JEAN-LUC DORIER

Exemples d'interaction entre recherches en didactique et en histoire des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1997-1998, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , p. 53-74
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1997-1998___3_53_0>

Exemples d'interaction entre recherches en didactique et en histoire des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire

Jean-Luc DORIER

Laboratoire Leibniz, Équipe de Didactique des Mathématiques, Grenoble

Depuis une dizaine d'années en collaboration avec Aline Robert, Jacqueline Robinet et Marc Rogalski, nous menons un projet de recherche sur l'étude l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université. Ce projet s'appuie sur une expérimentation menée à l'université de Lille 1 où enseigne Marc Rogalski et sur des travaux historiques visant à dégager la genèse de la théorie des espaces vectoriels, il s'inscrit dans le cadre des recherches en didactique des mathématiques. Les différents aspects méthodologiques et les résultats de cette recherche sont synthétisés dans un livre (Dorier 1997a) récemment paru, qui présente également d'autres recherches sur ce sujet dans une perspective internationale. Dans cet article, nous allons nous centrer sur les spécificités des interactions entre nos recherches historiques et notre travail didactique. Cependant, plutôt qu'un exposé général sur la question des interactions entre recherches historiques et didactiques (cf. Dorier 1997b), nous allons présenter ici deux exemples à la fois très différents et représentatifs de ce genre d'interaction.

Le premier exemple est une analyse et une tentative de réponse (au moins partielle) à la difficulté qu'ont les étudiants à gérer le formalisme inhérent à la présentation de la théorie des espaces vectoriels. Nous montrerons comment l'étude de l'histoire peut permettre d'aborder cette question d'une façon renouvelée en évitant de rejeter la cause de cette difficulté uniquement sur des lacunes des étudiants en logique ou à propos du langage ensembliste. L'analyse historique permet plutôt de repenser la fonction du formalisme dans la compréhension et l'utilisation des concepts d'algèbre linéaire. Il ne s'agit néanmoins pas de tenter de reconstruire dans la classe les conditions historiques de constitution des concepts, mais bien d'élaborer un dispositif didactique à l'appui d'une réflexion épistémologique et didactique englobant la connaissance du contexte historique et les contraintes de l'enseignement.

Le deuxième exemple porte sur la notion de rang. Cette notion est centrale en algèbre linéaire. Or nos études ont montré qu'en dehors de tâches routinières, des incompréhensions associées à cette notion subsistent à des niveaux mêmes plus élevés de l'enseignement. Dans ce cas, une analyse de l'histoire nous a conduit à porter sur ces difficultés un regard plus distancié permettant une approche différente de la notion de rang et conjointement de celle de dépendance linéaire où la définition formelle est construite pas à pas à partir de conceptions antérieures des étudiants sur cette notion.

I. L'obstacle du formalisme

Nos premières études (Robert et Robinet 1989 et Rogalski 1990) montrent une difficulté particulièrement forte des étudiants à pouvoir faire fonctionner les concepts d'algèbre linéaire dans des cadres formels en dehors de tâches où une technique précise peut être mise en place. Ce constat est somme toute assez banal, d'ailleurs la plupart des enseignants le font depuis longtemps (et pas seulement en algèbre linéaire) et même les étudiants en ont conscience. Mais ces analyses ont permis de préciser la nature de ce que nous avons appelé (dans un sens naïf) **l'obstacle du formalisme**. Elles montrent que, plus que tout autre contenu enseigné au même niveau, la théorie des espaces vectoriels apparaît comme un domaine abstrait et formel aux étudiants qui se sentent noyés par les nouvelles définitions et ont du mal à faire le lien avec ce qu'ils ont précédemment appris. Dans un contexte où l'espace vectoriel n'est pas spécifié ("soit E un espace de dimension n...") certaines tâches, même en fin d'enseignement, donnent lieu à des réponses qui semblent dénoter un manque total de maîtrise des outils de logique et de langage ensembliste et se traduisent par des dérapages face auxquels les enseignants ont du mal à trouver des réponses.

Face à ce premier constat, nous avons cherché des réponses dans deux directions :

- Tester la fiabilité d'une formation antérieure en logique et langage ensembliste.

- Interroger l'histoire, en particulier pour mieux comprendre la nature du formalisme dans la théorie des espaces vectoriels.

1. Prérequis de logique et langage ensembliste

La première direction a donné lieu à une analyse sur une année universitaire de tous les travaux écrits en temps limité d'une cinquantaine d'étudiants d'une section traditionnelle de DEUG (Dorier 1990a, 2ème partie et 1991). La comparaison des résultats étudiant par étudiant entre un prétest de logique et de langage ensembliste et les travaux d'algèbre linéaire tend à montrer que la réussite en algèbre linéaire est corrélée aux connaissances antérieures en logique élémentaire et langage ensembliste (au moins telles qu'elles ont été évaluées dans le prétest).

Cependant il apparaît que ce transfert ne se fait pas de façon directe et uniquement quantitative. Ainsi plus que des connaissances précises en logique, il semble que ce soit plutôt l'absence de lacunes dans les connaissances de logique qui soit le plus important dans le transfert sur la réussite en algèbre linéaire. On peut avancer l'hypothèse qu'il existe un passage du quantitatif vers le qualitatif qui ne peut s'opérer qu'au delà d'un certain seuil. En d'autres termes ce n'est qu'au delà d'un certain seuil global de connaissances en logique (le quantitatif), que ces connaissances sont mobilisables de façon effective et positive dans l'acquisition des concepts élémentaires d'algèbre linéaire (le qualitatif).

Soulignons ici que ce résultat est identique à celui qu'ont obtenu A. Robert et F. Boschet (1985) à propos de concepts d'analyse réelle en introduisant la *méthode des blocs* reprise ici. Cela laisse supposer que d'une façon générale la corrélation entre connaissances anciennes et acquisitions nouvelles existe bien mais relève d'un processus plus complexe que le simple empilement et qu'il faut se méfier de conclusions trop hâtives dans ce domaine.

En outre, il apparaît que certains types de tâches, qu'on aurait pu croire a priori très liés à des compétences en logique ne le sont que très peu au vu des résultats. Ceci est très marqué pour certaines questions faisant intervenir la définition d'une famille libre par exemple (voir l'exemple développé dans le chapitre suivant). Il semblerait donc que le contexte l'emporte parfois sur le contenu.

Cette remarque, ainsi que la difficulté qu'il y a à faire passer des connaissances de logique pour elles-mêmes, nous ont poussés à penser qu'il pourrait être souhaitable d'associer un enseignement de logique au début du cours d'algèbre linéaire. En intégrant ainsi de façon explicite la logique au début de l'algèbre linéaire on peut mieux gérer la difficulté liée au formalisme de l'algèbre linéaire, tout en améliorant les connaissances en logique élémentaire des étudiants. Mais cette réponse reste partielle.

2. Premières analyses historiques

Nos première études historiques (Robinet 1986, Dorier 1990a, 1ère partie) ont montré que la théorie des espaces vectoriels était très récente. Même si les premières tentatives d'axiomatisation datent de la fin du 19e siècle, la suprématie de la théorie des espaces vectoriels ne s'amorce qu'à partir de 1930. Pendant plus de 40 ans, les démarches analytiques (essentiellement basées sur la théorie des déterminants) ont prévalu, y compris pour des dimensions infinies non dénombrables. Par conséquent, l'histoire atteste que tous les problèmes linéaires abordables au niveau DEUG (et même au-delà) peuvent être (et ont été pendant longtemps) résolus avec des techniques que les étudiants possèdent déjà - au moins en partie. Ainsi aucun de ces problèmes ne peut réellement motiver - justifier - l'introduction d'une théorie axiomatique, aussi coûteuse en termes cognitifs. L'analyse historique montre bien d'ailleurs les résistances que les mathématiciens ont eu à utiliser l'approche axiomatique dans l'étude des équations fonctionnelles. Ils ont préféré en grande majorité, au moins jusqu'au travail de Banach en 1932, résoudre des systèmes infinis d'équations linéaires, parce que les outils à l'œuvre étaient connus et bien rodés. L'analyse des raisons qui ont conduit à l'adoption tardive du point de vue axiomatique met en évidence plusieurs facteurs concomitants, que nous présentons ci-dessous de façon succincte (pour plus de détails voir (Dorier 1996a et 1997a, 1ère partie)).

- Dans la fin du 19e siècle, les notations vectorielles s'imposent en physique. Après une période de conflit entre les défenseurs des quaternions d'Hamilton et les partisans des concepts de la théorie de Grassmann (en particulier autour des formules de Maxwell pour lesquels une notation synthétique s'imposait), un consensus s'établit autour de notations vectorielles stables que physiciens et mathématiciens s'attachent à dégager. Le travail de Burali-Forti et Marcolongo pour unifier les notations vectorielles et diffuser leur usage est caractéristique de cette tendance. De plus, les travaux de ces deux italiens (l'un étant mathématicien, l'autre, physicien), mais aussi celui de Weyl par exemple, ont permis de diffuser les premières approches de la géométrie basée sur une axiomatisation en termes d'espace affine euclidien.

