant $\|\gamma\|_1 < 1$ et*

$$\alpha(n) \leq \beta(n) + (\gamma * \alpha)(n), \ \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{4.4.1}$$

alors

$$\alpha(n) \leq \sum_{p\geq 0} (\gamma^{*p} * \beta)(n), \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.4.2}$$

Preuve : D'après (4.4.1), nous avons, pour tout $q \geq 1$:

$$\alpha(n) \leq \sum_{p=0}^{q-1} (\gamma^{*p} * \beta)(n) + (\gamma^{*q} * \alpha)(n), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

L'inégalité (4.4.2) en résulte, d'après :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\gamma^{*q} * \alpha)(n) = \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n)\big)^q \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha(n)\big) = \|\gamma\|_1^q \|\alpha\|_1 \to 0.$$

□

(4.5) Proposition : *Sous les hypothèses (4.1) et avec les notations (4.1.2) - (4.1.6), il existe un entier $q \geq 1$ tel que, si les suites γ et β sont définies par :*

$$\gamma(n) = \begin{cases} \frac{1}{2\rho} r(n-q-1), & n \geq q+1, \\ 0, & n \leq q, \end{cases}$$

$$\beta(n) = \begin{cases} C\big(m_\varphi(f,n) + C\sum_{j=n-q+1}^{n} r(j-1)\ \|f\|_\infty\big), & n \geq q+1, \\ C\big(m_\varphi(f,n) + C\sum_{j=1}^{n} r(j-1)\ \|f\|_\infty\big), & 0 \leq n \leq q, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

alors $\|\gamma\|_1 \leq \frac{1}{2}$ et, pour toute fonction continue f sur E vérifiant $\nu(f) = 0$ et tout entier $n \geq 0$,

$$m_\varphi(Q^n f) \leq \sum_{p\geq 0} (\gamma^{*p} * \beta)(n). \tag{4.5.1}$$

Preuve : Du lemme (1.7), il résulte que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$m_\varphi(Q^n f) \leq C m_\varphi(f,n) + \sum_{j=1}^{n} r(j-1)\ \|Q^{n-j} f\|_\infty.$$

D'après le lemme (4.3), il existe un entier $q \geq 1$ tel que

$$\|Q^q g\|_\infty \leq \frac{1}{2\,\rho} m_\varphi(g), \ \forall g \in C(E), \ \text{telle que } \nu(g) = 0.$$

Nous avons alors, pour tout $n \geq q+1$,

$$\begin{aligned}
m_\varphi(Q^n f) & \\
&\leq C m_\varphi(f,n) + \sum_{j=n-q+1}^{n} r(j-1)\, \|Q^{n-j} f\|_\infty + \sum_{j=1}^{n-q} \frac{r(j-1)}{2\,\rho}\, m_\varphi(Q^{n-q-j} f) \\
&\leq C\big(m_\varphi(f,n) + \sum_{j=n-q+1}^{n} r(j-1)\, \|f\|_\infty\big) + \sum_{\ell=q+1}^{n} \frac{r(\ell-q-1)}{2\,\rho}\, m_\varphi(Q^{n-\ell} f).
\end{aligned}$$

Cette inégalité et le lemme (4.4) appliqué aux suites β, γ et à la suite α à support dans $\mathbb{Z}^+$ définie par $\alpha(n) = m_\varphi(Q^n f)$, pour $n \geq 0$, impliquent l'inégalité (4.5.1).

□

Preuve du théorème (4.2) : D'après la proposition (4.5), nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} m_\varphi(Q^n f) &\leq \Big(\sum_{p\geq 0}\Big(\sum_{n\geq 0}\gamma(n)\Big)^p\Big)\ \Big(\sum_{n\geq 0}\beta(n)\Big) \\
&\leq \Big(\sum_{p\geq 0}(\frac{1}{2})^p\Big)\ C\ \Big(M_\varphi(f) + q\rho\ \|f\|_\infty\Big) \\
&\leq 2C\ \big(M_\varphi(f) + q\rho\ \|f\|_\infty\big) \\
&\leq 2C\, M_\varphi(f) + D\,\|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

en posant $D = 2C\rho q$.

D'autre part, pour tout entier naturel n, nous avons (cf. la preuve du lemme (4.3)) $\|Q^n f\|_\infty \leq v(Q^n f, 0)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \|Q^n f\|_\infty \leq \sum_{n\geq 0} v(Q^n f, 0) &\leq \varphi(0)^{-1} \sum_{n\geq 0} m_\varphi(Q^n f) \\
&< \varphi(0)^{-1}\,(2C\, M_\varphi(f) + D\,\|f\|_\infty).
\end{aligned}$$

□

(4.6) Le résultat précédent établit une relation entre la régularité de f et celle (un peu moins bonne) du potentiel $Gf = \sum Q^n f$. Sous une hypothèse de régularité plus forte sur les fonctions (u_s), nous pouvons préciser cette relation.

Introduisons le reste de la série des $v(f,k)$, puis le reste de la série des restes. Notons :

$$\begin{aligned}
v_1(f,k) &= \sum_{\ell\geq k} v(f,\ell), \\
v_2(f,k) &= \sum_{\ell\geq k} v_1(f,\ell) = \sum_{\ell\geq 0}(\ell+1)v(f,\ell+k).
\end{aligned}$$

Rappelons que nous avons noté : $M_\varphi(f) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ v_1(f,k)$. Posons

$$M_{\varphi,2}(f) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ v_2(f,k). \tag{4.6.1}$$

Nous avons vu (théorème (4.2)) que, sous les hypothèses (4.1), il existe une constante D telle que, pour toute fonction f vérifiant $\nu(f) = 0$ et $M_\varphi(f) < +\infty$,

$$m_\varphi(Gf) \leq \sum_{n\geq 0} m_\varphi(Q^n f) \leq 2C\, M_\varphi(f) + D\, \|f\|_\infty.$$

Pour obtenir une meilleure régularité de Gf, nous renforçons la condition $\sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ \sum_{n\geq 0} w(k,n) < +\infty$ de (4.1) par la condition de régularité sur les fonctions u_s suivante :

$$\sum_{k\geq 0} \varphi(k) (\sum_{\ell\geq k} \sum_{j\geq 0} w(\ell,j)) < +\infty. \tag{4.6.2}$$

(4.7) Théorème : *Sous les hypothèses de (4.1) et la condition (4.6.2), il existe des constantes C_i, $1 \leq i \leq 3$, telles que, pour toute fonction continue f sur E vérifiant $\nu(f) = 0$ et $M_{\varphi,2}(f) < +\infty$, la série du potentiel $Gf = \sum_{n\geq 0} Q^n f$ vérifie*

$$M_\varphi(Gf) \leq C_1 M_{\varphi,2}(f) + C_2 M_\varphi(f) + C_3 \|f\|_\infty.$$

Preuve : D'après le lemme (1.7) puis le théorème (4.2), nous avons :

$$\begin{aligned} v(Gf,k) &\leq \sum_{n\geq 0} v(Q^n f, k) \\ &\leq C \sum_{n\geq k} v(f,n) + \sum_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{n} w(k,j-1)\ \ \|Q^{n-j} f\|_\infty \\ &\leq C \sum_{n\geq k} v(f,n) + (\sum_{n\geq 0} \|Q^n f\|_\infty)(\sum_{j\geq 0} w(k,j)) \\ &\leq C \sum_{n\geq k} v(f,n) + (\sum_{j\geq 0} w(k,j))\varphi(0)^{-1} \big(2C\, M_\varphi(f) + D\, \|f\|_\infty\big); \end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

(4.8) Exemple :

Reprenons l'exemple de la section 3, avec le choix $\varphi(k) = \dfrac{1}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Choisissons pour Φ (cf. (3.1.2)) $\Phi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, les hypothèses de (4.1) sont satisfaites. Pour toute fonction f de $\mathcal{C}(E)$ telle que $\nu(f) = 0$ et $\sum_{k\geq 0} \dfrac{1}{k+1} \sum_{n\geq k} v(f,n) < +\infty$, le potentiel $Gf = \sum_{n\geq 0} Q^n f$ est une fonction continue vérifiant

$$m_\varphi(Gf) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} \sum_{n\geq k} v(Gf,n) < +\infty.$$

L'hypothèse (4.6.2) est vérifiée pour $\alpha > \beta$.

Pour $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+|\mathrm{Log} x|^\alpha}$, les hypothèses de (4.1) sont satisfaites, pour $\alpha > 2$. Pour toute fonction f de $\mathcal{C}(E)$ telle que $\nu(f) = 0$ et $\sum_{k\geq 0} \dfrac{1}{k+1} \sum_{n\geq k} v(f,n) < +\infty$, le potentiel $Gf = \sum_{n\geq 0} Q^n f$ est une fonction continue vérifiant $m_\varphi(Gf) < +\infty$.

5. Etude des potentiels en norme L^1 (Q à puissances bornées

(5.1) Hypothèses et notations : Nous supposons que les fonctions u_s, $s \in S$, sont *strictement positives* et qu'il existe une fonction continue strictement positive Q-invariante h. (Nous sommes donc dans le cas d'un opérateur à puissances bornées et la fonction invariante h est unique à un facteur scalaire près).

Nous supposons d'autre part vérifiée l'hypothèse de *régularité* :

$$\sum_{k\geq 0} \sup_{s\in S} v(\mathrm{Log} u_s, k) < +\infty. \tag{5.1.1}$$

Cette condition est plus forte que (2.1.1) (cf. (1.6.3)) et les hypothèses de la proposition (2.7) sont vérifiées. Il existe donc une unique mesure de probabilité Q-invariante ν et, pour toute fonction f de $\mathcal{C}(E)$, la suite de fonctions $(Q^n f)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E vers $\nu(f)\, h$.

Grâce à ce renforcement des conditions sur l'opérateur Q, il est possible de traiter des espaces de fonctions plus généraux. Nous appliquerons en particulier dans la section 7 ces résultats aux fonctions à variation bornée sur l'intervalle $[0, 1]$.

Introduisons une nouvelle expression de la régularité des fonctions, plus faible que celle qui est définie en (1.5). Pour tout entier $n \geq 0$, tout $x \in E$ et toute fonction borélienne f sur E, nous définissons :

$$\widetilde{\mathcal{V}}(f,x,n) = \|f(x) - f(\cdot)\|_{L^\infty\left(B(x,\eta_n),\nu\right)}, \tag{5.1.2}$$

$$\widetilde{v}(f,n) = \int_E \widetilde{\mathcal{V}}(f;x,n)\ \nu(dx). \tag{5.1.3}$$

Nous choisissons une fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $]0,+\infty[$ telle que

$$\sum_{k\geq 0} \varphi(k) = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 0} \varphi(k) \sum_{n\geq k} \sup_{s\in S} v(\mathrm{Log}u_s, n) < +\infty. \tag{5.1.4}$$

Nous pouvons alors définir l'analogue des quantités introduites en (4.1) :

$$\widetilde{m}_\varphi(f,n) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ \widetilde{v}(f,k+n),\ \ n \geq 0 \tag{5.1.5}$$

$$\widetilde{m}_\varphi(f) = \widetilde{m}_\varphi(f,0) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ \widetilde{v}(f,k), \tag{5.1.6}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_\varphi(f) &= \sum_{n\geq 0} \widetilde{m}_\varphi(f,n) \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ \widetilde{v}(f,k+n) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k)\ \Big(\sum_{n\geq k} \widetilde{v}(f,n)\Big).\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

(5.2) Théorème : *Sous les hypothèses (5.1), il existe deux réels positifs A et B tels que, pour toute fonction borélienne f sur E vérifiant $\nu(f) = 0$ et $\widetilde{M}_\varphi(f) < +\infty$, la série du potentiel vérifie*

$$\widetilde{m}_\varphi(Gf) \leq \sum_{n\geq 0} \widetilde{m}_\varphi(Q^n f) \leq A\ \widetilde{M}_\varphi(f) + B\ \|f\|_1. \tag{5.2.1}$$

En particulier, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \|Q^n f\|_1 &\leq \sum_{n\geq 0} \widetilde{v}(Q^n f, 0) \\ &\leq \varphi(0)^{-1} \sum_{n\geq 0} \widetilde{m}_\varphi(Q^n f) \leq \varphi(0)^{-1}\big(A\ \widetilde{M}_\varphi(f) + B\ \|f\|_1\big).\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du théorème (5.2).

