JEAN HOUDEBINE

Des questions didactiques posées par la réalisation d'un logiciel d'aide à la résolution de problèmes de proportionnalité

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998-1999, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , p. 55-72
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998-1999___3_55_0>

Des questions didactiques posées par la réalisation d'un logiciel d'aide à la résolution de problèmes de proportionnalité.

Jean Houdebine
Laboratoire de Didactique des Mathématiques, Université Rennes1

L'introduction de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques se heurte à bien des obstacles : les uns sont liés aux équipements, les autres aux problèmes posés aux enseignants soit par la gestion de la classe, soit par la conception de séquences didactiques adaptées. Nous pensons qu'une manière nouvelle d'aborder ces problèmes est de concevoir des logiciels utilisables par les élèves en travail complètement autonome. C'est l'un des objectifs de notre logiciel "Proportionnalités".

I - Des logiciels d'apprentissage en autonomie

Dans l'enseignement actuel des mathématiques au collège ou au lycée, les logiciels sont utilisés le plus souvent dans la classe, avec des interventions directes de l'enseignant. Cette modalité suppose une salle équipée d'un nombre suffisant d'ordinateurs et la conception d'une séquence bien adaptée à la progression choisie par l'enseignant. Beaucoup de recherches récentes travaillent d'ailleurs dans cette hypothèse et des succès incontestables sont enregistrés. Malgré cela le nombre d'enseignants qui acceptent de prendre le risque de s'engager reste faible du fait des difficultés concrètes rencontrées. Il me semble que pour contourner ces obstacles, une voie, inspirée de certaines initiatives en formation d'adultes, est restée jusqu'à présent presque inexplorée : celle de créer des logiciels sur lesquels les élèves puissent travailler de manière autonome, sans l'aide directe de l'enseignant et en dehors des heures de classe.

Plus précisément, l'idée est de mettre à la disposition des élèves un ordinateur en libre service sur lequel est placé le logiciel. Le rôle de l'enseignant est alors très différent : d'une part il conseille à certains de ses élèves l'utilisation de tel ou tel logiciel quand il estime qu'il peut lui rendre service ; d'autre part il est la personne ressource ; les élèves viendront lui poser des questions sur les problèmes qu'ils ont rencontrés ou sur les faits qu'ils ont observés. L'enseignant pourra y répondre individuellement, mais il pourra aussi s'appuyer sur quelques unes de ces questions pour apporter à l'ensemble de la classe des connaissances nouvelles. Il est bien évident qu'un tel dispositif pose des problèmes didactiques nouveaux.

Le premier problème est la conception de tels logiciels. On sait combien les enfants d'aujourd'hui sont friands de jeux informatiques et il est évident que beaucoup d'entre eux sont capables d'y passer beaucoup de temps, même avec des jeux demandant beaucoup de concentration et de réflexion. C'est sans doute sur cet appétit qu'il faut s'appuyer. De ce fait, ces logiciels doivent satisfaire à des contraintes très strictes : certaines d'entre elles sont liées à des problèmes de communication et d'ergonomie, d'autres au contraire sont didactiques, comme le choix de la tâche, des règles tutorielles et des messages.

Le deuxième problème est d'analyser le rôle dans l'apprentissage de tels logiciels et en particulier les liens subtils qui vont apparaître entre ce que fait l'enseignant dans sa classe et le travail autonome de certains de ses élèves. Il est probable que des enseignants se sentiront mal à l'aise pour organiser leur enseignement devant l'impossibilité de savoir ce que chaque élève aura appris au cours de son travail autonome. Mais n'est-ce pas déjà le cas avec les nombreuses connaissances acquises par les élèves dans leur environnement (par exemple avec la télévision) ?

Un autre problème, plus pratique, est d'étudier dans quelles conditions concrètes on peut mettre un ordinateur à la disposition des élèves ; faut-il s'appuyer sur le cadre du CDI ? Faut-il réserver un ordinateur à ce type de logiciel ? Internet est-il une voie possible ?

Depuis plusieurs années nous travaillons à la réalisation de projets de logiciels de ce type pour l'apprentissage de la proportionnalité. Après nous être heurtés à des difficultés de réalisation, nous venons de finir un petit logiciel qui est commercialisé par le CNED. Il se trouve aussi à la disposition des enseignants sur l'un des ordinateurs de la bibliothèque de l'IREM de Rennes. Il s'agit d'un logiciel d'aide à la résolution de problèmes. Il ne satisfait pas encore toutes nos ambitions :

- d'une part du point de vue ergonomique il n'est pas suffisamment affiné pour pouvoir être l'objet d'un travail complètement autonome ; une séance initiale d'environ une heure avec un enseignant est nécessaire pour aider les élèves à en prendre connaissance ; ce n'est qu'à l'issue de cette séance que le travail autonome peut commencer dans de bonnes conditions. La mise au point d'un logiciel complètement satisfaisant du point de vue ergonomique nécessite des compétences spécifiques et des moyens importants dont nous ne pouvions disposer.
- d'autre part beaucoup de problèmes didactiques très concrets se sont posés qui, à notre connaissance, n'ont pas été assez étudiés. Nous avons donc fait des choix qui pourront être remis en question par des recherches ultérieures.

Cependant dans l'état actuel ce logiciel peut rendre un double service : les expériences déjà menées montrent qu'il peut permettre aux enseignants qui souhaitent tenter l'expérience d'un travail autonome avec un outil informatique d'obtenir des résultats intéressants ; et en tant que prototype, il est un moyen de mener des recherches sur ce type de logiciels.

L'objet principal de cet exposé est de vous faire part de nos choix didactiques et des questions qui nous paraissent les plus urgentes. Pour cela nous décrirons succinctement la façon dont le logiciel est organisé ; puis nous aborderons les hypothèses principales sur lesquelles nous nous sommes appuyés enfin nous aborderons plus en détails quatre problèmes : est-il possible de définir des niveaux pour des problèmes ? Quel rôle jouent les messages ? Comment organiser une expérimentation performante ? Peut-on repérer les procédures des élèves ?