- Au début du 20e siècle, les travaux d'algèbre - essentiellement en Allemagne - conduisent à dégager l'importance des structures algébriques définies axiomatiquement. La structure d'espace vectoriel n'apparaît d'abord pas en tant que telle, alors que les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire sont étudiés à propos des extensions de corps. La première publication en 1930-31 de la *Moderne Algebra* de van der Waerden marque le tournant décisif dans l'organisation de la nouvelle algèbre. Dès la deuxième édition, la théorie des espaces vectoriels s'intègre dans un chapitre traitant des modules sur un anneau.

- En analyse fonctionnelle (dénomination récente), les mathématiciens de la fin du 19e siècle ont d'abord généralisé la théorie des déterminants à la dimension infinie. Puis, les tentatives de généralisation de la résolution de l'équation de Fredholm ont conduit à introduire de nouveaux ensembles de fonctions et ainsi à dégager peu à peu le concept d'espace fonctionnel. Cette abstraction a d'abord porté essentiellement sur les propriétés topologiques, puis l'introduction du langage géométrique, liée à l'importance des notions topologiques (distance, norme, orthogonalité), a mis en avant l'intérêt d'une approche synthétique des espaces fonctionnels. C'est une des raisons essentielles qui a conduit à l'explicitation de la structure algébrique de ces espaces. Banach avec son traité de 1932 a finalement imposé l'approche axiomatique. Dans l'introduction de ce livre, l'auteur justifie l'intérêt de l'approche adoptée par le gain que son aspect unificateur apporte : établir des théorèmes dans un cadre général, puis les spécifier pour chaque ensemble de fonctions vérifiant les quelques axiomes posés au départ. Par ailleurs, Banach résout des problèmes nouveaux qui n'auraient pu être abordés dans le cadre analytique.

- L'importance des espaces de Hilbert, en analyse fonctionnelle, mais aussi en physique quantique, a conduit à l'élaboration de la théorie axiomatique des espaces vectoriels euclidiens et hermitiens. Ce sont avant tout les espaces de dimension infinie qui sont visés, mais du même coup, les mathématiciens prennent l'habitude d'aborder la dimension finie avec le point de vue axiomatique.[5]

3. Le caractère unificateur et généralisateur de la théorie des espaces vectoriels - Conséquences didactiques (levier méta).

On voit donc que l'approche axiomatique ne s'est pas imposée essentiellement parce qu'elle a permis d'aborder et de résoudre de nouveaux problèmes ; même si c'était déjà le cas pour Banach, ce fait a plutôt été un effet du développement de l'approche axiomatique qu'une des causes de celui-ci. L'approche axiomatique, qui existait potentiellement depuis 1888, est restée pendant quarante ans à l'état de tentatives individuelles de "modernisation" avortées. Elle impliquait une refonte profonde des pratiques de recherche, remettant en cause la façon d'aborder les problèmes qu'elle se proposait de résoudre. De plus, son adoption nécessitait un investissement "gratuit" dans un système de pensée, dont on ne pouvait recueillir les fruits que de façon différée. De fait, beaucoup ont préféré continuer à généraliser les outils à l'œuvre depuis des décennies. En effet, même si certaines généralisations devenaient très techniques, l'usage d'outils bien connus permettait une prise directe sur la réalité du problème à résoudre qu'une théorie axiomatique nouvelle interdisait. Dans le début des années trente, la situation a évolué plus favorablement. L'approche synthétique par le calcul vectoriel du monde géométrique a montré ses avantages par rapport à la méthode analytique héritée de Descartes. L'introduction du langage géométrique en analyse fonctionnelle déplace ce débat en dimension infinie favorisant ainsi l'abandon de la représentation analytique pour une approche traitant la fonction comme un objet indépendant de ses représentations. Ce moment de l'évolution des problèmes linéaires est essentiel pour la question qui nous occupe. En effet, autour de l'équation de Fredholm convergent au début du 20^{e} siècle les approches issues de trois des origines essentielles de l'algèbre linéaire : géométrique, analytique (résolution des équations), et fonctionnelle. De plus, la théorie des déterminants généralisée, enrichie d'outils topologiques de plus en plus sophistiqués, a permis de résoudre l'équation de Fredholm dans des cas de plus en plus complexes, mais les limites se font sentir. Par exemple des liens apparaissent entre les opérateurs fonctionnels et les formes quadratiques sans qu'on puisse vraiment faire ressortir de traits communs. Dans ce contexte, l'approche axiomatique va pouvoir enfin s'imposer parce qu'elle permet d'unifier divers problèmes aux origines variées dont les ressemblances commencent à apparaître et parce qu'elle permet aussi de combler les manques dans le processus de généralisation. De plus, l'analogie géométrique, à présent possible au delà de la dimension trois jusqu'à des dimensions infinies, donne à cette théorie abstraite le support intuitif qui lui manquait jusqu'alors. L'algèbre moderne va alors fournir le

---

[5] Il est intéressant de noter au passage que les présentations axiomatiques des espaces vectoriels euclidiens (ou hermitiens) de dimension finie de cette période ressemblent beaucoup à l'enseignement (jusqu'à il y a quelques années) de la théorie des espaces vectoriels de première année de DEUG en France.

cadre nécessaire pour que l'approche axiomatique se fonde en une véritable théorie dont le pouvoir unificateur ne cessera de s'étendre, alors que les nouvelles applications permettront de continuer le développement des outils dans cette nouvelles approche.

Ainsi l'analyse historique montre la complexité épistémologique liée à l'adoption de la théorie axiomatique des espaces vectoriels comme cadre de référence pour le traitement des problèmes linéaires. Le résumé que nous en avons fait ci-dessus permet de se faire une idée de ce que nous avons appelé en reprenant une dénomination de Robert (1986), déjà en germe dans le travail de Robinet (1984), **les caractères unificateur, généralisateur, simplificateur et formalisateur** de cette théorie. La simplification est un effet différé qui suppose une bonne connaissance de la théorie. Le formalisme est, quant à lui, intrinsèque à la théorie même et apparaît comme une condition nécessaire des aspects unificateur et généralisateur. Pour englober des situations aussi variées sous une même théorie, il est nécessaire d'atteindre un degré d'abstraction qui ne peut s'exprimer qu'en des termes formels où les objets ne sont définis qu'en fonction d'un petit nombre de propriétés communes, les dépouillant de leurs caractères spécifiques pour ne garder que ce qui les réunit, leurs propriétés linéaires précisément.

Les conditions décrites ci-dessus laissent entrevoir la difficulté didactique. Comment rendre compte de cette dimension épistémologique de l'algèbre linéaire dans son enseignement ?

Comment en effet montrer sur un seul problème, voire même plusieurs, l'intérêt d'une telle théorie qui est justement de permettre d'en unifier plusieurs en favorisant des généralisations ? Cette difficulté a été examinée dès le début de nos recherches. Nous avons d'abord expérimenté différentes ingénieries (basées sur les carrés magiques, ou les suites de Fibonacci (Dorier 1995, 178-179)). L'analyse a posteriori de ces expérimentations a montré que ces ingénieries ne répondaient pas aux attentes. Nous avons donc cherché de nouvelles possibilités en nous basant sur l'analyse épistémologique, qui a été affinée.

C'est dans ce processus dialectique de la réflexion épistémologique entre analyse historique et analyse didactique, que s'est constituée une approche basée sur la notion de *levier méta*. Cette notion avait été introduite par Robert et Robinet (1993 et 1996), elle a été précisée dans le cadre spécifique de cette approche. Le mot *levier* se rapporte à l'idée d'introduire à un moment bien choisi de l'apprentissage un élément permettant aux étudiants de mieux comprendre la nature épistémologique de l'algèbre linéaire. Le préfixe substantivé *méta* signifie que ce levier favorise une réflexion *sur* l'activité mathématique propre.

La seule résolution d'un ou même de plusieurs problèmes mathématiques ne permettant de faire comprendre à elle seule les caractères unificateur et généralisateur de la théorie des espaces vectoriels, nous avons construit des situations faisant intervenir, en liaison avec un problème mathématique, un élément provoquant chez les étudiants une réflexion sur un aspect du problème ou de sa résolution (c'est cet élément qui constitue le levier méta). L'interaction du problème mathématique et du levier méta vise à déclencher, dans un contexte que l'étudiant s'est approprié, une réflexion sur l'apport de la théorie des espaces vectoriels en termes d'unification, de généralisation et de simplification. Autrement dit, ce type d'activité de niveau *méta* vise à faire faire un pas de côté pour que les étudiants s'interrogent sur la fonctionnalité d'une théorie qui a des caractéristiques épistémologiques nouvelles par rapport à ce qu'ils connaissent déjà en mathématiques.[6]

Nous avons ainsi mis au point un certain nombre de séquences (Dorier 1192, 1995 et 1997a, 2ème partie, IV) et les difficultés méthodologiques dans l'utilisation du levier méta ont été plus spécifiquement étudiées dans (Robert 1990 et 1992 et Dorier et al. 1994). Nous ne développerons pas plus ce point ici et nous renvoyons le lecteur intéressé à ces références.

II. Autour du concept de rang

Le rang permet de faire le lien entre les concepts de dépendance linéaire et de générateur : c'est le nombre maximal d'éléments indépendants dans un sous-espace aussi bien que le nombre minimal de générateurs. Cet invariant se retrouve aussi dans une perspective duale, puisque la dimension de l'espace total diminuée du rang caractérise le nombre minimal d'équations nécessaires pour représenter un sous-espace, ainsi que le nombre maximal d'équations indépendantes dans tout système de représentation, or cet aspect dual a joué un rôle essentiel dans la genèse du concept de rang (Dorier 1993).