(5.3) Lemme : *L'ensemble*

$$\mathcal{K}_1 = \{f \in L^1(E,\nu) : \nu(f) = 0 \ et \ \widetilde{m}_\varphi(f) \leq 1\}$$

est un compact de $L^1(E,\nu)$ *vérifiant*

$$\sup_{f\in\mathcal{K}_1} \|f\|_\infty \leq \big(\varphi(0)\big)^{-1}.$$

Preuve : Notons d'abord que, pour toute fonction f dans $\mathcal{K}$,

$$\|f\|_\infty \leq \widetilde{v}(f,0) \leq \big(\varphi(0)\big)^{-1}\widetilde{m}_\varphi(f) \leq \big(\varphi(0)\big)^{-1},$$

ce qui établit la deuxième assertion.

Pour tout entier $n \geq 0$, considérons un recouvrement ouvert fini

$$E = \bigcup_{1\leq j\leq q_k} B\big(x_{j,k},\eta_n\big)$$

de E extrait du recouvrement ouvert $E = \bigcup_{x\in E} B\big(x,\eta_n\big)$. Appelons $\big(\psi_{j,k}\big)_{1\leq j\leq p_k}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement ; les fonctions $\psi_{j,k}$, $k \geq 0$, $1 \leq j \leq p_k$, sont positives continues et vérifient

$$\forall x \in E,\ \sum_{j=1}^{k} \psi_{j,k}(x) = 1 \text{ et } \forall x \notin B\big(x_{j,k},\eta_k\big),\ \psi_{j,k}(x) = 0.$$

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{K}_1$. En notant que la décroissance de la suite $\big(\widetilde{v}(f_p,n)\big)_{n\geq 0}$ implique :

$$\Big(\sum_{k=0}^{n}\varphi(k)\Big)\ \widetilde{v}(f_p,n) \leq \sum_{k=0}^{n}\varphi(k)\ \widetilde{v}(f_p,k) \leq \widetilde{m}_\varphi(f_p) \leq 1,$$

nous obtenons, pour tous entiers k, n et p,

$$\begin{aligned}
\|f_{n+p}-f_n\|_1 &= \sum_{j=1}^{p_k} \int_E \psi_{j,k}\ |f_{n+p}-f_n|\ d\nu \\
&\leq \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\int_E \psi_{j,k}\ |f_{n+p}-f_{n+p}(x_{j,k})|\ d\nu + \int_E \psi_{j,k}\ |f_n - f_n(x_{j,k})|\ d\nu \\
&\qquad\qquad + \int_E \psi_{j,k}\ d\nu\ |f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})| \Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\int_E \psi_{j,k}\ \widetilde{\mathcal{V}}(f_{n+p},\cdot,k)\ d\nu + \int_E \psi_{j,k}\ \widetilde{\mathcal{V}}(f_n,\cdot,k)\ d\nu \\
&\qquad\qquad + \int_E \psi_{j,k}\ d\nu\ |f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})| \Big) \\
&\leq \widetilde{v}(f_{n+p},k) + \widetilde{v}(f_n,k) + \sum_{j=1}^{p_k} \int_E \psi_{j,k}\ d\nu\ |f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})| \\
&\leq \frac{2}{\sum_{j=0}^k \varphi(j)} + \sum_{j=1}^{p_k} \int_E \psi_{j,k}\ d\nu\ |f_{n+p}(x_{j,k}) - f_n(x_{j,k})|.
\end{aligned}$$

Si $\big(\sigma(n)\big)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers pour laquelle toutes les suites réelles $\big(f_{\sigma(n)}(x_{j,k})\big)_{n\geq 0}$, $k \geq 0, 1 \leq j \leq p_k$, convergent, alors la suite de fonctions $(f_{\sigma(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $L^1(E,\nu)$.

Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{K}_1$ est relativement compact dans $L^1(E,\nu)$. Il nous reste à montrer qu'il est fermé.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{K}_1$ convergeant dans $L^1(E,\nu)$ vers une fonction f. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge ν-p.s. vers f. D'après le théorème d'Egorov, il existe une suite croissante $(E_p)_{p\geq 0}$ de boréliens de E tels que

$$\lim_{p\to+\infty} \nu(E_p) = 1 \quad \text{et} \quad \forall p \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^\infty\left(E_p,\nu\right)} = 0.$$

Pour tout entier $p \geq 0$ et tout entier $N \geq 1$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N} \varphi(k) \int_{E_p} \|f(x) - f(\cdot)\|_{L^\infty\left(B\left(x,\eta_k\right)\cap E_p,\nu\right)}\ \nu(dx) \\
&\qquad = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \varphi(k) \int_{E_p} \|f_n(x) - f_n(\cdot)\|_{L^\infty\left(B\left(x,\eta_k\right)\cap E_p,\nu\right)}\ \nu(dx) \\
&\qquad \leq \widetilde{m}_\varphi(f_n) \leq 1.
\end{aligned}$$

En faisant croître p, puis N, vers $+\infty$, on obtient que $\widetilde{m}_\varphi(f) \leq 1$. D'où le résultat.
□

(5.4) Notations: Nous posons

$$\forall n \geq 0,\ z(n) = \sup_{s\in S} e^{v(\mathrm{Log}\ u_s, n)}\ v(\mathrm{Log}\ u_s, n); \tag{5.4.1}$$

$$\forall n \geq 0,\ t(n) = \sum_{k\geq 0} \varphi(k) z(n+k) \tag{5.4.2}$$

$$\theta = \sum_{k\geq 0} t(k) \quad \text{et} \quad \zeta = \sum_{k\geq 0} z(k). \tag{5.4.3}$$

On voit facilement l'équivalence :

$$\sum_{k\geq 0} \varphi(k) \sum_{n\geq k} z(n) \ < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{k\geq 0} \varphi(k) \sum_{n\geq k} \sup_{s\in S} v(\mathrm{Log}\ u_s, n) < +\infty.$$

(5.5) Lemme : *Pour toute fonction borélienne f sur E et tout entier $k \geq 0$, nous avons :*

$$\widetilde{v}(Qf, k) \leq \ e^{z(k)}\ \widetilde{v}(f, k+1) + z(k)\ \|f\|_1. \tag{5.5.1}$$

Preuve : Pour toute fonction borélienne f sur E et pour tout couple (x, y) de points de E vérifiant $d(x,y) \leq \eta_k$, nous avons :

$$\left|1 - \frac{u_s(y)}{u_s(x)}\right| \leq e^{|\mathrm{Log}\ \frac{u_s(x)}{u_s(y)}|} \left|\mathrm{Log}\ \frac{u_s(x)}{u_s(y)}\right| \leq e^{v(\mathrm{Log}\ u_s, k)}\ v(\mathrm{Log}\ u_s, k) \leq z(k).$$

Il s'ensuit que, pour $d(x, y) \leq \eta_k$,

$$\begin{aligned}
|Qf(x) - Qf(y)| &\leq \sum_{s\in S} |u_s(x)\ f(sx) - u_s(y)\ f(sy)| \\
&\leq \sum_{s\in S} u_s(y)\ |f(sx) - f(sy)| + \sum_{s\in S} |u_s(x) - u_s(y)|\ |f(sx)| \\
&\leq \big(1 + z(k)\big) \ \sum_{s\in S} u_s(x)\ |f(sx) - f(sy)| + z(k)\ Q|f|(x) \\
&\leq e^{z(k)} \ \sum_{s\in S} u_s(x)\ \mathcal{V}(f, sx, k+1) + z(k)\ Q|f|(x)\ ;
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5.5.1), le passage à la dernière inégalité s'obtenant par intégration par rapport à la mesure ν et en utilisant l'invariance de ν par Q.
□

(5.6) Corollaire : *Pour toute fonction borélienne f sur E et tous $k, n \in I\!N$, nous avons :*

$$\widetilde{v}(Q^n f, k) \leq e^{\sum_{\ell \geq k} z(\ell)} \Big(\widetilde{v}(f, k+n) + \sum_{j=1}^{n} z(k+j-1)\ \|Q^{n-j} f\|_1\Big),$$

$$\widetilde{m}_\varphi(Q^n f) \leq e^{\sum_{\ell \geq 0} z(\ell)} \Big(\widetilde{m}_\varphi(f, n) + \sum_{j=1}^{n} \big(\sum_{k \geq 0} \varphi(k)\ z(k+j-1)\big)\ \|Q^{n-j} f\|_1\Big).$$

Preuve : En appliquant l'inégalité (5.5.1) aux fonctions $Q^{n-1}f$, $Q^{n-2}f, \ldots, f$, on obtient :

$$\widetilde{v}(Q^n f, k) \leq e^{z(k)+\ldots+z(k+n-1)}\ \widetilde{v}(f, k+n) + \sum_{j=1}^{n} e^{z(k)+\ldots+z(k+j-2)}\ z(k+j-1)\ \|Q^{n-j} f\|_1.$$

D'où la première assertion. La seconde assertion s'en déduit aisément.

□

(5.7) Lemme : *Nous avons :*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \Big\{ \frac{\|Q^n f\|_1}{\widetilde{m}_\varphi(f)} : f \in L^1(E, \nu) \setminus \{0\}, \nu(f) = 0 \ \textit{et}\ \widetilde{m}_\varphi(f) < +\infty \Big\} = 0. \quad (5.7.1)$$

Preuve : D'après la proposition (2.7), pour toute fonction f de $C(E)$, la suite de fonctions $(Q^n f)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E vers $\nu(f)$. L'opérateur Q étant une contraction de $L^1(E, \nu)$, il en résulte par densité que, pour toute fonction f de $L^1(E, \nu)$, la suite de fonctions $(Q^n f)_{n \geq 0}$ converge vers $\nu(f)\, h$ dans $L^1(E, \nu)$.

Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $\widetilde{B}_1 = \{f \in L^1(E, \nu) : \nu(f) = 0 \text{ et } \widetilde{m}(f) \leq 1\}$ étant compact (lemme (5.3)), il existe une famille finie $\{f_1, \cdots, f_\ell\}$ de fonctions dans $L^1(E, \nu)$ d'intégrale nulle telle que, pour toute fonction $f \in \widetilde{B}_1$, on ait : $\|f - f_j\|_1 < \epsilon$, pour un $j \in \{1, \cdots, \ell\}$.

