ALBERT RAUGI

Théorème ergodique multiplicatif. Produits de matrices aléatoires indépendantes

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1996-1997, fascicule 2 « Fascicule de probabilités », , p. 1-43

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1996-1997___2_A6_0>

Théorème ergodique multiplicatif.
Produits de matrices aléatoires indépendantes.

par

Albert RAUGI
IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, France

Résumé. – Nous démontrons une version algébrique du théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec réalisée avec une *cohomologie de Lyapounov* explicite. Dans le cas des produits de matrices aléatoires indépendantes nous donnons : un critère de séparation des exposants caractéristiques (plus général que celui donné habituellement) ; des conditions suffisantes pour la "Log-intégrabilité" de la cohomologie et une expression intéressante de la variance dans le théorème de la limite centrale.

Abstract. – We prove an algebraic version of the Oseledec's multiplicative ergodic theorem realized with an explicit *Lyapunov cohomology*. In the independent case we give a criteria of separation of the Lyapunov exponents, some sufficient conditions of "Log-integrability" for the cohomology and an expression of the variance in the central limit theorem.

0. Introduction

• Notations

Nous notons $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées d'ordre d, inversibles, à coefficients réels. Pour toute matrice g de $\mathbf{G}$, nous appelons $0 < a_d(g) \leq \ldots \leq a_1(g)$, les racines carrées des valeurs propres de la matrice définie positive ${}^t gg$; où ${}^t g$ désigne la matrice transposée de g. Nous notons I la matrice identité de $\mathbf{G}$. Nous désignons par $\mathbf{K} = \mathbf{O}(d, \mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices orthogonales, i.e. des matrices g de $\mathbf{G}$ telles que $g{}^t g = {}^t gg = I$. Pour tout $g \in \mathbf{G}$, nous posons :

$$\|g\| = a_1(g), \text{ et } \ Q(g) = \max\{\|g\|, \|g^{-1}\|\} \geq 1.$$

Nous désignons par $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et par τ une transformation bijective de Ω telle que τ et τ^{-1} soient mesurables. A toute application L de Ω dans $\mathbf{G}$, nous associons le **cocycle matriciel,** $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, défini par :

$$L_0 = I; \forall n \geq 1, L_n = L\ L\circ\tau \cdots L\circ\tau^{n-1} \text{ et } L_{-n} = L^{-1}\circ\tau^{-1}\cdots L^{-1}\circ\tau^{-n}\ ;$$

en notant L^{-1} l'application qui à $\omega \in \Omega$ associe $L(\omega)^{-1}$. Nous avons alors les relations :

$$\forall n, p \in \mathbb{Z},\ L_{n+p} = L_n\ L_p \circ \tau^n.$$

Les cocycles associés aux deux applications L et M de Ω dans $\mathbf{G}$ sont dites **cohomologues**, sur un sous-ensemble mesurable τ-invariant Ω_0 de Ω, s'il existe une application Φ de Ω_0 dans G telle que

$$\forall \omega \in \Omega_0,\ M(\omega) = \Phi^{-1}(\omega)\ L(\omega)\ \Phi(\tau(\omega))$$

et par suite,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \omega \in \Omega_0,\ M_n(\omega) = \Phi^{-1}(\omega)\ L_n(\omega)\ \Phi(\tau^n(\omega)).$$

Nous disons que la **cohomologie Φ est de Lyapounov** si

$$\forall \omega \in \Omega_0,\ \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \text{ Log } \|\Phi^{\pm 1}(\tau^n(\omega))\| \ = \ 0.$$

Lorsque l'on muni l'espace mesurable $(\Omega_0, \mathcal{F})$ d'une probabilité τ-invariante $\mathbb{P}$, nous disons que la cohomologie Φ est **$\mathbb{P}$-Log-intégrable** si

$$\int_{\Omega_0} \text{Log } Q(\Phi(\omega))\ \mathbb{P}(d\omega) < +\infty.$$

Dans ce cas, la cohomologie Φ est de Lyapounov sur un sous-ensemble mesurable, τ-invariant de Ω_0.

Soit M une application de Ω dans $\mathbf{G}$. Appelons Ω_1 le sous-ensemble mesurable τ-invariant de Ω constitué des éléments ω possédant les propriétés suivantes :

i) $\forall\ 1 \leq r \leq d$, la suite $\left(\frac{1}{n} \text{ Log } a_r(M_n(\omega))\right)_{n \geq 0}$ converge vers un réel noté $\gamma_r(\omega)$;

ii) $\forall\ 1 \leq r \leq d$, la suite $\left(\frac{1}{n} \text{ Log } a_r(M_{-n}(\omega))\right)_{n \geq 0}$ converge vers le réel $-\gamma_{d+1-r}(\omega)$;

iii) $\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \text{ Log } \|M^{\pm 1}(\tau^n(\omega))\| \ = \ 0.$

Les variables aléatoires réelles γ_i, $1 \leq i \leq d$, sont τ-invariantes. Pour tout $\omega \in \Omega$ les réels $\gamma_i(\omega)$, $1 \leq i \leq d$, sont appelés **les exposants caractéristiques** de la suite de matrices $(M_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$; ils vérifient les inégalités $\gamma_1(\omega) \geq \ldots \geq \gamma_d(\omega)$. Nous désignons par $s(\omega)$ le nombre d'exposants distincts et par $n_j(\omega)$, $1 \leq j \leq s(\omega)$, les multiplicités de ces exposants classés par ordre décroissant.

• Enoncé du théorème ergodique multiplicatif.

Théorème. *Il existe un sous-ensemble mesurable τ-invariant Ω_2 de Ω_1 sur lequel le cocycle $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est Lyapounov cohomologue à un cocycle $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que, pour tout $\omega \in \Omega_2$:*

i) la matrice $\Gamma_n(\omega)$ est diagonale par blocs, constituée de $s(\omega)$ blocs de dimensions $n_j(\omega)$, $1 \leq j \leq s(\omega)$;

ii) $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} \|{}^t e_i\ \Gamma_n(\omega)\| = \gamma_i(\omega)$; où $\{e_1, \ldots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

De plus, il existe un réel $C > 0$ tel que,

$$(*)\ \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \omega \in \Omega_2,\ \|\Gamma_n(\omega)\| \leq C\ \|M_n(\omega)\| \quad et \quad \|\Gamma_n^{-1}(\omega)\| \leq C\ \|M_n^{-1}(\omega)\|.$$

Pour toute mesure de probabilité τ-invariante $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, vérifiant

$$\int_\Omega \operatorname{Log} Q(M(\omega))\ d\mathbb{P}(\omega) < +\infty,$$

nous avons $\mathbb{P}[\Omega_2] = 1$.

Pour tout $1 \leq j \leq d$, posons $\Omega_{2\ j} = \{\omega \in \Omega_2 : s(\omega) = j\}$. Nous obtenons ainsi une partition de Ω_2 en d sous-ensembles mesurables τ-invariants. Sur chaque $\Omega_{2\ j}$, $1 \leq j \leq d$, le cocycle $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est Lyapounov cohomologue à j cocycles ayant un seul exposant caractéristique.

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème ergodique multiplicatif (voir par exemple [7], [10], [13], [17], [18], [20], [23]) mais elles ne montrent pas que la cohomologie est de Lyapounov. Dans [15], Margulis s'intéresse à cette propriété. Il plonge le système dynamique initial dans un système plus gros (à tel point que tout cocycle devient cohomologue à un cocycle triangulaire) et la cohomologie de Lyapounov obtenue est définie sur le nouvel espace.

Notre construction permet de travailler avec le système initial et d'expliciter la cohomologie. De plus tout est fait indépendamment de la mesure. Dans le cas de produits de v.a. indépendantes nous obtenons des conditions suffisantes pour la Log-intégrabilité de la cohomologie, propriété "plus forte" que celle de Lyapounov.

• Résumé de la construction de Ω_2 et de la cohomologie Φ .

Soit $\Theta = \{r_1, \ldots, r_m\}$ avec $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$ un sous-ensemble de cardinal m de $\{1, \ldots, d-1\}$. On appelle **drapeau de type** Θ, tout m-uplet , $(U_{r_1}, \ldots, U_{r_m})$, de sous-espace de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall r \in \Theta,\ \dim U_r = r \quad \text{et} \quad \forall r,\ s \in \Theta,\ r < s, U_r \subset U_s.$$

Nous notons $\mathcal{D}_\Theta$ l'espace des drapeaux de type Θ. Le groupe $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(d, I\!R)$ opère sur l'espace de drapeaux.

Considérons le drapeau **canonique** e_Θ défini par $\forall r \in \Theta$, $U_r = [e_1, \ldots, e_r]$. Tout drapeau ∂ de type Θ s'écrit $k \cdot e_\Theta$, avec $k \in \mathbf{K}$. Si on note $\mathbf{K}_\Theta$ [resp. $\mathbf{P}_\Theta$] le stabilisateur du drapeau canonique dans $\mathbf{K}$ [resp. dans $\mathbf{G}$], l'espace des drapeaux $\mathcal{D}_\Theta$ s'identifie à $\mathbf{K}/\mathbf{K}_\Theta$ [resp. $\mathbf{G}/\mathbf{P}_\Theta$]. Nous notons $\mathbf{m}_\Theta$ l'unique mesure de probabilité $\mathbf{K}$-invariante sur $\mathcal{D}_\Theta$.

La construction repose sur le lemme suivant :

Lemme *Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de matrices de $\mathbf{G}$. Nous posons, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = g_1 \cdots g_n$ et nous supposons que*

1) $\forall 1 \leq i \leq d, \ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} a_i\,(S_n) \ = \gamma_i$ *;*

2) $\limsup\limits_{n\to+\infty} \ \|g_n^{\pm 1}\|^{\frac{1}{n}}) \ \leq \ 1.$

Appelons Θ l'ensemble des entiers r de $\{1, \ldots, d-1\}$ tels que $\gamma_r > \gamma_{r+1}$. Alors la suite de mesure $(S_n \cdot \mathbf{m}_\Theta)_{n\geq 1}$ converge vers une mesure de Dirac δ_∂.

La propriété énoncée ci-dessus, équivaut à dire, en notant $S_n = x_n a_n k_n$ une décomposition polaire de S_n, que la suite $x_n \mathbf{K}_\Theta$ converge vers ∂. Elle est aussi équivalente à la propriété, mise en évidence, par Raghunatan [18], que la suite de matrices définies positives $([S_n {}^t S_n]^{\frac{1}{2n}})_{n\geq 0}$ converge.

En fait pour montrer que la cohomologie est de Lyapounov, nous démontrerons un résultat plus précis que le lemme précédent (Cf théorème (2.1)). Ce résultat nous permettra aussi d'éviter le recours (désagréable) à des sections mesurables.

1) Appliquons le lemme à la suite $\big(M_n(\omega)\big)_{n\geq 0}$, pour $\omega \in \Omega_1$. La suite de mesures $\big(M_n(\omega) \cdot \mathbf{m}_{\Theta(\omega)}\big)_{n\geq 0}$ converge vers la mesure de Dirac d'un certain drapeau $\partial(\omega)$ de type $\Theta(\omega) = \{r \in \{1, \ldots, d-1\} : \gamma_r > \gamma_{r+1}\}$. De l'égalité $M_n = M \ M_{n-1} \circ \tau$, il résulte que :

$$M(\omega) \cdot \partial(\tau(\omega) = \partial(\omega).$$

Choisissons une section mesurable s de l'application naturelle de $\mathbf{K}$ sur $\mathcal{D}_\Theta$. et posons $h(\omega) = s(\partial(\omega))$. Nous obtenons alors une application mesurable h de Ω_1 dans $\mathbf{K}$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega_1, h^{-1}(\omega) \ M(\omega) \ h(\tau(\omega)) \cdot e_{\Theta(\omega)} = e_{\Theta(\omega)}.$$

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega_1$, la matrice $T(\omega) = h^{-1}(\omega) \ M(\omega) \ h(\tau(\omega))$ appartient à $\mathbf{P}_{\Theta(\omega)}$ (i.e. est triangulaire supérieure par blocs de dimensions $n_j(\omega)$, $1 \leq j \leq s(\omega)$).

et $$\forall \ 1 \leq i \leq d, \ \lim_{n\to+\infty} \ \frac{1}{n} \ \operatorname{Log} \|{}^t e_i \ T_n(\omega)\| \ = \ \gamma_i.$$

2) Appliquons le lemme à la suite $\left(M_{-n}(\omega)\right)_{n\geq 1}$, pour $\omega \in \Omega_1$. De la même façon, il existe une application mesurable f de Ω_1 dans $\mathbf{K}$ telle que

$$f^{-1}(\omega)\ M^{-1}(\tau^{-1}(\omega))\ f(\tau^{-1}(\omega)) \in \mathbf{P}_{\tilde{\Theta}(\omega)}$$

ou encore

$$f^{-1}(\omega)\ M(\omega)\ f(\tau(\omega)) \in \mathbf{P}_{\tilde{\Theta}(\omega)}\ ;$$

avec $$\tilde{\Theta}(\omega) = \{d+1-r_m(\omega), \ldots, d+1-r_1(\omega)\}.$$

Soit χ la matrice avec des "1" sur la diagonale secondaire et des "0" ailleurs. La matrice

$$\tilde{T}(\omega) = \chi\ f^{-1}(\omega)\ M(\omega)\ f(\tau(\omega))\ \chi \quad \text{appartient à} \quad {}^t\mathbf{P}_{\Theta(\omega)}$$

et $$\forall 1 \leq i \leq d,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|{}^t e_i \tilde{T}_n(\omega)\| \ = \ -\gamma_i.$$

3) Désignons par Ω_2 le sous-ensemble mesurable de Ω_1 constitué des éléments ω de Ω_1 tels que :

$$\forall r \in \Theta(\omega),\ \Delta_r(\chi\ f^{-1}(\omega)\ h(\omega)) \neq 0\ ;$$

où, pour $g \in \mathbf{G}$, on note $\Delta_r(g)$ le mineur principal d'ordre r de la matrice g.

D'après ce qui précède, pour tout $\omega \in \Omega_1$, il existe deux matrices $U(\omega)$ et $V(\omega)$ de $\mathbf{P}_{\Theta(\omega)}$ telles que :

$$\begin{aligned}\chi f^{-1}(\omega)\ h(\omega) \ &= \ \chi f^{-1}(\omega)\ M(\omega) M^{-1}(\omega) h(\omega) \\ &= {}^t U(\omega)\ \chi f^{-1}(\tau(\omega))\ h(\tau(\omega))\ V(\omega).\end{aligned}$$

Ce qui montre que Ω_2 est τ-invariant.

Pour tout $\omega \in \Omega_2$, la matrice $\chi f^{-1}(\omega) h(\omega)$ s'écrit alors, de façon unique, comme le produit d'une matrice $\xi(\omega)$ triangulaire inférieure dont les blocs diagonaux de dimensions $n_j(\omega)$, $1 \leq j \leq s(\omega)$, sont des matrices identités et d'une matrice $\pi(\omega)$ triangulaire supérieure par blocs de dimensions $n_j(\omega)$, $1 \leq j \leq s(\omega)$. En posant $\Phi(\omega) = f(\omega)\ \chi\ \xi(\omega) = h(\omega)\ \pi^{-1}(\omega)$ on obtient que la matrice

$$\Gamma(\omega) = \Phi^{-1}(\omega) M(\omega) \Phi(\tau(\omega))$$

est diagonale par blocs.

La classe modulo $\mathbf{K}_{\Theta(\omega)}$ de $\Phi(\omega)$ ne dépend pas du choix des représentants $h(\omega)$ et $f(\omega)$. Il vient $\|\Phi\| = \|\xi\|$ et l'intégrabilité de Log $\|Q(\Phi)\|$, par rapport à une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équivaut à celles des logarithmes des valeurs absolues des mineurs principaux d'ordre r, $r \in \Theta(\omega)$, de la matrice $\chi f^{-1}(\omega) h(\omega)$. (On observera que les valeurs absolues de ces mineurs sont indépendantes des représentants $h(\omega)$ et $f(\omega)$ choisis). De plus, la matrice ξ ne sert qu'à supprimer les coefficients n'appartenant pas aux blocs diagonaux de la matrice $\tilde{T}$ et les blocs diagonaux de Γ_1 sont ceux de $\tilde{T}$. D'où les inégalités $(*)$ annoncées.

• Plan de l'article.

Dans la première section nous introduisons les outils algébriques nécessaires et nous étudions minutieusement les propriétés de contraction des applications projectives. La deuxième section est consacrée à la démonstration d'un théorème multiplicatif déterministe qui sera appliqué dans la troisième section pour établir le résultat.

Dans la section suivante, nous illustrons la théorie en prenant l'exemple des produits de matrices aléatoires indépendantes. Nous énonçons un résultat concernant la Log-intégrabilité de la cohomologie. Nous en profitons aussi pour donner (sous forme de survol) un critère de séparation des exposants caractéristiques plus faible que celui donné habituellement ([2], [7]).

La dernière section est consacrée à la démonstration de la Log-intégrabilité de la cohomologie dans le cas indépendant. Au passage nous obtenons une expression intéressante de la variance dans le théorème de la limite centrale pour un produit de matrices aléatoires indépendantes.

1. Préliminaires algébriques

• Décompositions polaire et d'Iwasawa du groupe linéaire

(1.1) Toute matrice g de $\mathbf{G}$ s'écrit sous la forme $g = x\ a(g)\ k$, où x et k sont deux matrices orthogonales et $a(g) = \mathrm{diag}\big(a_1(g), \ldots, a_d(g)\big)$.

Le couple (x, k) n'est pas unique. Si C_g désigne le centralisateur de $a(g)$ dans $\mathbf{K}$, nous avons $g = x\ c\ a(g)\ c^{-1}\ k$, $\forall\ c \in C_g$, et on obtient ainsi toutes les décompositions *polaires* de g. En particulier lorsque $a_1(g) > \cdots > a_d(g) > 0$, $C_g = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) : \varepsilon_i = \pm 1\}$.