Le concept de dimension est très lié à celui de rang. Or, nous avons montré que certains des premiers auteurs à avoir introduit ce concept, à partir d'une généralisation du cadre géométrique, ont négligé l'aspect générateur de ce concept. Ils définissent la dimension comme le nombre maximal de vecteurs indépendants dans un sous-espace, sans jamais montrer qu'une famille génératrice ne peut avoir un cardinal inférieur à la dimension (Dorier 1996b, 183-186, et 1997a, 1ère partie, II-1).

La notion de rang correspond à un raffinement de la notion de dépendance, il permet dans un ensemble de générateurs, dans un sous-espace ou dans un système d'équations représentatives, de déterminer le "degré de dépendance". Sa détermination relève également d'un procédé de tri permettant de dégager un système générateur minimal, ou libre maximal, c'est-à-dire une base. La compréhension de la notion de rang dépend donc avant tout de la compréhension des notions d'indépendance et de dépendance linéaires, c'est ce point que nous commencerons par aborder.

1. Sur l'indépendance et la dépendance linéaire

a - Difficultés didactiques

Comme nous l'avons déjà souligné plus haut, l'enseignement de l'algèbre linéaire apparaît comme excessivement formel aux étudiants. Or, ceci est sensible dès les débuts de la théorie.

En effet, l'usage de la définition formelle de l'indépendance ou de la dépendance linéaires pose souvent des problèmes de formulation aux débutants, liés à la syntaxe du langage formel. L'indépendance linéaire est à ce titre beaucoup plus difficile du fait que sa définition formelle est quasiment impossible à traduire en langue naturelle d'une façon qui conserve la syntaxe : elle s'exprime à l'aide d'une quantification universelle et d'une implication alors que la définition en langue naturelle (il n'existe pas d'autre combinaison

[6] Cette approche ne s'oppose pas a priori à la théorie des situations, dont les auteurs ont d'ailleurs utilisé les outils dans leurs analyses. Cependant les éléments qui ont conduit à l'élaboration de telles activités sont en partie extérieurs à cette théorie. Le travail d'analyse des activités méta dans le paradigme de la théorie des situations reste à en grande partie à faire.

linéaire que celle à coefficients tous nuls qui donne le vecteur nul) utilise la négation d'une quantification existentielle et pas d'implication. Au sens de Duval (1993 et 1995), il n'y a donc pas congruence sémantique entre les deux formulations. Dans les deux cas, il s'agit bien de la négation des définitions en langue formelle et en langue naturelle de la dépendance (qui elles sont sémantiquement congruentes), mais cette négation revêt un caractère très technique en langue formelle (il faut non seulement utiliser les règles de négation formelle mais aussi expliciter des choses non dites, en particulier qu'une combinaison linéaire à coefficients tous nuls est toujours nulle, et des quantificateurs cachés), alors qu'en langue naturelle, elle se marque seulement par une négation (ne...pas). Dans des tâches relativement élémentaires, il est courant de lire de la part des débutants des formulations incorrectes de cette définition (absence de quantificateur, voire même d'implication), néanmoins cette maladresse, qui peut n'être que passagère, n'empêche pas que la majorité des étudiants finissent par réussir les tâches classiques : essentiellement montrer qu'une famille de vecteurs (dans des cadres divers) est libre ou liée. Par contre, des difficultés plus tenaces sont visibles dans des tâches moins usuelles. Examinons par exemple les deux exercices suivants[7] :

1. *Soient* u, v *et* w *trois vecteurs de l'espace et* f *un endomorphisme. Si* u, v *et* w *sont indépendants, est-ce que* f(u), f(v) *et* f(w) *le sont ?*

2. *Soient* u, v *et* w *trois vecteurs de l'espace et* f *un endomorphisme. Si* f(u), f(v) *et* f(w) *sont indépendants, est-ce que* u, v *et* w *le sont ?*

Une proportion écrasante d'étudiants se trompent et affirment que la proposition 1 est vraie. Le raisonnent le plus fréquent revient, à quelques variantes près, à ceci :

Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, *alors comme f est une application linéaire :* $\alpha f(u) + \beta f(v) + \gamma f(w) = f(0) = 0$. *Or, comme* u, v et w *sont indépendants, alors* $\alpha = \beta = \gamma = 0$ *; donc* f(u), f(v) *et* f(w) *sont indépendants, donc la proposition 1 est vraie.*

Une première analyse de ce type de réponses semble révéler une difficulté dans l'utilisation de l'implication mathématique. Dans cet exemple, en effet l'implication apparaît à deux niveaux, dans l'énoncé de la proposition à démontrer mais aussi dans la définition de l'indépendance linéaire qui est au cœur de l'hypothèse et de la conclusion de la proposition. Plus précisément, la proposition à démontrer suit un schéma du type suivant :

si (P implique Q) est vraie alors (P' implique Q') est vraie

De fait la proposition est une implication dont l'antécédent et la conclusion sont des implications. Pour démontrer ce type de proposition, il faut partir de P' et en déduire Q', en utilisant que (P implique Q) est vraie. Or ici Q = Q' et les étudiants partent de P dont ils déduisent P', puis comme (P implique Q) est vraie en déduisent Q qui est aussi Q'. Ils croient ainsi avoir démontré la proposition. Il semblerait donc que leur difficulté soit essentiellement de nature logique.

Nous avons testé cette hypothèse lors de notre travail de doctorat. Nous avons d'abord fait passer et analysé un prétest de logique élémentaire (en début d'année), puis nous avons proposé les deux exercices précédents après le début de l'enseignement d'algèbre linéaire. L'étude des corrélations montre que celles-ci sont quasiment inexistantes entre les

---

[7] Les exercices présentés dans ce paragraphe proviennent de sources diverses. Ils avaient, entre autres, été testés par A. Robert et J. Robinet (1989), nous les avons également repris dans notre travail de doctorat (Dorier 1990).

compétences des étudiants dans l'utilisation de l'implication mathématique et les réponses aux deux exercices précédents. Par contre, comme nous l'avons signalé plus haut, il existe une bonne corrélation globale entre le prétest de logique et le post-test en algèbre linéaire. Il apparaît donc que les dysfonctionnements repérés dans l'utilisation de la définition formelle de l'indépendance linéaire ne peuvent être dus aux seules difficultés de type logique[8]. Il serait vain également d'invoquer une difficulté générale des étudiants à pouvoir mener correctement une démonstration formelle. Nos analyses nous poussent à chercher des raisons plus intrinsèquement liées au contexte de l'algèbre linéaire.

Ainsi sur l'exemple précédent, si on demande aux étudiants ayant donné une réponse fausse d'illustrer la proposition en géométrie par exemple, la plupart réalisent immédiatement qu'il y a une erreur, sans être cependant capables de la détecter. En conséquence, il existe un hiatus entre l'utilisation que les étudiants font de la définition formelle de l'indépendance, et ce qu'ils perçoivent intuitivement de cette notion. D'où l'hypothèse qu'une telle définition ne peut être opérationnelle, faute d'être raccrochée à un contexte intuitif qui lui donne du sens.

Une autre erreur classique liée au caractère formel de la définition de l'indépendance linéaire concerne le cadre des fonctions. En effet, une technique classique pour examiner l'indépendance d'un ensemble de fonctions consiste à poser une combinaison linéaire nulle, puis, à prendre autant de valeurs de x qu'il y a de fonctions, et enfin, à résoudre le système numérique carré ainsi obtenu. Si on trouve la seule solution nulle, on peut alors affirmer que la famille est libre. Pour comprendre et accepter ce raisonnement, il faut avoir bien assimilé le fonctionnement de l'implication, qui autorise la perte d'une partie de l'information. Or cette caractéristique de l'implication va à l'encontre du principe du maximum d'information, dont on sait qu'il conditionne fortement le comportement des étudiants. De plus, dans le cas où l'on trouve d'autres solutions que la solution nulle, on ne peut rien conclure sur la nature de la famille. Il y a donc une dissymétrie troublante dans les raisonnements, suivant que la famille est libre ou non.

Voici enfin un exercice qui révèle un autre type de difficulté :

Soient u, v *et* w *trois vecteurs de l'espace non deux à deux colinéaires, sont-ils indépendants dans leur ensemble ?*

Il est courant que les étudiants soient persuadés que la réponse est oui. Ils essaient alors d'échafauder une justification à l'aide de la définition formelle. Cette tentative peut vite s'enfermer dans une impasse, ou bien, sous la pression du contrat didactique qui veut que l'étudiant donne une réponse, les démonstrations les plus édifiantes peuvent être produites. Là encore une illustration sur un exemple familier convainc facilement les étudiants du bon résultat, mais la difficulté à utiliser la définition formelle subsiste.