II - Description succincte du logiciel "Proportionnalités"

1 - L'organisation générale

Le logiciel propose à l'élève un ou plusieurs énoncés de problèmes de proportionnalité. Une fois le problème choisi, le parcours proposé à l'élève est décrit par le schéma ci-dessous. Notons que :

- pour chaque énoncé de problème, le logiciel comporte plusieurs jeux de valeurs ; le choix d'un jeu de valeurs modifie le niveau du problème et les procédures à engager ,
- au cours de la résolution l'élève peut utiliser des outils : graphique, tableau ou camemberts,
- le logiciel comporte des messages : d'une part certaines mauvaises réponses peuvent être interprétées : erreur de procédure, erreur de calcul... Dans ce cas le logiciel délivre un message qui parle de l'erreur supposée ou qui argumente sur l'absurdité de la réponse. D'autre part certaines bonnes réponses font l'objet d'un court commentaire. Enfin des

explications sont à la disposition de l'utilisateur : il s'agit d'une "solution du problème" qui peut s'exprimer sous forme d'un simple texte ou sous forme d'un texte accompagné par un graphique, un tableau ou des camemberts. La variété de ces explications reflète la variété des procédures de résolution possibles.

2 - Quelques principes

Plusieurs idées didactiques ont conduit à la conception de ce logiciel.

Varier les problèmes

Il est facile de se rendre compte que les problèmes de proportionnalité sont très variés. Notre hypothèse est que la maîtrise des problèmes de proportionnalité ayant certaines caractéristiques ne donne aucune garantie pour la maîtrise de problèmes ayant des caractéristiques différentes ; en d'autres termes il n'y a pas a priori de transfert immédiat des compétences acquises dans une classe de problèmes à une autre classe de problèmes. Cela nous conduit à penser que la maîtrise de la proportionnalité passe par un travail approfondi sur un nombre suffisamment grand de classes de problèmes.

Nous avons donc choisi dans notre banque de varier autant que possible les "classes" des problèmes proposés. Pour définir ces classes, trois grandes variables apparaissent sur le devant de la scène : la structure de la situation, la nature de la tâche, le domaine concerné.

LA STRUCTURE DE LA SITUATION

Elle est caractérisée par le nombre de grandeurs en présence et leurs relations : le tableau et les exemples suivants décrivent un classement possible, sur lequel nous nous sommes appuyés.

Deux grandeurs	
de même nature	
indépendantes	*Construire un rectangle de même forme qu'un rectangle donné et ayant une largeur donnée*
Partie/partie	*Quel est le mélange qui a le plus de goût :* *3 verres de jus de fruit pour 5 verres d'eau* *5 verres de jus de fruit pour 8 verres d'eau*
Partie/tout	*Pierre prépare une boisson en mélangeant de l'eau et du jus de fruit. Combien doit-il mettre de jus de fruit pour obtenir 6 verres d'une boisson ayant le même goût que 3 verres d'un mélange contenant 2 verres de jus de fruit.*
de nature différente	*Pour Noël j'achète des chocolats au poids. Je paie 60 F pour 600†g. Quel est le prix au kilo de ces chocolats.*

Plus de deux grandeurs

Des grandeurs isomorphes	*Pour faire une tarte pour 3 personnes il faut 500g de farine, 200g de beurre et 3 cuillerées d'eau. Quelle sera la recette pour 5 personnes ?*
Enchaînement d'isomorphismes	*13 kg de-blé donnent 9 kg de farine. 9 kg de farine donnent 12 kg de pâte à pain. Quel poids de blé faut-il pour obtenir 8 kg de pâte à pain ?*
Proportion multiple	
· Grandeurs de nature différente	*Un fermier compare le rendement de deux races de vaches : 21 vaches pie noire donnent 1200 litres de lait en 3 jours ; 7 vaches salers donnent 1100 litres de lait en 9 jours. Quelle est la race la plus productive ?*
Grandeurs de même nature	*Une plaque de contre-plaqué rectangulaire de 40 cm sur 120 cm a pour masse 2,1 kg. Quelle est la masse d'une plaque carrée de 40 cm de côté, découpée dans le même contre-plaqué ?*
Avec une relation additive	
Pourcentage d'augmentation	*Après avoir subi une augmentation de 10%, un aspirateur coûte 880 F. Quel était son prix avant l'augmentation ?*
Répartition	*Dans un magasin, les ventes en milliers de francs de trois rayons se répartissent de la manière suivante :* *Vêtements 1440F, Linge 360F, Parfumerie 180F. Quelle part du chiffre d'affaires total représentent en pourcentage les ventes du rayon Parfumerie.*

Proportionnalité inverse

Une expédition scientifique dans l'Antarctique, composée de 60 personnes, rencontre un groupe de personnes sans vivres. Le cuisinier déclare : "nous avions 15 jours de vivres ; désormais nous n'en avons plus que pour 12 jours." Combien de personnes ont-elles été recueillies ?

LA TÂCHE

Les exemples précédents montrent que, sur une même situation, différentes tâches peuvent être proposées. Voici une proposition de classement :

Calculer un résultat

Si les données sont disposées "en ordre" cela facilite le travail : *Pour Noël j'achète des chocolats. Je paie 12 F les 150 g. Combien paierai-je pour en acheter 250 g.*
Si au contraire elles ne le sont pas le travail est plus difficile : *Pour Noël j'achète des chocolats. 150 g me coûtent 12 F. Combien paierai-je pour en acheter 250 g.* Ou encore le problème partie/tout proposé ci-dessus.

Calculer un coefficient

C'est le cas du problème de répartition ci-dessus.

Classer des données

C'est le cas du problème partie-partie ci-dessus.

Détecter une erreur

Par exemple trouver une erreur dans un agrandissement.

LES DOMAINES

On peut aussi penser que la familiarité avec certains domaines rendent les succès plus fréquents. Voici une liste des principaux domaines rencontrés habituellement dans les problèmes proposés en classe : Prix, vitesse, débit, longueur, échelle, concentration, performance.

QUELQUES QUESTIONS DIDACTIQUES

Cette idée de varier les problèmes, qui nous a amené à parler de classes de problèmes, conduit à se poser beaucoup de questions. En voici quelques unes :

- Y a-t-il entre les différentes classes de problèmes des relations de proximité qui font que les transferts de compétences se font plus ou moins bien entre ces classes ?

- Quelle est, pour cette question, la variable la plus importante ? Pour dire les choses autrement, le transfert d'un problème à un autre est-il plus aisé quand on change de domaine, quand on change de tâche ou quand on change de structure ?

- Peut-on espérer un bon transfert pour les problèmes de même structure, même si la tâche et le domaine sont différents (exemple problème de prix, problème de débit) ?

