EMMANUEL LESIGNE

Convergence d'une suite le long de sous-suites d'indices à croissance exponentielle

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1996-1997, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1996-1997___2_A4_0>

CONVERGENCE D'UNE SUITE LE LONG DE SOUS-SUITES D'INDICES À CROISSANCE EXPONENTIELLE

Emmanuel LESIGNE

Juin 1996

Abstract

Does the convergence of a sequence along index subsequences of the type $([\gamma^n])_{n\geq 0}$ insure the convergence of the whole sequence ?

Introduction

Si γ est un nombre réel, on désigne par $[\gamma]$ sa partie entière.
Plusieurs preuves de Lois Fortes des Grands Nombres (voir par exemple [1] et [2]-lemme 1.5) utilisent le résultat suivant.

Proposition 1 *Soit $(v(n))_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs et $u(n) := \frac{1}{n}(v(1) + v(2) + \ldots + v(n))$ la suite de ses moyennes de Césaro. Si, pour tout $\gamma > 1$, la sous-suite $(u([\gamma^n]))_{n\geq 1}$ converge, alors la suite $(u(n))_{n\geq 0}$ converge.*

Voici le résumé d'une démonstration de cette proposition: pour k entier, on pose $\gamma_k := 2^{\frac{1}{2^k}}$ et on remarque, par un argument immédiat de sous-suite, que la limite l de la suite $(u([\gamma_k^n]))_{n\geq 0}$ est indépendante de k; pour montrer que la suite $(u(n))$ converge, on utilise un argument d'interpolation ($\gamma_k^m \leq n < \gamma_k^{m+1}$) pour encadrer $u(n) - l$ puis on fait tendre k vers l'infini.

Le fait que $(u(n))$ soit la suite des moyennes de Césaro d'une suite positive entraine une certaine régularité. C'est important dans l'argument précédent mais est-ce nécessaire pour avoir le résultat de la Proposition 1 ? Nous allons voir que la réponse est négative. Mais nous verrons aussi que cette hypothèse est importante pour les applications au Calcul des Probabilités.

1 Deux résultats

Proposition 2 *Soit $(u(n))_{n\geq 0}$ une suite dans un espace métrique compact et a, b deux nombres réels tels que $1 \leq a < b$. Si, pour tout γ dans l'intervalle $]a, b[$, la sous-suite $(u([\gamma^n]))_{n\geq 0}$ converge, alors la suite $(u(n))_{n\geq 0}$ converge.*

Il est remarquable que, pour obtenir ce résultat il soit inutile de faire une hypothèse sur des nombres γ proches de 1. Il suffit de tester la convergence de la suite le long de sous-suites très lacunaires. D'un autre côté, le résultat suivant montre qu'il est nécessaire d'avoir une hypothèse sur un grand nombre de réels γ.

Proposition 3 *Il existe une suite réelle non convergente $(u(n))_{n\geq 0}$ telle que, pour presque tout $\gamma > 1$, la sous-suite $(u([\gamma^n]))_{n\geq 0}$ converge.*

Plus précisément: soit E un ensemble de nombres entiers naturels tel que $\sum_{m\in E} \frac{\log m}{m} < +\infty$; pour presque tout $\gamma > 1$, $lim_{n\to\infty} 1\!\!1_E([\gamma^n]) = 0$.

(Dans cet énoncé, le "presque tout" fait référence à la mesure de Lebesgue sur la droite réelle, et $1\!\!1_E$ est la fonction indicatrice de E.)

La condition est par exemple satisfaite par l'ensemble E des carrés de nombres entiers.

2 Les démonstrations

Soient a, b deux nombres réels tels que $1 \leq a < b$. Montrons que, si E et F sont deux sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$, il existe $\gamma \in]a, b[$ tels que les ensembles $\{n \in \mathbb{N} : [\gamma^n] \in E\}$ et $\{n \in \mathbb{N} : [\gamma^n] \in F\}$ soient infinis. Ceci démontrera la Proposition 2, car si une suite non convergente u possède une valeur d'adhérence, alors il existe deux ensembles fermés disjoints C et D tels que les ensembles $E := \{n \in \mathbb{N} : u(n) \in C\}$ et $F := \{n \in \mathbb{N} : u(n) \in D\}$ soient infinis.