Cet exercice révèle que beaucoup d'étudiants ont du mal à traiter les questions de dépendance linéaire de façon globale. Très souvent, tout se passe comme si ils scindaient le problème en sous-problèmes et recollaient les morceaux à la fin. Il est vrai que cette technique donne des résultats corrects dans de nombreux cas, et peut même s'avérer économique, si elle est bien contrôlée, mais elle donne aussi lieu à des erreurs (comme dans le cas de l'exercice présent). Dans un travail de doctorat récent, Ousman (1996) a mis en

---

[8] Ces résultats ont depuis été confirmés par des travaux sur l'apprentissage de la logique, qui ont mis en évidence, l'importance du contexte dans lequel les exercice de logique sont proposés dans les compétences des étudiants (Durand-Guerrier 1996).

évidence plusieurs types de difficultés que l'on peut rattacher à ce comportement de réduction en sous-problèmes. En reprenant l'idée d'Ousman, on peut rattacher ces erreurs à des théorèmes en acte, au sens de Vergnaud (1990), par exemple :

- Si u et v sont indépendants chacun de w, alors u, v et w sont indépendants.

- Si un vecteur n'est pas combinaison linéaire d'autres vecteurs, alors tous les vecteurs sont indépendants dans leur ensemble.

- Si u, v et w sont indépendants et si u', v et w le sont aussi, alors u, u', v et w le sont aussi.

Comment peut-on expliquer cet ensemble de difficultés ?

La dépendance linéaire est une notion qui généralise la notion de proportionnalité de deux séquences ordonnées de nombres (deux vecteurs en analytique). Nous faisons l'hypothèse que c'est dans les termes de cette généralisation que réside une part du problème. Pourtant, celui-ci est plus complexe, comme cela apparaît dans le dernier théorème en acte cité ci-dessus. Dans ce cas, la difficulté pour trois vecteurs peut avoir été dépassée, mais il y a un problème dans le traitement de quatre vecteurs. Plus précisément, si la question porte directement sur quatre vecteurs, ce théorème en acte a peu de chance d'apparaître ; il est, par contre, beaucoup plus probable de le déceler, si, comme le suggère la notation utilisée ici, les quatre vecteurs sont scindés en deux groupes de deux. En particulier, Ousman a pu parvenir à une analyse pertinente en modélisant le comportement d'étudiants par ce théorème en acte dans un exercice où il était demandé de chercher l'intersection des deux sous-espaces engendrés respectivement par {u, u'} et {v, w}. En effet, beaucoup d'étudiants ont montré que u d'une part et u' d'autre part ne dépendaient pas de v et w et en ont conclu que l'intersection était réduite à {0}. En réalité, il existait effectivement des combinaisons linéaires de u et u' égales à des combinaisons linéaires de v et w et l'intersection était une droite.

Ces dysfonctionnements ont en commun de réduire une propriété globale sur un ensemble à la même propriété sur plusieurs sous-ensembles. C'est donc une forme de réduction d'un problème global en sous-problèmes locaux.

Les trois difficultés que nous venons d'analyser montrent que la compréhension des définitions formelles de la dépendance et de l'indépendance linéaires ne sont pas toujours opérationnelles et que, par conséquent, leur utilisation par les étudiants ne s'accompagne pas d'un contrôle faisant appel à des conceptions antérieures de ces concepts, plus locales en référence à un contexte plus familier, (sur la proportionnalité, sur la dépendance des équations, des vecteurs géométriques, etc.). Comment alors enseigner ces notions formelles dans un meilleur rapport aux connaissances antérieures des étudiants ?

b - Confrontation avec l'analyse historique

i - Sur la difficulté à appréhender l'aspect global du concept de dépendance linéaire

Dans notre analyse historique, nous avons repéré que la difficulté du passage de deux à plus de deux objets est sensible chez certains auteurs. Par exemple, dans son texte sur la dépendance dans les systèmes d'équations, Euler (1750) distingue, dans le cas de trois équations, le cas où deux équations sont identiques de celui où l'une d'entre elles est *comprise* dans les deux autres. A la suite d'Euler, l'usage des déterminants ne laisse plus apparaître cette difficulté. Les déterminants relèvent, par essence, d'une approche globale de la notion de dépendance. Ainsi, s'il y a bien eu, au début de la genèse du concept de dépendance, une attention particulière portée sur le passage de deux à plus de deux objets, nous n'avons pas repéré dans la genèse historique des concepts de dépendance et d'indépendance linéaires de réel blocage sur le problème de la réduction d'un problème global en sous-problèmes locaux. Est-ce à dire qu'il n'y a pas ici d'obstacle épistémologique ?

Dans les deux comportements analysés dans le paragraphe précédent (pour trois puis pour quatre vecteurs), les erreurs ont des origines semblables, dans la mesure où, comme nous l'avons dit plus haut, elles relèvent de la réduction d'une propriété globale sur un ensemble à la même propriété sur deux sous-ensembles. On détecte donc ici un type d'erreur récurrent et résistant, puisque même vaincu à un certain niveau, il peut réapparaître, chez un même individu, à un niveau de complexité plus grand. De plus, ces erreurs correspondent à la généralisation d'un procédé efficace dans un certain domaine à un domaine où il n'est plus entièrement valide. En effet, la réduction d'une propriété d'un ensemble à des sous-ensembles est un processus de simplification efficace dans un grand nombre de situations mathématiques ; par exemple, la continuité ou la dérivabilité d'une fonction se déduit de celle de ces composantes élémentaires, via les théorèmes classiques d'opérations sur les fonctions. Ainsi la difficulté repérée ici semble bien posséder certaines des caractéristiques essentielles d'un obstacle au sens où on utilise ce terme en didactique des mathématiques.

La question de la nature de cet obstacle est plus délicate. Avant d'examiner la possibilité d'une origine d'ordre épistémologique, regardons les deux autres possibilités (ontogénétique ou didactique, en reprenant la classification de Brousseau rappelée au I de ce texte). L'âge des étudiants de DEUG (18-20 ans), nous pousse à écarter l'origine ontogénétique. Cet obstacle peut-il être d'origine didactique, c'est-à-dire résulter de choix curriculaires ? La réduction en sous-problèmes est une méthode mathématique propre à simplifier la résolution de certains problèmes. L'expert connaît les domaines de validité de cette réduction et discrimine spontanément, ou en tous cas dans un réflexe bien conditionné - donc plus ou moins conscient et explicitable -, les cas où elle s'applique, de ceux où elle n'est plus applicable. Cependant cette compétence ne fait jamais l'objet d'un enseignement explicite, tout au plus apparaît-elle dans quelques allusions marginales de la part du professeur. L'élève développe donc un rapport à cette méthode de réduction en sous-problèmes, sans contrôle explicite de l'institution didactique. Cette méthode n'est en particulier jamais institutionnalisée comme élément de connaissance ni même seulement comme technique et a fortiori ses domaines de validité ne sont jamais explicités. Nous ne pouvons donc rejeter l'hypothèse d'une origine didactique à l'obstacle relevé plus haut dans la mesure où le système ne prend pas en charge l'enseignement des méthodes de ce type.

De plus, l'étude qui précède fournit quelques éléments pour l'élaboration d'un dispositif didactique permettant la gestion de cet obstacle. En effet, sur la base des deux exemples que nous avons abordés, il est possible de mettre en place des situations didactiques, dont on sait qu'elles vont favoriser l'apparition du théorème en acte chez de nombreux étudiants. Dans le premier cas, on a vu qu'une confrontation avec un exemple familier crée une déstabilisation, propre à réaliser le franchissement de l'obstacle pour trois vecteurs. Dans le cas de quatre vecteurs, la déstabilisation peut venir de la donnée d'un vecteur de l'intersection ou du fait de poser la question de l'indépendance des quatre vecteurs. En incluant à ces situations une réflexion de niveau méta sur la méthode générale de réduction en sous-problèmes, on peut alors envisager un dispositif didactique de dépassement de cet obstacle.

Nous passons maintenant à la question de l'articulation de la définition formelle de l'indépendance linéaire avec les connaissances antérieures.

ii - Conceptions de dépendance sur les équations

Le concept de dépendance linéaire trouve ses origines dans l'étude des systèmes d'équations linéaires (Dorier 1993 et 1997a, 1ère partie, I-1)). Un des premiers textes mettant ce concept explicitement en avant est dû à Leonhard Euler et s'intitule: *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes,* il date de 1750. Euler y traite du paradoxe dit de Cramer. L'étude du problème le mène à remettre en cause le fait qu'un système de n équations linéaires en n inconnues détermine toujours une solution unique, fait qui, semble-t-il, était à l'époque implicitement admis de tous. Euler commence par examiner ce problème pour n=2 ; il donne comme exemple les deux équations :

$$3x - 2y = 5 \text{ et } 4y = 6x - 10 \text{ ;}$$

Voici ce qu'il en dit :

> On verra qu'il n'est pas possible d'en déterminer les deux inconnues x et y, puisqu'en éliminant l'une x, l'autre s'en va d'elle-même et on obtient une équation identique, dont on est en état de déterminer rien. La raison de cet accident saute d'abord aux yeux, puisque la seconde équation se change en $6x - 4y = 10$, qui n'étant que la première $3x - 2y = 5$ doublée, n'en diffère point. (Euler 1750, 226)

Il ne s'agit pas ici de croire que ce que dit Euler est une révélation pour les mathématiciens de l'époque. Mais le fait que deux équations puissent être identiques, cet "accident" pour reprendre le terme employé par Euler, n'était pas digne d'intérêt. Jusque là on n'avait pas cherché à faire une théorie des équations linéaires, mais à mettre en place des techniques pratiques de résolution. C'est en cela que le texte d'Euler est une nouveauté, il porte sur les équations linéaires, mais n'a pas pour but d'en donner de résolution, il propose une approche plutôt descriptive et qualitative.