(1.2) Nous désignons par $\mathbf{N} = \mathbf{N}(d, \mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ constitué des matrices triangulaires inférieures à éléments diagonaux égaux à 1 et par $\mathbf{A} = \mathbf{A}(d, \mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ constitué des matrices diagonales à coefficients strictement positifs. Toute matrice g de $\mathbf{G}$ s'écrit de façon unique sous la forme $g = \eta(g)\ b(g)\ \kappa(g)$, où $\eta(g) \in \mathbf{N}$, $b(g) = \mathrm{diag}\big(b_1(g), \ldots, b_d(g)\big)$ avec, $\forall\ 1 \leq k \leq d$, $b_k(g) > 0$ et $\kappa(g) \in \mathbf{K}$.

• Espace projectif

(1.3) Nous identifions $\mathbb{R}^d$ à l'espace vectoriel des matrices colonnes d'ordre d. Le groupe $\mathbf{G}$ opère de façon naturelle sur $\mathbb{R}^d$; l'action d'une matrice g de $\mathbf{G}$ sur le vecteur u de $\mathbb{R}^d$ est notée gu. On munit $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire canonique $\langle , \rangle$ et de sa norme euclidienne $\| \ \|$; $\|u\| = (\sum_{i=1}^d u_i^2)^{1/2}$, pour $u = (u_1, ..., u_d)$.

Pour toute matrice carrée M d'ordre d, on pose

$$\|M\| = \sup\{\|Mu\| : u \in \mathbb{R}^d, \|u\| = 1\}.$$

Nous avons $\forall\, g \in \mathbf{G}$, $\|g\| = a_1(g)$.
A tout élément non nul u de $\mathbb{R}^d$, nous associons la droite $\overline{u} = \mathbb{R}u$ de direction u. Nous appelons $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) = \{\overline{u} : u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\}$ l'*espace projectif* associé à $\mathbb{R}^d$. Le groupe $\mathbf{G}$ opère sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$; l'action d'une matrice g de $\mathbf{G}$ sur la droite $\overline{u}$ de $\mathbb{R}^d$ est notée $g \cdot \overline{u}$ $(= \overline{gu})$.

• Contractions de l'espace projectif

(1.4) **Définition.** Une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ de matrices de $\mathbf{G}$ *contracte* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ s'il existe un vecteur non nul z de $\mathbb{R}^d$ tel que toute matrice M valeur d'adhérence de la suite de matrices $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|}\right)_{n\geq 0}$ soit de rang 1 et ait pour image la droite $\overline{z} = \mathbb{R}\, z$.

Nous disons alors que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ contracte $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ *en direction de* $\overline{z}$. En effet, si $\big(\varphi(n)\big)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers telle que la suite de matrices $\left(\frac{g_{\varphi(n)}}{\|g_{\varphi(n)}\|}\right)_{n\geq 1}$ converge vers une matrice M, alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, n'appartenant pas à l'hyperplan $\ker M$, la suite $(g_{\varphi(n)} \cdot \overline{u})_{n\geq 1}$ converge vers $\overline{z}$.

Les deux lemmes suivants mettent en évidence des comportements asymptotiques remarquables, en coordonnées polaire et d'Iwasawa, pour les suites contractantes. Certaines propriétés font intervenir le produit extérieur d'ordre 2 de $\mathbb{R}^d$; le lecteur pourra se référer à la section (1.7), pour la définition de ce produit extérieur.

(1.5) **Lemme.** *Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{G}$. Pour tout entier $n \geq 0$, désignons par $g_n = x_n a(g_n) k_n = x_n\ \mathrm{diag}\big(a_1(g_n), \ldots, a_d(g_n)\big)\ k_n$ une décomposition polaire de la matrice g_n.*

a) La suite $(g_n)_{n\geq 0}$ contracte $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ en direction de $\overline{z} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_2}{a_1}(g_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot \overline{e_1} = \overline{z}$.

b) Lorsque la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ contracte $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ en direction de $\overline{z} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a(g_n)^t x_n u}{a_1(g_n)} = \frac{\langle u, z\rangle}{\|z\|}\, e_1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a(g_n)^t x_n (u \wedge v)}{a_1^2(g_n)} = 0.$$

<u>Preuve.</u> a) Nous avons

$$\frac{g_n}{\|g_n\|} = \frac{g_n}{a_1(g_n)} = x_n\ \mathrm{diag}\big(1, \frac{a_2}{a_1}(g_n), \ldots, \frac{a_d}{a_1}(g_n)\big)\ k_n\ ;$$

qui admet des valeurs d'adhérence M de la forme x diag$(1,\tau_2,\ldots,\tau_d)$ k, avec $x,k \in \mathbf{K}$ et $1 \geq \tau_2 \geq \ldots \geq \tau_d \geq 0$.

Il s'ensuit que la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ contracte $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ en direction de $\overline{z}$ si et seulement si $\tau_2 = \ldots = \tau_d = 0$ et Im $M = \mathbb{R}\ xe_1 = \mathbb{R}\ z$, ce qui prouve la première assertion du lemme.

b) Supposons que la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ contracte $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ en direction de $\overline{z}$. La suite $\left(\frac{a(g_n)\ x_n^{-1}u}{a_1(g_n)}\right)_{n\geq 0}$ admet des valeurs d'adhérence de la forme $M_0u =$ diag$(1,0,\cdots,0)$ $x^{-1}u$ avec $x \in \mathbf{K}$ tel que $x \cdot \overline{e_1} = \overline{z}$. En décomposant u dans la base orthonormée $(xe_1,\ldots,xe_d)$, on obtient $M_0u = \frac{\langle u,z\rangle}{\|z\|}e_1$, ce qui prouve la première convergence du b).

D'autre part, nous avons :

$$a(g_n)^t x_n(u\wedge v) = \sum_{1\leq i\leq j\leq d} a_i(g_n)a_j(g_n)\ \langle\ u\wedge v, x_n(e_i\wedge e_j)\ \rangle\ e_i\wedge e_j\ ;$$

d'où l'on déduit la seconde convergence. ∎

(1.6) **Lemme.** *Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de* $\mathbf{G}$ *qui contracte $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ en direction de $\overline{z}$. Pour tout entier $n \geq 0$, désignons respectivement par*

$$g_n = x_n\ \text{diag}\big(a_1(g_n),\ldots,a_d(g_n)\big)\ k_n \quad et \quad g_n = \eta_n\ \text{diag}\big(b_1(g_n),\ldots,b_d(g_n)\big)\ \kappa_n$$

des décompositions polaire et d'Iwasawa de g_n.

a) Nous avons les convergences suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_1}{a_1}(g_n) = \left|\frac{\langle z,e_1\rangle}{\|z\|}\right|\ ;\ \lim_{n\to+\infty} k_n\kappa_n^{-1}e_1 = \text{sign}(\langle z,e_1\rangle)\ e_1\ ;$$

et, pour tout $j\in\{2,\ldots d\}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_1b_j}{a_1^2}(g_n) = 0.$

b) Si z n'est pas orthogonal à e_1, alors,

$$\forall\ 2\leq j\leq d,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{b_j}{b_1}(g_n) = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\eta_n e_1 = \frac{z}{\langle z,e_1\rangle}.$$

Preuve. Nous avons

$$a(g_n)^t x_n e_1 = k_n{}^t g_n e_1 = k_n\kappa_n^{-1}b(g_n)^t\eta_n e_1 = b_1(g_n)\ k_n\kappa_n^{-1}e_1.$$

Les deux premières convergences de l'assertion a) résultent alors de la convergence de la suite $\dfrac{a(g_n)^t x_n e_1}{a_1(g_n)}$ vers $\dfrac{\langle e_1, z\rangle}{\|z\|}\, e_1$ (lemme (1.5)).

D'autre part nous avons, pour tout entier $2 \leq j \leq d$,

$$\begin{aligned}\langle a(g_n)^t x_n(e_1 \wedge e_j), k_n\kappa_n^{-1}(e_1 \wedge e_j)\rangle &= \langle b(g_n)^t \eta_n(e_1 \wedge e_j), e_1 \wedge e_j\rangle \\ &= b_1(g_n)\ b_j(g_n)\end{aligned}$$

La troisième convergence du a) résulte alors du lemme (1.5).

Lorsque $\langle e_1, z\rangle \neq 0$, pour tout entier j, $2 \leq j \leq d$, les suites $\left(\dfrac{b_j}{b_1}\ (g_n)\right)_{n \geq 0}$ tendent vers zéro d'après l'assertion a).

D'autre part nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\eta_n b(g_n)\kappa_n k_n^{-1} e_1}{a_1(g_n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n a(g_n) e_1}{a_1(g_n)} = \frac{z}{\|z\|}$$

et les coefficients des matrices $\dfrac{\eta_n b(g_n)}{a_1(g_n)} = \dfrac{g_n k_n^{-1}}{\|g_n\|}$ restent bornés. Il s'ensuit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\eta_n b(g_n)\kappa_n k_n^{-1} e_1}{a_1(g_n)} = \lim_{n \to +\infty} \langle \kappa_n k_n^{-1} e_1, e_1\rangle\ \frac{\eta_n b(g_n) e_1}{a_1(g_n)}\ ;$$

car, pour tout entier i, $2 \leq i \leq d$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \langle \kappa_n k_n^{-1} e_1, e_i\rangle = 0.$, d'après l'assertion a). On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \eta_n e_1 = \dfrac{z}{\langle z, e_1\rangle}$. D'où le lemme. ∎

• Produits extérieurs de $I\!R^d$

(1.7) Nous posons $\Sigma = \{1, 2, \cdots, d-1\}$. Pour tout entier r de Σ, nous notons $\bigwedge_r I\!R^d$ le produit extérieur d'ordre r de $I\!R^d$. Un élément de $\bigwedge_r I\!R^d$ est appelé *r-vecteur*. Un r-vecteur non nul qui s'écrit sous la forme $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ pour des vecteurs $u_1, \ldots, u_r$ linéairement indépendants de $I\!R^d$ est dit *décomposable*. Tout r-vecteur est donc une combinaison linéaire de r-vecteurs décomposables.

Nous notons $\mathcal{C}_r$ l'ensemble des r-uplets $\{(i_1, \ldots, i_r) : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq d\}$. Nous mettons sur $\mathcal{C}_r$ l'ordre lexicographique noté $\preceq$. Nous munissons l'espace vectoriel $\bigwedge_r I\!R^d$ de sa base canonique $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} : (i_1, \ldots, i_r) \in (\mathcal{C}_r, \preceq)\}$. L'espace $\bigwedge_r I\!R^d$ s'identifie alors à $I\!R^{d(r)}$, avec $d(r) = C_d^r$.

Nous munissons $\bigwedge_r I\!R^d$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ qui est induit, via cette identification, par le produit scalaire usuel sur $I\!R^{d(r)}$. On sait que l'on a :

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r\rangle = \mathrm{Det}[((\langle u_i, v_j\rangle))_{1 \leq i,j \leq r}].$$

On note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Le groupe $\mathbf{G}$ opère sur $\bigwedge_r I\!R^d$; l'action d'une matrice g sur un r-vecteur décomposable $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r$ étant définie par $gu_1 \wedge \cdots \wedge gu_r$. Nous notons $\bigwedge_r g$ la matrice de $\mathrm{GL}(d(r), I\!R)$ correspondant à cette action. La matrice inverse de $\bigwedge_r g$ est donnée par $\bigwedge_r g^{-1}$. D'autre part, considérons deux r-uplets $(i_1, \ldots, i_r)$ et $(j_1, \ldots, j_r)$ de $\mathcal{C}_r$. Le produit scalaire $\langle e_{i_1} \wedge, \ldots \wedge e_{i_r} \ , \ ge_{j_1} \wedge \ldots \wedge ge_{j_r} \rangle$ est égal au déterminant de la matrice extraite de g en conservant seulement les lignes $i_1, \ldots, i_r$ et les colonnes $j_1, \ldots, j_r$. De même, le produit scalaire $\langle {}^t g e_{i_1} \wedge \ldots \wedge {}^t g e_{i_r} \ , \ e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_r} \rangle$ est égal au déterminant de la matrice extraite de ${}^t g$ en conservant seulement les lignes $j_1, \ldots, j_r$ et les colonnes $i_1, \ldots, i_r$. Les deux produits scalaires considérés sont donc égaux. Par linéarité, il s'ensuit que la matrice transposée (dans $\mathrm{GL}(d(r), I\!R)$) de $\bigwedge_r g$ n'est autre que la matrice $\bigwedge_r {}^t g$.

Avec les notations de (1.1) appliquées au groupe linéaire $\mathrm{GL}(d(r), I\!R)$, nous avons

$$\frac{a_2(\bigwedge_r g)}{a_1(\bigwedge_r g)} = \frac{a_1(g) \ldots a_{r-1}(g) a_{r+1}(g)}{a_1(g) \ldots a_{r-1}(g) a_r(g)} = \frac{a_{r+1}(g)}{a_r(g)}.$$

Pour tout matrice g de $\mathbf{N}$, la matrice $\bigwedge_r g$ est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1. Pour tout $r \in \Sigma$, $\bigwedge_r {}^t g \ (e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$.

(1.8) **Notations**: Pour tout multi-indice $i = (i_1, \ldots, i_r)$ de $\mathcal{C}_r$, et toute matrice $g \in \mathbf{G}$, posons $a_i(g) = a_{i_1}(g) \cdots a_{i_r}(g)$, $b_i(g) = b_{i_1}(g) \cdots b_{i_r}(g)$, et $e_i = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$.

Nous notons $\imath_r$ et $\jmath_r$ les r-uplets de $\mathcal{C}_r$ définis par $\imath_r = (1, 2, \ldots, r)$ et $\jmath_r = (1, 2, \ldots, r-1, r+1)$.

• Contractions de $\mathcal{P}(\bigwedge_r I\!R^d)$

(1.9) **Définition.** Nous disons qu'une suite $(g_n)_{n \geq 0}$ de matrices de $\mathbf{G}$ *contracte* $\mathcal{P}(\bigwedge_r I\!R^d)$ s'il existe un r-vecteur z tel que la suite de matrices $(\bigwedge_r g_n)_{n \geq 0}$ de $\mathrm{GL}(d(r), I\!R)$ contracte $\mathcal{P}(\bigwedge_r I\!R^d)$ (identifié à $\mathcal{P}(I\!R^{d(r)})$) en direction de $\overline{z}$. Nous disons alors que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ contracte $\mathcal{P}(\bigwedge_r I\!R^d)$ *en direction de* $\overline{z}$.

Le lemme suivant montre que le r-vecteur z est nécessairement décomposable. Les résultats obtenus dans le cas particulier $r = 1$, s'étendent, sans difficulté, de la façon suivante.

(1.10) **Lemme.** *Soit $(g_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{G}$. Pour tout entier $n \geq 0$, désignons par $g_n = x_n a(g_n) k_n = x_n \ \mathrm{diag}(a_1(g_n), \ldots, a_d(g_n)) \ k_n$ une décomposition polaire de la matrice g_n.*

Alors la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ *contracte* $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ *en direction de* $\overline{z} \in \mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ *si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_2((\bigwedge_r g_n))}{a_1((\bigwedge_r g_n))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{r+1}(g_n)}{a_r(g_n)} = 0 \ et \ \lim_{n\to+\infty} \bigwedge_r x_n \cdot \overline{e_{\imath_r}} = \overline{z}.$$

Lorsque la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ *contracte* $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ *en direction de* $\overline{z} \in \mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$, *alors pour tout r-vecteurs* u *et* v *de* $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\bigwedge_r a(g_n) \bigwedge_r {}^t x_n \ u}{a_{\imath_r}(g_n)} = \frac{\langle u, z\rangle}{\|z\|} e_{\imath_r}$$

$$et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\bigwedge_r a(g_n) \bigwedge_r {}^t x_n \ (u \wedge v)}{a^2_{\imath_r}(g_n)} = 0.$$

(1.11) **Lemme.** *Soit* $(g_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{G}$ *qui contracte* $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ *en direction de* $\overline{z}$. *Pour tout entier* $n \geq 0$, *désignons respectivement par*

$$g_n = x_n \ \mathrm{diag}\big(a_1(g_n), \ldots, a_d(g_n)\big) \ k_n \ \ et \ \ g_n = \eta_n \ \mathrm{diag}\big(b_1(g_n), \ldots, b_d(g_n)\big) \ \kappa_n$$

des décompositions polaire et d'Iwasawa de g_n.