Lemme 1 *Soient c et d deux nombres réels tels que $1 \leq c < d$. Pour tout nombre entier m assez grand, il existe un nombre entier positif n tel que $c < m^{\frac{1}{n}} < d$.*

<u>Démonstration du Lemme 1</u>

Notons $n(m)$ la partie entière $\ln m / \ln d$. Le nombre $n(m)$ est le plus grand nombre n tel que $m^{\frac{1}{n}} \geq d$. Il suffit alors de remarquer que $\lim_{m\to\infty} m^{\frac{1}{n(m)}} - m^{\frac{1}{n(m)+1}} = 0$.

<u>Démonstration de la Proposition 2</u>

Soient E et F deux sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$. Le Lemme 1 nous permet de construire par récurrence une suite croissante d'entiers (m_k), une suite d'entiers (n_k) et une suite décroissante de segments $[c_k, d_k]$ tels que

$$m_k \in E, \text{ resp. } \in F, \text{ si } k \text{ est impair, resp. pair;}$$

$$a \leq c_k < d_k \leq b \quad \text{et} \quad [c_k, d_k] \subset [m_k^{\frac{1}{n_k}}, (m_k + 1)^{\frac{1}{n_k}}[\bigcap]c_{k-1}, d_{k-1}[.$$

(Indication: poser $c_0 = a$, $d_0 = b$, et construire successivement, pour $k \geq 1$, les nombres m_k, n_k et (c_k, d_k).)

On a bien sûr $lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$. L'intersection de tous les segments $[c_k, d_k]$ contient un nombre réel γ. Un tel nombre γ vérifie $[\gamma^{n_k}] = m_k$, et le résultat annoncé est démontré.

<u>Démonstration de la Proposition 3</u>

Soit E un ensemble infini d'entiers tel que $\sum_{m\in E} \frac{\log m}{m} < +\infty$. La suite $(1\!\!1_E)$ est une suite divergente de 0 et de 1. Soit Γ l'ensemble des nombres réels γ vérifiant: il existe une infinité d'entiers n tels que $[\gamma^n] \in E$. Nous voulons montrer que l'ensemble Γ est négligeable. Notons λ la mesure de Lebesgue sur la droite réelle.

Fixons $\alpha > 0$.

Lemme 2 *Quand m tend vers l'infini,*

$$\lambda\Big(\bigcup_{n>\alpha\log m}[m^{\frac{1}{n}},(m+1)^{\frac{1}{n}}[\Big)=O(\frac{\log m}{m}).$$

<u>Démonstration du Lemme 2</u>

Soit C une constante telle que, pour tout $x\in[0,1]$, $\quad e^x-1\leq Cx$. De l'inclusion

$$\bigcup_{n>\alpha\log m}[m^{\frac{1}{n}},(m+1)^{\frac{1}{n}}[\quad\subset\quad\bigcup_{\alpha\log m<n\leq m}[m^{\frac{1}{n}},(m+1)^{\frac{1}{n}}[\bigcup[1,m^{\frac{1}{m}}[$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\lambda\Big(\bigcup_{n>\alpha\log m}[m^{\frac{1}{n}},(m+1)^{\frac{1}{n}}[\Big) &\leq (m^{\frac{1}{m}}-1)+\sum_{\alpha\log m<n\leq m}((m+1)^{\frac{1}{n}}-m^{\frac{1}{n}})\\
&\leq C\frac{\log m}{m}+\sum_{\alpha\log m<n\leq m}m^{\frac{1}{n}}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{m})\right)-1\right)\\
&\leq C\frac{\log m}{m}+\sum_{n\leq m}e^{\frac{1}{\alpha}}C\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{m})\\
&\leq C\frac{\log m}{m}+\frac{C}{m}e^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{n\leq m}\frac{1}{n}\\
&= O(\frac{\log m}{m}). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ce qui prouve le Lemme 2.