- On sait que la maîtrise d'un nombre suffisant de classes de problèmes va permettre une maîtrise de l'ensemble des problèmes de proportionnalité. Mais beaucoup de stratégies sont possibles : par exemple travailler trois classes de manière approfondie puis s'orienter vers une institutionnalisation ; ou bien en travailler un plus grand nombre avant d'aborder la phase d'institutionnalisation. On peut aussi proposer des tâches dont l'objectif est de faire apparaître ce qu'il y a de commun à deux problèmes de proportionnalité qui ne sont pas dans la même classe (en demandant par exemple d'utiliser les mêmes outils). Faut-il préférer un travail où l'on varie systématiquement la classe ou au contraire passer un certain temps sur des problèmes de la même classe ?

Varier les procédures

Les recherches sur ce sujet on montré de manière indubitable qu'un apprentissage centré sur une seule procédure est peu performant ; la règle de trois n'a pas fait de miracle et les tableaux non plus. C'est avec l'idée qu'il faut, autant qu'il est possible, faire varier les procédures des stagiaires que nous avons conçu notre logiciel. Mais quels sont les leviers qui peuvent nous permettre de les faire varier :

- Changer la tâche : on sait en effet que, suivant la tâche, les procédures varient : par exemple dans des problèmes d'agrandissement, pour une tâche de construction de l'agrandissement la procédure "recherche d'un coefficient et multiplication par ce coefficient" est une procédure performante et fréquente. En revanche pour s'apercevoir d'une erreur dans un agrandissement on peut être amené tout naturellement à utiliser des rapports internes : sur ce dessin la fenêtre est carrée sur celui-ci elle ne l'est pas.

- Changer les données numériques : la présence ou l'absence de rapports simples sont un facteur déterminant dans le choix des procédures.

- Proposer des procédures aux stagiaires : par exemple en leur proposant comme tâche de remplir une procédure à trous.

Là encore plusieurs questions se posent :

- Il faudrait d'abord approfondir la question de l'effet négatif des procédures stéréotypes. Beaucoup de stagiaires en effet se créent très vite une telle procédure, avec succès pour certains, avec un échec profond pour d'autres ; sur quels indices un logiciel peut-il se baser pour repérer rapidement cette différence ?

- Dans cette politique de varier les procédures, il est clair qu'il faut parfois renforcer une procédure nouvelle ; mais ne risque-t-on pas de rendre stéréotype cette procédure ?

- Une discussion sur différentes procédures est-il un moyen performant d'apprentissage, pour les jeunes, pour les adultes. Comment amener les stagiaires à cette réflexion ?

- Quelle peut être l'efficacité de messages explicitant une procédure ?

<u>Introduire des outils de représentation</u>

Les registres jouent un rôle essentiel dans l'apprentissage. De très nombreuses représentations peuvent être utiles pour la proportionnalité. Nous en avons retenu trois :

- Les tableaux : c'est sans doute l'outil le plus souvent utilisé en premier ; il a l'avantage d'une grande souplesse ; il a l'inconvénient qu'il ne faudrait pas créer la confusion entre tableau et proportionnalité. Il permet d'introduire, par le biais des opérateurs, l'idée des rapports internes et externes. Il peut servir pour exprimer la linéarité avec l'addition de lignes ou de colonnes ; cette possibilité, à notre grand regret, n'est pas proposée dans le logiciel.

- Les graphiques : cet outil est évidemment plus complexe car il associe des propriétés géométriques, comme l'alignement, à l'idée de proportionnalité. Pour l'utiliser il faut maîtriser les graduations des axes qui sont l'un des aspects géométriques de la proportionnalité.

- Les camemberts : cet outil n'est performant que pour les problèmes de type partie-tout, partie-partie ou de répartition. Il est en fait très mal maîtrisé par la plupart des stagiaires car il n'est pas présent dans la formation. Ici le contenu géométrique n'est pas un obstacle, mais plutôt un soutien car les rapports sont en quelque sorte visualisés. Il parait une composante indispensable d'une bonne formation puisqu'il est très présent dans les journaux.

Ces trois outils sont-ils suffisants pour représenter l'ensemble des registres utiles dans la proportionnalité ? Fallait-il en choisir d'autres ?

Notre souci a été de proposer ces outils de manière que les stagiaires aient une véritable activité : il fallait donc que ce soit eux qui construisent les objets correspondants ; c'est pourquoi le logiciel donne l'initiative aux stagiaires pour les choix suivants : le nom des axes, la graduation, les points à représenter pour les graphiques ; les noms des lignes et des colonnes, les nombres à écrire, les opérateurs pour les tableaux ; le nombre de parts, le nom des parts et leur valeur pour les camemberts.

La présentation informatique de ces outils est un problème difficile. Voici un exemple de question : comment faire apparaître les propriétés d'alignement ?

<u>Des explications</u>

On sait que l'institutionnalisation joue un rôle important dans les processus d'apprentissage à partir de la résolution de problèmes. Il semble donc nécessaire, dans un logiciel comme le nôtre de prévoir un moyen de faire cette institutionnalisation. Nous avons choisi deux modes d'intervention.

D'une part quand l'élève donne une réponse, un message lui est retourné. Si la réponse est bonne ce message peut contenir une explication où n'être qu'un encouragement. Si la réponse est fausse, il va l'indiquer ; mais il va aussi apporter parfois, soit un argument montrant que le résultat ne peut être bon, soit, si une analyse préalable nous en donne les moyens, un commentaire sur la procédure fausse que l'on suppose mise en oeuvre.

D'autre part l'élève a un accès libre à des explications ; quatre sortes d'explications sont proposées : des explications sous forme de textes et des explications utilisant chacun des trois outils. Le contenu de ces explications peut être très varié : elles peuvent décrire une procédure, apporter une connaissance explicite.

Nous reviendrons sur le rôle de ces messages dans la troisième partie.

3 - Les règles tutorielles

Dans la perspective d'un logiciel d'apprentissage en travail autonome, dont l'objectif est l'aide à la résolution de problèmes, les règles tutorielles jouent un rôle essentiel : il s'agit des règles qui gèrent ce que le logiciel propose à l'élève en fonction de ce qu'il a fait.

Des règles simples

L'expérience nous a montré que dans l'état actuel des connaissances il était très difficile de savoir si une règle tutorielle est efficace. Nous avons donc décidé pour cette première version de choisir des règles simples.