Soit n_0 tel que $\|Q^{n_0} f_k\|_1 < \epsilon$, $\forall k \in \{1, \cdots, \ell\}$. On a alors $\|Q^n f\|_1 \leq 2\epsilon$, pour tout $n \geq n_0$ et toute $f \in \widetilde{B}_1$.

□

(5.8) Proposition : *Sous les hypothèses (5.1) et avec les notations (5.1) et (5.4), il existe un entier $q \geq 1$ tel que, si les suites β et γ sont définies par :*

$$\gamma(n) = \begin{cases} \frac{e^{\zeta}}{2\theta}\, t(n-q-1), & n \geq q+1, \\ 0, & n \leq q, \end{cases}$$

$$\beta(n) = \begin{cases} e^{\zeta}\ \widetilde{m}_{\varphi}(f,n) + e^{\zeta}\ \sum_{j=n-q+1}^{n} t(j-1)\ \|f\|_1, & n \geq q+1, \\ e^{\zeta}\ \widetilde{m}_{\varphi}(f,n) + e^{\zeta}\ \sum_{j=1}^{n} t(j-1)\ \|f\|_1, & 0 \leq n \leq q, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

alors $\|\gamma\|_1 \leq \frac{1}{2}$ et, pour toute fonction $f \in L^1(E,\nu)$ vérifiant $\nu(f) = 0$ et tout entier $n \geq 0$,

$$\widetilde{m}_{\varphi}(Q^n f) \leq \sum_{p \geq 0} (\gamma^{*p} * \beta)(n). \tag{5.8.1}$$

Preuve : D'après le corollaire (5.6), nous avons :

$$\widetilde{m}_{\varphi}(Q^n f) \leq e^{\zeta} \left(\widetilde{m}_{\varphi}(f,n) + \sum_{j=1}^{n} t(j-1)\ \|Q^{n-j} f\|_1 \right).$$

D'après le lemme (5.7), il existe un entier $q \geq 1$ tel que, pour tout $g \in L^1(E,\nu)$ vérifiant $\widetilde{m}_{\varphi}(g) < \infty$ et $\nu(g) = 0$, on ait :

$$\|Q^q g\|_1 \leq \frac{1}{2e^{\zeta}} \frac{1}{\theta} \widetilde{m}_{\varphi}(g).$$

On termine la démonstration comme dans la proposition (4.5).

□

Preuve du théorème (5.2) : Le théorème (5.2) résulte de la proposition (5.8) (cf. preuve du théorème (4.2)).

□

(5.9) Introduisons les quantités analogues à celles de (4.6). Notons :

$$\widetilde{v}_1(f,k) = \sum_{\ell \geq k} \widetilde{v}(f,\ell),$$

$$\widetilde{v}_2(f,k) = \sum_{\ell \geq k} \widetilde{v}_1(f,\ell) = \sum_{\ell \geq 0} (\ell+1) \widetilde{v}(f,\ell+k).$$

Rappelons que $\widetilde{M}_{\varphi}(f) = \sum_{k \geq 0} \varphi(k)\ \widetilde{v}_1(f,k)$. Notons

$$\widetilde{M}_{\varphi,2}(f) = \sum_{k \geq 0} \varphi(k)\ \widetilde{v}_2(f,k). \tag{5.9.1}$$

Nous avons vu (théorème (5.2)) que, sous les hypothèses (5.1), il existe des constantes A et B telles que, pour toute fonction f vérifiant $\nu(f) = 0$ et $\widetilde{M}_\varphi(f) < +\infty$,

$$\widetilde{m}_\varphi(Gf) \leq \sum_{n\geq 0} \widetilde{m}_\varphi(Q^n f) \leq A\,\widetilde{M}_\varphi(f) + B\,\|f\|_\infty.$$

Nous pouvons renforcer ce résultat lorsque la condition plus forte suivante est satisfaite :

$$\sum_{k\geq 0} \varphi(k)\Big(\sum_{n\geq k}\sum_{j\geq n} \sup_{s\in S} v(\mathrm{Log} u_s, j)\Big) < +\infty. \tag{5.9.2}$$

Par une preuve semblable à celle du théorème (4.7), nous obtenons :

(5.10) Théorème : *Sous les hypothèses (5.1) et la condition (5.9.2), il existe des constantes D_i, $1 \leq i \leq 3$, telles que, pour toute fonction continue f sur E vérifiant $\nu(f) = 0$ et $\widetilde{M}_{\varphi,2}(f) < +\infty$, la série du potentiel $Gf = \sum_{n\geq 0} Q^n f$ vérifie*

$$\widetilde{M}_\varphi(Gf) \leq D_1 \widetilde{M}_{\varphi,2}(f) + D_2 \widetilde{M}_\varphi(f) + D_3\|f\|_\infty.$$

6. Application au TCL

• Cas des chaînes de Markov

(6.1) Considérons un opérateur *markovien* Q de la forme (1.1.3). Les théorèmes (4.2) et (5.2) donnent des conditions suffisantes pour qu'une fonction f soit de la forme

$$f = g - Qg. \tag{6.1.1}$$

Ces théorèmes reposent sur des hypothèses portant sur l'opérateur (plus fortes dans le théorème (5.2) que dans le théorème (4.2)) et des conditions de régularité sur f (moins fortes dans le théorème (5.2) que dans le théorème (4.2)).

Soit $\big(X_n(x,\cdot)\big)_{n\geq 0}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{Q}_x)$, la chaîne de Markov de probabilité de transition Q, partant de x. Notons $\mathbb{Q}_\nu$ la mesure de probabilité invariante pour la chaîne de Markov (X_n) construite à partir de la mesure Q-invariante ν, $\mathbb{Q}_\nu(.) = \int_E \mathbb{Q}_x(.)\, \nu(dx)$.

Si f est une fonction définie sur E, le processus $(f(X_n))_{n\geq 0}$ vérifie le théorème de la limite centrale (TCL), si, pour une constante $\sigma \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(f(X_0) + \cdots + f(X_{n-1})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),)$$

en convenant que $\mathcal{N}(0,0)$ est la probabilité de Dirac δ_0 sur $\mathbb{R}$.

La représentation (6.1.1) permet d'appliquer les méthodes de martingales (voir par exemple Hall et Heyde [5]), pour montrer un TCL pour le processus $(f(X_n))_{n\geq 0}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}_\nu$, si f est assez régulière. Cette méthode permet d'obtenir d'autres théorèmes limites renforçant le TCL, si dans la représentation (6.1.1) la fonction g est dans L^2, en particulier si elle est bornée, ce qui est le cas dans le résultat des théorèmes (4.2) et (5.2).

En renforçant les conditions sur l'opérateur Q et sur la fonction f, nous pouvons d'autre part obtenir une vitesse dans le TCL. La méthode repose sur les résultats de vitesse pour des martingales, dont un premier énoncé avait été donné par I. A. Ibragimov [8]. Nous utilisons ici un théorème dû à E. Haeusler [7], qui étend un résultat de E. Bolthausen [1] (Nous remercions Bernard Courbot pour ses remarques et en particulier la référence [7].)

Les énoncés qui suivent sont relatifs aux lois des processus sous la probabilité $\mathbb{Q}_\nu$.

(6.2) Théorème : *Plaçons-nous sous les hypothèses et les notations de (4.1). Soit f une fonction continue sur E telle que $\nu(f) = 0$.*

i) Sous la condition $M_\varphi(f) < \infty$, la suite $(f(X_n))$ vérifie le théorème de la limite centrale, le théorème de la limite centrale fonctionnel, le théorème du logarithme itéré.

ii) Si la condition de régularité (4.6.2) est vérifiée, sous la condition $M_{\varphi,2}(f) < +\infty$. la suite $(f(X_n))$ vérifie le théorème de la limite centrale avec une vitesse en $O(n^{-\delta})$, pour tout $\delta < \frac{1}{4}$.

Preuve : i) D'après le théorème (4.2), sous l'hypothèse, $M_\varphi(f) < \infty$, il existe $g = Gf$ continue telle que $f = g - Qg$. La somme $f(X_0) + \cdots + f(X_{n-1})$ s'écrit : $S_n + g(X_0) - g(X_n)$ avec

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} [g(X_{k+1}) - Qg(X_k)].$$

Le terme $g(X_0) - g(X_n)$ restant borné, l'étude de $f(X_0) + \cdots + f(X_{n-1})$ se ramène à celle de S_n. Notons $Y_k = g(X_k) - Qg(X_{k-1})$, $1 \leq k \leq n$. La suite (Y_k) est une suite d'accroissements de martingale stationnaire et ergodique par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)$ engendrée par les v.a. $(X_j, 0 \leq j \leq k)$. Posons

$$\sigma^2 = \mathbb{E}_\nu[(g(X_1) - Qg(X_0))^2] = \int_E (Q(g^2) - (Qg)^2)\, d\nu.$$

Supposons $\sigma \neq 0$. Nous avons alors, par le théorème de Billingsley-Ibragimov :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |\mathbb{Q}(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \alpha) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du| = 0.$$

Nous avons également le théorème fonctionnel et le théorème du logarithme itéré (cf. [5]).

ii) Considérons des v.a.r. $(Z_{k,n}, 1 \leq k \leq n)$ de carré intégrable formant une suite d'accroissements de martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_k)$. Soit $\delta > 0$. Notons

$$L_{n,\delta} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_\nu(Z_{k,n}^{2+2\delta}),$$

$$N_{n,\delta} = \mathbb{E}(|\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Z_{k,n}^2|\mathcal{F}_{k-1}] - 1|^{1+\delta}).$$

D'après le théorème 1 de [7], il existe une constante C_δ telle que :

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |\mathbb{Q}(Z_{1,n} + \cdots Z_{n,n} \leq \alpha) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du| \leq C_\delta(L_{n,\delta} + N_{n,\delta})^{1/(3+2\delta)}, \tag{6.2.1}$$

Appliquons ce résultat en prenant $Z_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k$, $1 \leq k \leq n$. Nous supposons que $\sigma \neq 0$ et en normalisant, nous nous ramenons au cas $\sigma = 1$. Par stationarité, nous avons $L_{n,\delta} = O(n^{-\delta})$.

Il reste à majorer le terme $N_{n,\delta}$ dans l'inégalité (6.2.1). Sous les hypothèses du théorème, le théorème (4.7) implique que g vérifie à son tour :

$$M_\varphi(g) \leq C_1 M_{\varphi,2}(f) + C_2 M_\varphi(f) + C_3\|f\|_\infty.$$

La fonction $g_2 = Q(g^2) - (Qg)^2 - 1$ satisfait donc les conditions $\nu(g_2) = 0$ et $M_\varphi(g_2) < +\infty$ du théorème (4.2). En appliquant le raisonnement du point i) à cette fonction et d'après les inégalités classiques de martingale, pour tout $p \geq 2$, il existe une constante C_p telle que

$$(\mathbb{E}_\nu[|\sum_{k=0}^{n-1} g_2(X_k)|^p])^{\frac{1}{p}} \leq C_p\|g_2\|_{L_p(\nu)} n^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci implique la majoration :

$$N_{n,\delta} = O(n^{-(\frac{1+\delta}{2})}).$$

En appliquant ce qui précède pour un choix de p assez grand, on obtient une vitesse en $O(n^{-\frac{\min(\delta,\, \frac{1+\delta}{2})}{3+2\delta}})$, d'où le résultat en choisissant δ assez grand.