Regardons maintenant de plus près ce que dit Euler. Ce qui semble important, c'est que, bien qu'elle "saute d'abord aux yeux", ce n'est pas l'identité des équations qui est le critère pour signifier l'indétermination du système, mais une résolution par élimination. Ce qui prouve que la résolution reste la préoccupation majeure.

Pour n=3, Euler donne deux exemples : un, où deux équations sont identiques et un autre, où une équation est le double de la somme des deux autres. Dans les deux cas, il n'y a pas de tentative de résolution, et Euler conclut :

> Ainsi quand on dit que pour déterminer trois inconnues, il suffit d'avoir trois équations, il y faut ajouter cette restriction, que ces trois équations diffèrent tellement entr'elles, qu'aucune ne soit déjà comprise dans les autres. (ibid., 226)

Pour n=4, Euler rajoute que, dans certains cas, deux inconnues peuvent rester indéterminées, et il donne l'exemple des quatre équations suivantes :

$$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0 \text{ ,}$$

$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0 \text{ ,}$$

$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0 \text{ ,}$$

$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0 \text{ ,}$$

elles ne vaudroient que deux, car ayant tiré de la troisième la valeur de

$$x = -13y + 14z - 15v - 16$$

et l'ayant substituée dans la seconde pour avoir :

$$y = \frac{33z - 3v - 52}{29} \quad \text{et} \quad x = \frac{-23z + 33v + 212}{29},$$

ces deux valeurs de x et de y étant substituées dans la première et la quatrième équation conduiront à des équations identiques[9], de sorte que les quantités z et v resteront indéterminées. (ibid., 227)

Ici donc, à nouveau, la démonstration repose sur une résolution par élimination et substitution. Euler ne mentionne pas les relations linéaires entre les équations, pourtant assez apparentes : (1) - (2) = (4) et (1) - 2x(2) = (3) (par exemple). Pour finir, il conclut par un énoncé général :

Quand on soutient que pour déterminer n quantités inconnues il suffit d'avoir n équations qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette restriction que toutes les équations soient différentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit renfermée dans les autres. (ibid., 228)

Pour un lecteur moderne, "être comprise dans" ou "être renfermée dans" traduit immédiatement une relation de dépendance linéaire. Pourtant une lecture minutieuse de ce que fait Euler nous montre, qu'à ses yeux, cela traduit plutôt un "accident" dans la fin d'une résolution par élimination et substitution, qui fait que certaines inconnues restent indéterminées. Bien sûr il nous montre, à quelques reprises, que la raison en vient de relations linéaires entre les équations, mais ce n'est pas le critère qu'il retient comme décisif. Ce faisant, il s'inscrit tout à fait dans la ligne de ce qui prédominait à l'époque, la résolution. La différence entre les propriétés de "dépendance linéaire" et "être comprise (enfermée) dans" peut sembler mince, mais elle a eu des incidences importantes. En effet, le point de vue d'Euler le lie au cadre des équations alors que la dépendance linéaire est un concept plus large, valable à la seule condition qu'on puisse faire des combinaisons linéaires. Aussi, pour bien marquer la différence, nous appellerons *dépendance inclusive,* cette propriété pour une équation "d'être comprise (enfermée) dans" d'autres.

Jusque vers la deuxième moitié du 19e siècle, le concept de dépendance inclusive, plutôt que celui de dépendance linéaire, est à l'œuvre dans le cadre des équations linéaires. Cette conception est mathématiquement équivalente à la dépendance linéaire, de plus, elle est tout à fait efficace, et en quelque sorte naturelle, dans le contexte de l'époque, où la préoccupation majeure face aux systèmes d'équations linéaires était leur résolution. Cependant cette conception empêchait de voir les équations et les n-uplets de solutions de la même façon au regard de leur linéarité. Or, cette limitation n'a pas permis de dégager entièrement le concept de rang. En effet, pour ce faire, il fallait pouvoir utiliser un raisonnement dual permettant de relier entre eux tous les systèmes ayant le même ensemble de solutions. Or un raisonnement dual nécessite de pouvoir transformer une équation en n-uplet et vice versa, c'est-à-dire d'unifier ces deux objets sous un même concept linéaire : le vecteur au sens de l'élément d'un espace vectoriel. Ce pas a été franchi en 1875 par Frobenius.

Celui-ci commence par donner la définition suivante :

---

[9] Attention, Euler ne veut pas simplement dire que les deux équations sont identiques l'une à l'autre, mais que chacune est identique, c'est-à-dire, toujours vraie.

Plusieurs solutions particulières

$$A_1^{(\chi)}, A_2^{(\chi)}, \ldots, A_n^{(\chi)} \ (\chi = 1, 2, \ldots, k)$$

seront dites indépendantes *ou* différentes, *si* $c_1A_\alpha^{(1)} + c_2A_\alpha^{(2)} + \ldots + c_kA_\alpha^{(k)}$ *ne peuvent s'annuler pour tous les* $\alpha = 1, 2, \ldots n$, *sans que* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *soient tous nuls, en d'autres termes, si les* k *formes linéaires* $A_1^{(\chi)}u_1 + A_2^{(\chi)}u_2 + \ldots + A_n^{(\chi)}u_n$ $(\chi = 1, \ldots, k)$ *sont indépendantes*[10].

Non seulement cette définition est tout à fait semblable à la définition moderne de l'indépendance linéaire (c'est la première fois qu'une telle définition est donnée), mais elle montre explicitement la similarité entre les n-uplets de solutions et les équations dans leur caractère linéaire. Cette idée, a priori si simple, va être essentielle dans le travail de Frobenius ; il va ainsi mettre en évidence, en quelques pages, pour la première fois, toutes les caractéristiques essentielles du rang d'un système (quoique ce concept soit encore implicitement défini comme l'ordre du plus grand mineur non nul)[11].

L'idée essentielle de Frobenius consiste à introduire le concept de système associé (*zugeordnet* oder *adjungirt)* à un ensemble de n-uplets, ce qui en terme moderne correspond à la représentation cartésienne de l'orthogonal du sous espace engendré par les n-uplets. Voici en résumé son raisonnement.

Considérons le système suivant : $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$ (I)

Si $(A_1^{(\chi)}, A_2^{(\chi)}, \ldots, A_n^{(\chi)})$ $(\chi = 1, 2, \ldots, n-r)$, r étant l'ordre maximal des mineurs non nuls, est une base de solutions de (I), le système associé est :

$$\begin{cases} A_1^{(1)}x_1 + \ldots + A_n^{(1)}x_n = 0 \\ \ldots \\ A_1^{(n-r)}x_1 + \ldots + A_n^{(n-r)}x_n = 0 \end{cases} \quad (I^*)$$

Maintenant si $(B_1^{(\upsilon)}, B_2^{(\upsilon)}, \ldots, B_n^{(\upsilon)})$ $(\upsilon = 1, 2, \ldots, q)$ est une base de solutions of (I*), le système associé est :

$$\begin{cases} B_1^{(1)}x_1 + \ldots + B_n^{(1)}x_n = 0 \\ \ldots \\ B_1^{(q)}x_1 + \ldots + B_n^{(q)}x_n = 0 \end{cases} \quad (I^{**})$$

Frobenius démontre que, quel que soit le choix des bases à chaque étape, le système (I**) est équivalent au système (I) et que q = r.

Ce premier résultat de dualité en dimension finie lui permet de montrer le double niveau d'invariance associé au rang (nombre maximal de vecteurs indépendants et nombre

---

10 *Mehrere particuläre Lösungen*

$$A_1^{(\chi)}, A_2^{(\chi)}, \ldots, A_n^{(\chi)} \ (\chi = 1, 2, \ldots, k)$$

sollen daher unhabhängig *oder* verschieden *heissen, wenn* $c_1A_\alpha^{(1)} + c_2A_\alpha^{(2)} + \ldots + c_kA_\alpha^{(k)}$ *nicht für* $\alpha = 1, 2, \ldots n$, *verschwinden kann, ohne dass* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *sämmtlich gleich Null sind, mit andern Worten wenn die k linearen Formen* $A_1^{(\chi)}u_1 + A_2^{(\chi)}u_2 + \ldots + A_n^{(\chi)}u_n$ $(\chi = 1, \ldots, k)$ *unhanbhängig sind* (Frobenius 1875, 255).

11 Le terme de rang (*Rang)* sera introduit pour la première fois, par Frobenius en 1879.

minimal de générateurs), à la fois pour le système d'équations et pour l'ensemble de solutions. De plus, l'approche de Frobenius a permis de considérer un système comme l'élément d'une classe de systèmes tous équivalents (c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions), ce qui constitue une étape fondamentale pour la représentation cartésienne des sous-espaces.

Ainsi, on repère dans l'histoire que la conception de dépendance inclusive semble jouer un rôle d'obstacle à l'émergence du concept de rang. Plus précisément, l'obstacle réside dans l'adoption d'une définition formelle de l'indépendance linéaire unifiant la dépendance des n-uplets et des équations. En effet, il est clair dans le travail de Frobenius que la formulation d'une telle définition permet en quelques pages d'expliciter toutes les caractéristiques du rang.