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{\imath_r}(g_n)}{a_{\imath_r}(g_n)} = \left|\frac{\langle z, e_{\imath_r} >}{\|z\|}\right| ; \ \lim_{n\to+\infty} k_n \kappa_n^{-1} e_{\imath_r} = \mathrm{sign}(\langle z, e_{\imath_r}\rangle) \ e_{\imath_r} ;$$

et, pour tout $j \in \mathcal{C}_r, j \prec \imath_r$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{\imath_r}(g_n) b_j(g_n)}{a^2_{\imath_r}(g_n)} = 0$. *Si* z *n'est pas orthogonal à* $e_{\imath_r}$, *alors,*

$$\forall j \in \mathcal{C}_r, \ j \prec \imath_r, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{b_j(g_n)}{b_{\imath_r}(g_n)} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \eta_n e_{\imath_r} = \frac{z}{\langle z, e_{\imath_r}\rangle}.$$

• Comparaison des composantes diagonales en coordonnées polaires et d'Iwasawa

(1.12) **Lemme.** *Pour* $g \in \mathbf{G}$ *et pour tout* $j \in \{1, \ldots, d\}$, *on a*

$$\frac{1}{\|g^{-1}\|} = \frac{1}{a_1(g^{-1})} = a_d(g) \leq b_j(g) \leq a_1(g) = \|g\|.$$

Preuve. Les trois égalités sont claires. On remarque d'autre part que l'on a

$$b_j(g) = \langle {}^t\kappa(g)e_j, {}^tge_j\rangle \leq \|{}^tg\| = \|g\|,$$

et

$$\|g^{-1}\| \geq \langle {}^t\kappa(g)e_j, g^{-1}e_j\rangle = \langle e_j, b(g)^{-1}\eta(g)^{-1}e_j\rangle = b_j(g)^{-1}. \quad \blacksquare$$

(1.13) **Corollaire.** *Pour tout $g \in \mathbf{G}$, tout $r \in \{1, \ldots, d\}$ et tout $j = (j_1, ..., j_r) \in \mathcal{C}_r$, nous avons :*

$$a_{d-r+1}(g)a_{d-r+2}(g)\cdots a_d(g) \leq b_{j_1}(g)\cdots b_{j_r}(g) \leq a_1(g)\cdots a_r(g).$$

Preuve. On applique le lemme précédent à la matrice $\bigwedge_r g$, en notant que $a_1(\bigwedge_r g) = a_1(g)\ldots a_r(g)$ et $a_d(\bigwedge_r g) = a_{d+1-r}(a)\ldots a_d(g)$. $\blacksquare$

(1.14) **Lemme.** *Soit $g \in \mathbf{G}$ et $g = x(g)a(g)k(g)$ une décomposition polaire de g. Alors pour tout $r \in \{1, \ldots, d\}$, on a :*

$$\mathrm{Log}\ a_{\imath_r}(g) + \phi_r(kx(g)) \leq \mathrm{Log}\ b_{\imath_r}(kg) \leq \mathrm{Log}\ a_{\imath_r}(g);$$

où $\phi_r(k) = \mathrm{Log}|\langle e_{\imath_r}, \bigwedge_r k\ e_{\imath_r}\rangle|$.

Preuve. La décomposition d'Iwasawa de kg donne

$$b_{\imath_r}(kg) = \|\bigwedge_r {}^t(kg)\ e_{\imath_r}\| = \|\bigwedge_r {}^tg \bigwedge_r {}^tk\ e_{\imath_r}\|.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\frac{b_{\imath_r}}{a_{\imath_r}}(kg) &= \frac{\|\bigwedge_r {}^tg \bigwedge_r {}^tk\ e_{\imath_r}\|}{\|\bigwedge_r {}^tg\|} \\
&= \frac{\|\bigwedge_r a(g) \bigwedge_r {}^tx(g) \bigwedge_r {}^tk\ e_{\imath_r}\|}{\|\bigwedge_r {}^tg\|} \\
&= \frac{\left(\sum_{j\in\mathcal{C}_r} a_j(g)^2\langle e_{\imath_r}, \bigwedge_r k \bigwedge_r x(g)\ e_j\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}}{a_{\imath_r}(g)} \\
&\geq |\langle e_{\imath_r}, \bigwedge_r k \bigwedge_r x(g)e_{\imath_r}\rangle|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(1.15) **Lemme.** *Pour tout $r \in \{1, \ldots, d\}$, la fonction ϕ_r appartient à tous les espaces $L^p(\mathbf{K}, m_{\mathbf{K}})$, $p \geq 1$, où $m_{\mathbf{K}}$ désigne la mesure de Haar normalisée sur $\mathbf{K}$.*

Preuve.

Première étape

Pour tout $r \in \{1, \ldots, d\}$, posons $\Delta_r(g) = \langle e_{\imath_r}, \bigwedge_r g\ e_{\imath_r} \rangle$. Nous montrons que

$$\forall g \in \mathbf{G},\ \forall r \in \{2, \ldots, d\}, |\Delta_r(g)|\ \geq\ |\Delta_{r-1}(g)|\ |\langle g e_r, u_r(g) \rangle|;$$

où $u_r(g)$ est un vecteur normé appartenant au sous-espace $V_r = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} I\!\!R e_i$ de $I\!\!R^d$, orthogonal aux vecteurs $g e_1, \ldots, g e_{r-1}$.

Soient g une matrice de $\mathbf{G}$ et r un entier de $\{2, \ldots, d\}$. Appelons π_r le projecteur orthogonal de $I\!\!R^d$ sur V_r. Si $\Delta_{r-1}(g) = 0$ alors l'inégalité cherchée est trivialement satisfaite. Nous supposons donc que $\Delta_{r-1}(g) \neq 0$; les vecteurs $\pi_r(g e_1), \ldots, \pi_r(g e_{r-1})$ sont donc linéairement indépendants et le sous-espace de V_r orthogonal à ces vecteurs est de dimension 1.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, appelons $\delta_i(g)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre $r - 1$ extraite de la matrice $[\pi_r(g e_1), \ldots, \pi_r(g e_{r-1})]$ en supprimant la i-ème ligne. Le vecteur $v(g) = \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^i\ \delta_i(g)\ e_i$ est orthogonal aux vecteurs $g e_1, \ldots, g e_{r-1}$. En effet, au signe près, le produit scalaire $\langle v(g), g e_i \rangle$ est égal à $Det\ [\pi_r(g e_1), \ldots, \pi_r(g e_{r-1}), \pi_r(g e_i)] = 0$. Il s'ensuit qu'au signe près $u_r(g) = \dfrac{v(g)}{\|v(g)\|}$.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
|\Delta_r(g)| &= |Det\ [\pi_r(g e_1), \ldots, \pi_r(g e_{r-1}), \pi_r(g e_r)]| \\
&= |\langle u_r(g), g e_r \rangle|\ |Det\ [\pi_r(g e_1), \ldots, \pi_r(g e_{r-1}), u_r(g)]| \\
&= |\langle u_r(g), g e_r \rangle|\ \|v(g)\| \\
&\geq |\langle u_r(g), g e_r \rangle|\ |\delta_r(g)| = |\langle u_r(g), g e_r \rangle|\ |\Delta_{r-1}(g)|.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

seconde étape

Nous montrons le lemme par récurrence sur r.

Désignons par S_{d-1} la sphère unité de $I\!\!R^d$ et par σ_{d-1} la loi uniforme sur S_{d-1}. Pour $r = 1$, nous avons, pour tout $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{K}} |\mathrm{Log}\ |\Delta_1(k)||^p\ m_{\mathbf{K}}(dk)\ &=\ \int_{S_{d-1}} |\mathrm{Log}\ |\langle v, e_1 \rangle||^p\ \sigma_{d-1}(dv) \\
&\leq C\ \int_0^{\pi} |\mathrm{Log}\ |cos\theta||^p\ d\theta < +\infty;
\end{aligned}$$

pour un réel positif C.

Supposons le résultat acquis pour $r < q \leq d$. D'après la première étape, la p-intégrabilité de Log $|\Delta_q(\cdot)|$ est ramenée à celle de Log $|\langle \cdot \, e_q, u_q(\cdot)\rangle|$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ de loi $m_{\mathbf{K}}$. Nous avons

$$I\!E[|\mathrm{Log}\ |\langle Xe_q, u_q(X)\rangle|\ |^p] \ = \ I\!E[I\!E[|\mathrm{Log}\ \langle Xe_q, u_q(X)\rangle|\ |^p \mid Xe_1, \ldots, Xe_{q-1}]].$$

Soit $(v_1, \ldots, v_{q-1})$ un système de vecteurs orthogonaux de $I\!R^d$. La distribution du vecteur aléatoire Xe_q sachant que $Xe_1 = v_1, \ldots, Xe_{q-1} = v_{q-1}$ est la loi uniforme sur la sphère unité du sous-espace vectoriel de $I\!R^d$ orthogonal aux vecteurs $v_1, \ldots, v_{q-1}$. Si bien que :

$$\begin{aligned} I\!E[I\!E[|\mathrm{Log}\ |\langle Xe_q, u_q(X)\rangle|\ |^p|\ Xe_1 = v_1, \ldots, Xe_{q-1} = v_{q-1}]] \\ &= \int_{S_{d-q}} |\mathrm{Log}\ |\langle v, e_1\rangle|\ |^p\ \sigma_{d-q}(dv) \\ &\leq C \int_0^{\pi} |\mathrm{Log}\ |cos\theta||^p\ d\theta < +\infty; \end{aligned}$$

pour un réel positif C ne dépendant que de la dimension $d-q$. D'où le lemme. ∎

• Décompositions semi-polaires du groupe linéaire

(1.16) **Notations.** Soit $\Theta = \{i_1, \ldots, i_m\}$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ un sous-ensemble de cardinal $m \geq 1$ de $\{1, \ldots, d-1\}$. On convient que $i_0 = 0$ et $i_{m+1} = d$.

Nous associons à Θ le sous-groupe de $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K}_\Theta = \{\mathrm{diag}(K_1, K_2, \ldots, K_{m+1}) : \forall j \in \{1, \ldots, m+1\},\ K_j \in \mathbf{O}(i_j - i_{j-1}, I\!R)\}\ ,$$

des matrices diagonales par blocs, les blocs étant des matrices orthogonales.

De même on définit les sous-groupes suivants du groupe linéaire $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{N}_\Theta = \{\mathrm{diag}(N_1, N_2, \ldots, N_{m+1}) : \forall j \in \{1, \ldots, m+1\}, N_j \in \mathbf{N}(i_j - i_{j-1}, I\!R)\}\ ;$$

$$\mathbf{G}_\Theta = \{\mathrm{diag}(G_1, G_2, \ldots, G_{m+1}) : \forall j \in \{1, \ldots, m+1\}, G_j \in \mathbf{G}(i_j - i_{j-1}, I\!R)\}\ ;$$

$$\mathbf{P}_\Theta = \mathbf{G}_\Theta {}^t\mathbf{N}.$$

Ce groupe s'écrit aussi sous la forme

$$\mathbf{P}_\Theta = \mathbf{G}_\Theta {}^t\mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$$

où

$$\mathbf{N}_{\overline{\Theta}} = \begin{pmatrix} I_{i_1} & & & \\ & I_{i_2-i_1} & (O) & \\ & (*) & \ddots & \\ & & & I_{i_{m+1}-i_m} \end{pmatrix}.$$

Toute matrice g de $\mathbf{G}$ s'écrit alors sous la forme $g = \zeta_\Theta(g) k_1 c_\Theta(g) k_2$ où $k_1 \in \mathbf{K}_\Theta$, $k_2 \in \mathbf{K}$, $\zeta_\Theta(g) \in \mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$ et $c_\Theta(g) = \mathrm{diag}(c_{\Theta,1}(g), \dots, c_{\Theta,d}(g))$ avec $\forall 1 \leq j \leq m+1$, $c_{\Theta,i_{j-1}+1}(g) > \dots > c_{\Theta,i_j}(g) > 0$. Le passage de la décomposition d'Iwasawa $g = \eta(g) b(g) \kappa(g)$ à la décomposition Θ-semi-polaire se fait de la façon suivante :

– on décompose $\eta(g)$ en produit de deux matrices $\zeta_\Theta(g)\xi_\Theta(g)$ avec $\zeta_\Theta(g) \in \mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$ et $\xi_\Theta(g) \in \mathbf{N}_\Theta$. On notera que cette décomposition est unique et la matrice $\xi_\Theta(g)$ s'obtient en conservant uniquement les $m+1$ blocs diagonaux de $\eta(g)$.

– on décompose ensuite en coordonnées polaires les $m+1$ blocs de la matrice $\xi_\Theta(g)\ b(g)$ de $\mathbf{G}_\Theta$.

Les composantes $\zeta_\Theta(g)$ et $c_\Theta(g)$ sont uniques. Nous avons aussi

$$g = \zeta_\Theta(g) k_1 k c_\Theta(g) k^{-1} k_2,$$

pour toute matrice k appartenant au centralisateur de $c_\Theta(g)$ dans $\mathbf{K}_\Theta$; on obtient ainsi toutes les décompositions *Θ-semi-polaires* possibles pour g.

On observera que les décompositions polaire et d'Iwasawa sont les cas extrêmes des décompositions semi-polaires ; la première s'obtient en prenant $\Theta = \Sigma$ et la seconde $\Theta = \emptyset$.

L'ensemble des matrices $\mathbf{N}_{\overline{\Theta}}\ \mathbf{P}_\Theta$ est un ouvert de $\mathbf{G}$ constitué des matrices g dont les mineurs principaux, $\Delta_r(g) = \langle e_{\imath_r}, \bigwedge_r g\ e_{\imath_r} \rangle$, $r \in \Theta$, sont non nuls.

(1.17) **Lemme.** *On a, pour tout $g \in \mathbf{G}$:*

$$\forall r \in \Theta,\ c_{\Theta,\imath_r}(g) = b_{\imath_r}(g),$$

$$\|\eta(g)\| \leq \|g\|\ \|g^{-1}\| \ ;\ \|\eta^{-1}(g)\| \leq \|g\|\ \|g^{-1}\| \ ;$$

$$\|\zeta_\Theta(g)\| \leq C\ \|g\|^2\ \|g^{-1}\|^2 \quad \textit{et} \quad \|\zeta_\Theta^{-1}(g)\| \leq C\ \|g\|^2\ \|g^{-1}\|^2.$$

où $C > 0$ est une constante réelle indépendante de $g \in \mathbf{G}$

Preuve. La matrice $c_\Theta(g)$ s'obtient en décomposant chacun des $m+1$ blocs de la matrice $\xi_\Theta(g)\ b(g)$ en coordonnées polaires. D'où la première assertion.

Nous avons $\eta(g) = g\ \kappa^{-1}(g)\ b^{-1}(g)$. D'où l'on déduit :

$$\|\eta(g)\| \leq \|g\|\ \|b^{-1}(g)\| \leq \|g\|\ \frac{1}{a_d(g)} = \|g\|\ \|g^{-1}\|$$

$$\text{et}\quad \|\eta^{-1}(g)\| \leq \|b(g)\|\ \|g^{-1}\| \leq a_1(g)\ \|g^{-1}\| \leq \|g\|\ \|g^{-1}\|.$$

D'autre part, nous avons $\eta(g) = \zeta_\Theta(g)\xi_\Theta(g)$ où la matrice $\xi_\Theta(g)$ de $\mathbf{N}_\Theta$ s'obtient, à partir de la matrice $\eta(g)$, en conservant uniquement les $m+1$ blocs diagonaux. Comme les matrices de $\mathbf{N}_\Theta$ normalisent le sous-groupe $\mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$, la matrice

$\xi_\Theta^{-1}(g)$ s'obtient, à partir de la matrice $\eta^{-1}(g)$, en conservant uniquement les $m+1$ blocs diagonaux. On en déduit qu'il existe $C > 0$, indépendant de g, tel que $\|\xi_\Theta(g)\| \leq C\ \|\eta(g)\|$ et $\|\xi_\Theta^{-1}(g)\| \leq C\ \|\eta^{-1}(g)\|$.

On en déduit que les matrices $\zeta_\Theta(g)$ et $\zeta_\Theta^{-1}(g)$ ont des normes inférieures ou égales à $C\ \|\eta(g)\| \|\eta^{-1}(g)\|$. ∎

• Espaces de drapeaux

(1.18) Nous appelons espace des *drapeaux homogènes d'ordre* r l'ensemble, noté $\mathcal{D}_r$, des sous-espaces de dimension r de $\mathbb{R}^d$. Si U est un sous-espace de dimension r de $\mathbb{R}^d$ dont une base est $\{u_1, \dots, u_r\}$, nous identifions U à la droite $\overline{u_1 \wedge \cdots \wedge u_r}$ de $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$. L'espace des drapeaux homogènes $\mathcal{D}_r$ apparaît donc comme le sous-ensemble de l'espace projectif $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ constitué par les droites de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ associées uniquement à des r-vecteurs décomposables. C'est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$, qui est égal à l'orbite sous $\mathbf{G}$ de chacun de ses points.

(1.19) Soit $\Theta = \{i_1, \dots, i_m\}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ un sous-ensemble de cardinal $m \geq 1$ de $\{1, \dots, d-1\}$. Nous appelons *drapeau de type* Θ, tout m-uplet de sous-espaces de $\mathbb{R}^d$, $(U_{i_1}, \dots, U_{i_m})$, tels que : $\forall i \in \Theta,\ \dim U_i = i$ et $\forall\ i, j \in \Theta, i < j, U_i \subset U_j$. Nous notons $\mathcal{D}_\Theta$ l'ensemble des drapeaux de type Θ.

Lorsque Θ est réduit à un entier r, on retrouve l'espace $\mathcal{D}_r$ des drapeaux homogènes d'ordre r. Pour chaque entier r de Θ, nous notons π_r l'application naturelle de $\mathcal{D}_\Theta$ sur $\mathcal{D}_r$. Nous appelons *drapeau canonique de type* Θ le drapeau ∂_Θ défini par

$$\forall r \in \Theta,\ \pi_r(\partial_\Theta) = \overline{e_{\imath_r}}.$$

Le groupe linéaire $\mathbf{G}$ opère de façon naturelle sur les espaces de drapeaux de type Θ. Le stabilisateur dans $\mathbf{G}$ du drapeau canonique ∂_Θ n'est autre que le groupe $\mathbf{P}_\Theta$. L'espace $\mathcal{D}_\Theta$ s'identifie donc à l'espace homogène $\mathbf{G}/\mathbf{P}_\Theta$, ou encore à $\mathbf{K}/\mathbf{K}_\Theta$.

Nous disons que deux drapeaux ∂_1, ∂_2 de $\mathcal{D}_\Theta$ sont **en position non singulière** si, pour tout $r \in \Theta$, les deux directions $\pi_r(\partial_1)$ et $\pi_r(\partial_2)$ de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ ne sont pas orthogonales.