□

En appliquant les théorème (5.2) et (5.10), nous obtenons de même :

(6.3) Théorème : *Plaçons-nous sous les hypothèses et les notations (5.1). Soit f une fonction telle que $\nu(f) = 0$.*

i) Sous la condition $\widetilde{M_\varphi}(f) < \infty$, la suite $(f(X_n))$ vérifie le théorème de la limite centrale, le théorème de la limite centrale fonctionnel, le théorème du logarithme itéré.

ii) Si la condition de régularité (5.9.2) est vérifiée, sous la condition $\widetilde{M_{\varphi,2}}(f) < +\infty$, la suite $(f(X_n))$ vérifie le théorème de la limite centrale avec une vitesse en $O(n^{-\delta})$, pour tout $\delta < \frac{1}{4}$.

• Cas des systèmes dynamiques

(6.4) Plaçons nous maintenant dans le cadre des systèmes dynamiques. Supposons qu'il existe une application surjective τ de E sur E laissant invariante l'unique mesure de probabilité Q-invariante ν telle que l'opérateur Q soit le dual de l'opérateur T de composition par τ ; c'est-à-dire que

$$\int_E Qf\ g\ d\nu = \int_E f\ g \circ \tau\ d\nu,\ \forall f, g \in L^2(E, \nu). \tag{6.4.1}$$

Cette situation est celle que l'on rencontre quand τ est le décalage sur un sous-shift de type fini et ν une mesure de Gibbs associée à un potentiel régulier.

Comme dans le cas des chaînes de Markov, la représentation de f sous la forme (6.1.1) permet d'appliquer les méthodes de martingales à l'étude de la suite stationnaire $(T^n f)$ (sous la mesure ν), suivant la méthode introduite par M.I. Gordin [4]. Nous avons des énoncés analogues à ceux du cas markovien.

(6.5) Théorème : *Plaçons-nous sous les hypothèses et les notations de (4.1). Soit f une fonction continue sur E telle que $\nu(f) = 0$.*

i) Sous la condition $M_\varphi(f) < \infty$, la fonction f est homologue dans le système dynamique $(E, \mathcal{E}, \nu, \tau)$ à une fonction engendrant une suite d'accroissements de martingale renversée. La suite $(T^n f)$ vérifie le théorème de la limite centrale, le théorème de la limite centrale fonctionnel, le théorème du logarithme itéré.

ii) Si la condition de régularité (4.6.2) est vérifiée et si $M_{\varphi,2}(f) < +\infty$, alors la suite $(T^n f)$ vérifie le théorème de la limite centrale avec une vitesse en $O(n^{-\delta})$, pour tout $\delta < \frac{1}{4}$.

Preuve : D'après le théorème (5.2), il existe g telle que $\widetilde{m}_\varphi(g) < \infty$ et $f = g - Qg$.

On peut alors écrire $f = g_1 + h - Th$, avec $g_1 = g - TQg$ et $h = TQg - Qg$. La fonction f est homologue à g_1. La relation $Qg_1 = 0$ montre que la suite $(T^n g_1)$ est une suite d'accroissements de martingales renversées relativement à la filtration décroissante $(\tau^{-n}\mathcal{B}(E))_{n\geq 0}$. Cette suite stationnaire et ergodique vérifie donc le théorème de la limite centrale.

La suite de la démonstration est semblable à celle du théorème (6.2).

□

(6.6) Théorème : *Plaçons-nous sous les hypothèses et les notations (5.1). Soit f une fonction f telle que $\nu(f) = 0$.*

i) Sous la condition $\widetilde{M_\varphi}(f) < \infty$, la fonction f est homologue dans le système dynamique $(E, \mathcal{E}, \nu, \tau)$ à une fonction engendrant une suite d'accroissements de martingale renversée. La suite $(T^n f)$ vérifie le théorème de la limite centrale, le théorème de la limite centrale fonctionnel, le théorème du logarithme itéré.

ii) Si la condition de régularité (5.9.2) est vérifiée, sous la condition $\widetilde{M_{\varphi,2}}(f) < +\infty$, la suite $(f(X_n))$ vérifie le théorème de la limite centrale avec une vitesse en $O(n^{-\delta})$, pour tout $\delta < \frac{1}{4}$.

7. Propriété de Borel-Cantelli pour des systèmes dynamiques

Nous nous plaçons toujours dans le cadre des systèmes dynamiques, comme en (6.4), en supposant vérifiées les hypothèses (5.1). Nous montrons maintenant une propriété du type Borel-Cantelli pour les v.a. positives sous l'action de τ. Ce type de problème, lié à des questions de théorie de nombres, a été examiné par W. Philipp [14] pour certains systèmes dynamiques et repris dans les travaux récents de D. Kleinbock et G. Margulis [10] pour des flots sur les espaces homogènes.

(7.1) Théorème : *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions boréliennes positives vérifiant*

$$\sum_{n\geq 0} \nu(f_n) = +\infty \quad et \quad \sup_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty < +\infty. \tag{7.1.1}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, posons

$$F_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} f_k \circ \tau^k}{\sum_{k=0}^{n} \nu(f_k)}. \tag{7.1.2}$$

i) Si $\sum_{n\geq 0} \sup_{p\geq 0} \widetilde{v}(f_p, n) < +\infty$, alors $\limsup_{n\to+\infty} F_n$ est, ν-p.s., une constante ≥ 1.

ii) Si $\sum_{k\geq 0} \varphi(k) \sum_{n\geq k} \sup_{s\in S} v(Log\ u_s, n) < +\infty$ et $\sum_{n\geq 0} \sup_{p\geq 0} \widetilde{m_\varphi}(f_p, n) < +\infty$, alors la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge ν-p.s. vers 1.

Démontrons d'abord deux lemmes. Nous utiliserons la version suivante du lemme de Fatou-Lebesgue pour les familles équi-intégrables.

(7.2) Lemme : *Soit* $\{g_n; n \geq 0\}$ *une famille équi-intégrable de fonctions boréliennes positives sur* E. *Alors nous avons :*

$$\int_E \limsup_{n\to+\infty} g_n \, d\nu \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_E g_n \, d\nu.$$

Preuve : On peut se placer dans le cas où $\limsup\limits_{n\to+\infty} g_n < +\infty, \nu$-p.s. La fonction $\sup_{k\geq 0} g_k$ est alors ν-p.s. finie. Pour tout réel $b > 0$, posons $A_b = \{\sup_{k\geq 0} g_k \leq b\}$. D'après le théorème de Fatou-Lebesgue, nous avons :

$$\int_{A_b} \limsup_{n\to+\infty} g_n \, d\nu \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_{A_b} g_n \, d\nu \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_E g_n \, d\nu - \limsup_{n\to+\infty} \int_{A_b^c} g_n \, d\nu.$$

Or la famille $\{g_n : n \geq 0\}$ étant équi-intégrable, nous avons

$$\lim_{b\to+\infty} \sup_{n\geq 0} \int_{A_b^c} g_n \, d\nu = 0,$$

ce qui implique le résultat.

□

(7.3) Lemme : *Soient* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions boréliennes positives vérifiant (7.1.1) et* $(F_n)_{n\geq 0}$ *définie par (7.1.2).*

i) Alors la fonction $\limsup\limits_{n\to+\infty} F_n$ *est* ν*-p.s. constante.*

ii) Si la famille $\{F_n : n \geq 0\}$ *est équi-intégrable, alors* $\limsup\limits_{n\to+\infty} F_n \geq 1$.

iii) S'il existe un réel $C > 0$ *tel que*

$$\int_E (F_n - 1)^2 \, d\nu \leq \frac{C}{\sum_{k=0}^n \nu(f_k)}, \tag{7.3.1}$$

alors la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 0}$ *converge* ν*-p.s. vers 1.*

Preuve : 1) Pour tout entier $p \geq 0$, posons :

$$h_p = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^n f_{k+p} \circ \tau^k}{\sum_{k=0}^n \nu(f_k)}.$$

Nous avons, pour tout entier $p \geq 0$, $h_{p+1} \circ \tau = h_p$, soit encore $h_0 = h_p \circ \tau^p$, $p \geq 0$. Les fonctions $h_p, p \geq 0$, sont donc mesurables par rapport à la tribu "asymptotique" $\mathcal{A} = \bigcap_{n\geq 0} \tau^{-n}(\mathcal{B}(E))$.

Pour prouver la première assertion du lemme, nous montrons que la tribu $\mathcal{A}$ est ν-p.s. grossière (autrement dit le système $(E, \mathcal{B}, \nu, T)$ est exact au sens de Rokhlin).

Soit $A \in \mathcal{A}$; pour tout entier $n \geq 1$, il existe $A_n \in \mathcal{A}$ tel que $A = \tau^{-n}(A_n)$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$, nous avons alors :

$$\nu(A \cap B) = \nu(\tau^{-n}(A_n) \cap B) = \int_E Q^n 1_B \, 1_{A_n} \, d\nu, \; n \geq 1.$$

Comme la suite $(Q^n 1_B)_{n \geq 0}$ converge vers $\nu(B)$ dans $L^1(E, \nu)$ et que $\nu(A_n) = \nu(A), \forall n \geq 1$, on en déduit que $\nu(A \cap B) = \nu(A)\ \nu(B)$. D'où le résultat.

2) L'assertion *ii*) résulte du lemme (7.2).

3) Nous utilisons un argument classique. Les fonctions (f_n) étant uniformément bornées, nous pouvons supposer que $\|f_n\|_\infty \leq 1$.

Définissons une suite ψ par

$$\psi(n) = \inf\{\ell : \sum_0^\ell \nu(f_k) \geq n^2\}, n \leq 1.$$

La condition $\|f_n\|_\infty \leq 1$ assure que $n^2 \leq \sum_{k=0}^{\psi(n)} \nu(f_k) \leq (n+1)^2$, $n \leq 1$.

D'après la condition (7.3.1), la sous-suite $(F_{\psi(n)})$ converge ν-p.s. vers 1, car

$$\sum_{n \geq 1} \int_E |F_{\psi(n)} - 1|^2 \, d\nu \leq \sum_{n \geq 1} \frac{C}{n^2} < +\infty.$$

Soit $n \in I\!N$. Soit $m = m_n$ tel que $\psi(m) \leq n \leq \psi(m+1)$. Nous avons l'encadrement :

$$(\frac{m}{m+2})^2 F_{\psi(m)} \leq F_n \leq F_{\psi(m+1)} \frac{\sum_{k=0}^{\psi(m+1)} \nu(f_k)}{\sum_{k=0}^{\psi(m)} \nu(f_k)} \leq (\frac{m+2}{m})^2 F_{\psi(m+1)},$$

qui implique la convergence de la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ ν-p.s. vers 1.
□

Notons qu'un résultat plus précis (de vitesse) peut être établi grâce à la méthode de Philipp [14].