Une première question importante concerne le rôle des contraintes dans l'apprentissage : faut-il choisir des règles tutorielles qui soient contraignantes ou au contraire laisser beaucoup de liberté à l'élève ? Par exemple à chaque changement de problème, faut-il fixer le problème suivant ou lui donner le choix entre plusieurs problèmes ? Dans la conception de logiciels, les enseignants de maths s'orientent plutôt vers des contraintes fortes alors que les informaticiens les minimisent. Nous avons plutôt choisi de les minimiser.

L'expérience montre que ce choix n'est pas sans conséquence : il semble qu'il a l'avantage de rendre le travail plus intéressant (on choisit un problème dont le nom est attrayant comme "mobylette" plutôt que le problème au titre rébarbatif "les trains"), mais il a l'inconvénient que l'élève évite certains passages utiles pour l'apprentissage : par exemple certains élèves ne se servent jamais des outils.

Voici les règles adoptées pour proposer aux élèves un nouveau problème :

L'élève a le choix entre changer complètement d'énoncé ou garder le même énoncé en changeant les valeurs. Dans la première hypothèse :

- Les tâches sont changées systématiquement.

- Les domaines rencontrés deux fois dans les trois derniers coups ne sont pas présentés.

- Une fois sur 5 on présente un problème sur lequel le niveau (nous reviendrons sur cette idée de niveau dans la troisième partie) du stagiaire est faible ; les autres fois on présente au contraire des problèmes qu'il a plutôt bien réussis.

Si au contraire le stagiaire ne change que les valeurs, les nouvelles valeurs correspondent à un niveau supérieur au précédent s'il a réussi, à un niveau inférieur s'il a raté (le logiciel prend soin de ne pas lui proposer un item déjà réussi).

Le modèle de l'élève

Sous ce nom on convient ici de désigner les informations structurées sur l'élève que le logiciel conserve. Ces informations sont obtenues en tenant compte de ce que fait l'élève ;

elles sont structurées de manière à permettre de construire aisément les règles tutorielles choisies. On pourrait bien sûr enregistrer tout ce que fait l'élève ; mais cette information est souvent surabondante et ce qui importe c'est le traitement.

Compte tenu de nos règles tutorielles, les informations dont nous avions besoin dans le modèle sont simples :

- marquage des trois derniers domaines fréquentés,
- identification de la dernière tâche,
- pour chaque problème
  items déjà réussis
  niveau de la réussite
  état de la dernière sortie (réussite ou échec),
- pour chaque structure
  niveau courant de réussite
  les trois dernières valeurs "réussite ou échec" pour la structure.

Dans l'absolu nous aurions souhaité mettre dans ce modèle des informations sur les procédures utilisées par l'élève ; cela nous aurait permis d'introduire des règles tutorielles de renforcement d'une procédure ou au contraire de variations des procédures. Mais cette information est peu accessible, sa recherche est coûteuse informatiquement et nous y avons renoncé.

III - Peut-on attribuer un niveau à un problème

Quand on réalise un logiciel l'une des premières préoccupations est de proposer à un stagiaire des problèmes qui correspondent à son "niveau". Il y a donc une idée de classer les problèmes suivant leur niveau.

Il est à peu près clair que comparer le niveau de deux problèmes de structure différente n'a pas de sens, puisque l'expérience montre qu'il n'y a pratiquement pas de transfert de compétences d'un problème à l'autre. Pour des tâches différentes, la conclusion pourrait être la même, bien que certaines tâches aient l'avantage de déclencher des procédures plus variées que d'autres : par exemple trouver une faute dans un agrandissement conduit plus facilement à des rapports internes que la construction d'un agrandissement qui va conduire à l'utilisation plus fréquente d'un coefficient de proportionnalité.

La difficulté liée au domaine est évidemment plus culturelle qu'intrinsèque : par exemple la réussite de beaucoup aux problèmes de prix peut s'expliquer de cette façon.

Il semble donc assez peu raisonnable d'essayer de comparer le niveau de deux problèmes dès qu'ils sont trop différents, et les règles tutorielles s'orientent plutôt vers l'idée de faire réussir l'élève de manière presque indépendante pour chaque type de problèmes.

En revanche, il est plus facile d'espérer obtenir des résultats significatifs en essayant de définir des niveaux quand, dans un même problème, on propose plusieurs jeux de valeurs numériques : *une mobylette fait du 40 à l'heure ; combien lui faudra-t-il de temps pour parcourir 20 km ?* est évidemment plus facile que le même problème avec *37 à l'heure* et *12 km.*

1 - Le travail de Noëlting

Dans les années 1980 une équipe de chercheurs (psychologues) autour de Noëlting[1] a abordé indirectement ce sujet pour le problème :

Pour préparer une boisson à l'orange on mélange du jus d'orange et de l'eau. Pour un premier mélange on prend 4 verres de jus et 5 verres d'eau, pour un deuxième 9 verres de jus d'orange et 11 verres d'eau. Quel est le mélange qui a le plus de goût ?

Définir des stades de développement

L'objectif de ces recherches n'était pas de définir pour ce problème des niveaux en fonction des données numériques, mais de faire une analyse approfondie des stades au sens de Piaget ; de nombreuses expériences, une analyse soignée des procédures utilisées qu'elles soient bonnes ou erronées, a conduit à la mise en évidence de 11 stades (ou sous-stades). Ce travail essentiellement psychologique est étayé par de nombreuses expériences concernant plus de 80 items. Pour ceux-ci des indications sont données sur le stade où il est normalement réussi alors qu'au stade immédiatement inférieur il y a souvent un échec. Bien sûr cette classification est faite avec toutes les nuances nécessaires car il ne s'agit évidemment pas de tout ou rien. Elle est assez fiable en ce sens que l'ordre de présentation des items aux élèves n'a pas d'influence significative sur les résultats. Le Chapitre 14 de l'ouvrage cité donne une vue très claire de ces stades et nous ne la reprendrons pas ici.

Pour chacun des 88 items expérimentés, l'existence d'un stade pour lequel il est souvent réussi alors qu'au stade immédiatement supérieur il y a souvent échec peut conduire assez naturellement à l'idée que le travail de Noëlting peut permettre de définir des niveaux de difficulté. On obtient de cette façon une classification de ces items en 11 niveaux que nous donnons ci-dessous.