• Contractions des espaces de drapeaux

(1.20) **Définition.** Nous disons qu'une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ de matrices de $\mathbf{G}$ *contracte* l'espace des drapeaux $\mathcal{D}_\Theta$ s'il existe un drapeau ∂ tel que pour tout $r \in \Theta$, cette suite contracte chaque espace projectif $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ en direction de $\pi_r(\partial)$.

Nous disons alors que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ contracte $\mathcal{D}_\Theta$ *en direction de* ∂.

(1.21) **Lemme.** *Une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ de matrices de* $\mathbf{G}$ *contracte l'espace $\mathcal{D}_\Theta$ en direction d'un drapeau ∂, en position non singulière par rapport au drapeau canonique ∂_Θ, si et seulement si pour tout $(r,j)\in\Theta\times\mathcal{C}_r$, $j\prec \imath_r$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{c_{\Theta,j}(g_n)}{c_{\Theta,\imath_r}(g_n)}=0$ et la suite de matrices $\big(\zeta_\Theta(g_n)\big)_{n\geq 1}$ converge vers une matrice ζ telle que $\zeta\cdot\partial_\Theta=\partial$.*

Dans ce cas, pour tout $r\in\Theta$, la suite $\dfrac{c_{\Theta,\imath_r}}{a_{\imath_r}}(g_n)$ converge vers un réel non nul.

<u>Preuve.</u> 1) Si la suite de matrices $(g_n)_{n\geq 0}$ contracte l'espace $\mathcal{D}_\Theta$ en direction d'un drapeau non singulier par rapport au drapeau canonique, alors, pour tout $r\in\Theta$, nous avons :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{r+1}(g_n)}{a_r(g_n)}=0$ (lemme (1.10)) ;

b) la suite $\eta(g_n)e_{\imath_r}$ converge (lemme (1.11)) ;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{\imath_r}(g_n)}{a_{\imath_r}(g_n)}=\dfrac{|\langle\pi_r(\partial),e_{\imath_r}\rangle|}{\|\pi_r(\partial)\|}$ (lemme (1.11) ; notation évidente).

Or $\eta(g_n)e_{\imath_r}=\zeta_\Theta(g_n)e_{\imath_r}$ et la convergence des suites $\zeta_\Theta(g_n)e_{\imath_r}, r\in\Theta$, équivaut à la convergence de la suite $\zeta_\Theta(g_n)$. Soit $r\in\Theta$. Pour tout entier $n\geq 1$, désignons par $g_n=\zeta_\Theta(g_n)k_{1,n}c_\Theta(g_n)k_{2,n}$ une décomposition Θ-semi-polaire de g_n. Les égalités

$$(*)\qquad \frac{\bigwedge_r g_n}{\|\bigwedge_r g_n\|}=\frac{\bigwedge_r\zeta_\Theta(g_n)\bigwedge_r k_{1,n}\bigwedge_r c_\Theta(g_n)\bigwedge_r k_{2,n}}{a_{\imath_r}(g_n)},$$

et la convergence de la suite de matrices $\zeta_\Theta(g_n)$ montrent que les valeurs d'adhérence de la suite de matrices diagonales $\big((a_{\imath_r}(g_n))^{-1}\bigwedge_r c_\Theta(g_n)\big)$ sont de rang 1. Or on a : $c_{\Theta,\imath_r}(g_n)=b_{\imath_r}(g_n)$ (lemme (1.17)) et d'après la convergence c) la suite $\big((a_{\imath_r}(g_n))^{-1}c_{\Theta,\imath_r}(g_n)\big)$ converge vers un réel >0.

On en déduit que

$$\lim_n\frac{c_{\Theta,j}(g_n)}{c_{\Theta,\imath_r}(g_n)}=0,\forall\, j\prec\imath_r.$$

2) Inversement, les égalités $(*)$ impliquent, sous les hypothèses réciproques, que toute valeur d'adhérence M de la suite $\dfrac{\bigwedge_r g_n}{\|\bigwedge_r g_n\|}$ s'écrit

$$M=\bigwedge_r\zeta\bigwedge_r k_1\mathrm{diag}(c,0,\cdots,0)\bigwedge_r k_2,$$

avec $\zeta\in\mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$, $k_1\in\mathbf{K}_\Theta$, $c>0$ et $k_2\in\mathbf{K}$.

Ceci montre que M est de rang 1 et son image est $\zeta \cdot e_{\imath_r}$. Autrement dit la suite (g_n) contracte l'espace projectif $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ en direction de $\zeta \cdot \overline{e_{\imath_r}}$. D'où la réciproque. ■

2. Théorème multiplicatif déterministe

Pour toute matrice g de $\mathbf{G}$, nous appelons $t_{ij}(g)$ le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice g.

(2.1) **Théorème.** *Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite de matrices de $\mathbf{G}$. Nous posons $S_n = g_1 \cdots g_n$ et nous supposons que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|g_n^{\pm 1}\|^{\frac{1}{n}} \leq 1 \text{ et } \forall i \in \{1,\ldots,d\},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_i(S_n) = \gamma_i .$$

Appelons Θ l'ensemble des entiers r de $\{1,\ldots,d-1\}$ tels que $\gamma_r > \gamma_{r+1}$.

Alors la suite de matrices $(S_n)_{n\geq 1}$ contracte l'espace des drapeaux $\mathcal{D}_\Theta$ en direction d'un drapeau ∂. Pour tout $k \in \mathbf{K}$ tel que le drapeau $k\cdot\partial$ soit en position non singulière par rapport au drapeau canonique ∂_Θ, nous avons :

a) $\forall i \in \{1,\ldots,d\},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_{\Theta,i}(kS_n) = \gamma_i$;

b) la composante $\zeta_\Theta(kS_n)$ converge dans $\mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$ vers une matrice $\zeta_\Theta(k)$ et l'on a, pour tout $i,j \in \{1,\ldots,d\}$:

$$\limsup_{n\to+\infty} |t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}(kS_n)\zeta_\Theta(k))|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\gamma_i-\gamma_j} \ ;\ \limsup_{n\to+\infty} |t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}(k)\zeta_\Theta(kS_n))|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\gamma_i-\gamma_j}$$

$$\text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|{}^t e_i\ \zeta^{-1}(k)kS_n\| = \gamma_i \ ;$$

c) $k^{-1}\zeta_\Theta(k)\cdot\partial_\Theta = \partial$.

Le reste de cette section est consacré à la démonstration du théorème (2.1) qui possède certaines similitudes avec le théorème 2.4 de [10]. Dans toute la suite, $(g_n)_{n\geq 0}$ est une suite de matrices de $\mathbf{G}$, et nous posons $S_n = g_1\cdots g_n$.

(2.2) **Proposition.** *Supposons que*

$$\forall\, i \in \{1,\ldots,d\},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_i(S_n) = \gamma_i .$$

Appelons Θ l'ensemble des entiers r de $\{1,\ldots,d-1\}$ tels que $\gamma_r > \gamma_{r+1}$.

Alors, pour $m_{\mathbf{K}}$-presque tout $k \in \mathbf{K}$,

$$\forall i \in \{1,\ldots,d\}, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \text{ Log } b_i(kS_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \text{ Log } c_{\Theta,i}(kS_n) = \gamma_i.$$

Preuve. Soit r un entier de $\{1,\ldots,d\}$. Pour tout entier $n \geq 1$, appelons f_n la fonction sur $\mathbf{K}$ définie par $f_n(k) = \frac{1}{n} \text{ Log}\big(b_{\imath_r}(kS_n)\big)$. (Rappelons que, pour toute matrice g, $b_{\imath_r}(g)$ désigne le produit $b_1(g)\cdots b_r(g)$). Soit $S_n = x_n a(S_n) k_n$ une décomposition polaire de la matrice S_n.

Pour tout $k \in \mathbf{K}$, nous avons, d'après le lemme (1.14),

$$\frac{1}{n} \text{ Log}\big(a_{\imath_r}(S_n)\big) + \frac{1}{n}\phi_r(kx_n) \leq f_n(k) \leq \frac{1}{n} \text{ Log}\big(a_{\imath_r}(S_n)\big).$$

Pour obtenir la convergence $m_{\mathbf{K}}$-presque partout de la suite de fonctions (f_n) vers le réel $\gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, il suffit de montrer que la suite de fonctions $(\frac{1}{n}\phi_r(\cdot x_n))$ converge $m_{\mathbf{K}}$-presque partout vers 0. Comme $\phi_r \in L^2(\mathbf{K}, m_{\mathbf{K}})$, ceci résulte de la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \int_{\mathbf{K}} \frac{1}{n^2}\phi_r^2(kx_n)\, m_{\mathbf{K}}(dk) = \|\phi_r\|_2^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

D'où la première assertion de la proposition.

Ecrivons $\Theta = \{r_1,\ldots,r_m\}$, avec $1 \leq r_1 < \ldots < r_m < d$. Nous associons à Θ la partition de $\{1,\ldots,d\}$ en intervalles $\{J_\ell : 1 \leq \ell \leq q\}$ suivante : $q = m+1$ et pour $1 \leq \ell \leq q$, $J_\ell = \{r_{\ell-1}+1,\ldots,r_\ell\}$, avec les conventions $r_0 = 0$ et $r_{m+1} = d$. Le passage de la décomposition Θ-semi-polaire à la décomposition d'Iwasawa, s'obtient par passage dans chacun des q "blocs", de la décomposition polaire à la décomposition d'Iwasawa.

Notons $\mathbf{K}_\ell$ le groupe des matrices diagonales par blocs défini par

$$\mathbf{K}_\ell = \{\text{diag}(I_{r_1},\ldots,I_{r_\ell - r_{\ell-1}}, K_\ell, I_{r_{\ell+1}-r_\ell},\ldots,I_{d-r_m}) : K_\ell \in \mathbf{O}(r_\ell - r_{\ell-1}, I\!R)\}.$$

Ce groupe s'identifie à $\mathbf{O}(r_\ell - r_{\ell-1}, I\!R)$. Nous notons $m_{\mathbf{K}_\ell}$ la mesure de Haar normalisée sur $\mathbf{K}_\ell$.

D'après le lemme (1.14) appliqué aux différents blocs, nous avons, pour tous $\ell \in \{1,\ldots,q\}, j \in J_\ell$, $\kappa \in \mathbf{K}_\ell$ et $g \in G$, les inégalités

$$(\star\star) \quad \begin{aligned} \text{Log}[c_{\Theta,r_{\ell-1}+1}(g)\cdots c_{\Theta,j}(g)] + \widetilde{\phi}(\kappa\widetilde{x}(g)) &\leq \text{Log}[b_{r_{\ell-1}+1}(\kappa g))\ldots b_k(\kappa g)] \\ &\leq \text{Log}[c_{\Theta,r_{\ell-1}+1}(g)\cdots c_{\Theta,j}(g)]. \end{aligned}$$

La fonction $\widetilde{\phi}$ est définie, de façon analogue à la fonction ϕ_r du lemme (1.14), sur $O(r_\ell - r_{\ell-1}, I\!R)$. Pour tout $p \geq 1$, elle est p-intégrable par rapport à $m_{\mathbf{K}_\ell}$. Si

$g = \zeta(g)k_1c_\Theta(g)k_2$ est une décomposition Θ-semi-polaire de g, la matrice k_1 de $\mathbf{K}_\Theta$ s'écrit par blocs $\mathrm{diag}(k_{1,1},\ldots,k_{1,q})$ et on a défini $\widetilde{x}(g)$ comme étant le ℓ-ième bloc, $k_{1,\ell}$, de k_1.

Montrons que, pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$ et pour $m_\mathbf{K}$-presque tout k,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{K}_\ell}\frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ b_i\ (\kappa k S_n)\ m_{\mathbf{K}_\ell}(d\kappa) = \gamma_i.$$

D'après la première assertion, pour tout $\kappa \in \mathbf{K}_\ell$, on a $\frac{1}{n}$ Log $b_i(\kappa k S_n) \to \gamma_i$, pour $m_\mathbf{K}$-presque tout k. D'après le théorème de Fubini, il s'ensuit que pour $m_\mathbf{K}$-presque tout k, on a

$$\frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ b_i(\kappa k S_n) \to \gamma_i,\ \text{ pour } m_{\mathbf{K}_\ell}\text{-presque tout } \kappa.$$

Les majorations

$$-\infty < \inf_{p\geq 1}\frac{1}{p}\ \mathrm{Log}\ a_d(S_p) \leq \frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ b_i(\kappa k S_n) \leq \sup_{p\geq 1}\frac{1}{p}\ \mathrm{Log}\ a_1(S_p) < +\infty$$

permettent d'appliquer le théorème de convergence dominé.

Par intégration en κ les inégalités $(\star\star)$, écrites pour $g = kS_n$, nous donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathrm{Log}[c_{\Theta,r_{\ell-1}+1}(kS_n)\cdots c_{\Theta,j}(kS_n)] + \frac{1}{n}\int_{\mathbf{K}_\ell}\widetilde{\phi}(\kappa)\ m_{\mathbf{K}_\ell}(d\kappa)&\\ \leq \frac{1}{n}\int_{\mathbf{K}_\ell}\mathrm{Log}[b_{r_{\ell-1}+1}(\kappa k S_n)) + \ldots + b_k(\kappa k S_n)]m_{\mathbf{K}_\ell}(d\kappa)&\\ \leq \frac{1}{n}\mathrm{Log}[c_{\Theta,r_{\ell-1}+1}(kS_n)\cdots c_{\Theta,j}(kS_n)].&\end{aligned}$$

En passant à la limite en n, on obtient le résultat voulu. ■

(2.3) **Proposition.** *Soit Θ un sous-ensemble de $\{1,\ldots,d-1\}$. Supposons que :*

$$\limsup_{n\to+\infty}\ \|g_n^{\pm 1}\|^{\frac{1}{n}}\ \leq\ 1 \quad \textit{et} \quad \forall i \in \{1,\ldots,d\},\ \lim_{n\to+\infty}\ \frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ c_{\Theta,i}\ (S_n)\ =\ \gamma_i\ ;$$

avec $\forall\ r \notin \Theta,\ \gamma_r = \gamma_{r+1}$.

i) Si pour tout $r \in \Theta$, $\gamma_r > \gamma_{r+1}$, alors la composante $\zeta_\Theta(S_n)$ converge dans $\mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$ vers une matrice ζ_Θ et l'on a, pour tout $i, j \in \{1,\ldots,d\}$:

$$\limsup_{n\to+\infty}\ |t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}(S_n)\zeta_\Theta)|^{\frac{1}{n}} \leq\ e^{\gamma_i-\gamma_j};\ \limsup_{n\to+\infty}\ |t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}\zeta_\Theta(S_n))|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\gamma_i-\gamma_j}$$

$$et \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \text{ Log } \|{}^t e_i \; \zeta_\Theta^{-1} S_n\| \;=\; \gamma_i.$$

ii) Si pour tout $r \in \Theta, \gamma_r < \gamma_{r+1}$, *alors, pour tous* $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \; |t_{ij}(c_\Theta(S_n)\zeta_\Theta(S_n)c_\Theta^{-1}(S_n))|^{\frac{1}{n}} \;\leq\; 1$$

$$et \;\; \limsup_{n\to+\infty} \; |t_{ij}(c_\Theta(S_n)\zeta_\Theta^{-1}(S_n)c_\Theta^{-1}(S_n))|^{\frac{1}{n}} \;\leq\; 1.$$

Preuve. Ecrivons $\Theta = \{r_1, \ldots, r_m\}$, avec $1 \leq r_1 < \ldots < r_m < d$. Nous associons à Θ la partition de $\{1, \ldots, d\}$ en intervalles $\{J_\ell : 1 \leq \ell \leq q\}$ suivante : $q = m+1$ et pour $1 \leq \ell \leq q$, $J_\ell = \{r_{j-1}+1, \ldots, r_j\}$, avec les conventions $r_0 = 0$ et $r_{m+1} = d$. Remarquons que pour tout $\zeta \in \mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$, $t_{ij}(\zeta - I)$ est nul pour $i \leq j$ et, pour $i > j$, i et j appartenant au même bloc $J_\ell, 1 \leq \ell \leq q$. Les seuls indices (i,j) à considérer sont ceux qui vérifient $i > j$ et i, j appartiennent à des blocs différents.

Pour tout entier $n \geq 0$, écrivons $S_n = \zeta_\Theta(S_n)k_{1,n}c_\Theta(S_n)k_{2,n}$ avec $k_{1,n} \in \mathbf{K}_\Theta$ et $k_{2,n} \in \mathbf{K}$. Nous avons

$$S_{n+1} = S_n g_{n+1} = \zeta_\Theta(S_n)k_{1,n}c_\Theta(S_n)k_{2,n}g_{n+1}.$$

D'où $\zeta_\Theta(S_{n+1}) = \zeta_\Theta(S_n)T_{n+1}$ en posant

$$T_{n+1} = k_{1,n}c_\Theta(S_n)\zeta_\Theta(k_{2,n}g_{n+1})c_\Theta^{-1}(S_n)k_{1,n}^{-1}.$$

D'après le lemme (1.17),

$$\limsup_{n\to+\infty} \; \|\zeta_\Theta(k_{2,n}g_{n+1})\|^{\frac{1}{n}} \;\leq\; \limsup_{n\to+\infty} \|g_{n+1}\|^{\frac{2}{n}} \; \|g_{n+1}^{-1}\|^{\frac{2}{n}} \;\leq\; 1.$$

Posons $R_n = c_\Theta(S_n)\zeta_\Theta(k_{2,n}g_{n+1})c_\Theta^{-1}(S_n)$. Nous avons

$$t_{ij}(R_n) = c_{\Theta,i}(S_n)t_{ij}\big(\zeta_\Theta(k_{2,n}g_{n+1})\big)c_{\Theta,j}^{-1}(S_n) \;;$$

et par suite

$$\limsup_{n\to+\infty} \big|t_{ij}(R_n)\big|^{\frac{1}{n}} \;\leq\; e^{\gamma_i - \gamma_j}.$$

La "grandeur" de l'élément $t_{ij}(R_n)$ ne dépend que des intervalles $J_\ell, 1 \leq \ell \leq q$, auxquels les indices i et j appartiennent. La matrice T_n s'obtient à partir de R_n par conjugaison par une matrice de $\mathbf{K}_\Theta$. Cette conjugaison "respecte les blocs" ; il s'ensuit que l'on a encore

$$\limsup_{n\to+\infty} \big|t_{ij}(T_n)\big|^{\frac{1}{n}} \;\leq\; e^{\gamma_i - \gamma_j}.$$

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $C(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tous $n \geq 1$ et $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$|t_{ij}(T_n)| \leq Ce^{n(\gamma_i - \gamma_j + \varepsilon)}.$$

Observons aussi que pour toutes matrices $y_1, \ldots y_q$ de $N_{\overline{\Theta}}$, le produit de matrices $(y_1 - I) \cdots (y_q - I)$ est nul.