(7.4) *Preuve du théorème (7.1) :*

i) D'après le lemme (7.3), il suffit de montrer que la famille $\{F_n \ : n \geq 0\}$ est équi-intégrable.

En utilisant le corollaire (5.6) et en notant

$$\zeta = \sum_{n \geq 0} z(n) \quad \text{et} \quad \gamma = \sum_{n \geq 0} \sup_{p \geq 0} \widetilde{v}(f_p, n),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{n=0}^{N} \nu(f_n)\Big)^2 \int_E F_N^2 \, d\nu &= 2 \sum_{0 \leq k < n \leq N} \int_E f_n \circ \tau^n \ f_k \circ \tau^k \, d\nu + \sum_{0 \leq n \leq N} \int_E f_n^2 \, d\nu \\
&\leq 2 \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} \int_E f_n \ Q^{n-k} f_k \, d\nu \\
&\leq 2 \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} \|Q^{n-k} f_k\|_\infty \ \nu(f_n) \\
&\leq 2 \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} \widetilde{v}(Q^{n-k} f_k, 0) \ \nu(f_n) \\
&\leq 2 \, e^\zeta \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} \Big(\widetilde{v}(f_k, n-k) \ \nu(f_n) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-k} z(j-1) \ \nu(f_k) \ \nu(f_n)\Big) \\
&\leq 2 \, e^\zeta \Big(\gamma \sum_{n=0}^{N} \nu(f_n) + \zeta \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} \nu(f_k) \ \nu(f_n)\Big)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sup_{n \geq 0} \int_E F_n^2 \ d\nu < +\infty$; d'où l'équi-intégrabilité de la famille $\{F_n \ : n \geq 0\}$.

ii) D'après le lemme (7.3), il suffit de montrer qu'il existe un réel positif C_1 tel que

$$\int_E (F_n - 1)^2 \ d\nu \leq \frac{C_1}{\sum_{k=0}^{n} \nu(f_k)}.$$

Remarquons d'abord que, d'après la proposition (5.8) et les hypothèses, nous avons, pour tout $k \geq 0$:

$$\widetilde{m}_\varphi(Q^n f_k) \leq \sum_{p \geq 0} (\gamma^{*p} * \beta)(n),$$

avec $\widetilde{\beta}$ défini par :

$$\beta(n) = \begin{cases} e^{\zeta}\ \sup_{k\geq 0} \widetilde{m}_{\varphi}(f_k, n) + e^{\zeta}\ \sum_{j=n-q+1}^{n} t(j-1)\ \sup_{||} f_k\|_1, & n \geq q+1, \\ e^{\zeta}\ \sup_{k\geq 0} \widetilde{m}_{\varphi}(f_k, n) + e^{\zeta}\ \sum_{j=1}^{n} t(j-1)\ \sup_{k\geq 0} \|f_k\|_1, & 0 \leq n \leq q, \\ 0, & n < 0, \end{cases},$$

d'où :

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{k\geq 0} \widetilde{m}_{\varphi}(Q^n f_k) \leq 2e^{\zeta}\big(\sum_{n\geq 0} \sup_{k\geq 0} \widetilde{m}_{\varphi}(f_k, n) + q\theta \sup_{k\geq 0} \|f_k\|_1 < +\infty.$$

Cela dit, nous avons, en posant $g_k = f_k - \nu(f_k), \forall k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=0}^{n} \nu(f_k)\Big)^2 \int_E (F_n - 1)^2\, d\nu &\leq 2 \sum_{0\leq k\leq \ell\leq n} \widetilde{v}(Q^{\ell-k} g_k, 0)\ \nu(|g_\ell|) \\ &\leq 4\varphi(0)^{-1} \sum_{0\leq k\leq \ell\leq n} \widetilde{m}_{\varphi}(Q^{\ell-k} f_k)\ \nu(f_\ell) \\ &\leq 4\varphi(0)^{-1} \sum_{0\leq k\leq \ell\leq n} \sup_{p\geq 0}\ \widetilde{m}_{\varphi}(Q^{\ell-k} f_p)\ \nu(f_\ell) \\ &\leq 4\varphi(0)^{-1}\ \big(\sum_{\ell\geq 0} \sup_{p\geq 0}\ \widetilde{m}_{\varphi}(Q^{\ell} f_p)\big)\ \big(\sum_{\ell=0}^{n} \nu(f_\ell)\big).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

• Exemples

Exemple 1

(7.5) Nous traitons un premier exemple simple dans lequel la transformation est $\tau\ :\ x \to qx$ mod 1. La méthode peut être étendue à une classe plus large de transformations dilatantes de l'intervalle.

Soient $E = [0,1]$, q un entier ≥ 2 et $S = \{s_0, \dots, s_{q-1}\}$ la famille de transformations de E définies par :

$$\forall 0 \leq k \leq q-1,\ s_k x = \frac{x+k}{q}.$$

Nous prenons $\eta_n = q^{-n}$. Pour chaque $s \in S$, nous avons :

$$|x-y| \leq q^{-n} \Longrightarrow |sx - sy| \leq q^{-(n+1)}.$$

Soit u une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, vérifiant

$$\forall x \in E,\ \sum_{s\in S} u(sx) = 1 \text{ et } \sum_{n\geq 0} v(\text{Log } u, n) \leq +\infty.$$

Nous considérons l'opérateur de transition Q défini par :

$$Qf(x) = \sum_{s\in S} u(sx)f(sx)$$

et nous notons ν l'unique mesure de probabilité Q-invariante sur les boréliens de E. Si l'on choisit $u(x) = \frac{1}{q}, \forall x \in E$, on obtient pour ν la mesure de Lebesgue de E.

(7.6) Lemme : *La mesure ν vérifie la propriété d'homogénéité suivante : il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda \in]0,1[$ telles que $\forall y \in E$, $\nu(]y - q^{-r}, y + q^{-r}[) \leq C\lambda^r$.*

Preuve : Il suffit d'établir une majoration de cette forme pour les intervalles q-adiques $J_{\ell,q} =]\ell q^{-r}, (\ell+1)q^{-r}[$, avec $0 \leq \ell < q^r$.

Soit $\ell = \sum_{0\leq k<\ell} a_k q^k$ l'écriture de ℓ en base q. Pour tout $k \geq 1$, notons t_k la transformation de E définie par $x \in E \longrightarrow \frac{x+a_k}{q}$.

Soient $x \in [0,1[$, $s_1, \ldots, s_n$ des éléments de S et r un entier naturel, $r \leq n$. Le réel $s_1 \cdots s_n x$ appartient à l'intervalle $J_{\ell,q}$ si, et seulement si, $(s_1, \ldots, s_r) = (t_1, \ldots, t_r)$. Pour tous $x \in [0,1[$ et tous entiers naturels n et r vérifiant $n \geq r$, nous avons alors :

$$Q^n(x,]y - q^{-r}, y + q^r[) \leq \sup_{z\in E} u(t_1 \cdots t_r z) \cdots u(t_r z)$$

et par suite

$$\nu(]y - q^{-r}, y + q^r[) \leq \sup_{z\in E} u(t_1 \cdots t_r z) \cdots u(t_r z) \leq \big(\sup_{x\in E} u(x)\big)^r.$$

□

Dans la suite, nous noterons $VB(f)$ la variation sur l'intervalle $[0,1]$ d'une fonction f à variation bornée.

(7.7) Théorème : *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives, à variation bornée sur $[0,1]$, vérifiant $\sup_{n\geq 0}\|f_n\|_\infty < +\infty$, $\sup_{n\geq 0} VB(f_n) < +\infty$, et $\sum_{n\geq 0}\nu(f_n) = +\infty$.*

Pour tout entier $n \geq 0$, posons

$$F_n = \frac{\sum_{k=0}^n f_k \circ \tau^k}{\sum_{k=0}^n \nu(f_k)}.$$

Alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} F_n$ est, ν-p.s., une constante ≥ 1.

Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}\sum_{k\geq n} v(\mathrm{Log}\ u, n) < +\infty$, alors la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge ν-p.s. vers 1.

Preuve : En nous ramenant au cas de fonctions croissantes, nous pouvons supposer que, pour tout $p \geq 0$, $f_p(x) = \mu_p([0,x[)$, $\forall x \in E$, où μ_p est une mesure positive sur les boréliens de $[0,1]$, avec $\mu_p([0,1]) = VB(f_p)$.

D'après le théorème (7.1), il suffit de vérifier, pour la première assertion, que :

$$\sum_{n\geq 0}\sup_{p\geq 0}\widetilde{v}(f_p,n) < +\infty$$

et pour la deuxième assertion que :

$$\sum_{n\geq 0}\sup_{p\geq 0}\widetilde{m}_\varphi(f_p,n) < +\infty,$$

avec $\varphi(k) = \frac{1}{k}$ (ou toute suite φ à valeurs > 0 telle que $\sum_{k\geq 0}\varphi(k) = +\infty$ et $\sum_{k\geq 0}\lambda^k\varphi(k) < +\infty$).

Nous avons, en utilisant le lemme (7.6), pour tous entiers naturels p et n :

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}(f_p,n) &\leq \int_0^1 \mu_p(]x-q^{-n},x+q^{-n}[)\ d\nu(x)\\
&\leq \int_0^1 \nu(]y-q^{-n},y+q^{-n}[)\ d\mu_p(y)\\
&\leq \sup_{y\in E}\nu(]y-q^{-n},y+q^{-n}[)VB(f_p)\\
&\leq \lambda^n VB(f_p).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Exemple 2

(7.8) Considérons maintenant le cas d'une mesure de Gibbs sur un espace produit $E = I^{\mathbb{N}}$, où $I = (a_0, \cdots, a_{q-1})$ est un alphabet fini de cardinal $q \geq 2$, sur lequel opère le décalage $\tau : x = (x_0, x_1, \cdots) \to \tau x = (x_1, x_2, \cdots)$. Nous traiterons le cas du décalage sur l'espace E (full shift). Le principe de la preuve s'étend facilement au cas des sous-décalages de type fini.

La famille de transformations S est ici en bijection avec l'alphabet I, la transformation $x \to sx$ consistant à placer le symbole s devant la suite x. Nous prenons $\eta_n = q^{-n}$.