[1] Ce travail est exposé dans le livre : Le développement cognitif et le mécanisme de l'équilibration, Edition Gaëtan Morin,Chicoutimi, Québec, Canada, 1982.

Une classification des items expérimentés par Noëlting

Les données numériques associées au problème sont les quantités de jus et d'eau, exprimées en verres, présentes dans les deux mélanges. On conviendra de noter ces données de manière que l'énoncé ci-dessus soit représenté par : "4, 5 contre 9, 11". Les niveaux sont codés d'une manière analogue aux stades décrits dans Noëlting.

Niveau 0			
0, 1 contre 0, 1	0, 1 contre 0, 2	0, 1 contre 1, 0	0, 1 contre 2, 0
1, 0 contre 0, 1	1, 0 contre 0, 2	1, 0 contre 1, 0	2, 0 contre 1, 0
Niveau IA			
1, 1 contre 1, 1	1, 1 contre 2, 1	1, 2 contre 2, 1	1, 2 contre 2, 2
1, 3 contre 2, 2	1, 3 contre 2, 3	1, 3 contre 3, 1	1, 4 contre 4, 1
2, 0 contre 1, 1	2, 2 contre 3, 1	2, 5 contre 4, 5	3, 1 contre 1, 3
3, 1 contre 2, 2	3, 2 contre 2, 2	4, 1 contre 1, 4	
Niveau IB1			
1, 0 contre 1, 1	1, 1 contre 1, 0	1, 1 contre 1, 2	1, 1 contre 1, 3
1, 1 contre 1, 4	1, 2 contre 1, 1	1, 2 contre 1, 3	1, 2 contre 1, 5
1, 5 contre 1, 2	2, 3 contre 2, 1	2, 3 contre 2, 3	
Niveau IB2			
1, 1 contre 2, 3	1, 3 contre 2, 8	2, 1 contre 3, 3	2, 1 contre 3, 4
2, 2 contre 3, 4	2, 3 contre 1, 1	3, 4 contre 2, 1	
Niveau IIA			
1, 1 contre 2, 2	1, 1 contre 3, 3	2, 2 contre 3, 3	
Niveau IIB1			
1, 2 contre 2, 4	1, 2 contre 3, 6	1, 3 contre 2, 6	1, 3 contre 3, 9
1, 4 contre 2, 8	2 ,1 contre 4, 2	3, 1 contre 6, 2	4, 1 contre 8, 2
4, 2 contre 2, 1			
Niveau IIB2			
2, 3 contre 6, 9	2, 4 contre 3, 6	2, 8 contre 3, 12	3, 4 contre 6, 8
3, 5 contre 6, 10	4, 2 contre 6, 3	4, 3 contre 8, 6	4, 6 contre 2, 3
4, 6 contre 6, 9	6, 4 contre 3, 2		
Niveau IIIA1			
1, 2 contre 2, 3	1, 3 contre 2, 5	1, 3 contre 3, 7	2, 1 contre 3, 2
2, 1 contre 4, 3	2, 3 contre 1, 2	2, 3 contre 5, 6	2, 5 contre 1, 3
3, 1 contre 5, 2	3, 1 contre 8, 3		
Niveau IIIA2			
2, 3 contre 3, 4	2, 3 contre 5, 9	2, 3 contre 7, 9	3, 2 contre 4, 3
4, 2 contre 5, 3	6, 2 contre 8,3	6, 3 contre 5, 2	6, 3 contre 7, 4
Niveau IIIB1			
2, 5 contre 3, 7	5, 2 contre 7, 3	5, 3 contre 7, 4	
Niveau IIIB2			
3, 5 contre 5, 8	5, 3 contre 8, 5	5, 8 contre 3, 5	8, 5 contre 5, 3

2 - Description des niveaux en termes de relations algébriques

N'avoir pour chaque niveau qu'une liste d'items correspondant à ce niveau n'est pas très satisfaisant ; pour comprendre, on aimerait avoir une description simple des items de chaque niveau en termes d'égalités ou d'inégalités algébriques. L'équipe de Noëlting a naturellement fait une tentative dans ce sens. Mais les classes décrites par cette équipe ne sont pas disjointes et la réunion de ces classes ne comportent pas tous les items.

Nous avons donc essayé avec l'aide de deux étudiantes[2] de mettre un peu d'ordre dans cette description, en tenant compte non seulement des items cités ci-dessus, mais aussi des procédures décrites. Cependant, comme beaucoup d'items n'ont pas été expérimentés, plusieurs structures sont compatibles avec les résultats de Noëlting. Le résultat de ce travail, c'est-à-dire une grille possible, est décrit dans le tableau "les items associés à chaque niveau".

Cette classification confirme sur bien des points les idées que l'on peut rencontrer sur le niveau des items. Par exemple la procédure "centration sur le jus" plus fréquente que la procédure "centration sur l'eau" explique le niveau relativement bas de certains items pour lesquels $a \leq c$. De même l'apparition d'un niveau lié aux items "a, a contre c, c" peut être expliquée par l'existence d'une procédure erronée qui consiste à comparer les nombres totaux de verres de chaque mélange.

Cependant on peut être surpris par quelques faits, par exemple :

- les performances au couple "a,a contre c,d" dépendent nettement de la position de a par rapport à l'intervalle limité par c et d ;

- "a,b contre a,b" est de niveau relativement élevé ;

- "a,a contre c,c" de niveau plus élevé encore ;

- pour des couples ayant le même goût la présence d'un 1 joue un rôle, alors que la simplicité des rapports internes ou externes ne semble pas jouer de rôle.

[2]Allain Soazig et Nevo Sandrine ; travail d'étude et de recherche dans le cadre de la maitrise de mathématiques à l'Université de Rennes 1.

Les items associés à chaque niveau

Le travail de Noëlting montre que l'ordre de présentation des deux couples d'un item ne joue pas de rôle significatif ; notre description en tient compte et à chaque fois dans la description il faut penser aux termes symétriques.

Niveau 0 — Deux éléments nuls.