$i)$ Supposons que l'on ait, $\forall r \in \Theta,\ \gamma_r > \gamma_{r+1}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\zeta_\Theta^{-1}(S_n)\zeta_\Theta(S_{n+p}) &= T_{n+1} \cdots T_{n+p} \\
&= (I + (T_{n+1} - I)) \cdots (I + (T_{n+p} - I)) \\
&= I + \ldots + \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{q-1} \leq p} (T_{n+i_1} - I) \cdots (T_{n+i_{q-1}} - I).
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, vérifiant $q\varepsilon < \min\{\gamma_r - \gamma_{r+1} : r \in \Theta\}$, il existe $C'(\varepsilon) > 1$, tel que, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\sup_{p \geq 1} |t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}(S_n)\zeta_\Theta(S_{n+p}))| \leq C'(\varepsilon)e^{n(\gamma_i - \gamma_j + (q-1)\varepsilon)}.$$

D'où la convergence de la suite $\big(\zeta_\Theta(S_n)\big)_{n \geq 1}$ et l'inégalité

$$\limsup_{n \to +\infty} \ |t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}(S_n))\zeta_\Theta|^{\frac{1}{n}} \ \leq \ e^{\gamma_i - \gamma_j}.$$

D'autre part, nous avons

$$\zeta_\Theta^{-1}\zeta_\Theta(S_n) = \lim_{p \to +\infty} T_{n+p}^{-1} \cdots T_{n+1}^{-1}$$

et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$T_{n+1}^{-1} = k_{1,n}c_\Theta(S_n)\zeta_\Theta^{-1}(k_{2,n}g_{n+1})c_\Theta^{-1}(S_n)k_{1,n}^{-1}.$$

Comme précédemment, on obtient l'inégalité

$$\limsup_{n \to +\infty} \ |t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}\zeta_\Theta(S_n))|^{\frac{1}{n}} \ \leq \ e^{\gamma_i - \gamma_j}.$$

Enfin, nous avons

$$\|{}^t e_i \zeta_\Theta^{-1} S_n\| \ = \ \|{}^t e_i \zeta_\Theta^{-1}\zeta_\Theta(S_n)k_{1,n}c_\Theta(S_n)\|.$$

De ce qui précède, on déduit que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\limsup_{n \to +\infty} \left|t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}\zeta_\Theta(S_n)k_{1,n}c_\Theta(S_n))\right|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\gamma_i}$$

et par suite

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|{}^t e_i \zeta_\Theta^{-1} S_n\| \leq \gamma_i.$$

Mais, pour tout couple $(y,z) \in \mathbf{N}_{\overline{\Theta}} \times \mathbf{G}_\Theta$, nous avons $\|{}^t e_i y z\| \geq \|{}^t e_i z\|$. Par suite

$$\|{}^t e_i \zeta_\Theta^{-1} S_n\| \geq \|{}^t e_i k_{1,n} c_\Theta(k S_n)\|$$

D'où l'on déduit que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|{}^t e_i \zeta_\Theta^{-1} S_n\| \geq \gamma_i.$$

Ceci termine la preuve de l'assertion $i)$ de la proposition.

$ii)$ Supposons maintenant que $\forall r \in \Theta,\ \gamma_r < \gamma_{r+1}$. Nous avons :

$$\zeta_\Theta(S_n) = I + \sum_{1\leq i_1\leq n} (T_{i_1} - I) + \ldots + \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{q-1}\leq n} (T_{i_1} - I)\cdots(T_{i_{q-1}} - I)$$

$$\zeta_\Theta^{-1}(S_n) = I + \sum_{1\leq i_1\leq n} (T_{i_1}^{-1} - I) + \ldots + \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{q-1}\leq n} (T_{i_{q-1}}^{-1} - I)\cdots(T_{i_1}^{-1} - I).$$

Comme précédemment on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} |t_{ij}(\zeta_\Theta(S_n))|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\gamma_i-\gamma_j} \text{et } \limsup_{n\to+\infty} |t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}(S_n))|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\gamma_i-\gamma_j}.$$

D'où l'on déduit l'assertion $ii)$ de la proposition. ■

<u>Preuve du Théorème (2.1).</u> Des propositions (2.2) et (2.3), il résulte que, pour $m_\mathbf{K}$-presque tout $k \in \mathbf{K}$:

$i)$ $\forall i \in \{1,\ldots,d\}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_{\Theta,i}\,(kS_n) = \gamma_i$;

$ii)$ la composante $\zeta_\Theta(kS_n)$ converge dans $\mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$ vers une matrice $\zeta(k)$.

Du lemme (1.21), il s'ensuit que, pour $m_\mathbf{K}$-presque tout $k \in \mathbf{K}$, la suite de matrices $(kS_n)_{n\geq 1}$ contracte l'espace des drapeaux $\mathcal{D}_\Theta$ en direction de $\zeta(k)\cdot\partial_\Theta$. Autrement dit la suite de matrices $(S_n)_{n\geq 1}$ contracte l'espace des drapeaux $\mathcal{D}_\Theta$ en direction d'un drapeau ∂ tel que

$$k^{-1}\zeta(k)\cdot\partial_\Theta = \partial, \text{ pour } m_\mathbf{K} - \text{ presque tout } k \in \mathbf{K}.$$

A cette étape de la démonstration, les assertions du théorème sont établies pour $m_\mathbf{K}$-presque tout k. Nous allons montrer qu'elles sont vraies pour tout $k \in \mathbf{K}$

tel que le drapeau $k \cdot \partial$ ne soit pas en position singulière par rapport au drapeau canonique.

Soit k un tel élément. D'après le lemme (1.21), la composante $\zeta_\Theta(kS_n)$ converge dans $\mathrm{N}_{\overline{\Theta}}$ vers une matrice que nous noterons $\zeta_\Theta(k)$ et

$$(F_1) \qquad \forall\, r \in \Theta,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_{\Theta,r,r}\,(kS_n) \;=\; \gamma_1 + \ldots + \gamma_r.$$

D'autre part, des inégalités $\forall\, g \in G, \forall\, 1 \leq r \leq d$,

$$\|\bigwedge_r \zeta_\Theta^{-1}(g)\|^{-1}\ \|\bigwedge_r c_\Theta(g)\| \leq\ \|\bigwedge_r g\|\ \leq\ \|\bigwedge_r \zeta_\Theta(g)\|\ \|\bigwedge_r c_\Theta(g)\|,$$

et de la convergence de la suite de matrices $\zeta_\Theta(kS_n)$, il résulte que :

$$(F_2) \qquad \forall\, 1 \leq i \leq d, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_i\,(c_\Theta\,(kS_n)) \;=\; \gamma_i.$$

Des relations (F_1) et (F_2), on déduit alors que, pour tout $1 \leq i \leq d$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_{\Theta,i}\,(kS_n) \;=\; \gamma_i$. La proposition (2.3) permet alors de conclure. ■

3. Théorème ergodique multiplicatif

Dans toute cette section, nous désignons par : $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable ; τ une transformation mesurable de Ω et M une application mesurable de Ω dans G. Pour tout entier $n \geq 1$, nous posons $M_n = M\ M\circ\tau\ \cdots\ M\circ\tau^{n-1}$.

• Cas général

(3.1) Nous appelons Ω_0 le sous-ensemble mesurable, τ-invariant, de Ω constitué des éléments ω pour lesquels :

i) les suites $\left(\frac{1}{n} \operatorname{Log} a_i(M_n(\omega))\right)_{n\geq 1}$, $1 \leq i \leq d$, convergent vers des réels notés $\gamma_i(\omega)$;

ii) les suites $\left(\frac{1}{n} \operatorname{Log} \|M^{\pm 1} \circ \tau^n(\omega)\|\right)_{n\geq 1}$ converge vers zéro.

Pour tout $\omega \in \Omega_0$, posons $\Theta(\omega) = \{r \in \{1,\ldots,d-1\} : \gamma_r(\omega) > \gamma_{r+1}(\omega)\}$. Nous appelons $m(\omega)$ le cardinal de $\Theta(\omega)$. Lorsque $m(\omega) \geq 1$, nous écrivons $\Theta(\omega) = \{r_1(\omega),\ldots,r_{m(\omega)}(\omega)\}$, avec $1 \leq r_1(\omega) < \ldots < r_{m(\omega)}(\omega) < d$. On convient que, $r_0(\omega) = 0$ et $r_{m(\omega)+1}(\omega) = d$. On voit facilement que les applications $\omega \to \gamma_i(\omega)$, $i \in \{1,\ldots,d\}$, $\omega \to \Theta(\omega)$ et $\omega \to m(\omega)$ sont mesurables et τ-invariantes.

Pour tout $1 \leq \ell \leq m(\omega) + 1$, nous posons

$$V_\ell(\omega) \;=\; \oplus_{r_{\ell-1}(\omega)+1 \leq i \leq d}\; \mathbb{R}\, {}^t e_i.$$

Pour tout $1 \leq \ell \leq m(\omega)+1$ et tout $\omega \in \Omega_0$, nous avons (cf. notations (1.16)) :

$$V_{m(\omega)+1}\,(\omega) \subset \ldots \subset V_2\,(\omega) \subset V_1\,(\omega) = \mathbb{R}^d \quad ; \quad V_\ell(\tau\omega) = V_\ell(\omega)$$

$$\text{et} \qquad \forall g \in \mathbf{P}_{\Theta(\omega)},\; V_\ell(\omega)\; g = V_\ell(\omega).$$

(3.2) **Théorème.** *Il existe une application mesurable h de Ω_0 dans $\mathbf{K}$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, la suite de matrices $(M_n(\omega))_{n\geq 1}$ contracte l'espace des drapeaux $\mathcal{D}_{\Theta(\omega)}$ en direction du drapeau $h(\omega) \cdot \partial_{\Theta(\omega)}$.*

Pour tout $\omega \in \Omega_0$, la matrice $h^{-1}(\omega)\; M(\omega)\; h(\tau\omega)$ appartient à $\mathbf{P}_{\Theta(\omega)}$ et pour tous $1 \leq \ell \leq m(\omega)+1$, $u \in V_\ell(\omega) \setminus V_{\ell+1}(\omega)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \text{ Log } \|uh^{-1}(\omega) M_n(\omega)\| = \gamma_{r_\ell(\omega)}(\omega).$$

Preuve. Nous appliquons le théorème (2.1).

La suite de matrices $(M_n(\omega))_{n\geq 1}$ contracte $\mathcal{D}_{\Theta(\omega)}$ en direction d'un drapeau $\partial(\omega)$. Des relations $\forall n \geq 1, M_n(\omega) = M(\omega)\; M_{n-1}(\tau\omega)$, il s'ensuit que $\partial(\omega) = M(\omega) \cdot \partial(\tau\omega)$.

Pour tout $k \in \mathbf{K}$ tel que le drapeau $k \cdot \partial(\omega)$ soit en position non singulière par rapport au drapeau canonique, nous avons

$$k^{-1} \zeta_{\Theta(\omega)}(k, \omega) \cdot \partial_{\Theta(\omega)} = \partial(\omega).$$

Appelons V l'ouvert de $\mathbf{K}$ constitué par les matrices k telles que, pour tout $r \in \{1, \ldots, d-1\}$, $\Delta_r(k) \neq 0$. De la compacité de $\mathbf{K}$ il résulte qu'il existe des matrices $k_1, \ldots, k_p$ de $\mathbf{K}$ telles que $\mathbf{K} = k_1^{-1} V \cup \cdots \cup k_p^{-1} V$. On désigne alors par : $\Omega_{0\ 1}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega_0$ tels que le drapeau $k_1 \cdot \partial(\omega)$ soit en position non singulière par rapport au drapeau canonique ; puis par $\Omega_{0\ 2}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega_0$, $\omega \notin \Omega_{0\ 1}$, tels que le drapeau $k_2 \cdot \partial(\omega)$ soit en position non singulière par rapport au drapeau canonique et ainsi de suite... Nous obtenons ainsi une partition mesurable de Ω_0. Pour tout $\omega \in \Omega_{0\ j}$, $1 \leq j \leq p$, nous prenons pour $h(\omega)$ la composante sur $\mathbf{K}$, dans la décomposition $\mathbf{G} = \mathbf{KA}^t\mathbf{N}$, de la matrice $k_j^{-1} \zeta_{\Theta(\omega)}(k_j, \omega)$.

Le résultat s'en déduit aisément. ■

La proposition suivante montre que pour toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, τ-invariante et pour laquelle l'application Log $Q(M)$ est intégrable, nous avons $\mathbb{P}[\Omega_0] = 1$.

(3.3) **Proposition.** *Soit $I\!\!P$ une probabilité τ-invariante sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que*

$$\int_\Omega \mathrm{Log}\ Q(M)\ I\!\!P(d\omega)\ <\ +\infty.$$

Alors il existe des fonctions mesurables $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ telles que la suite de matrices diagonales $\left(\frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ a(M_n)\right)_{n\geq 1}$ converge, $I\!\!P$-p.s. et dans $I\!\!L^1(\Omega, \mathcal{F}, I\!\!P)$, vers la matrice diag $(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$.

De plus les suites $\left(\frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ \|M^{\pm 1} \circ \tau^n(\omega)\|\right)_{n\geq 1}$ convergent vers zéro.

Preuve. Soit $r \in \{1, \ldots, d\}$. Posons $W_r = \|\bigwedge_r M_n\| = a_{\imath_r}(M_n)$. De l'inégalité

$$\mathrm{Log}\ W_r(M_{n+p}) \leq \mathrm{Log}\ W_r(M_n) + \mathrm{Log}\ W_r(M_p) \circ \tau^n$$

et du théorème ergodique sous-additif ([12], [4]), il résulte que la suite de variables aléatoires $(\mathrm{Log}\ W_r(M_n))_{n\geq 1}$ converge, $I\!\!P$ -p.s., et au sens de $I\!\!L^1(\Omega, \mathcal{F}, I\!\!P)$.
La dernière assertion résulte de l'intégrabilité de la v. a. Log $Q(M)$. ■

(3.4) Lorsque le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \tau, I\!\!P)$ est ergodique, les applications γ_i, $1 \leq i \leq d$, Θ et m sont $I\!\!P$-p.s. constantes.

• Cas inversible

(3.5) Nous supposons que la transformation τ est inversible, d'inverse mesurable. Nous posons

$$M_0 = I \text{ et } \forall n \geq 1,\ M_{-n} = M^{-1} \circ \tau^{-1} \cdots\ M^{-1} \circ \tau^{-n}.$$

Nous avons alors la "relation de cocycle" :

$$M_{n+p}\ =\ M_n\ M_p \circ \tau^n,\ \forall n, p \in Z\!\!\!Z.$$

Nous appelons Ω_1 le sous-ensemble mesurable, τ-invariant, de Ω_0 constitué des éléments ω pour lesquels :

i) les suites $\left(\frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ a_i(M_{-n}(\omega))\right)_{n\geq 1}, 1 \leq i \leq d$, convergent vers les réels $-\gamma_{d+1-i}(\omega)$;

ii) les suites $\left(\frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ M^{\pm 1} \circ \tau^{-n}(\omega)\right)_{n\geq 1}$ convergent vers zéro.

(3.6) **Théorème.** *Il existe un sous-ensemble mesurable Ω_2 de Ω_1 de $I\!\!P$-mesure 1 et une application mesurable Φ de Ω_2 dans G tels que, pour tout $\omega \in \Omega_2$:*

i) $\forall n \in Z\!\!\!Z$, *la matrice* $\Gamma_n(\omega) = \Phi^{-1}(\omega)\ M_n(\omega)\ \Phi(\tau^n\omega)$ *appartient à* $\mathbf{G}_{\Theta(\omega)}$;

ii) $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Log}\ \|\Phi^{\pm 1}(\tau^n\omega)\|\ =\ 0$;

iii) $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ \|{}^te_i\Phi^{-1}(\omega)\ M_n(\omega)\| = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n}\ \mathrm{Log}\ \|{}^te_i\Gamma_n(\omega)\| = \gamma_i(\omega)$;

En outre, il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega_2,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \|\Gamma_n(\omega)\| \leq C\ \|M_n(\omega)\|.$$

Preuve.

Première étape.