Soit u une fonction continue sur E, à valeurs strictement positives, vérifiant la condition

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq n} v(\text{Log } u, n) \leq +\infty, \tag{7.8.1}$$

et Q_u l'opérateur défini par

$$Q_u f(x) = \sum_{s \in S} u(sx) f(sx).$$

Si ρ est la valeur propre dominante de Q_u et h la fonction propre correspondante (cf. la section 9), nous posons

$$w = \rho^{-1} \frac{h}{h \circ \tau} u.$$

On vérifie que w satisfait la condition de régularité :

$$\sum_{n \geq 0} v(\text{Log } w, n) \leq +\infty.$$

Soit Q l'opérateur markovien "relativisé" défini par :

$$Qf(x) = \sum_{s \in S} w(sx) f(sx).$$

Notons ν l'unique mesure de probabilité Q-invariante sur les boréliens de E (mesure de Gibbs associée à la fonction u). Comme dans l'exemple 2, la stricte positivité de u implique :

(7.9) Lemme : *La mesure ν vérifie la propriété d'homogénéité suivante : il existe $\lambda \in]0,1[$ telle que, pour tout cylindre C_r d'ordre r, $\nu(C_r) \leq \lambda^r$, avec $0 < \lambda < 1$.*

Nous devons maintenant définir, sur l'espace symbolique, une notion de fonction à variation bornée. Munissons E d'un **ordre lexicographique**. Pour tout entier $r \geq 1$, notons $\mathcal{E}(r)$ l'ensemble, muni également de l'ordre lexicographique, des cylindres élémentaires d'ordre r. Soit enfin $\mathcal{B}(r)$ l'algèbre des ensembles A réunions de cylindres élémentaires d'ordre r. L'ordre lexicographique définit de façon naturelle un bord pour $A \in \mathcal{B}(r)$, noté ∂A : c'est l'ensemble des cylindres C dans $\mathcal{E}(r)$ formant A, dont le prédécesseur ou le sucesseur n'est pas dans A.

On appelle "intervalle" d'ordre r tout ensemble de $\mathcal{R}(r)$ de la forme

$$A = \{C \in \mathcal{E}(r) : C_A^- \leq C \leq C_A^+\},$$

où C_A^- et C_A^+ sont deux cylindres élémentaires d'ordre r tels que $C_A^- \leq C_A^+$. Le bord de A est $\partial A = C_A^- \cup C_A^+$.

Si g est une fonction dans $\mathcal{L}$, le sous-espace des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, sa variation est définie par

$$VB(g) = \inf\{\sum_j |\alpha_j| : g = \sum_j \alpha_j 1_{A_j} + c\},$$

où, pour r décrivant $\mathbb{N}$, $\sum_j \alpha_j 1_{A_j}$ décrit les représentations de g comme combinaison linéaire d'indicatrices d'intervalles A_j dans $\mathcal{B}(r)$ et c décrit $\mathbb{R}$.

La variation d'une fonction f quelconque est définie par

$$VB(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf(VB(g) : g \in \mathcal{L}, \|f - g\|_\infty < \epsilon\}.$$

Le fonctions à variation bornée sont alors les fonctions f telles que $VB(f) < \infty$.

Via un codage q-adique, toute fonction continue à variation bornée sur $[0,1]$ donne une fonction à variation bornée au sens précédent (pour l'ordre lexicographique "naturel").

Un espace plus large, dépendant de la mesure ν, est obtenu en considérant la quantité :

$$VB(f, \nu) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf(VB(g) : g \in \mathcal{L}, \|f - g\|_{L^1(\nu)} < \epsilon\}.$$

Via le codage, les indicatrices d'intervalles appartiennent à cet espace.

(7.10) Théorème : *Supposons vérifiée la condition (7.8.1). Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions positives vérifiant* $\sup_{n\geq 0} VB(f_n,\nu) < +\infty$, $\sup_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty < +\infty$ *et* $\sum_{n\geq 0} \nu(f_n) = +\infty$.

Pour tout entier $n \geq 0$, *posons*

$$F_n = \frac{\sum_{k=0}^n f_k \circ \tau^k}{\sum_{k=0}^n \nu(f_k)}.$$

Alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} F_n$ *est,* ν*-p.s., une constante* ≥ 1.

Si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} \sum_{k\geq n} k\, v(\mathrm{Log}\ u, k) < +\infty$, *alors la suite* $(F_n)_{n\geq 0}$ *converge* ν*-p.s. vers 1.*

Preuve : Comme dans l'exemple précédent, il suffit de vérifier, d'après le théorème (7.1), pour la première assertion, que :

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{p\geq 0} \widetilde{v}(f_p, n) < +\infty$$

et pour la deuxième assertion que :

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{p\geq 0} \widetilde{m}_\varphi(f_p, n) < +\infty,$$

avec $\varphi(k) = \frac{1}{k}$ (ou toute suite φ à valeurs > 0 telle que $\sum_{k\geq 0} \varphi(k) = +\infty$ et $\sum_{k\geq 0} \lambda^k \varphi(k) < +\infty$).

Pour cela, nous allons établir, comme dans le théorème (7.7) une majoration de la forme :

$$\widetilde{v}(f,\nu) \leq 2\lambda^n VB(f,\nu).$$

Soit d'abord g une fonction dans l'espace $\mathcal{L}$. A une constante près, g s'écrit, pour un entier r, sous la forme $g = \sum_j \alpha_j 1_{A_j}$, où les ensembles A_j sont des intervalles d'ordre r et $\sum_j |\alpha_j| = VB(g)$.

Nous avons alors, pour $n < r$,

$$\sup_{y:d(y,x)<2^{-n}} |g(y) - g(x)| \leq \sum_j |\alpha_j| \nu(\Pi_n(\partial A_j)),$$

où $\Pi_n(\partial A_j)$ est formé des deux cylindres d'ordre n, projection à l'ordre n des cylindres formant le bord de A. Il en résulte, d'après le lemme (7.9) :

$$\widetilde{v}(g,n) \leq 2VB(g)\lambda^n.$$

Soit maintenant $(g_i)_{i\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}$ convergeant dans $L^1(E,\nu)$ vers f. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite $(g_i)_{i\geq 0}$ converge ν-p.s. vers f. D'après le théorème d'Egorov, il existe une suite croissante $(E_p)_{p\geq 0}$ de boréliens de E tels que

$$\lim_{p\to+\infty}\nu(E_p)=1 \quad \text{et} \quad \forall p\geq 0, \lim_{i\to+\infty}\|g_i-f\|_{L^\infty\left(E_p,\nu\right)}=0.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
&\int_{E_p}\|f(x)-f(\cdot)\|_{L^\infty\left(B\left(x,\eta_n\right)\cap E_p,\nu\right)}\nu(dx)\\
&=\lim_{i\to+\infty}\int_{E_p}\|g_i(x)-g_i(\cdot)\|_{L^\infty\left(B\left(x,\eta_n\right)\cap E_p,\nu\right)}\nu(dx)\\
&\leq \limsup_i \widetilde{v}(g_i,n)\leq \limsup_i 2VB(g_i)\lambda^n\\
&\leq 2VB(f,\nu)\lambda^n.
\end{aligned}$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient :

$$\widetilde{v}(f,n)\leq 2VB(f,\nu)\lambda^n.$$

□

8. Une équation de cobord multiplicative : $e^{itF}g=Tg$

(8.1) Nous nous plaçons encore dans le cadre des systèmes dynamiques. comme en (6.4) : il existe une application surjective τ de E sur E laissant une mesure de probabilité Q-invariante ν telle que l'opérateur Q soit le dual de l'opérateur T de composition par τ. Nous supposons que le système dynamique (E,ν,τ) est **ergodique** (par contre, il n'est pas nécessaire de supposer qu'il y a unicité de la mesure Q-invariante).

Nous supposons d'autre part vérifiée l'hypothèse de régularité (2.1.1).

Etant donnée une fonction F régulière, considérons, pour t réel, l'équation de cobord multiplicative en g_t, dans laquelle g_t est mesurable et l'égalité a lieu ν-presque partout :

$$e^{itF}g_t=g_t\circ\tau, \tag{8.1.1}$$

Cette équation apparaît dans plusieurs questions de théorie ergodique, notamment dans l'étude de l'ergodicité d'extensions de systèmes dynamiques et dans la construction de "sous-suites universelles" pour les théorèmes ergodiques engendrées par des sytèmes dynamiques (voir [12]).

Introduisons l'opérateur Q_t défini par :

$$Q_t f(x) = \sum_s u_s(x) \exp(itF(sx)) f(sx). \tag{8.1.2}$$

Cet opérateur est l'opérateur dual, vis à vis de la mesure ν, de l'opérateur $T_t : f \to e^{-itF} \ f \circ \tau$ Une solution g_t de (8.1.1) est une fonction invariante par T_t, donc aussi par l'opérateur Q_t :

$$Q_t g_t = g_t. \tag{8.1.3}$$

Les solutions de (8.1.1) sont déterminées à une constante multiplicative près et sont de module constant. L'ensemble Γ des réels t tels que (8.1.1) ait une solution mesurable g non nulle presque partout (que l'on peut alors supposer presque partout de module égal à 1) forme un sous-groupe.

Dans le cas de régularité höldérienne, les propriétés spectrales de l'opérateur Q, et en particulier le théorème de perturbation, permettent de montrer que ce sous-groupe Γ est discret, si F n'est pas un cobord additif. La méthode employée ici permet de traiter une situation moins régulière.

(8.2) Théorème : *Si F vérifie la condition de régularité $\sum_{n \geq 0} v(F, n) < +\infty$, alors*
- ou bien F est un cobord additif, $F = G - G \circ \tau$, avec G continue,
- ou bien le sous-groupe des réels t tel que l'équation de cobord multiplicative (8.1.1) possède une solution g mesurable non presque partout nulle est discret.

Preuve : La proposition (2.10) montre que, pour chaque t, les itérés de l'opérateur Q_t vérifient la propriété d'équicontinuité suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour toute fonction f continue sur E, la famille $\{Q_t^n f, n \geq 0\}$ est équicontinue.

Il en résulte que, pour chaque valeur de t,
ou bien les moyennes $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} Q_t^k f$ tendent uniformément vers 0,
ou bien il existe des valeurs d'adhérence uniforme non nulle.

Si g_t est une solution de (8.1.1), l'intégrale

$$\int \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} Q_t^k f \ \overline{g_t} \ d\nu$$

ne dépend pas de n. La première situation (convergence des moyennes vers 0) ne peut donc pas se produire pour tout $f \in \mathcal{C}(E)$, quand t appartient à Γ.

Nous avons ainsi montré que pour $t \in \Gamma$, il existe une solution qui coïncide ν-presque partout (à une constante multiplicative près) avec la solution initiale de l'équation (8.1.1) et qui est continue. Nous avons ainsi montré que g_t est continue.

En utilisant le lemme (1.3), nous pouvons recouvrir E par un nombre fini de boules B_j de centre x_j telles que tout point $x \in B_j$ ait “une trajectoire commune” $(...\sigma_n\sigma_{n-1}...\sigma_1)$ avec x_j. Nous pouvons alors écrire, pour $x \in B_j$ et pour une suite (σ_n) dans S :

$$g_t(x) = g_t(\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1 x)e^{it\sum_{n\geq 1} F(\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1 x)},$$
$$g_t(x_j) = g_t(\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1 x_j)e^{it\sum_{n\geq 1} F(\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1 x_j)};$$

d'où :

$$g_t(x) = g_t(x_j)e^{it\sum_{n\geq 1} F(\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1 x)-F(\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1 x_j)}.$$

Si $(t_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans Γ tendant vers une limite t_0, on peut extraire une sous-suite $(\psi(n)$ telle que les suites $(g_{t_{\psi(n)}}(x_j))$ convergent pour tout j. La relation précédente montre alors la convergence uniforme de $(g_{t_{\psi(n)}})$ vers une limite, qui est de module 1 et solution de (8.1.1) pour la valeur t_0. Ceci implique que Γ est fermé.