Niveau IA — un seul éléments nul et $a \leq c$

ou aucun élément nul et

$a \leq c$ et $b = d$

ou $a = b$ et ($c<a<d$ ou $d<a<c$)

ou a,b contre b,a

Niveau IB1 — un seul élément nul et $a = c$

ou aucun élément nul et

a,b contre a,d avec $b \leq d$

ou a,b contre a,b avec $a \leq b$

Pour les stades suivants tous les éléments sont non nuls

Niveau IB2 — a,a contre c,d avec $c \leq d$ et a strictement extérieur à l'intervalle [c,d]

ou deux couples de sens différents : a,b contre c,d avec $a<b$ et $c>d$, mais ni le couple a,b contre b,a, ni $b = d$, ni $a = c$.

ou deux couples de même sens, c'est-à-dire tels que ($a<b$ et $c<d$) ou ($a>b$ et $c>d$), tels que un seul des nombres a, b, c, d soit égal à 1, que le deuxième rapport interne soit simple et que $a \leq c$ et $b \leq d$.

Niveau IIA — a,a contre c,c avec $a \leq c$.

Niveau IIB1 — Les couples ont le même goût et il y a un seul 1.

Niveau IIB2 — Les couples ont le même goût, il n'y a pas de 1 et $a \leq b$ et $a \leq c$.

Niveau IIIA1 — Les couples n'ont pas le même goût, les couples sont de même sens , il y a un 1, mais le deuxième rapport interne n'est pas simple et $a \leq c$ et $b \leq d$.

ou $a-b = c-d \leq 0$ et les intervalles fermés d'extrémités a, b et c, d sont disjoints.

Niveau IIIA2 — Les couples n'ont pas le même goût , ils sont de même sens, il n'y a pas de 1, $a \leq c$ et $b \leq d$ et

$a-b = c-d$ et les intervalles fermés d'extrémités a, b et c, d ne sont pas disjoints

ou $a-b \leq c-d$ et il y a au moins un rapport simple.

Niveau IIIB1 — $a-b \leq c-d$, les couples sont de même sens, n'ont pas le même goût, il n'y a aucun rapport simple et les quatre nombres sont distincts.

Niveau IIIB2 — $a-b \leq c-d$, les couples de même sens, n'ont pas le même goût, il n'y a pas de rapport simple et ($a = d$ ou $b = c$).

Le niveau en fonction de la structure

Remarquons d'abord que les items ayant plus de deux éléments nuls ne signifient rien, ni ceux dont l'un des couples contient deux éléments nuls. Pour les autres :

- 2 éléments nuls — Niveau 0
- 1 élément nul
  - $a \leq c$ — Niveau IA
  - $a = c$ — Niveau IB1
- 0 élément nul
- Couples de sens opposés (($a < b$ et $c > d$) ou ($a > b$ et $c < d$))
  - a,b contre b,a — Niveau IA
  - $b = d$ — Niveau IA
  - $a = c$ — Niveau IB1
  - autres couples opposés — Niveau IB2
- Un des couples au moins a deux composantes égales : a,a contre c,d
  - $c = d$
    - a,a contre a,a — Niveau IA
    - a,a contre c,c avec $c \leq a$ — Niveau IIA
  - $c \leq d$
    - a,a contre a,d — Niveau IB1
    - $c<a^2d$ ou $d^2a<c$ — Niveau IA
    - $a \notin [c,d]$ — Niveau IB2
- Couples de même sens (($a < b$ et $c < d$) ou ($a > b$) et ($c > d$))
  - même goût
    - a,b contre a,b — Niveau IB1
    - couples inégaux
      - il y a un 1 — Niveau IIB1
      - il n'y a pas de 1 — Niveau IIB2
  - goût différent
    - $a \leq c$ et $b = d$ — Niveau IA
    - $a = c$ — Niveau IB1
    - $a \leq c$ et $b \leq d$
      - il y a un seul 1
        - L'autre rapport interne est simple — Niveau IB2
        - l'autre rapport interne n'est pas simple — Niveau IIIA1
      - il n'y a pas de 1
        - $a\text{-}b = c\text{-}d$
          - Les intervalles [a,b] et [c,d] sont disjoints — Niveau IIIA1
          - Les intervalles [a,b] et [c,d] ne sont pas disjoints — Niveau IIIA2
        - $a\text{-}b \leq c\text{-}d$
          - au moins un rapport simple — Niveau IIIA2
          - pas de rapport simple
            - a, b, c et d distincts — Niveau IIIB1
            - $a = d$ ou $b = c$ — Niveau IIIB2

Pour vérifier que les classes obtenues sont bien disjointes, et pour avoir un moyen concret de reconnaître si un item appartient à une classe et pas une autre, il faut en fait expliciter le niveau en fonction de la structure de l'item et non la structure en fonction du niveau : on obtient à partir de la grille initiale le tableau de la page précédente "le niveau en fonction de la structure".

Des questions

Nous voici donc en possession d'une classification relativement fiable des items correspondant à ce problème. D'une certaine manière le problème de définir des niveaux semble donc résolu. En fait ce n'est qu'une apparence et beaucoup de questions restent posées (même si pour notre logiciel nous avons fait comme si tout était clair).

- D'abord les résultats obtenus ne correspondent qu'à certains items (un peu plus de 80) et du coup dans ces classifications il reste des hypothèses non testées : par exemple aucun item avec deux couples de même goût mais sans aucun rapport simple n'a été testé ; ni des items du type "0, 2 contre 1, 3". De même les items choisis correspondent à de petits nombres ; qu'en est-il pour des nombres un peu plus grand ? Il serait donc nécessaire de reprendre le travail pour affermir certains points de la classification.

- Ensuite cette classification peut être présentée de multiples manières suivant les facteurs que l'on prend en compte en premier ; celle que je vous ai proposée est relativement simple. Mais peut-on en construire une aussi simple qui tienne encore mieux compte des procédures utilisées par les élèves ?

- Il reste de grandes surprises que l'on voudrait vérifier : d'une part il est très surprenant d'aboutir à une classification linéaire ; il aurait paru plus naturel de voir apparaître des branches. Ce résultat est-il lié aux items particuliers choisis, à la méthodologie (le but était de définir des stades) ? Certains facteurs n'interviennent pas comme par exemple la somme des éléments des couples : cela est surprenant puisque certaines procédures erronées utilisent ce facteur. La différence entre le rôle joué par les rapports internes et externes est apparemment négligeable : cela va plutôt contre d'autres résultats.

- Cette classification a été faite dans une expérimentation dont l'objectif était de définir des stades ; disons qu'on peut assez facilement imaginer qu'elle va convenir pour une évaluation du niveau des élèves. Mais qu'en est-il pour l'apprentissage ? Peut-on utiliser efficacement cette classification pour concevoir des règles tutorielles ?