Revenons à la démonstration de la Proposition 3. Notons

$$\rho(m,N):=\lambda\Big(\bigcup_{\substack{n>N\\ n>\alpha\log(m+1)}}[m^{\frac{1}{n}},(m+1)^{\frac{1}{n}}[\Big).$$

Grâce au Lemme 2, on a $\sum_{m\in E}\sup_{N>0}\rho(m,N)<+\infty$ et, pour tout m fixé, $\lim_{N\to\infty}\rho(m,N)=0$. Donc, par convergence dominée, $\lim_{N\to\infty}\sum_{m\in E}\rho(m,N)=0$.

Ceci entraine que

$$\lim_{N\to\infty}\lambda\Big(\bigcup_{m\in E}\bigcup_{\substack{n>N\\ n>\alpha\log(m+1)}}[m^{\frac{1}{n}},(m+1)^{\frac{1}{n}}[\Big)=0$$

c'est à dire

$$\lambda\Big((\limsup_{N\to\infty}\bigcup_{m\in E}[m^{\frac{1}{N}},(m+1)^{\frac{1}{N}}[)\bigcap[1,e^{\frac{1}{\alpha}}]\Big)=0.$$

Ainsi, pour presque tout γ entre 1 et $e^{\frac{1}{\alpha}}$, pour tout entier N assez grand, pour tout $m\in E$ et tout entier $n\geq N$, $\gamma\notin[m^{\frac{1}{n}},(m+1)^{\frac{1}{n}}[$.

Ceci prouve que, pour presque tout $\gamma>1$, l'ensemble $E\cap\{[\gamma^n]:n\geq 0\}$ est fini, et la Proposition 3 est établie.

3 Le cas des suites de variables aléatoires

Dans l'étude de la convergence presque sûre de suites de variables aléatoires, (comme dans [1] et [2]), la figure est tout à fait différente. La Proposition 1 s'étend à ce cas, mais pas la Proposition 2. On a en effet les résultats suivants.

Proposition 4 *Soit $(U(n))_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles qui est la suite des moyennes de Césaro d'une suite de variables aléatoires positives. Si pour tout $\gamma > 1$, la sous-suite $(U([\gamma^n]))_{n\geq 0}$ converge presque sûrement, alors la suite $(U(n))_{n\geq 0}$ converge presque sûrement.*

Proposition 5 *Il existe une suite bornée $(U(n))_{n\geq 0}$ de variables aléatoires positives qui diverge presque sûrement et telle que, pour tout $\gamma > 1$, la sous-suite $(U([\gamma^n]))_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers zéro.*

La Proposition 4 est une conséquence directe de la démonstration de la Proposition 1 que nous avons résumée. Dans cette démonstration on n'utilise en effet l'hypothèse que pour une famille dénombrable de nombres γ.

Pour démontrer la Proposition 5 il suffit d'exhiber une suite presque sûrement divergente $(U(n))_{n\geq 0}$ telle que, pour tout $\gamma > 0$, $\sum_{n\geq 0} \mathrm{E}(U([\gamma^n])) < +\infty$. (Nous notons E l'espérance mathématique). Une telle construction est classique, par l'argument de la "bosse glissante". Voici un exemple: l'espace de probabilité est le cercle $\{\exp(i\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ muni de la probabilité uniforme; la variable aléatoire $U(n)$ est la fonction indicatrice de l'arc délimité par $\exp(2i\pi(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}))$ et $\exp(2i\pi(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}))$; on a $\mathrm{E}(U(n)) = \frac{1}{n+1}$ et $\limsup U(n) = 1$ sûrement, mais, pour tout $\gamma > 1$, $\limsup U([\gamma^n]) = 0$ presque sûrement, d'après le lemme de Borel-Cantelli.

References

[1] N. Etemadi. *An elementary proof of the Strong Law of Large Numbers* Z. Warsch. verw. Gebiete 55, p.119-122, 1981.

[2] J. Rosenblatt & M. Wierdl. *Pointwise Ergodic Theorems via Harmonic Analysis* In: *Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis* London Math. Soc. Lecture Note Series 205, p.3-151, 1995.

Emmanuel Lesigne
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
Université François Rabelais
Parc de Grandmont.37200 Tours.

courrier électronique: lesigne@balzac.univ-tours.fr