Or les difficultés des étudiants que nous évoquions plus haut peuvent être interprétées à la lumière de ce que nous avons repéré dans l'analyse historique. En effet, les étudiants ont du mal à faire fonctionner la définition formelle de l'indépendance linéaire, alors qu'ils savent faire fonctionner des connaissances antérieures qui lui sont attachées dans des contextes plus familiers. Dans son travail, Ousman (op. cité.) a fait passer un test à des étudiants entrant à l'université avant tout enseignement d'algèbre linéaire. Les étudiants doivent dire, sur des exemples, si les équations de certains systèmes sont ou non dépendantes. Aucune définition du terme "dépendant" n'a été donnée auparavant et les étudiants se réfèrent simplement à une compréhension primitive du terme dans le langage courant ou en rapport avec d'autres cas d'utilisation en mathématiques. Les réponses laissent paraître que très souvent la conception de la dépendance des étudiants est très proche de ce que nous avons appelé la dépendance inclusive, à la suite de nos analyses historiques. Ce constat est concordant avec l'analyse du contexte historique dans la mesure où dans l'enseignement secondaire l'étude des systèmes d'équations est axée sur leur résolution, comme dans le contexte des mathématiques de la fin du 18^{e} siècle et de la première moitié du 19^{e} siècle. Ainsi dans des contextes et des problématiques semblables, on repère ici des conceptions semblables au niveau de l'histoire et de l'enseignement.

Du point de vue du développement historique, la difficulté que nous soulevons dans nos analyses n'était pas perçue par les mathématiciens de l'époque. Même Frobenius n'y fait aucune allusion. Il met en place une définition efficace de l'indépendance, en utilisant les mêmes mots de la langue naturelle que ceux qu'on utilisait pour la dépendance inclusive, mais il ne s'exprime pas sur la métamorphose du concept, bien qu'il souligne explicitement le parallèle entre équation et n-uplet. De plus, la dépendance inclusive étant mathématiquement équivalente à la dépendance linéaire, elle n'a jamais donné lieu à des raisonnements incorrects que la dépendance linéaire aurait pu corriger. Elle a, par contre, limité certaines approches, sans que les mathématiciens impliqués en aient eu nécessairement conscience.

D'un autre côté, les difficultés des étudiants ne montrent pas qu'une résistance de leur conception de dépendance inclusive empêche une bonne utilisation de la définition formelle. En revanche, nous avons mis en évidence que les raisonnements utilisant des conceptions primitives sur la dépendance (dont la dépendance inclusive) ne suffisent pas pour bien utiliser la définition formelle.

Ce constat nous conduit à l'hypothèse que la difficulté didactique est en fait ici plus globale, elle vient du processus de généralisation à l'œuvre dans le passage à la théorie des espaces vectoriels. En effet, le concept formel d'indépendance linéaire est une généralisation (de la dépendance inclusive, de la proportionnalité, etc.) dans le sens où il unifie diverses conceptions dont les domaines de validité sont limités, chacun, à un contexte particulier. Dans ce processus il n'y a pas de possibilité de généralisation abusive : la généralisation n'est tout simplement pas possible sauf à créer justement le concept formel qui va se substituer globalement à toutes les conceptions primitives. Du point de vue logique, il y a équivalence des conceptions primitives au concept formel dans chacun de leurs champs d'application. L'obstacle est donc dans la nature de la généralisation et relève de ce que nous avons appelé "l'obstacle du formalisme". Notre double analyse historique et didactique montre alors que la difficulté consiste à accéder au concept formel à travers un processus prenant en compte les conceptions primitives et les caractéristiques épistémologiques de ce type de généralisation unifiante. Pour le cas des équations, il s'agit donc de passer de la conception de dépendance inclusive au concept de dépendance linéaire dans une problématique qui montre d'une part le lien entre les deux conceptions et d'autre part la supériorité du concept de dépendance linéaire. Or ce passage ne peut être conçu que comme réponse au besoin d'unification relativement à d'autres contextes.

On peut alors, par exemple, s'appuyer sur l'analyse historique, pour mieux déterminer les conditions d'un tel processus. La question qui se pose est celles des conditions qui ont amené Frobenius à définir la dépendance linéaire et à dépasser (implicitement) la conception inclusive. C'est avant tout un changement de perspective dans l'approche des systèmes d'équations linéaires. Dans la deuxième moitié du 19^{e} siècle, divers problèmes (arithmétiques, géométriques ou physiques) ont conduit les mathématiciens à s'intéresser à la classification des formes bilinéaires (en particulier symétriques). Ce problème débouche sur la recherche d'invariants par substitutions linéaires dans de telles formes. Par ailleurs, la possibilité de représenter une forme bilinéaire, une forme quadratique, ou une substitution linéaire par des matrices conduit à la recherche d'invariants dans les tableaux de nombres (même si Frobenius, au contraire de Cayley par exemple, préféra toujours la notation des formes bilinéaires). Une telle problématique nécessitait de ne plus seulement envisager les systèmes linéaires dans une perspective de résolution mais d'en dégager des caractères invariants, dont le rang, qui apparaîtra comme essentiel. De fait, la problématique de résolution effective s'est estompée pour laisser place à une étude plus qualitative des systèmes. Or, le processus de résolution d'un système consistait, à l'époque, à déterminer un mineur non nul d'ordre maximal. A partir de ce mineur (dont la question du choix n'était pas soulevée), on distinguait inconnues et équations principales et secondaires et on appliquait ensuite les méthodes de Cramer. Sur la base de ce choix particulier, le lien entre le nombre d'équations indépendantes et la "taille" de l'ensemble de solutions apparaissait implicitement. En prenant le point de vue qualitatif de la recherche d'invariants, l'étape suivante "naturelle" consistait à montrer le rôle d'invariant joué par la taille du plus grand mineur non nul, et ce, autant du point de vue du nombre d'équations indépendantes que de celui de la taille de l'ensemble de solutions. C'est dans cette optique que se place Frobenius dans son texte de 1875, où il détermine la nature du rang, qui restera pour lui la taille du plus grand mineur non nul.

Une telle problématique peut-elle inspirer l'élaboration d'un dispositif didactique destiné aux étudiants actuels ? Le problème de la classification des formes bilinéaires ne nous semble pas envisageable dans la structure actuelle des programmes. On peut par contre penser à un autre dispositif permettant de transposer les idées essentielles à l'œuvre dans le travail de Frobenius.

Il nous faut ici faire une parenthèse importante sur l'utilisation des déterminants, dont on a vu qu'elle a dominé l'histoire de l'algèbre linéaire de 1750 à l'aube du 20° siècle. Or notre analyse historique a également mis en évidence que l'extrême technicité attachée à l'usage des déterminants a, à certaines étapes de l'évolution de l'algèbre linéaire, masqué des idées intuitives et a ainsi pu en freiner le développement. C'est en particulier vrai pour le concept de rang, si on examine les 125 ans qui séparent le travail d'Euler de celui de Frobenius (Dorier 1993 et 1997a, 1ère partie, I-1)). Dans ce sens, la méthode du pivot de Gauss offre l'avantage d'une plus grande transparence des résultats obtenus au regard des calculs effectués. D'autre part, du point de vue mathématique, elle permet d'obtenir les même résultats que la théorie des déterminants.[12]

Historiquement cette méthode algorithmique déjà en germe dans les travaux de Gauss a été occultée pendant près de deux siècles par la théorie des déterminants. C'est avec le développement de domaines tels que la programmation linéaire (ayant à traiter des systèmes d'équations linéaires souvent volumineux), que les méthodes algorithmiques de résolution effective des systèmes linéaires ont repris de l'importance. L'intérêt pour l'étude qualitative des algorithmes s'est développé avec l'évolution de l'informatique. Aujourd'hui, les déterminants n'offrent plus guère d'intérêt pratique. Leur calcul effectif, s'il est nécessaire, passe par des méthodes algorithmiques du type pivot de Gauss. L'étude approfondie des algorithmes a même montré que les éléments des matrices obtenus à chaque étape d'une résolution pouvaient être interprétés en termes de mineurs et de co-facteurs du système initial. Néanmoins, les déterminants conservent un intérêt théorique indéniable dans plusieurs branches des mathématiques.[13]

Donc, à l'encontre du développement historique et en accord avec les programmes actuels, notre analyse épistémologique nous conduit à faire l'hypothèse que la méthode du pivot de Gauss est un meilleur point d'entrée sur le plan didactique que les déterminants pour aborder l'étude des systèmes d'équations linéaires.[14] Cela ne veut pas dire que nous ne nous intéressons pas au développement historique en liaison avec la théorie des déterminants. Au contraire, il nous importe de l'analyser au plus près pour en dégager ce qui est indépendant du contexte des déterminants et comment le transposer dans le contexte de la méthode de Gauss.