- un autre problème vient du public ; les expériences ont été faites plutôt auprès de jeunes enfants ; or la proportionnalité est aussi un obstacle pour de nombreux élèves plus âgés et pour beaucoup d'adultes. La question est de savoir si leur comportement sera différent.

- enfin le rôle de certaines variables didactiques comme les dessins, l'énoncé, etc.. demanderait une étude spécifique.

3 - Les problèmes ayant même structure ou des structures voisines

On peut penser que pour les problèmes partie-partie avec une tâche de comparaison cette échelle a des chances d'être applicable. Cependant certaines variables vont peut-être jouer un rôle essentiel : par exemple dans les items de Noëlting il y a une forte dissymétrie entre les deux composantes : eau et jus d'orange ; si cette dissymétrie disparaît qu'arrive-t-il ?

si on choisit un problème où les grands nombres ont du sens (exemple comparer des populations) cela va-t-il jouer ?

La question se pose aussi de savoir si l'on peut appliquer cette échelle à des problèmes partie-tout ? Ou encore à des problèmes dont la tâche est le calcul d'une quatrième proportionnelle ?

4 - Les problèmes ayant des structures différentes

Il est clair que le concepteur d'une banque de problèmes aimerait avoir pour chaque structure de problème et chaque tâche une échelle analogue. Cette ambition est sans doute démesurée et on peut estimer que c'est un miracle qu'une échelle ait pu apparaître pour les items de Noëlting ; cependant il n'est sûrement pas trop ambitieux de chercher des résultats sur le rôle d'un certain nombre de variables. Par exemple dans un problème de composition d'isomorphismes, on peut se demander quelles sont les variables essentielles : le nombre de compositions, les rapports de chaque isomorphisme, l'ordre de présentation, etc. ; on voit bien qu'ici la situation est beaucoup plus complexe.

Le rôle des entiers ne doit sans doute pas être négligé ; de ce point de vue un problème de longueur n'est pas identique à un problème de pas.

Pour notre logiciel nous avons décidé d'inventer de toutes pièces des échelles pour chaque problème : elles sont inspirées du travail de Noëlting, mais aussi de l'analyse de la tâche et en particulier des procédures qui paraissent privilégiées pour chaque jeu de valeurs.

Voici l'exemple de nos choix pour le problème blé pain :

Énoncé :

a kg de blé donnent à la mouture b kg de farine.
c kg de farine donnent d kg de pâte.
e kg de pâte donnent f kg de pain fantaisie.
Quel est le poids de blé nécessaire à la fabrication de g pains fantaisie de h grammes ?

Description des niveaux

Blé	Farine	Pâte	Poids
a	b	n	m
	c	d	
		e	f
l	k	j	i = gxh/1000

b = c ou d = e	
i multiple de f	Niveau 1
i non multiple de f	Niveau 2
b ≤ c ou d ≤ e	
j, k et l ou m et n se calculent facilement	
i multiple de f	Niveau 3
i non multiple de f	Niveau 4
j, k et l et m et n ne se calculent pas facilement	
b, d et f ou a, c et e sont des multiples de 10	
i multiple de f	Niveau 5
i non multiple de f	Niveau 6
Pas de multiples de 10	

il y a des rapports simples	Niveau 7
il n'y a aucun rapport simple	Niveau 8

IV - Des problèmes nouveaux

1 - Repérer les procédures utilisées

Si l'on part de l'hypothèse qu'un facteur essentiel pour l'efficacité de l'apprentissage est la variété des procédures, il est essentiel de repérer les procédures que les apprenants utilisent. Quand il s'agit d'un travail avec un enseignant, si celui-ci a une bonne connaissance des procédures possibles, il repérera sans trop de difficulté la procédure utilisée, et il saura, s'il a un doute, poser une question qui ne perturbe pas trop l'élève et lui permettra de la confirmer. Il n'en est pas de même avec un logiciel qui vise la formation en situation d'autonomie. C'est le logiciel qui doit être capable de repérer la procédure. Plusieurs idées nous sont venues à l'esprit :

On peut demander au stagiaire de rentrer au clavier ses calculs. On se heurte alors à deux obstacles :

- D'abord la plupart du temps l'apprenant aura de sérieuses difficultés à rentrer le calcul même s'il est capable de le faire sur un papier ; on introduit ainsi un obstacle artificiel. Pour minimiser cet obstacle la stratégie la plus courante consiste à proposer des choses préfabriquées sur lesquelles il suffit de cliquer : membres de phrases, expressions de calcul etc.

- Ensuite les calculs faits par l'apprenant vont sous-entendre certaines étapes. Comment l'ordinateur va-t-il rétablir les étapes manquantes. Il y a un moyen, proposé par Maryvonne Mérri, mais malheureusement trop onéreux actuellement : on étudie pour le problème donné toutes les procédures de résolution ; cela suppose une expérimentation longue avec une observation clinique performante. Puis on programme toute ses procédures. Quand un apprenant entame une procédure on compare ce qu'il fait avec chacune des procédures connues ; puis on élimine celles qui sont trop différentes : par exemple, si l'un des nombres rentrés par l'apprenant n'apparaît à aucun moment de la procédure. A la fin du processus on obtient un petit nombre de procédures candidates, et cette information peut être la base de règles tutorielles. L'intérêt de cette idée est d'autoriser des procédures de rentrée des données assez souples : par exemple “Fais tous les calculs dont tu as besoin avec l'ordinateur”. Notons cependant qu'il arrive souvent que la réponse ne nécessite aucun calcul explicite.

Une autre stratégie consiste à demander ‡ l'apprenant de reconnaître sa procédure parmi plusieurs procédures décrites. La question est de savoir si la réponse ne va pas s'appuyer sur des indices de surface, si l'apprenant est suffisamment conscient de sa procédure pour la reconnaître. Comment d'ailleurs décrire ces procédures : est-ce par un discours, est-ce par une suite de calculs ?