Si Γ n'est pas discret, nous avons nécessairement $\Gamma = \mathbb{R}$. Supposons que ce soit le cas. On peut montrer, dans le cadre général d'un système dynamique ergodique que ceci implique que F est un cobord additif : il existe une fonction mesurable G telle que $F = G - G \circ \tau$. Dans la situation traitée ici, la continuité en t permet de construire explicitement G et d'obtenir sa régularité.

Nous savons que $\lim_{t\to 0} \|g_t - 1\|_\infty = 0$. Soit $\delta > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $|\int_0^\alpha g_t(x)\ dt| > \alpha\delta$. La fonction G recherchée peut être définie par

$$G(x) = -i\frac{g_\alpha(x) - 1}{\int_0^\alpha g_t(x)\ dt},$$

ce qui montre sa régularité.

□

9. Fonction propre pour un opérateur de transfert

Nous revenons au cas d'un opérateur Q de la forme (1.1.3), non nécessairement markovien ou à puissances bornées et nous rappelons comment on peut montrer l'existence d'une fonction propre strictement positive, ce qui permet de se ramener au cas d'un opérateur à puissances bornées.

(9.1) Hypothèses : Nous supposerons, comme en 5.1, que les fonctions u_s, $s \in S$, sont *strictement positives* et vérifient la condition

$$\sum_{k \geq 0} \sup_{s \in S} v(\operatorname{Log} u_s, k) < +\infty. \tag{9.1.1}$$

Rappelons l'argument de cône invariant à base compacte (cf. P. Walters [18]).

(9.2) Proposition :*Sous les hypothèses (9.1), l'opérateur Q possède une fonction propre h strictement positive vérifiant :*

$$\forall k \geq 0,\ d(x,y) \leq \eta_k \Rightarrow \frac{h(y)}{h(x)} \leq e^{\sum_{n \geq k} \sup_{s \in S} v(\operatorname{Log} u_s, n)}.$$

Preuve : Pour tout entier $k \geq 0$, posons $\varepsilon_k = \sum_{n \geq k} \sup_{s \in S} v(\operatorname{Log} u_s, n)$. Considérons le cône $\mathcal{C}$ constitué des fonctions g continues strictement positives et telles que

$$\forall k \geq 0,\ d(x,y) \leq \eta_k \Rightarrow \frac{g(y)}{g(x)} \leq e^{\varepsilon_k}.$$

Pour $x_0 \in E$, la section $\mathcal{C} \cap \{g : g(x_0) = 1\}$ est un ensemble équicontinu et borné de fonctions continues. Le cône $\mathcal{C}$ est donc à base compacte.

Il est d'autre part invariant par l'opérateur Q. En effet, pour tous $x, y \in E$ vérifiant $d(x,y) \leq \eta_k$, nous avons :

$$\begin{aligned} Qg(y) &= \sum_{s \in S} u_s(y)\ g(sy) = \sum_{s \in S} \frac{u_s(y)}{u_s(x)}\ \frac{g(sy)}{g(sx)}\ u_s(x)\ g(sx) \\ &\leq \sum_{s \in S} e^{\sup_{s \in S}\ v(\log u_s, k)}\ e^{\varepsilon_{k+1}}\ u_s(x)\ g(sx) = e^{\varepsilon_k}\ Qg(x). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Schauder-Tychonov, l'opérateur Q laisse invariante une demi-droite du cône $\mathcal{C}$. On en déduit l'existence d'une fonction propre h continue et strictement positive dans le cône $\mathcal{C}$.

□

Nous avons $Qh = \lambda\ h$, avec $\lambda > 0$. L'opérateur de transfert $\lambda^{-1}Q$ est à puissances bornées. En effet, nous avons :

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in E,\ (\lambda^{-1}Q)^n 1(x) \leq \frac{h(x)}{\min h}.$$

De plus $\lambda^{-1}Q$ vérifie les hypothèses de (4.1). D'où :

(9.3) Théorème : *Si Q est un opérateur de transfert tel que les fonctions u_s, $s \in S$, soient strictement positives et que la série* $\sum_{k \geq 0} \sup_{s \in S} v(\operatorname{Log} u_s, k)$ *soit convergente, il existe un réel $\lambda > 0$, une fonction continue h strictement positive $\lambda^{-1}Q$-invariante et une mesure de probabilité $\lambda^{-1}Q$-invariante ν sur les boréliens de E tels que :*

1) Pour toute fonction f de $C(E)$, la suite de fonctions $(\lambda^{-n}\ Q^n f)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur E vers $h\ \nu(f)$.

2) Si $\sum_{k \geq 0} \varphi(k)$ est une série réelle positive divergente telle que

$$\sum_{k \geq 0} \varphi(k) \sum_{n \geq k} \sup_{s \in S} v(\operatorname{Log} u_s, n) < \infty,$$

alors, pour toute fonction continue f sur E vérifiant $\sum_{k \geq 0} \varphi(k) \ \sum_{n \geq k} v(f, n) < +\infty$ et $\nu(f) = 0$, le potentiel $Gf = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n}\ Q^n f$ est une fonction continue sur E vérifiant $m_\varphi(Gf) < +\infty$.

En particulier, nous avons $\sum_{k \geq 0} \lambda^{-n} \|Q^n f\|_\infty < +\infty$.

10. Complément : passage des itérés dans une suite d'ensembles

Les résultats de la section 7 conduisent à poser la question suivante :

Etant donnés un système dynamique $(X, \mathcal{A}, \tau, \mu)$ et une suite (B_n) d'ensembles dans $\mathcal{A}$, a-t-on divergence, pour μ-presque tout x de la série $\sum_n 1_{B_n}(\tau^n x)$?

Nous avons vu qu'un "lemme de Borel-Cantelli" peut être montré, sous des conditions sur le système dynamique, pour certaines suites de fonctions positives. Ce résultat peut être appliqué à des suites d'ensembles réguliers. Dans cet appendice, nous donnons quelques résultats généraux simples dans le cas où les ensembles B_n appartiennent à une famille **finie** d'ensembles quelconques de mesure > 0.

(10.1) Proposition : *Le système $(X, \mathcal{A}, \tau, \mu)$ est à spectre continu si et seulement si, pour toute famille finie $(A_1, \cdots, A_R)$ d'ensembles de mesure > 0 et pour toute suite (B_n) à valeurs dans $(A_1, \cdots, A_R)$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1_{B_k}(\tau^k x) = +\infty, \ \mu - p.p.. \tag{10.1.1}$$

Preuve : Soit $C = \{\sum_{k=0}^{\infty} 1_{B_k}(\tau^k x) < \infty\}$. Il est clair que :

$$\lim_N \frac{1}{N} \langle \sum_{k=0}^{N-1} 1_{B_k} \circ \tau^k, 1_C \rangle = 0.$$

La majoration $\prod_{r=1}^{R} \langle 1_{A_r} \circ \tau^k, 1_C \rangle \leq \langle 1_{B_k} \circ \tau^k, 1_C \rangle$ implique :

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{r=1}^{R} \langle 1_{A_r} \circ \tau^k, 1_C \rangle = 0.$$

Si $(X, \mathcal{A}, \tau, \mu)$ est à spectre continu, le produit de R-copies de ce système par lui-même est ergodique et on a donc :

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{r=1}^{R} \langle 1_{A_r} \circ \tau^k, 1_C \rangle = \prod_{r=1}^{R} \mu(A_r)\, \mu(C)^R = 0;$$

d'où : $\mu(C) = 0$.

2) Inversement, si le système n'est pas à spectre continu, il possède un facteur qui est une rotation sur le cercle d'angle α. On peut alors raisonner sur ce facteur et choisir des intervalles I_0, I_1 et J tels que les images de I_0 et I_1 par une rotation quelconque sur le cercle ne recoupent pas simultanément J.

Pour toute suite (B_n) à valeurs dans $\{I_0, I_1\}$ telle que les ensembles $B_n - n\alpha$ mod 1 soient disjoints de J pour tout n, la condition (10.1.1) n'est pas réalisée.

□

(10.2) En fait, nous allons démontrer un résultat plus fort : une loi des grands nombres le long d'une sous-suite. Introduisons d'abord quelques notations.

Notons $L_0^1(\mu)$ (resp. $L_0^2(\mu)$) le sous-espace de $L^1(\mu)$ (resp. $L^2(\mu)$) des fonctions d'intégrale nulle, $L_0^1(\mu) \times \cdots \times L_0^1(\mu)$ l'espace des R-uples de fonctions appartenant à $L_0^1(\mu)$. Pour toute fonction f sur X, la composée $f \circ \tau$ est notée Tf.

Si f est dans $L^1(\mu)$, nous notons f^* sa fonction maximale dans le théorème ergodique, i.e. :

$$f^*(x) = \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\tau^j x) \right|.$$

Soit $(E_r, 1 \leq r \leq R)$ une partition finie de $\mathbb{N}$.

Etant donné un R-uple $\Phi = (f_1, \cdots, f_R)$ posons, pour $N \geq 1$,

$$M_N(\Phi)(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{1 \leq r \leq R} 1_{E_r}(j) f_r(\tau^j x).$$

Nous avons alors

$$\sup_{N \geq 1} |M_N(\Phi)| \leq \Big(\sum_{1 \leq r \leq R} |f_r| \Big)^*$$

et donc, par le lemme maximal, la majoration :

$$\mu\{x : \sup_{N\geq 1} |M_N(\Phi)(x)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}\sum_r \|f_r\|_1. \tag{10.2.1}$$

(10.3) Proposition : *Si $(X, \mathcal{A}, \tau, \mu)$ est à spectre de Lebesgue, pour tout choix du R-uple $(f_1, \cdots, f_R)$ dans $L^1(\mu) \times \cdots \times L^1(\mu)$, nous avons*

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=1}^{R} 1_{E_r}(j) f_r(\tau^j x) - \sum_{r=1}^{R}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} 1_{E_r}(j)\Big)\mu(f_r) \to 0, \ \mu - p.p.. \tag{10.3.1}$$

Si le système est seulement à spectre continu, il existe une suite strictement croissante d'entiers (N_ℓ) telle que, pour tout choix du R-uple $(f_1, \cdots, f_R)$ dans $L^1(\mu) \times \cdots \times L^1(\mu)$, on ait :

$$\frac{1}{N_\ell}\sum_{j=0}^{N_\ell-1}\sum_{r=1}^{R} 1_{E_r}(j) f_r(\tau^j x) - \sum_{r=1}^{R}\Big(\frac{1}{N_\ell}\sum_{j=0}^{N_\ell-1} 1_{E_r}(j)\Big)\mu(f_r) \to 0, \ \mu - p.p.. \tag{10.3.2}$$

Preuve : Il suffit de démontrer la convergence pour les R-uples dans $L^1_0(\mu) \times \cdots \times L^1_0(\mu)$. On peut supposer que le système est inversible.

1) Supposons le système à spectre de Lebesgue. Soit $(\phi_i, i \in \mathcal{J})$ une famille de fonctions telle que les fonctions $(T^j\phi_i, j \in \mathbb{Z}, i \in I)$ forment une base orthonormée de $L^2_0(\mu)$.