D'après le théorème (3.2) et la relation de cocycle, pour tout $\omega \in \Omega_0$, nous avons :

- pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $h^{-1}(\omega)M_n(\omega)h(\tau^n(\omega))$ appartient à $\mathbf{P}_{\Theta(\omega)}$.
- pour tous $\ell \in \{1, \ldots, m(\omega)+1\}$ et $u \in V_\ell(\omega)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \text{ Log } \|uh^{-1}(\omega)M_n(\omega)\| \leq \gamma_{r_\ell(\omega)}(\omega).$$

Le même théorème, appliqué à la suite de matrices $\left(M_{-n}\right)_{n\geq 1}$, nous dit qu'il existe une application mesurable f de Ω_1 dans $\mathbf{K}$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega_1$:

- pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, la matrice $f^{-1}(\omega)M_{-n}(\omega)f(\tau^{-n}(\omega))$ appartient à $\mathbf{P}_{\widetilde{\Theta}(\omega)}$;
- pour tout $\ell \in \{1, \ldots, m(\omega)+1\}$ et tout $u \in \widetilde{V}_\ell(\omega)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \text{ Log } \|uf^{-1}(\omega)M_{-n}(\omega)\| \leq -\gamma_{r_{m(\omega)+2-\ell}(\omega)}(\omega);$$

avec

$$\widetilde{\Theta}(\omega) = \{d - r_m(\omega), \ldots, d - r_1(\omega)\}$$
$$\widetilde{V}_\ell(\omega) = \oplus_{d+1-r_{m(\omega)+2-\ell}(\omega) \leq i \leq d}\ \mathbb{R}\ {}^t e_i.$$

Appelons χ la matrice de $\mathbf{K}$ définie par $t_{ij}(\chi) = \delta(i, d+1-i)$ (symboles de Kronecker).

On obtient, sur Ω_1 :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \chi f^{-1}(\cdot)M_{-n}(\cdot)f(\tau^{-n}(\cdot))\chi\ \in\ \chi\mathbf{P}_{\widetilde{\Theta}(\cdot)}\chi\ =\ {}^t\mathbf{P}_{\Theta(\cdot)}$$

$$\text{et}\quad \forall \ell \in \{1, \ldots, m+1\},\ \forall u \in U_\ell,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\text{Log}\|u\chi f^{-1}M_{-n}\| \leq -\gamma_{r_\ell}\ ;$$

où $U_\ell(\omega) = \oplus_{1 \leq i \leq r_\ell(\omega)}\ \mathbb{R}\ {}^t e_i$.

Deuxième étape.

Désignons par Ω_2 le sous-ensemble mesurable de Ω_1 constitué des éléments ω de Ω_1 tels que :

$$\forall r \in \Theta(\omega),\ \Delta_r(\chi\ f^{-1}(\omega)\ h(\omega)) \neq 0.$$

Des relations précédentes, il résulte que Ω_2 est τ-invariant (Cf Introduction). Pour tout $\omega \in \Omega_2$, la matrice $\chi f^{-1}(\omega)h(\omega)$ appartient à l'ouvert $\mathbf{N}_{\overline{\Theta}}\mathbf{P}_{\Theta}$ de $\mathbf{G}$. Nous écrivons $\chi f^{-1}(\omega)h(\omega) = \xi(\omega)\pi(\omega)$, avec $\xi(\omega) \in \mathbf{N}_{\overline{\Theta}}$ et $\pi(\omega) \in \mathbf{P}_{\Theta}$.

Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\Lambda_n = \chi f^{-1} M_n f \circ \tau^n \chi$. Pour tous entiers $n, p \in \mathbb{Z}$, nous avons $\Lambda_{n+p} = \Lambda_n\ \Lambda_p \circ \tau^n$.

Puisque Λ_n appartient à ${}^t\mathbf{P}_{\Theta(\omega)}$, écrivons $\Lambda_n = \zeta_{\Theta(\omega)}(\Lambda_n)\Gamma_n$, en posant $\Gamma_n = k_{3,n}c_{\Theta(\omega)}(\Lambda_n)k_{4,n}$, avec $k_{3,n}, k_{4,n} \in \mathbf{K}_{\Theta(\omega)}$. Pour tous entiers $n, p \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$(F_3)\quad \Gamma_{n+p} = \Gamma_n\ \Gamma_p \circ \tau^n \ \text{ et } \zeta_{\Theta(\omega)}(\Lambda_{n+p}) = \zeta_{\Theta(\omega)}(\Lambda_n)\Gamma_n\zeta_{\Theta(\omega)}(\Lambda_p \circ \tau^n)\Gamma_n^{-1}.$$

Soit $\omega \in \Omega_2$. Nous avons $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $a(\Lambda_n(\omega)) = a(S_n(\omega))$ et les suites de matrices $\left(\Lambda_n(\omega)\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\Lambda_{-n}(\omega)\right)_{n\geq 1}$ vérifient les hypothèses du théorème (2.1).

La suite de matrices $\left(\Lambda_n(\omega)\right)_{n\geq 1}$ contracte l'espace $\mathcal{D}_{\Theta(\omega)}$ en direction du drapeau $\chi f^{-1}(\omega)h(\omega) \cdot \partial_{\Theta(\omega)} = \xi(\omega) \cdot \partial_{\Theta(\omega)}$. Il s'ensuit que, sur Ω_2 :

a) $\zeta_\Theta(\Lambda_n)$ converge vers ξ ;

b) pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_{\Theta,i}(\Lambda_n) = \gamma_i$;

c) $\forall i, j \in \{1, \ldots, d\}, \displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \left|t_{ij}(\zeta_\Theta^{-1}(\Lambda_n)\xi)\right|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\gamma_i - \gamma_j}$;

d) $\forall i, j \in \{1, \ldots, d\}, \displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \left|t_{ij}(\xi^{-1}\zeta_\Theta(\Lambda_n))\right|^{\frac{1}{n}} \leq e^{\gamma_i - \gamma_j}$.

La suite de matrices $\left(\chi\ \Lambda_{-n}(\omega)\right)_{n\geq 1}$ contracte l'espace des drapeaux $\mathcal{D}_{\widetilde{\Theta(\omega)}}$ en direction du drapeau canonique. D'où, sur Ω_2 :

e) $\zeta_{\widetilde{\Theta}}(\chi\Lambda_n)$ converge vers la matrice identité ;

f) pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_{\widetilde{\Theta},i}\,(\chi\Lambda_{-n}) = -\gamma_{d+1-i}$; c'est-à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} c_{\Theta,i}\,(\Lambda_{-n}) = -\gamma_i\ .$$

Cela dit nous avons, sur Ω_2,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{Z},\ \xi^{-1}\Lambda_n\xi \circ \tau^n &= \xi^{-1}\zeta_\theta(\Lambda_n)\Gamma_n\xi \circ \tau^n \\ &= \xi^{-1}\zeta_\theta(\Lambda_n)[\Gamma_n\xi \circ \tau^n\Gamma_n^{-1}]\Gamma_n \\ &= \Gamma_n\ ;\end{aligned}$$

car, d'après les relations (F_3), $\xi = \zeta_\Theta(\Lambda_n)\Gamma_n\xi \circ \tau^n\Gamma_n^{-1}$.

Cette dernière relation, nous donne aussi

$$\xi \circ \tau^n = \Gamma_n^{-1}\zeta_\Theta^{-1}(\Lambda_n)\xi\Gamma_n \text{ et } \xi^{-1} \circ \tau^n = \Gamma_n^{-1}\xi^{-1}\zeta_\Theta(\Lambda_n)\Gamma_n.$$

Des propriétés b), c) et d) ci-dessus, il résulte que :

$$(F_4) \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,d\}, \limsup_{n\to+\infty} \|\xi \circ \tau^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1 \text{ et } \limsup_{n\to+\infty} \|\xi^{-1} \circ \tau^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

D'autre part, nous avons, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Lambda_n \circ \tau^{-p} &= \Lambda_{-p}^{-1}\ \Lambda_{n-p} \\ &= \Gamma_{-p}^{-1}\zeta_\Theta^{-1}(\Lambda_{-p})\zeta_\Theta(\Lambda_{n-p})\Gamma_{n-p}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\zeta_\Theta(\Lambda_n \circ \tau^{-p}) = \Gamma_{-p}^{-1}\zeta_\Theta^{-1}(\Lambda_{-p})\zeta_\Theta(\Lambda_{n-p})\Gamma_{-p}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \xi \circ \tau^{-p} &= \Gamma_{-p}^{-1}\zeta_\Theta^{-1}(\Lambda_{-p})\xi\Gamma_{-p} \\ &= \Gamma_{-p}^{-1}\zeta_\Theta^{-1}(\Lambda_{-p})\Gamma_{-p}\Gamma_{-p}^{-1}\xi\Gamma_{-p}; \end{aligned}$$

Puisque

$$\Lambda_{-p} = \Lambda_{-1}\Lambda_{-1} \circ \tau^{-1} \cdots \Lambda_{-1} \circ \tau^{-(p-1)}$$

$$\text{et} \quad \forall 1 \leq i \leq d,\ \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} \operatorname{Log}(c_i(\Lambda_{-p})) = -\gamma_i,$$

il résulte de la proposition (2.3), assertions ii), que

$$(F_5) \qquad \limsup_{n\to+\infty} \|\xi \circ \tau^{-n}\|^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

De la même façon on obtient

$$(F_6) \qquad \limsup_{n\to+\infty} \|\xi^{-1} \circ \tau^{-n}\|^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

En posant $\Phi = h\pi^{-1} = f\chi\xi$, on obtient alors la cohomologie voulue. On notera que l'assertion ii) du théorème résulte des inégalités (F_4), (F_5) et (F_6) précédentes et des relations $\forall n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq \|\Phi \circ \tau^n\|\ \|(\Phi \circ \tau^n)^{-1}\|$.

Enfin, le fait que Ω_2 soit de $\mathbb{P}$-mesure 1, résulte de la proposition suivante.

(3.7) **Proposition.** *Pour toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, τ-invariante, pour laquelle l'application* $\operatorname{Log} Q(M)$ *est intégrable, nous avons* $\mathbb{P}[\Omega_2] = 1$.

<u>Preuve.</u>

1) Nous montrons d'abord que $I\!P[\Omega_1] = 1$.

Compte tenu de la proposition (3.3), il reste seulement à montrer que la convergence, $I\!P$-p.s. et dans $I\!L^1(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$, de la suite de matrices diagonales $\left(\frac{1}{n} \text{ Log } a(M_{-n})\right)_{n\geq 1}$ a lieu vers la matrice diag $(-\gamma_d, \ldots, -\gamma_1)$.

Or pour $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}M_{-n} &= (M_n \circ \tau^{-n})^{-1} = (k_n \circ \tau^{-n})^{-1}(a_n \circ \tau^{-n})^{-1}(x_n \circ \tau^{-n})^{-1} \\ &= (k_n \circ \tau^{-n})^{-1}\chi \text{diag } \left(\frac{1}{a_d(M_n \circ \tau^{-n})}, \ldots, \frac{1}{a_1(M_n \circ \tau^{-n})}\right)\chi(x_n \circ \tau^{-n})^{-1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2) Soit $\omega \in \Omega_1$. Pour tout $\ell \in \{1, \ldots, m(\omega)\}$, posons

$$M_\ell(\omega) = V_{\ell+1}(\omega)h^{-1}(\omega) \cap U_\ell(\omega)\chi f^{-1}(\omega).$$

Soit $u \in M_\ell(\omega)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|u\| &= \|uM_n(\omega)M_{-n}(\tau^n(\omega))\| \\ &\leq e^{n[\gamma_{r_{\ell+1}}(\omega) - \gamma_{r_\ell} + \varepsilon_n(\omega) + \eta_n(\tau^n(\omega))]} \ ;\end{aligned}$$

avec des suites de v.a.r. $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ et $(\eta_n)_{n\geq 1}$ convergeant presque-sûrement vers zéro. La suite $(\eta_\circ\tau^n)_{n\geq 1}$ converge donc en probabilité vers zéro. On en déduit que pour $I\!P$-presque tout $\omega \in \Omega_1$, $M_\ell(\omega)$ est réduit au vecteur nul.

On en déduit que, pour $I\!P$-presque tout $\omega \in \Omega_1$, $\Delta_r(\chi f^{-1}(\omega)h(\omega)) \neq 0$, pour tout $r \in \Theta(\omega)$. [En effet, pour tous éléments x, k de $\mathbf{K}$ et tout entier r de $\{1, \ldots, d\}$,

$$\begin{aligned}\Delta_r(x^{-1}k) = 0 &\Leftrightarrow \text{Det}((\langle xe_i, ke_j\rangle))_{1\leq i,j\leq r} = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in I\!R^r \setminus \{0\}, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\ ke_i \in \oplus_{r+1\leq i\leq d} I\!R\ xe_i \\ &\Leftrightarrow \oplus_{1\leq i\leq r} I\!R\ ke_i \bigcap \oplus_{r+1\leq i\leq d} I\!R\ xe_i\ \neq\ (0) \\ &\Leftrightarrow \oplus_{1\leq i\leq r}{}^t e_i k^{-1} I\!R \bigcap \oplus_{r+1\leq i\leq d}{}^t e_i x^{-1} I\!R\ \neq\ (0).]\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

4. Cas d'un produit de matrices aléatoires indépendantes.

Dans cette section, nous traitons l'exemple d'un produit de variables aléatoires indépendantes. Les résultats résumés ci-dessous sont ceux de [8] et [9]. Travaux qui font suite respectivement à ceux de Furstenberg [5] et ceux de Golsheid et Margulis [6].

Nous désignons par Ω l'espace produit $\mathbf{G}^{\mathbb{Z}}$ et par $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de Ω. Nous appelons $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les applications coordonnées de l'espace produit Ω et θ l'opérateur de décalage sur Ω. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $X_n \circ \theta = X_{n+1}$. Nous considérons le cocycle $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$S_0 = I \ ; \ \forall n \geq 1, \ S_n = X_0 \cdots X_{n-1} \ \text{ et } S_{-n} = X_1^{-1} \cdots X_n^{-1}.$$

Soit μ un mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbf{G}$. Nous supposons que $\int_{\mathbf{G}} \log\, Q(g)\ \mu(dg) < +\infty$. Nous appelons $\mathbb{P}$ la probabilité produit $\otimes_{\mathbb{Z}}\mu$. La probabilité $\mathbb{P}$ est θ-invariante et ergodique. Nous notons $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ les coefficients caractéristiques du cocycle $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Lorsque ces coefficients sont tous égaux, le théorème ergodique multiplicatif ne nous dit rien. Le but recherché est de donner un critère de séparation de ces coefficients.

- **Notions d'irréductibilité au sens faible.**

(4.1) **Définition** Nous disons qu'un sous-espace V, non trivial, de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ est de type (S) si V admet une base formée de r-vecteurs décomposables et si V est contenu dans l'orthogonal d'un r-vecteur décomposable non nul.

(4.2) **Définitions.** Nous disons qu'un sous-semi-groupe T de $\mathbf{G}$ agit de façon *irréductible, au sens faible,* sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$, s'il n'existe pas de sous-espace non trivial de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$, de type (S), stable par T. L'action de T est dite *totalement irréductible, au sens faible,* s'il n'existe pas de de réunion finie de sous-espaces non triviaux de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$, de type (S), stable par T.

Les notions d'irréductibilité et de totale irréductibilité, au sens fort, s'obtiennent en supprimant dans les définitions précédentes la mention "de type (S)". Pour $r = 1$ les notions fortes et faibles d'irréductibilité coïncident.

(4.3) **Lemme.** *Soient T un sous-semi-groupe de $\mathbf{G}$ et H le sous-groupe fermé de $\mathbf{G}$, engendré par T. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) T agit de façon totalement irréductible, au sens faible, sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$;

ii) T permute une famille finie de sous-espaces de type (S) de même dimension ;

iii) H agit de façon totalement irréductible, au sens faible, sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$;

iv) tout sous-groupe d'indice fini de H, agit de façon irréductible, au sens faible, sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$;

v) le groupe transposé ${}^tH$ du groupe H agit de façon totalement irréductible, au sens faible, sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$;

vi) il existe un r-vecteur décomposable u et une réunion finie, $\mathcal{R}$, de sous-espaces, non triviaux, de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$, chacun orthogonal à un r-vecteur décomposable, tels que $Tu = \{tu : t \in T\} \subset \mathcal{R}$.

Tout groupe connexe agit de façon totalement irréductible, au sens faible, si et seulement s'il agit de façon irréductible, au sens faible.

(4.4) **Exemple** Prenons $d = 4$ et appelons T le groupe simplectique, $\mathrm{SP}(2, \mathbb{R})$, défini comme l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ préservant la forme quadratique $\Phi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3$ sur $\mathbb{R}^4$. Nous avons $T = \{g \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) : {}^tgJg = J\}$; où J désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$. Une matrice g de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ appartient à T si et seulement si elle s'écrit sous la forme $g = x \operatorname{diag}(e^c, e^d, e^{-c}, e^{-d})\, k$, pour des matrices x, k appartenant au groupe $K' = \mathrm{SP}(2, \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(4, \mathbb{R})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ -g_2 & g_1 \end{pmatrix}$, avec $g_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\eta \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\eta \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\eta \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\eta \end{pmatrix}$, pour des réels $c, d \in \mathbb{R}$, θ, ϕ, η appartenant à $[0, 2\pi[$.

On voit facilement que les bi-vecteurs de $\{te_1 \wedge te_2 : t \in T\}$ sont orthogonaux à $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$. On en déduit que T n'agit pas de façon irréductible, au sens fort, sur $\bigwedge_2 \mathbb{R}^4$.

Supposons que pour deux bi-vecteurs $u_1 \wedge u_2$ et $v_1 \wedge v_2$, on ait $\forall t \in T$, $< u_1 \wedge u_2, tv_1 \wedge tv_2 >= 0$. Comme le groupe T est symétrique, nous avons aussi $\forall s, t \in T$, $< su_1 \wedge su_2, tv_1 \wedge tv_2 >= 0$. Tout vecteur normé u de $\mathbb{R}^4$ s'écrit ke_1 pour une matrice k de K'. On en déduit alors qu'il existe deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^4$ tels que $\forall s, t \in T$, $< se_1 \wedge su, te_1 \wedge tv >= 0$. A l'aide de la suite de matrices diagonales $\left(\operatorname{diag}(1, n, 1/n, 1)\right)_{n\geq 1}$ de T, on se ramène alors à des vecteurs u et v de la base canonique. Ce qui signifie qu'il existe deux entiers i, j de $\{2, 3, 4\}$ tels que pour tout $g \in T$, le déterminant extrait de g en conservant les lignes 1 et i et les colonnes 1 et j est nul. Ce qui est manifestement faux. On vient donc de montrer que T agit de façon irréductible, au sens faible, sur $\bigwedge_2 \mathbb{R}^4$.