Or, dans cette optique, l'enseignement secondaire porte essentiellement sur la technique de résolution des systèmes d'équations linéaires. Il s'agit donc dès le début de l'enseignement universitaire d'algèbre linéaire d'introduire un "saut qualitatif" en remplaçant la problématique de résolution par celle de l'étude plus théorique des systèmes (nous avons

---

[12] D'un point de vue pratique, la résolution d'un système dépendant de paramètres peut être plus facile à mener en utilisant les déterminants, si le paramètre apparaît dans de nombreux termes. C'est en particulier le cas dans la recherche des valeurs propres. Néanmoins, même dans ce cas, l'usage du pivot de Gauss permet une recherche conjointe des valeurs propres et de leurs sous-espaces propres. De plus, l'accessibilité à des outils informatiques de calculs de plus en plus puissants conduit à relativiser l'importance de l'efficacité de nos étudiants pour résoudre des systèmes, même dépendants de paramètres. En outre, le fonctionnement de ces outils repose toujours sur des méthodes issues du pivot de Gauss.

[13] Je remercie ici Daniel Perrin de m'avoir informer sur ce point. Il cite deux intérêts essentiels, à ses yeux, en rapport avec les deux domaines qu'il connaît le mieux (l'algèbre commutative et la géométrie algébrique). Pour lui, les déterminants sont essentiels parce qu'ils fournissent des équations explicites de l'ensemble des matrices de rang r et aussi parce qu'ils sont une construction "naturelle" i.e. fonctorielle, ce qui se traduit dans le cas le plus simple par la formule det(AB)=det(A)det(B).

[14] Il n'en reste pas moins que le déterminant est une notion essentielle de la théorie des espaces vectoriels. Cependant son intérêt étant plus théorique que calculatoire, elle intervient de façon pertinente dans des questions d'un niveau non-élémentaire et nous semble pouvoir être réservée à un stade plus avancé de l'enseignement de l'algèbre linaire (polynôme caractéristique, structure du groupe linéaire, etc.), que celui auquel nous nous sommes intéressé. Il nous semble en particulier stérile, de multiplier des exercices calculatoires sur toutes sortes de déterminants, comme cela a pu être le cas dans certains types d'enseignement.

déjà évoqué ce point plus haut dans l'analyse de la transposition didactique). Nous allons présenter le dispositif expérimenté à Lille dans le paragraphe qui suit.

Pour conclure sur les concepts de dépendance et d'indépendance linéaires, nous noterons que la méthode du pivot de Gauss est particulièrement adaptée pour faire permettre le passage de la conception de la dépendance inclusive à la définition formelle du concept de dépendance linéaire. En effet, la "disparition" éventuelle d'une équation en fin de résolution (une ligne de zéros en bas de la diagonale du tableau triangulaire) est l'"accident" qui montre la dépendance au sens d'Euler (la dépendance inclusive). Or, l'algorithme fonctionnant par combinaisons linéaires successives des lignes, la ligne nulle à la fin est aussi le révélateur de l'existence d'une relation linéaire entre les équations. Ainsi une analyse réflexive sur l'algorithme offre une possibilité d'interpréter la dépendance inclusive en termes de dépendance linéaire. C'est aussi un argument supplémentaire pour la validité du pivot de Gauss.

2. Dispositif expérimental autour du concept de rang

Dans ce paragraphe nous allons présenter les grandes lignes du dispositif expérimental (pour plus de détails cf. (Rogalski 1991, 1994 et 1995), (Dorier 1997a, 2ème partie, III), (Dorier et al. 1994)). Nous divisons cette présentation en deux parties : tout d'abord dans le cadre des systèmes d'équations linéaires, puis dans le cadre formel.

a - Approfondissement théorique de la méthode du pivot de Gauss.

Dans un premier temps, on généralise la méthode du pivot de Gauss à des systèmes d'équations linéaires non nécessairement carrés, on aborde également des problèmes de modélisation intra-mathématiques de géométrie ou liés aux carrés magiques, etc. Dans le cadre géométrique, par exemple, on aborde la question de la double représentation cartésienne et paramétrique. Cette première phase permet d'aborder empiriquement des questions comme :

- ai-je trop d'équations, pas assez, juste ce qu'il faut ?

- combien de paramètres me faut-il pour décrire l'ensemble des solutions d'un système d'équations ? quels sont les seconds membres permettant des solutions ?

A travers une application des systèmes et de leur résolution par la méthode du pivot de Gauss, on aborde avec les étudiants des questions d'un ordre plus qualitatif, qui ont trait au rang, y compris dans sa dimension duale. On réalise ainsi un premier pas vers une approche plus théorique, qui se fonde sur l'analyse de problèmes. Le type de questions est en partie inspiré de ce que l'on a dégagé de l'analyse historique à propos essentiellement des travaux d'Euler et de Frobenius.

Le deuxième temps commence par une explicitation des questions soulevées dans la première phase. L'organisation de ces questions s'accompagne du changement de point de vue consistant à identifier une équation homogène au n-uplet de ses coefficients. Les définitions formelles de l'indépendance et de la dépendance linéaires et du rang sont alors données, et l'invariance du rang est démontrée, en interaction avec la résolution des questions ainsi dégagées de la phase 1. Jusque là, seul le cadre de R^n a été abordé, cependant les n-uplets sont systématiquement notés par une seule lettre.

La troisième phase reprend les mêmes concepts que la phase 2, en les abordant dans le cadre le plus formel, par l'approche axiomatique (nous y reviendrons en détail dans le paragraphe suivant).

A ce dispositif très schématiquement résumé ici se superposent les choix plus globaux explicités dans les deux chapitres précédents, en particulier l'utilisation du levier méta. De plus, dans l'organisation que nous venons de présenter, on retrouve les grands traits de l'évolution historique :

- Émergence des premiers concepts, dont le rang, à travers l'étude des systèmes d'équations linéaires.

- Passage de la problématique de résolution vers une étude plus théorique, lien avec la dépendance inclusive.

- Importance de l'aspect dual du rang (à l'œuvre dans la problématique de double représentation cartésienne et paramétrique).

- Identification d'une équation à un n-uplet (premier pas vers le formalisme du concept unificateur de vecteur algébrique).

b - Organisation des concepts dans le cadre formel

Dans le cadre formel, le concept de dimension prend plus d'importance que celui de rang, particulièrement adapté au cadre des équations. Nous avons vu que pour ce concept, l'aspect générateur n'a pas toujours été très bien pris en compte dans l'évolution historique.

Voici dans les grandes lignes, une organisation possible des concepts, qui nous a été inspirée de nos recherches historiques et de notre pratique d'enseignement. Cette approche essaie de problématiser l'introduction et les liens entre les nouveaux concepts élémentaires d'algèbre linéaire ; c'est une tentative de réponse à la critique des étudiants qui se sentent submergés par l'abondance de nouveaux concepts dans la théorie des espaces vectoriels. Cette organisation avait déjà été expérimentée lors de notre travail de doctorat (Dorier 1990). Plus récemment un travail en cours de Behaj[15] (cf. (Dorier 1997a, 2ème partie, VIII) nous a permis de tester la pertinence de cette approche. En effet, Behaj a interviewé des binômes d'enseignants et d'étudiants entre la deuxième année de DEUG et la maîtrise. Il leur demande de présenter un squelette de cours portant sur les notions de familles libre, liée, génératrice, base, rang et dimension. Spontanément, étudiants et enseignants présentent très majoritairement une organisation logique (de type bourbakiste) qu'ils justifient par des arguments de rigueur. Behaj leur demande ensuite où ils donneraient des exemples et des exercices, et lesquels. Or dans ce rapport à la pratique de résolution d'exercices et de problèmes où interviennent aussi les enseignements qui ont suivi celui d'algèbre linéaire, il est clair que se dessine une autre organisation (structuration) de ces concepts, plus "pragmatique", mais aussi plus proche de celle que nous proposons directement à nos étudiants.

Cette organisation est la suivante. Une fois les définitions d'espace et de sous-espace vectoriel posées, on peut introduire les familles génératrices. Celles-ci sont présentées comme

[15] H. Behaj est enseignant-chercheur à la faculté des sciences de Fès, il prépare un doctorat sous la direction conjointe de G. Arsac et de moi-même portant sur le concept de structuration du savoir.

un concentré de l'information dont on dispose sur le sous-espace, cette information se "propage" ensuite par combinaison linéaire. Ainsi il apparaît important de réduire au maximum la taille d'une famille génératrice. Si on pose aux étudiants la question : "quel critère doit satisfaire un vecteur d'une famille génératrice pour qu'on puisse le retirer sans que la famille perde son caractère générateur ?", ils donnent majoritairement une réponse rapide et correcte : "il faut et il suffit qu'il soit combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille". Cela fournit la définition d'une famille liée et le critère de dépendance. L'indépendance définie comme négation de la dépendance devient : "aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres". Du même coup il est évident qu'une famille génératrice minimale (dont on ne peut plus retirer de vecteur) est libre et vice versa (si une famille est libre, on ne peut plus lui retirer de vecteur). Par ailleurs, il est facile de voir qu'une famille libre maximale est génératrice. On obtient ainsi les trois caractérisations d'une base : famille libre maximale = famille génératrice minimale = famille libre génératrice. Il reste encore à relier ces trois caractéristiques à l'idée de base = système de représentation univoque de chaque vecteur. Ce résultat repose sur l'équivalence entre univocité de la représentation et indépendance.