Si l'on choisi le R-uple $\Phi = (f_1, \cdots, f_R)$ dans la famille $(T^j\phi_i, j \in \mathbb{Z}. i \in I)$, la convergence (10.3.1) est une conséquence du théorème de Rademacher-Menschov sur les suites de fonctions orthogonales. La convergence est encore réalisée pour les combinaisons linéaires finies de fonctions dans $(T^j\phi_i, j \in \mathbb{Z}, i \in I)$, fonctions qui forment un sous-espace dense dans $L^1_0(\mu) \times \cdots \times L^1_0(\mu)$.

D'autre part, le sous-espace des R-uples de fonction (f_r) ayant la propriété de convergence dans (10.3.1) est fermé dans $L^1_0(\mu) \times \cdots \times L^1_0(\mu)$ d'après le lemme maximal (inégalité (10.2.1)), ce qui prouve le résultat.

2) Cas du spectre continu

Fixons une famille $\mathcal{F}$ dénombrable de R-uples $\Phi = (f_1, \cdots, f_R)$, avec f_r, $1 \leq r \leq R$, dans $L^2_0(\mu)$, dense dans $L^1_0(\mu) \times \cdots \times L^1_0(\mu)$. Montrons d'abord la convergence vers 0 en norme L^2 de $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=1}^{R} 1_{E_r}(j)\, T^j f_r$ pour chaque R-uple Φ.

Le système étant à spectre continu, il existe un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ de densité 1 tel que, pour tout r, r', on ait :

$$\lim_{j \in E, j \to +\infty} \langle T^j f_r, f_{r'} \rangle = 0, \ \forall 1 \leq r, r' \leq R.$$

Soient $\epsilon > 0$ et $L \in \mathbb{N}$ tel que $|\langle T^j f_r, f_{r'} \rangle| \leq \epsilon$, pour $j > L$ et $j \in E$.

Nous avons :

$$\| \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{R} T^j f_r 1_{E_r}(j) \|_2^2 = \sum_{r,r'} \sum_{0 \leq i,j < N-1} 1_{E_r}(i) 1_{E_{r'}}(j) \langle T^{i-j} f_r, f_{r'} \rangle,$$

puis :

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq r,r' \leq R} \sum_{0 \leq i,j < N-1} 1_{E_r}(i) 1_{E_{r'}}(j) |\langle T^{i-j} f_r, f_{r'} \rangle| \\
&\quad \leq C^2 R^2 \big(Card\{(i,j) \in \{0, \cdots, N-1\} : |i-j| \leq L\} \\
&\qquad + Card\{(i,j) \in \{0, \cdots, N-1\} : |i-j| > L, \, |i-j| \notin E\}\big) + N^2 R^2 \epsilon, \\
&\quad \leq C^2 R^2 \big(\sum_{|i-j| \leq L, \, 0 \leq i,j < N} 1 + 2N Card([0, N-1] \cap E^c)\big) + N^2 R^2 \epsilon,
\end{aligned}$$

où $C = \sup_r \|f_r\|_2$.

Il existe donc $N(\Phi, \epsilon)$ tel que $\displaystyle \frac{1}{N^2} \| \sum_{j=0}^{N-1} \sum_r T^j f_r 1_{E_r}(j) \|_2^2 \leq \epsilon$, pour $N \geq N(\Phi, \epsilon)$.

Notons $(\Phi^{(k)} = (f_1^{(k)}, \cdots, f_r^{(k)}), \ k \in \mathbb{N})$ les éléments de la famille $\mathcal{F}$.

Pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que, pour $N \geq N_k$, on ait :

$$\frac{1}{N^2} \| \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{R} T^j 1_{E_r}(j) \, f_r^{(p)} \|_2^2 \leq \frac{1}{k^2},$$

pour $p = 1, \cdots, k$.

Par le procédé diagonal, on obtient alors une suite (N_ℓ) telle que, pour chaque $\Phi = (f_1, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}$, il existe $\ell(\Phi)$ tel que, pour $\ell \geq \ell(\Phi)$, on ait :

$$\frac{1}{N_\ell^2} \| \sum_{j=0}^{N_\ell - 1} \sum_{r=1}^{R} T^j 1_{E_r}(j) \, f_r \|_2^2 \leq \frac{1}{\ell^2}.$$

Il y a donc convergence μ-p.p., le long de cette sous-suite, pour tout $\phi \in \mathcal{F}$.

On conclut en utilisant la densité de $\mathcal{F}$ et le lemme maximal comme précédemment.

□

(10.4) Corollaire : *Si le système $(X, \mathcal{A}, \tau, \mu)$ est à spectre continu, pour tout entier R, il existe une sous-suite (N_ℓ) telle que, pour toute suite d'ensembles (B_k) appartenant à une famille finie $(A_1, \cdots, A_R)$ de mesure > 0, on ait :*

$$\lim_\ell \frac{\sum_{j=0}^{N_\ell - 1} 1_{B_j}(\tau^j x)}{\sum_{j=0}^{N_\ell - 1} \mu(B_j)} = 1, \ \mu - p.p.. \tag{10.4.1}$$

Si le système est à spectre de Lebesgue, la convergence a lieu pour la suite des entiers naturels :

$$\lim_N \frac{\sum_{j=0}^{N-1} 1_{B_j}(\tau^j x)}{\sum_{j=0}^{N-1} \mu(B_j)} = 1, \ \mu - p.p.. \tag{10.4.2}$$

Preuve : Soit $(E_r, 1 \leq r \leq R)$ la partition de $\mathbb{N}$ définie par : $j \in E_r$ si et seulement si $B_j = A_r$. En appliquant la proposition 2 avec $f_r = 1_{A_r}$, $1 \leq r \leq R$, on obtient :

$$\frac{\sum_{j=0}^{N_\ell - 1} \sum_r 1_{E_r}(j) 1_{A_r}(\tau^j x)}{\sum_r \mu(A_r) \left(\sum_{j=0}^{N_\ell - 1} 1_{E_r}(j)\right)} \to 1, \ \mu - \text{p.p.};$$

d'où (10.4.1).

□

Montrons maintenant qu'en général la convergence (10.4.2) dans le corollaire n'est pas vérifiée pour un système à spectre continu. Nous reprenons un argument de catégorie employés dans : *Conze (J.-P.), Convergence des moyennes ergodiques pour des sous-suites, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 35, (1973), p. 7-15.*

En nous restreignant aux espaces de Lebesgue, nous pouvons supposer que l'espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est isomorphe à $[0,1]$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue (notée encore μ).

Notons $\mathcal{T}$ le groupe des automorphismes de $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ muni de la topologie faible. Les automorphismes qui s'écrivent comme des permutations d'intervalles dyadiques sont denses dans $\mathcal{T}$. Rappelons également que les automorphismes à spectre continu forment un G_δ dense dans $\mathcal{T}$.

Nous considérons une famille formée d'ensembles $(A_i, i \leq r \leq R)$ de mesure positive, deux à deux disjoints.

(10.5) Proposition : *Il existe un suite (B_n) à valeurs dans $\{A_r, 1 \leq r \leq R\}$, un réel $c > 1$ et un G_δ dense d'automorphismes τ à spectre continu de $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ tels que*

$$\limsup_N \frac{\sum_{j=0}^{N-1} 1_{B_j}(\tau^j x)}{\sum_{j=0}^{N-1} \mu(B_j)} \geq c, \ \mu - p.p..$$

Preuve : Soit $c < \sum_r \mu(A_r)/\inf_r \mu(A_r)$. Pour toute suite S à valeurs dans $\{A_r, 1 \leq r \leq R\}$, tout automorphisme $\mathcal{T}$ notons

$$C(S,\tau,c) = \{\limsup_N \frac{\sum_{j=0}^{N-1} 1_{B_j}(\tau^j x)}{\sum_{j=0}^{N-1} \mu(B_j)} \geq c\}.$$

En raisonnant comme dans [1], on montre que

$$\mathcal{T}(S) = \{\tau \in \mathcal{T} : \mu(C(S,\tau,c)) \geq 1/2\}$$

est un G_δ dans $\mathcal{T}$.

On construit alors la suite S de façon que chaque automorphisme qui s'écrit comme une permutation d'intervalles dyadiques soit dans $\mathcal{T}(S)$. La densité de cet ensemble d'automorphismes assure que les autorphismes à spectre continu appartenant à $\mathcal{T}(S)$ forment un G_δ dense.

□

Références

[1] Bolthausen (E.) : Exact convergence rates in some martingale central limit theorems, Annals of Probability, 1982, vol. 10, no 3, p. 672-688.

[2] Bowen (R.) : *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lectures Notes no. 470, Springer-Verlag (1975).

[3] Conze (J.-P.), Raugi (A.) : Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications, Bull. Soc. math. France, 118 (1990), p. 273-310.

[4] Gordin (M. I.), On the central limit theorem for stationary processes, (Dokl. Akad. Nauk SSSR), Soviet Math. Dokl., 10, no 5. 1174-1176, 1969.

[5] Hall (P.), Heyde (C.C.) : *Martingale limit theory and its applications*, Academic Press, New York, 1980.

[6] Hennion (H.), Hervé (L.) : Théorèmes limites pour des chaînes de Markov et propriétés stochastiques des systèmes dynamiques par une methode spectrale, preprint, IRMAR, Université de Rennes, 1998.

[7] Haeusler (E.) : On the rate of convergence in the central limit theorem for martingales with discrete and continuous time, Annals of Probability, 1988, vol. 16, no 4, p. 275-299.

[8] Ibragimov (I. A.) : A central limit theorem for a class of dependant random variables, Theory Prob. Appl., 1963, vol. 8, p. 83-89.

[9] Jamison (B.) : Ergodic decomposition induced by certain Markov operators, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 117, 1965, p. 451-468.

[10] Kleinbock (D. Y.), Margulis (G. A.) : Logarithm laws for flows on homogeneous spaces (preprint 1998).

[11] Kondah (A.), Maume (V.), Schmitt (B.) : Vitesse de convergence vers l'état d'équilibre pour des dynamiques markoviennes non höldériennes, Ann. Inst. Henri Poincaré, 33, 6 (1997), p. 675-695.

[12] Lemańczyk(M.), Lesigne (E.), Parreau (F.), Volný (D.), Wierdl (M.) : Random ergodic theorems and real cocycles, preprint 1998.

[13] Liverani (C.) : Decay of correlations, Annals of Mathematics, 142 (1995), p. 239-301.

[14] Philipp (W.) : Some metrical theorems in number theory, Pacific J. Math., 20 (1967), p. 109-127.

[15] Raugi (A.) : Théorie spectrale d'un opérateur de transition sur un espace métrique compact, Ann. Inst. Henri Poincaré, 28, 2 (1992), p. 281-309.

[16] Ruelle (D.) : Thermodynamic formalism, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 5 (1978) Addison-Wesley Publ. Company.

[17] Sinai (Ya. G.) : Gibbs mesures in ergodic theory, Russian Math. Surveys no. 4, 166 (1972), p. 21-64.

[18] Walters (P.) : Invariant measures and equilibrium states for some mappings which expand distances, Trans. Amer. Math. Soc., 236 (1978), p. 121-153.

Jean-Pierre Conze
IRMAR, Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu,
35042, Rennes Cedex, France

conze@univ-rennes1.fr

Albert Raugi
IRMAR, Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu,
35042, Rennes Cedex, France

raugi@univ-rennes1.fr