Comme le groupe T est connexe, T agit de façon totalement irréductible, au sens faible, sur $\bigwedge_2 \mathbb{R}^4$.

- **Critère de séparation des exposants.**

(4.5) **Théorème.** *Soit r un entier de $\{1, \ldots, d\}$. Supposons que le semi-groupe fermé T_μ engendré par le support de μ agisse de façon totalement irréductible, au sens faible, sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ et possède une suite contractant l'espace projectif $\mathcal{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$.*

Alors nous avons $\gamma_r > \gamma_{r+1}$.

L'idée de démonstration est la suivante. Par un argument de martingale, emprunté à H. Furstenberg [5], on montre que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite de $(S_n(\omega))_{n\geq 0}$ contracte l'espace des drapeaux homogènes $\mathcal{D}_r$ en direction d'un drapeau, $\overline{z}(\omega)$. La loi ν de ce drapeau est l'unique mesure de probabilité μ-invariante sur $\mathcal{D}_r$ et elle est "faiblement irréductible" ; c'est-à-dire que pour tout sous-espace propre V de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ de type (S), $\mathbb{P}[z \in V] \;=\; 0$.

On en déduit que, pour tout $k \in K$ et pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $(kS_n(\omega))_{n\geq 0}$ contracte l'espace des drapeaux homogènes $\mathcal{D}_r$ en direction du drapeau, $k \cdot \overline{z(\omega)}$, en position non singulière par rapport au drapeau canonique $\overline{e_{i_r}}$ de $\mathcal{D}_r$. Pour tout $k \in K$, nous avons donc, $\mathbb{P}$-p.s. (lemmes (1.10) et (1.11)) ,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{r+1}}{a_r}\,(X_n) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{r+1}}{b_r}\,(kX_n) = 0.$$

Pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$, la fonction σ_i sur $\mathbf{K} \times \mathbf{G}$ définie par $\sigma_i(k,g) =$ Log $b_i(kg)$ vérifie les relations :

$$\forall\, k \in \mathbf{K},\ \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G},\ \sigma_i(k, g_1g_2) = \sigma_i(k,g_1) + \sigma_i(k\cdot g_1, g_2)\ .$$

Nous avons identifié $\mathbf{K}$ à l'espace homogène $\mathbf{NA}\backslash\mathbf{G}$ (i.e. $k \cdot g_1 = \kappa(kg_1)$).

Appelons F_i la fonction sur $\mathbf{K}$ définie par $F_i(k) \;=\; \int_G \;\sigma_i(k,g)\; \mu(dg)$. En utilisant la loi des grands nombres pour des accroissements de martingales de carrées intégrables, on montre, à l'aide d'une troncature, que la suite de v.a.

$$\Big(\frac{1}{n}\big[\sigma_i(k,S_n) \;-\; \sum_{j=0}^{n-1} F_i(k\cdot S_j)\big]\Big)_{n\geq 0}$$

converge ; $\mathbb{P}$-p.s. vers zéro.

Posons $F = F_r - F_{r+1}$. Nous avons alors :

$$(f_1) \qquad \forall k \in \mathbf{K},\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(k\cdot S_j) = +\infty,\ \mathbb{P}\text{-p.s..}$$

et pour $m_K \otimes \mathbb{P}$-presque tout $(k,\omega) \in \mathbf{K} \times \Omega$, (proposition (2.2))

$$(f_2) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F(k\cdot S_j) \;=\; \gamma_r - \gamma_{r+1}.$$

De (f_1) et (f_2) il résulte alors ([1]) que $\gamma_r > \gamma_{r+1}$.

(4.6) Dorénavant, nous supposons que le semi-groupe fermé T_μ agit de façon totalement irréductible, au sens faible, sur tous les produits extérieurs, $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$, $1 \leq r \leq d-1$.

Pour tout sous-semi-groupe T de $\mathbf{G}$, nous posons

$$\Theta(T) = \{r \in \{1,\ldots,d-1\} : \inf_{g\in T} \frac{a_{r+1}}{a_r}\,(g) = 0\}.$$

Nous notons Θ_μ l'ensemble $\Theta(T_\mu)$. Du théorème (4.5), il résulte que $\Theta_\mu = \{r \in \{1, \ldots, d-1\} : \gamma_r > \gamma_{r+1}\}$. En particulier Θ_μ est vide si et seulement si un conjugué xTx^{-1} de T est contenu dans $\mathbf{K}$.

(4.7) Adhérence algébrique d'un sous-semi-groupe de G.

Soit $\mathbb{R}[\xi_1, \ldots, \xi_{d^2}]$ l'anneau des polynômes à d^2 indéterminées. Nous désignons par η l'application du groupe linéaire $\mathbf{G}$ dans $\mathbb{R}^{d^2}$ qui à la matrice g associe ses coefficients ordonnés par ordre lexicographique.

Une fonction réelle S sur $\mathbf{G}$ est dite *polynomiale* si elle s'écrit $S = \widetilde{S} \circ \eta$, avec $\widetilde{S} \in \mathbb{R}[\xi_1, \ldots, \xi_{d^2}]$. Nous notons $\mathbb{R}[\mathbf{G}]$ l'anneau des fonctions polynomiales sur $\mathbf{G}$. Nous appelons *degré* de $S \in \mathbb{R}[\mathbf{G}]$ et nous notons $dg(S)$, le degré du polynôme $\widetilde{S}$. Pour tout entier $n \geq 0$, nous désignons par $\mathbb{R}_n[\mathbf{G}]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur G de degré inférieur ou égal à n.

Pour tous $x \in G$ et $S \in \mathbb{R}[\mathbf{G}]$, la fonction $L_x(S)$ définie par $L_x(S)(g) = \widetilde{S} \circ \eta(xg)$ est polynomiale. De plus $dg(L_x(S)) = dg(S)$. Autrement dit, $\mathbf{G}$ opére (par translation à gauche) sur tous les espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[\mathbf{G}]$.

Soit T un sous-semi-groupe de $\mathbf{G}$. Appelons $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathbb{R}[\mathbf{G}]$ constitué des fonctions polynomiales sur $\mathbf{G}$ qui s'annulent sur T. Nous posons $H = \{x \in \mathbf{G} : \forall S \in \mathcal{I}, L_x(S) \in \mathcal{I}\}$. Puisque T est un semi-groupe, H contient T.

Dans l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\xi_1, \ldots, \xi_{d^2}]$ tout idéal est engendré par une famille finie de polynômes. Il s'ensuit que l'idéal $\mathcal{I}$ est engendré par une famille finie $\{S_i : 1 \leq i \leq r\}$ de fonctions polynomiales. Posons $s = \max\{dg(S_i) : 1 \leq i \leq r\}$. $\mathcal{I} \cap \mathbb{R}_s[\mathbf{G}]$ est un espace vectoriel de dimension finie et pour tout $x \in \mathbf{G}$, L_x est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}[\mathbf{G}]$ car $L_x \circ L_{x^{-1}}$ est l'identité de $\mathbb{R}[\mathbf{G}]$. On en déduit que $H = \{x \in \mathbf{G} : L_x(\mathcal{I} \cap \mathbb{R}_s[\mathbf{G}]) = \mathcal{I} \cap \mathbb{R}_s[\mathbf{G}]\}$; ce qui montre que H est un sous groupe fermé de $\mathbf{G}$. Ce groupe algébrique H est appelé *l'adhérence algébrique* de T dans $\mathbf{G}$. En général, H est bien plus gros que le sous-groupe fermé de $\mathbf{G}$ engendré par T.

Toute propriété sur un sous-semi-groupe T de $\mathbf{G}$, s'exprimant par l'annulation d'une famille de fonctions polynomiales sur $\mathbf{G}$, passe à l'adhérence algébrique H de T. C'est le cas des propriétés d'irréductibilité et de totale irréductibilité, au sens faible ou fort.

Appelons H_μ l'adhérence algébrique du semi-groupe T_μ. Nous avons alors :

(4.8) **Théorème.** ([9])

i) $\Theta_\mu = \Theta(H_\mu)$.

ii) il existe $y \in \mathbf{G}$ tel que yHy^{-1} s'écrive $K'A'K'$; où K' est un sous-groupe du groupe orthogonal et A' est un sous-groupe du groupe diagonal $\mathbf{A}$ pour lequel $\forall\, r \notin \Theta_\mu, \forall\, g \in A'$, $\dfrac{a_{r+1}}{a_r}(g) = 1$.

En particulier, de la première assertion du théorème, il résulte que Θ_μ possède la propriété de symétrie suivante : $r \in \Theta_\mu \Leftrightarrow d+1-r \in \Theta_\mu$.

Cela dit, appelons m le cardinal de Θ_μ et écrivons $\Theta_\mu = \{r_1, \ldots, r_m\}$. Nous convenons que $r_{m+1} = d$. Nous avons :

(4.9) **Théorème.** *Il existe une variable aléatoire Φ, à valeurs dans $\mathbf{G}$, une suite de matrices $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbf{K}_{\Theta_\mu}$ et des suites de réels strictement positifs $(c_i(n))_{n\in\mathbb{Z}}$, $1 \leq i \leq m+1$, telles que, $\mathbb{P}$-p.s :*

i) $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ S_n = \Phi\ \mathrm{diag}(c_1(n)I_{r_1}, \ldots, c_{m+1}(n)I_{d-r_m})K_n\ \Phi^{-1} \circ T^n$.

ii) $\forall\, 1 \leq i \leq m+1,\ \lim\limits_{n\to\pm\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} c_i(n) = \gamma_{r_i}$.

iii) $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} \|\Phi^{\pm 1} \circ T^n\| = 0$.

iv) $\forall\, 1 \leq i \leq d,\ \lim\limits_{n\to\pm\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} \|{}^t e_i \phi^{-1} S_n\| = \gamma_i$.

Lorsque μ est étalée ou lorsque $\int_{\mathbf{G}} Q^\alpha(g)\ \mu(dg) < +\infty$, pour un certain réel $\alpha > 0$, alors la v.a. $\operatorname{Log} Q(\Phi)$ *est $\mathbb{P}$-intégrable.*

Preuve. Toutes les assertions du théorème, excepté la dernière résulte de [9], section (1.10).

Appelons $\tilde{\mu}$ l'image de μ par l'application $g \to {}^t g$ et $\tilde{\nu}$ l'unique mesure de probabilité $\tilde{\mu}$-invariante sur $\mathcal{D}_{\Theta_\mu}$. L'intégrabilité de la v. a. $\operatorname{Log} Q(\Phi)$ équivaut à l'existence des intégrales

$$\int_{\mathcal{D}_{\Theta_{\tilde{\mu}}}} \int_{\mathcal{D}_\mu} \operatorname{Log} |\Delta_r(u^{-1}v)|\ \tilde{\nu}(du)\ \nu(dv) \quad r \in \Theta_\mu.$$

La convergence de ces intégrales sous les hypothèses du théorème sera prouvée dans la prochaine section. ■

(4.10) **Exemple** Prenons le cas $d = 4$ et $T_\mu = \mathrm{SP}(2, \mathbb{R})$. Nous avons $\Theta_\mu = \{1, 2, 3\}$. Nous pouvons écrire $S_n = x_n\ \mathrm{diag}(a_n, b_n, a_n^{-1}, b_n^{-1})\ k_n$; avec $x_n, k_n \in K' = K \cap \mathrm{SP}(2, \mathbb{R})$ et $a_n \geq b_n \geq 1$. Une décomposition polaire de la marche aléatoire X_n est alors donnée par $X_n = x_n m\ \mathrm{diag}(a_n, b_n, b_n^{-1}, a_n^{-1})\ m^{-1}k_n$; où m désigne la matrice $\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$, avec $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On notera qua la matrice m n'appartient pas au groupe simplectique. Nous avons, $\mathbb{P}$-p.s. :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{b_n} = 0$;

b) la suite de drapeaux $x_n m \cdot \partial_{\Theta_\mu}$ converge.

L'affirmation *b)* équivaut à dire que les vecteurs colonnes de la matrice x_n convergent, au signe près ; ou encore que les angles θ_n, ϕ_n et η_n associés à x_n (Cf (4.4)), convergent modulo π.

5. Variance dans le théorème de la limite centrale

On sait que sous des hypothèses convenables, les composantes sur A, dans la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$, des produits de matrices $(S_n)_{n\geq 0}$ vérifie un TLC. Le but de cette section est de donner une expression intéressante de la variance de la loi normale limite.

Dans toute la suite on considère un entier r de $\{1,\ldots,d\}$ pour lequel le semi-groupe T_μ agit de façon totalement irréductible, au sens faible, sur $\bigwedge_r R^d$ et possède une suite contractant $\mathcal{P}(\bigwedge_r R^d)$. Si $\tilde{\mu}$ désigne l'image de μ par l'application $g \to {}^t g$, alors le semi-groupe $T_{\tilde{\mu}}$ possède également ces propriétés. Nous supposons que $\int_G \operatorname{Log} Q(g)\ \mu(dg) < +\infty$.

Nous notons ν [resp. $\tilde{\nu}$] l'unique mesure de probabiité μ-invariante [resp. $\tilde{\mu}$-invariante] sur les boréliens de $\mathcal{D}_r$. Nous appelons γ la somme $\sum_{j=1}^r\ \gamma_j$ des r-premiers coefficients caractéristiques de $(S_n)_{n\geq 0}$.

Pour travailler avec des espaces homogènes à droite, nous sommes amenés à considérer les produits gauches $X_n \cdots X_1$. Nous introduisons les notations suivantes.

(5.1) **Notations.** Nous désignons par : Ω_+ l'espace produit $\mathbf{G}^{N^*}$; par $\mathcal{F}_+$ la tribu des boréliens de Ω_+ et par $I\!P$ la probabilité produit $\otimes_{I\!N^*}\mu$ sur Ω_+. Nous appelons $(X_n)_{n\geq 1}$ les applications coordonnées de Ω_+.

Soit η l'application de $\Omega_+ \times \mathcal{D}_r$ dans $\mathcal{D}_r^{I\!N^*}$ définie par :

$$\eta(\omega,u) \;=\; \big(u, X_1(\omega)\cdot u, \ldots, X_n(\omega)\cdots X_1(\omega)\cdot u, \ldots\big).$$

Nous désignons par $(Z_n)_{n\geq 0}$ les applications coordonnées de l'espace produit $\mathcal{D}_r^{I\!N^*}$ et par θ l'opérateur de décalage sur $\mathcal{D}_r^{I\!N^*}$. Pour toute mesure de probabilité λ sur les boréliens de $\mathcal{D}_r$, nous notons $I\!P_\lambda$ l'image par η de la probabilité produit $I\!P \otimes \lambda$. Si λ est la mesure de Dirac en x, nous notons $I\!P_x$ la probabilité $I\!P_\lambda$. Pour toute mesure de probabilité λ, le processus $(Z_n)_{n\geq 0}$ est, sous $I\!P_\lambda$, une chaîne de Markov de loi initiale λ et de probabilité de transition P_μ définie par

$$P_\mu f(u) = \int_G f(g\cdot u)\ \mu(dg) \quad (u \in \mathcal{D}_r),$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur $\mathcal{D}_r$.

(5.2) **Lemme.** *Nous avons :*

i) Si h est une fonction borélienne bornée sur $\mathcal{D}_r^{I\!N^*}$ telle que $P_\mu h = h$, ν-p.s., alors h est ν-presque sûrement constante.

ii) Le système dynamique $\big(\mathcal{D}_r^{I\!N^*}, \theta, I\!P_\nu\big)$ est ergodique.

iii) Si f est une fonction continue sur $\mathcal{D}_r$, alors pour tout $u \in \mathcal{D}_r$, la suite de v.a. $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(Z_n)\right)_{n \geq 1}$ converge $I\!P_u$-p.s. vers $\nu(f)$.

Considérons la fonction ρ sur $\mathbf{G} \times \mathbf{K}$ définie par :

$$\rho(g,k) = \operatorname{Log} b_{\imath_r}({}^t(gk)) = \operatorname{Log} \| \bigwedge_r (gk)\, e_{\imath_r} \|.$$

Pour tous $g \in \mathbf{G}$, $k \in \mathbf{K}$ et $x \in \mathbf{K_r}$, nous avons $\rho(g, kx) = \rho(g,k)$. La fonction ρ est donc une fonction sur $\mathbf{G} \times \mathcal{D}_r$ vérifiant les relations :

$$\forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall u \in \mathcal{D}_r, \ \rho(g_1 g_2, u) \ = \ \rho(g_1, g_2 \cdot u)\ \rho(g_1, u).$$

Nous avons le résultat suivant ([5]):

(5.3) **Lemme.** *Pour tout $u \in \mathcal{D}_r$, la suite de v.a. $\left(\frac{1}{n}\ \rho(X_n \cdots X_1, u)\right)_{n \geq 1}$ converge, $I\!P$-p.s., vers $\int_{\mathbf{G}} \int_{\mathcal{D}_r} \ \rho(g,u)\ \mu(dg)\ \nu(du) = \gamma$.*

Preuve. La loi des grands nombres pour des accroissements de martingales permet de remplacer la suite de l'énoncé par la suite de v.a. sur $\mathcal{D}_r^{I\!N^*}$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_G \ \rho(g, Z_j)\ \mu(dg)\right)_{n \geq 1}.$$

La convergence, $I\!P_u$-presque sûre, de cette suite vers $\int_{\mathbf{G}} \int_{\mathcal{D}_r} \ \rho(g,u)\ \nu(du)\ \mu(dg)$ résulte alors du lemme (5.2), assertion *iii*).