Par ailleurs, en faisant des exercices, les étudiants comprennent vite que la définition précédente d'une famille liée n'est pas pratique car elle oblige à regarder pour chaque vecteur de la famille s'il est combinaison linéaire des autres. Un travail avec les étudiants pour "départiculariser" la définition débouche sur la caractérisation en "il existe une combinaison à coefficients non tous nuls qui vaut zéro". Cette définition et sa traduction (sémantiquement congruente) en langage formel correspondent à la définition habituelle.[16] Établir la définition formelle de la dépendance linaire est alors une activité purement logique, elle peut toutefois être menée par les étudiants dans un contexte qui a du sens. Cette approche est un moyen de rendre les définitions formelles plus abordables.

Reste ensuite à établir l'invariance du cardinal des bases d'un même sous-espace vectoriel. Cette question peut être abordée d'au moins trois façons structurellement différentes, illustrées dans l'histoire par les travaux de Grassmann (lemme de l'échange), Steinitz (recours aux équations) et Dedekind (récurrence). Chacune a à nos yeux ses vertus et ses difficultés. Toutefois, le recours aux systèmes d'équations linéaires est le plus facile à articuler avec la phase précédente. Cette démonstration reste néanmoins toujours difficile pour les étudiants, c'est pourquoi la compréhension de l'invariance du rang à travers la résolution des systèmes est pour nous un but plus important.

III. Conclusion

L'enseignement de l'algèbre linéaire représente une part importante de l'enseignement des mathématiques en première année de DEUG de sciences en France (entre un quart et un tiers du programme environ). C'est un domaine très important des mathématiques, dont les difficultés d'enseignement sont reconnues de tous les enseignants. Par ailleurs, la théorie des espaces vectoriels est très "récente" et de ce fait cache un passé complexe, c'est donc un exemple extrême de la perte d'historicité d'un savoir. L'entrée historique s'est donc rapidement

[16] Il est frappant de constater dans le travail de Behaj que nombre d'étudiants, mais aussi d'enseignants, croient que la première définition est plus pratique que la définition formelle de la dépendance linéaire. C'est un signe de la confusion courante entre intuitif et pratique. Ce qui est déroutant en algèbre linéaire c'est justement que les définitions formelles les moins intuitives peuvent être les plus pratiques !

imposée dans nos travaux, d'autant qu'aucun travail n'avait présenté la genèse historique de cette théorie.

Notre position méthodologique peut se résumer ainsi. Il s'agit de disposer, dans un premier temps, d'une analyse historique de la genèse du savoir visé, établie de façon indépendante de l'analyse didactique, qui est cependant l'origine et le but de la recherche. L'analyse historique constitue une banque de données que sous-tend déjà une réflexion épistémologique. Ce travail historique est en général conduit de façon parallèle avec les premières analyses didactiques et peut s'appuyer pour une part plus ou moins grande, sur des recherches déjà existantes, mais doit privilégier le retour aux documents originaux. De cette confrontation initiale ressortent les premières hypothèses didactiques, qui vont permettre d'éclaircir certaines difficultés d'enseignement et d'apprentissage à un niveau global. Il s'ensuit une deuxième analyse didactique de ces difficultés visant à préciser et valider (ou invalider) les hypothèses. Ces analyses sont alors confrontées à l'analyse historique dans une dialectique de nature épistémologique. Ce processus se poursuit ainsi, permettant de mettre en place les éléments du dispositif expérimental, visant à l'élaboration d'une genèse artificielle contrôlée par l'explicitation et la détermination de contraintes et de variables didactiques.

Nous avons indiqué plus haut les différents cadres théoriques dans lesquels cette réflexion dialectique pouvait s'inscrire. La démarche que nous proposons ne détermine pas en effet un cadre théorique spécifique, mais elle implique un positionnement méthodologique qui est compatible avec la plupart des cadres théoriques de la didactique des mathématiques (nous en avons évoqués plusieurs plus haut). Il s'agit pour nous de réaffirmer l'importance de l'analyse historique dans la recherche en didactique des mathématiques et de montrer que son rôle est non seulement pertinent mais aussi opérationnel. Dans ce sens, deux principes complémentaires nous semblent fondamentaux :

- tout d'abord, l'analyse historique doit être indépendante et doit satisfaire des exigences d'exhaustivité avec retour aux sources
- d'autre part, le questionnement épistémologique doit avoir une origine et une finalité didactiques

Ces deux principes ont comme corollaire qu'un travail didactique n'a pas à "raconter" l'histoire d'un concept ou d'une théorie (sauf si le travail est original, auquel cas c'est un travail réellement d'historien), il doit s'assurer que ce travail existe et en disposer pour ensuite intégrer de ce travail historique ce qui est pertinent pour son analyse didactique, dans une réflexion épistémologique dialectique. La nécessité de vigilance épistémologique n'est pas satisfaite de la simple superposition d'une analyse historique et d'une analyse didactique, elle réclame une réelle dialectique dans une réflexion de nature épistémologique.

Bibliographie

Boschet, C. et Robert, A. (1985): *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de DEUG*, Cahier de Didactique des Mathématiques 7, IREM de Paris VII.

Dorier, J.-L. (1990) : *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire - Approches historique et didactique*, Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Dorier J.-L. (1991) : Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques* **11-2/3**, 325-364.

Dorier J.-L. (1992) : *Illustrer l'aspect unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire*, Cahier DIDIREM n°14, IREM de Paris VII.

Dorier J.-L. (1993) : Émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 2ème série, vol.3, 159-190, Paris : Institut H. Poincaré.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1994) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions, in Artigue M. et al. (eds.) *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France,* pp. 328-342, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Dorier J.-L. (1995) Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **29-2**, 175-197.

Dorier J.-L. (1996a) : Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'Histoire des Mathématiques* **2-2,** 265-307.

Dorier J.-L. (1996b) : Basis and dimension, from Grassmann to van der Waerden, in G. Schubring (ed.), *Hermann Günther Grassmann (1809-1877): Visionnary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar -Papers from a Sesquicentinnial Conference*, Boston Studies in the Philosophy of Science 187, Dordrecht : Kluwer, 175-196.

Dorier J.-L. (éd.) (1997a) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* Grenoble : la Penséee Sauvage.

Dorier J.-L. (1997b) : *Recherches en didactique et en histoire des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions*, Notes de synthèse pour obtenir le diplôme d'habilitation à diriger des recherches, Document interne.

Durand-Guerrier, V. (1996) : *Logique et raisonnement mathématique - Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de Doctorat de l'université de Lyon 1.

Duval, R. (1993) : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **5**, Strasbourg : IREM, 37-65.

Duval, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine - Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel,* Bern : Peter Lang.Ousman, R. (1996) : *Contribution à l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université,* Thèse de doctorat de l'université de Rennes I.

Euler, L. (1750) : Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* **4** , 219-223, ou in *Opera omnia*, 3 series - 57 vols., Lausanne: Teubner - Orell Füssli - Turicini, 1911-76, vol. 26, pp.33-45.

Frobenius, G. F. (1875) : Über das Pfaffsche Problem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **82**, 230-315, ou in *Gesammelte Abhandlungen,* 3 vols., éd. J-P. Serre, Berlin/Heidelberg/New-York: Springer, 1968, vol. 1, pp. 249-334.

Frobenius, G. F. (1879) : Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten, *J. Crelle* **86** (1879), 146-208, ou in *Gesammelte Abhandlungen,* 3 vols., éd. J-P. Serre, Berlin/Heidelberg/New-York: Springer, 1968, vol. 1, pp. 503-565.

Ousman, R. (1996) : *Contribution à l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université,* Thèse de doctorat de l'université de Rennes I.

Robert, A. (1986a) : Didactique de l'enseignement supérieur : une démarche en première année de DEUG, *Actes de la IVème école d'été de didactique des mathématiques.*

Robert, A. (1986b) : *Une démarche dans l'enseignement supérieur*, Cahier de didactique des mathématiques 28, IREM de Paris VII.

Robert, A. et Robinet, J. (1989) : *Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG,* Cahier de Didactique des Mathématiques 53, IREM de Paris VII.

Robert, A. (1990) : *Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie - licence en formation continuée)*, Cahier DIDIREM 9, IREM de Paris VII.

Robert, A. (1992) : Projets longs et ingénierie pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12-2/3**, 181-220.

Robert, A. et Robinet, J. (1993) : *Prise en compte du "méta" en didactique des mathématiques*, Cahier de DIDIREM 21, IREM de Paris VII.

Robert, A. et Robinet, J. (1996) : Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16-2**, 145,176.

Robinet (1984) : *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur,* Thèse de l'université de Paris VII.

Robinet, J. (1986) : *Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire,* Cahier de Didactique des Mathématiques 29, IREM de Paris VII.

Rogalski, M. (1990) : Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire?, in *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG Première Année*, Commission inter-IREM université, pp. 279-291.

Rogalski, M. (1991) : *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année,* Cahier de Didactique des Mathématiques 53, IREM de Paris VII.

Rogalski, M. (1994) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG A, *La Gazette des Mathématiciens* **60**, 39-62.

Rogalski, M. (1995) : Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel, que la dialectique outil/objet ne semble pas marcher, et qu'il n'ait pas apparemment de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire, *Séminaires DidaTech 1994-1995 - n°169,* 127-162.

Vergnaud, G. (1990) : La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10-2/3**, 133-170.