Pour une mauvaise procédure, il arrive assez souvent que le résultat donné par le stagiaire, en particulier quand il s'agit d'un résultat numérique, permette de la repérer. Mais il peut arriver aussi que le résultat soit bon avec une procédure fausse. Par exemple dans la situation de Noëlting pour l'item "2, 1 contre 5, 2" on peut répondre : *le deuxième mélange a plus de goût parce qu'il y a plus de jus.*

2 - Le rôle des messages

Dans la situation habituelle du maître devant ses élèves, le rôle des messages est conçu comme devant être compris sur le champ et donc avoir une influence directe sur la décision des élèves. Bien sûr ce n'est pas toujours le cas mais on peut cependant dire que cela fait partie du contrat didactique.

Il n'en est pas de même pour un message d'ordinateur : celui-ci n'est pas une personne, on ne lui doit rien. "S'il envoie une information qui ne me convient pas je peux l'ignorer sans qu'en aucune façon on puisse me le reprocher" (logiciel utilisé sans la présence d'un enseignant).

Une étude a été engagée par Bahia El Gass à propos des messages de DEFI, logiciel d'apprentissage de la démonstration. Il s'agit d'essayer de comprendre les liens qui existent entre un message d'erreur et l'action qui suit ce message. Les premières analyses semblent bien montrer qu'il n'y a pas de lien apparent. Ce résultat décourageant est contredit par le fait qu'au contraire on trouve un effet d'apprentissage incontestable ; tout se passe comme si les messages, au lieu d'être pris en compte sur le champ, servaient d'environnement distillant peu à peu la connaissance. Ils ne jouent pas le rôle de messages d'erreur mais plutôt celui d'une institutionnalisation diffuse.

Bien sûr ces résultats demanderaient confirmation. Ils ont influé sur la conception de notre logiciel : par exemple devant un résultat erroné notre logiciel proposera plutôt des moyens de contrôler la réponse plutôt qu'une explication de la faute : comment vérifier que ce choix est pertinent ?

3 - L'expérimentation des logiciels conçus pour l'apprentissage en autonomie

Depuis que la didactique existe le problème de l'expérimentation se pose.

Avant d'aborder le problème spécifique qui m'intéresse, je voudrais rappeler l'évolution qui me parait s'être produite au début de la didactique. L'idée de construire une nouvelle science, celle-ci étant pratiquée soit par des matheux soit par des psychologues, avait assez naturellement conduit à considérer que la bonne méthode était du style : conception d'un plan d'expérience avec classes expérimentales et classes témoins, puis analyse avec des moyens statistiques. Il faut bien dire que la déception a été grande devant le peu de performance de ce type de méthode pour l'étude de problèmes didactiques : l'exemple le plus fameux est cette étude qui a mobilisé de très nombreuses classes pendant plusieurs années : “quelle est la représentation la plus performante pour les ensembles : les diagrammes de Venn ou les diagramme de Carol”. La réponse “il n'y a pas de différence sensible, mais la présence dans l'enseignement des deux représentations de manière simultanée est plus performante” était bien peu satisfaisante au regard des moyens engagés. La méthode clinique, consistant simplement à observer les élèves, aurait donné ce résultat en quelques semaines. Cette méthode est beaucoup moins coûteuse et souvent beaucoup plus profitable, ne serait-ce que parce qu'elle fait apparaître plus aisément des phénomènes didactiques que l'auteur de l'expérience n'avait pas forcément prévus initialement. Peu à peu, l'équilibre entre ces deux méthodes s'est réalisé en même temps que leur mise au point ; d'une part on sait assez bien quelles sont les précautions à prendre pour obtenir des résultats fiables à l'aide de la méthode clinique, en particulier avec les fiches d'activité (ce n'est pas une chose simple), d'autre part on sait mieux choisir les questions qui méritent une expérimentation systématique (étude de l'effet d'une variable didactique, classification des élèves etc.) et on connaît mieux les outils de la statistique adaptés aux problèmes didactiques.

Malheureusement, si j'en juge par les expériences que je connais, la situation n'est pas aussi favorable pour l'expérimentation de logiciel d'apprentissage en autonomie : plusieurs facteurs interviennent :

- D'abord un tel logiciel est un tout très complexe (même pour un logiciel très simple : de nombreuses variables didactiques interviennent en même temps dont il est très difficile d'isoler l'effet).

- Le temps de travail d'un élève sur ce logiciel est a priori long, au moins une dizaine d'heures, il est naturellement divisé en sessions qui peuvent être assez éloignées dans le temps, et dans les intervalles beaucoup d'autres facteurs vont intervenir dans l'apprentissage.

- Les éléments que l'on peut recueillir sur le travail de l'élève sont "artificiels" : si l'on observe un élève ou un groupe travaillant avec un ordinateur, l'expérience montre qu'il est plus difficile de comprendre ce qu'ils font que s'ils sont devant une feuille de papier : en particulier ils passent avec une rapidité déconcertante de la solution du problème que propose le logiciel à une réflexion sur le fonctionnement du logiciel lui-même. Si l'on part des traces que l'on peut enregistrer dans l'ordinateur, on perd à l'évidence toute une partie de la réflexion que l'élève est incapable de transformer en action cohérente sur l'ordinateur. On voit donc bien qu'il va falloir mettre au point des méthodologies nouvelles d'expérimentation.

Conclusion

La conception de logiciels d'apprentissage pouvant être utilisés par un élève ou un stagiaire sans l'intervention directe d'un enseignant pose donc de nombreux problèmes didactiques nouveaux. Il me semble que parmi ceux-ci certains pourraient être abordés actuellement de manière fructueuse. J'en retiens particulièrement trois :

- Le rôle des messages de ces logiciels dans l'apprentissage. Ceux-ci ne sont en rien comparables aux messages délivrés par un enseignant au cours de son travail avec les élèves. La complexité de l'interaction élève-maitre rend dans ce cas l'étude très difficile. Au contraire, pour un logiciel donné, les messages sont faciles à repérer ; leur déclenchement est analysable ; l'étude est envisageable, à condition bien sûr que le logiciel possède un moyen adapté d'enregistrement des actions de l'élève.
- Le rôle des classes de problèmes dans l'apprentissage. Quelle que soit la description des classes de problèmes, la question se pose des possibilités de transfert de connaissances entre ces classes. En d'autres termes, la maîtrise des problèmes de telle classe est-elle un point d'appui solide pour aborder telle autre classe ?
- Une étude didactique des niveaux d'un problème en fonction des jeux de valeurs choisis. Les hypothèses construites à partir du travail de Noëlting et que je propose dans cet exposé demanderaient à être confirmées et complétées. Il serait nécessaire d'aborder cette question pour d'autres problèmes.