D'autre part, nous avons, pour $m_{\mathbf{K}} \otimes I\!P$-presque tout $(\omega, k) \in \Omega \times \mathbf{K}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\ \rho(X_n \cdots X_1, k) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} b_{\imath_r}(k^{-1}\, {}^t X_1 \cdots {}^t X_n) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_{\imath_r}({}^t X_1 \cdots {}^t X_n) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_{\imath_r}(X_n \cdots X_1) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_{\imath_r}(X_1 \cdots X_n) = \gamma.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

(5.4) **Lemme.** *Pour tout $g \in \mathbf{G}$ et tous $x, k \in \mathbf{K}$,*

$$\rho({}^t g, k) + \phi(({}^t g \cdot k)^{-1} x) \ = \ \rho(g, x) + \phi(k^{-1}(g \cdot x)) \ ;$$

avec $\phi(k) = \operatorname{Log} |\langle e_{\imath_r}, \bigwedge_r k e_{\imath_r} \rangle|$, pour $k \in \mathbf{K}$.

Preuve. Considérons le réel $\Delta(x^{-1t}gk) = |\langle \bigwedge_r (x^{-1t}gk)e_{\imath r}, e_{\imath_r}\rangle|$. Nous avons : d'une part en prenant la décomposition d'Iwasawa ($\mathbf{G} = \mathbf{KA}^t\mathbf{N}$) de ${}^tgk$

$$\Delta(x^{-1t}gk) \;=\; b_{\imath_r}(k^{-1}g)\; |\langle \bigwedge_r (x^{-1}({}^tg \cdot k))e_{\imath_r}, e_{\imath_r}\rangle| \;;$$

et d'autre part en prenant la décomposition d'Iwasawa du produit gx,

$$\Delta(x^{-1t}gk) = \; b_{\imath_r}(x^{-1t}g)\; |\langle \bigwedge_r ((g \cdot x)^{-1}k)e_{\imath_r}, e_{\imath_r}\rangle|.$$

D'où le résultat. ■

(5.5) Remarquons que la fonction ϕ vérifie les égalités suivantes :

$$\forall k \in K, \forall x \in K_r, \phi(xk) = \phi(kx) = \phi(k).$$

Posons, avec des abus de notations évidents,

$$\forall u \in \mathcal{D}_r,\; H(u) = -\int_{\mathcal{D}_r} \phi(k^{-1}u)\tilde{\nu}(dk).$$

La fonction H est à valeurs dans $[0, +\infty]$ et d'après le lemme (1.15), toutes les puissances de la fonction H sont m_K-intégrables (On notera encore m_K l'image de m_K dans $\mathcal{D}_r = K/K_r$). Nous avons :

(5.6) **Corollaire.** La probabilité $\nu(\{H < +\infty\})$ est égale à 0 ou 1 et

$$\gamma - H(\cdot) \;=\; \int_{\mathbf{G}} \rho(g, \cdot)\; \mu(dg) - P_\mu H(\cdot).$$

Preuve. La deuxième assertion du corollaire (5.6) se déduit du lemme (5.4) par intégration par rapport à la mesure $\mu(dg)\;\tilde{\nu}(dk)$.

Nous avons alors : $H(x) < +\infty \Leftrightarrow P_\mu H(x) < +\infty$. Il s'ensuit que l'indicatrice de l'ensemble $\{H < +\infty\}$ est P_μ-sous-harmonique et donc P_μ-harmonique, ν-p.s.. D'après le lemme (5.2), assertion i), cette indicatrice est ν-presque sûrement constante. ■.

Pour tout $u \in \mathcal{D}_r$, posons $\Lambda(u) = \int_{\mathbf{G}} \rho(g, u)\mu(dg) - \gamma$. Nous avons

(5.7) **Lemme.** $\nu(H) \;\leq\; H(u) + \liminf_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P_\mu^k \Lambda(u).$

Preuve. On montre (voir [8] Corollaire (5.2)) que, pour tout drapeau u de $\mathcal{D}_r$, la suite de drapeaux aléatoires $\big(X_n \cdots X_1 \cdot u\big)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers un drapeau aléatoire ∂ de loi ν.

Soient $u \in \mathcal{D}_r$ et $(\psi(n))_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que

$$P_\mu^{\psi(n)} H(u) = \liminf_{n \to +\infty} P_\mu^n H(u).$$

Il existe alors une sous-suite $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ de la suite $(\psi(n))_{n\geq 1})$ telle que la suite de drapeau $\left(X_{\varphi(n)} \cdots X_1 \cdot u\right)_{n\geq 1}$ converge, $\mathbb{P}$-p.s., vers ∂.

La fonction $-\phi$ est à valeurs dans $[0, +\infty]$ et est continue sur l'ouvert $\{\phi > -\infty\}$. Comme la loi ν est faiblement irréductible, pour tout $k \in \mathbf{K}$, la suite $\phi(k^{-1} X_{\varphi(n)} \cdots X_1 \cdot u)$ converge, $\mathbb{P}$-p.s. vers $\phi(k^{-1} Z)$.

D'après le lemme de Fatou, on en déduit que

$$\nu(H) \;\leq\; \liminf_{n \to +\infty} P_\mu^n H(u).$$

Des égalités

$$\forall n \geq 0,\; P_\mu^n H = H + \sum_{k=0}^{n-1} P_\mu^k \Lambda$$

il résulte alors que, pour tout $u \in \mathcal{D}_r$,

$$\nu(H) \;\leq\; H(u) + \liminf_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P_\mu^k \Lambda(u).$$

D'où le résultat. ■

(5.8) **Corollaire**. *L'intégrale $\nu(H)$ est finie, excepté si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} P_\mu^k \Lambda\right)_{n\geq 1}$ converge, $m_{\mathbf{K}}$-p.s., vers $+\infty$.*

Pour toute fonction borélienne positive ou bornée h sur $\mathcal{D}_r$, nous désignons par ξ_h la fonction sur $\mathbf{G} \times \mathcal{D}_r$ définie par :

$$\xi_h(g, u) = \rho(g, u) - \int_{\mathbf{G}} \rho(y, u)\; \mu(dy) + h(g \cdot u) - \int_{\mathbf{G}} h(y \cdot u)\; \mu(dy) \;;$$

et nous posons

$$\sigma_h^2 = \int_{\mathcal{D}_r} \int_{\mathbf{G}} \xi_h^2(g, u)\; \nu(du)\; \mu(dg).$$

(5.9) **Proposition**. *Supposons que $\int_G \mathrm{Log}^2 Q(g)\; \mu(dg) < +\infty$ et qu'il existe une fonction borélienne h sur $\mathcal{D}_r$ de carré ν-intégrable telle que*

$$\int_{\mathbf{G}} \rho(g, \cdot)\; \mu(dg) - \gamma \;=\; (I - P_\mu) h(\cdot).$$

Alors, pour ν-presque tout $u \in \mathcal{D}_r$, la suite de variable aléatoire

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\ \big(\rho(X_n \cdots X_1, u) - n\gamma\big)_{n\geq 0}$$

converge en loi vers la loi normale centrée de variance σ_h^2.

Si en outre la fonction h est continue, alors cette convergence a lieu pour tout $u \in \mathcal{D}_r$.

<u>Preuve</u>. Nous avons

$$\forall\ g \in G,\ \rho(g,u) - \gamma\ =\ [\rho(g,u) - \int_G \rho(g,u)\ \mu(dg)] + (I - P_\mu)h(u).$$

D'où, pour tout $n \geq 0$,

$$\rho(X_n \cdots X_1, u) - n\gamma\ =\ h(u) - h(X_n \cdots X_1 \cdot u) + \sum_{j=1}^{n}\ U_j(\cdot, u)\ ;$$

avec $U_j(\cdot,u) = \xi_h\big(X_j, Z_{j-1} \circ \eta(\cdot,u)\big)$. Nous avons $\mathbb{E}[U_j(\cdot,u)|\mathcal{F}_{j-1}] = 0$; où $\mathcal{F}_{j-1}$ désigne la tribu engendrée par les v.a. $X_1, \ldots, X_{j-1}$. Les v.a. $U_j(\cdot,u)$ sont donc des accroissements de martingale.

Posons $V_n(\cdot,u) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ \mathbb{E}[U_j^2(\cdot,u)|\mathcal{F}_{j-1}]$. Nous avons

$$V_n(\cdot,u) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ \int_{\mathbf{G}}\ \xi_h^2\big(g, Z_{j-1}(\eta(\cdot,u))\big)\ \mu(dg).$$

Du théorème ergodique, via le lemme (5.2), assertion ii), il s'ensuit que pour $\mathbb{P}\otimes\nu$-presque tout (ω,u), la suite $(V_n(\omega,u))_{n\geq 0}$ converge, vers σ_h^2. Si h est continue, cette convergence a lieu, $\mathbb{P}$-presque sûrement, pour tout $u \in \mathcal{D}_r$, d'après le lemme (5.2), assertion iii).

De même, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite réelle

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ \mathbb{E}[U_j^2(\cdot,u)\ 1_{\{|U_j(\cdot,u)|\geq\varepsilon\}}]\Big)_{n\geq 0}$$

converge, pour ν-presque tout $u \in \mathcal{D}_r$, vers $\int_{\mathcal{D}_r}\int_{\mathbf{G}}\ \xi_h^2\ 1_{\{\xi_h\geq\varepsilon\}}(g,u)\ \mu(dg)\ \nu(du)$. Il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ \mathbb{E}[U_j^2(\cdot,u)\ 1_{\{|U_j(\cdot,u)|\geq\sqrt{n}\varepsilon\}}]\Big)_{n\geq 0}$$

converge vers zéro, pour ν-presque tout $u \in \mathcal{D}_r$. Lorsque h est continue, ces convergences ont lieu pour tout $u \in \mathcal{D}_r$.

La proposition est alors une conséquence du théorème 2 de [3]. ∎

(5.10) **Proposition.** *Supposons que la suite de fonctions continues* $\left(\sum_{k=0}^{n} P_\mu^k \Lambda\right)_{n\geq 1}$ *soit bornée dans* $\mathbb{L}^2(\mathcal{D}_r, \nu)$ *et ne converge pas,* $m_{\mathbf{K}}$*-p.s., vers* $+\infty$.

Alors H *appartient à* $\mathbb{L}^2(\mathcal{D}_r, \nu)$. *Lorsque* $\int_G \operatorname{Log}^2 Q(g)\ \mu(dg) < +\infty$, *pour* ν*-presque tout* $u \in \mathcal{D}_r$, *la suite de variable aléatoire*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ (\rho(X_n \cdots X_1, u) - n\gamma\right)_{n\geq 0}$$

converge en loi vers la loi normale centrée de variance σ_H^2.

Si la suite de fonctions continues $\left(\sum_{k=0}^{n} P_\mu^k \Lambda\right)_{n\geq 1}$ *converge simplement sur* $\mathcal{D}_r$ *vers une fonction continue, alors, pour tout* $u \in \mathcal{D}_r$, *la suite de variable aléatoire*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\ (\rho(X_n \cdots X_1, u) - n\gamma\right)_{n\geq 0}$$

converge en loi vers la loi normale centrée de variance σ_H^2.

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} P^k \Lambda$. Nous avons

$$(I - P_\mu)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k\right) \ = \ \Lambda - \frac{1}{n} S_n.$$

D'après l'assertion *iii)* du lemme (5.2), la suite $\frac{1}{n} S_n$ converge vers $\nu(\Lambda) = 0$. D'autre part la suite $\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n}\ S_k$ est bornée dans $\mathbb{L}^2(\mathcal{D}_r, \nu)$ et par suite il existe une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction h de $\mathbb{L}^2(\mathcal{D}_r, \nu)$. D'où la relation $\Lambda = (I - P_\mu)h$.

Nous avons alors $P_\mu(H + h) = H + h$; c'est-à dire que la fonction $H + h$ est P_μ-harmonique. D'après le corollaire (5.8), la fonction H est ν-intégrable. Du théorème ergodique, il résulte alors que, ν-p.s.,

$$H + h = \lim_{n\to+\infty}\ \frac{1}{n}\ \sum_{k=0}^{n-1}\ P_\mu^k(H + h) = \nu(H + h).$$

Ce qui montre que H, comme h, appartient à $\mathbb{L}^2(\mathcal{D}_r, \nu)$.

Les dernières assertions de la proposition résultent alors de la proposition (5.9). ∎.

Lorsque μ est étalée (i.e. qu'il existe une convolée $\mu^{\star p}$ non étrangère à la mesure de Haar de G), $P_\mu - \nu$ est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 sur l'espace de Banach $L_\infty(\mathcal{D}_r, \nu)$. De la proposition (5.10) il résulte que $\nu(H) < +\infty$ et le théorème de la limite centrale est satisfait, pour tout $u \in \mathcal{D}_r$, avec la variance σ_H^2.

Nous notons $\mathbf{C}(\mathcal{D}_r)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathcal{D}_r$ muni de la norme de la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$. Pour tout réel $s, 0 < s \leq 1$, nous considérons l'espace $L_s(\mathcal{D}_r)$ des fonctions sur $\mathcal{D}_r$ lipschitziennes d'ordre s, muni de la norme $\| \ \|_s$ définie par :

$$\|f\|_s = m_s(f) + \|f\|_\infty,$$

où

$$m_s(f) = \sup\{\frac{|f(u) - f(v)|}{\delta(u,v)^s} : u, v \in \mathcal{D}_r, u \neq v\}.$$

Du critère de séparation de la section précédente, on déduit le résultat suivant du à E. Lepage ([14]) :

(5.11) **Théorème** . *Supposons qu'il existe un réel* $\alpha > 0$ *tel que* $\int_G \ Q(g)^\alpha \ \mu(dg) \ < +\infty$.

Alors il existe $s_0 > 0$ *tel que, pour tout* $s \leq s_0$, $P_\mu - \nu$ *est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 sur l'espace de Banach* $L_s(\mathcal{D}_r)$.

Lorsque $\int_G \ Q(g)^\alpha \ \mu(dg) \ < +\infty$, la fonction H est donc ν-intégrable et le théorème de la limite centrale est satisfait, pour tout $u \in \mathcal{D}_r$, avec la variance σ_H^2.

6. Bibliographie

[1] G. ATKINSON : *Recurrence of co-cycles and random walks*, J. London Math. Soc.,13, 3, 1976, 486-488.

[2] P. BOUGEROL and J. LACROIX, *Products of random matrices with applications to Schrôdinger operators, Progress in probability and Statistics, 8, Birkhaüser, 1985.*

[3] B. M. BROWN, Martingale Central Limit Theorems, Ann. Math. Statis., 42, 1971, 59-66.

[4] Y. DERRIENNIC : sur le trhéorème ergodique sous-additif, C. R. A. S. Paris 281 A, 1975, 985-988.

[5] H. FURSTENBERG : Non-commuting random products. Trans. Amer. Math. Soc., 108, 1963, pp. 377-428.

[6] I.Y. GOLDSHEID and G. A. MARGULIS, Simplicity of the Liapunoff spectrum for products of random matrices, Soviet Math. , 35, (2, 1987, 309-313.

[7] I.Y. GOLDSHEID and G. A. MARGULIS, Lyapunov indices of a product of random matrices, Russian Math. Surveys, 44, 5, 1989, 11-71.

[8] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Frontières de Fürstenberg. Propriétés de contraction et théorème de convergence, Zeit. Wahr. Geb., 69, 1985, p.187-242.

[9] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI, Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles. Coefficients de Liapunoff d'un produit de matrices aléatoires indépendantes, Israel Journal of Mathematics, vol 65,2, 1989, p.165-196.

[10] V. A. KAIMANOVICH, Lyapunov exponents, Symmetric Spaces, and a multiplicative ergodic theorem for semisimple Lie groups, J. Soviet Math., 47, 2, 1989, 2387-2398.

[11] A. KATOK and B. HASSELBLATT, Introduction to the modern theory of dynamical systems, University press, 1995, Encyclopedia of mathematics and its applications.

[12] J. F. C. KINGMAN, The ergodic theory of subadditive processes, J. Royal Statist. Soc., 30, 1968, 499-510.

[13] F. LEDRAPPIER, Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires, Lecture Notes in Math., 1097, 1982, 306-396.

[14] E. LE PAGE, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. Probability measures on groups, Proceedings Oberwolfach, Lectures Notes Series in Math., 928, 1982, 258-303. Springer Lecture Notes, 928,1982, 258-303.

[15] G. A. MARGULIS : Discrete groups of semi-simple Lie groups, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New-York, 1991.

[16] V. M. MILLIONSCIKOV, Metric theory of linear systems of differential equations, Math. USSR-Sbornik, 6, 1968, pp. 149-158.

[17] V. OSELEDEC , A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, Trans. Moscow Math. Soc., 19, 1968, pp 197-231.

[18] M. RAGHUNATHAN, A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem , Israel J. Math., 32, 1979, pp. 356-362.

[19]. A. RAUGI : Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes, Bull. Soc. Math. France, mémoire 54, 1977, 5-118.

[20] D. RUELLE, Ergodic theory of differentiable dynamical systems, Publ. IHES, 50, 1979 , 275-320.

[21] V. N. TUTUBALIN, On limit theorems for a product of random matrices, Theory Probability Appl., 10, 1965, pp. 25-27.

[22] A. D. VIRTSER, Central limit theorem for semi-simple Lie groups, Theory Probability Appl.,15, 1970, pp. 667-687.

[23] P. WALTERS, A dynamical proof of the multiplicative ergodic theorem, TAMS, 335, 1993, 245-257.