FRANÇOIS COQUET

Résolution explicite d'une EDSR conduite par un processus de Poisson avec réflexion à la frontière

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1996-1997, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1996-1997___2_A1_0>

RESOLUTION EXPLICITE D'UNE EDSR CONDUITE PAR UN PROCESSUS DE POISSON AVEC REFLEXION A LA FRONTIERE.

François Coquet

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex

Ce qui suit est un simple exercice : il s'agit de résoudre explicitement, dans un cas extrêmement simple, une équation différentielle stochastique rétrograde.
Le choix de cette équation, ainsi que la motivation, viennent d'un résultat obtenu par Youssef Ouknine [2], et plutôt surprenant au premier abord : en effet, lorsqu'on résout une EDS ordinaire ("forward") avec réflexion sur un domaine D, il est bien connu que le processus à variation finie K qui apparaît (la poussée qui permet à la solution de rester à l'intérieur du domaine considéré) est en général discontinu quand la semi-martingale qui gouverne l'EDS est discontinue (intuitivement, tout saut de la solution qui ferait traverser la frontière de D sera contrarié par un saut en sens opposé de K). Cela se montre en étudiant un problème de réflexion discontinue de Skorokhod, et le caractère discontinu de K ne dépend pas de la définition qu'on choisit pour ce problème de réflexion (cf. par exemple [2] pour une discussion de différentes définitions possibles). Or Ouknine a montré que, s'agissant d'EDS rétrogrades gouvernées par un mélange Brownien/Poisson, sous des conditions de frontières assez générales (semi-martingale continue), le processus K à variation finie (ici : croissant) analogue était continu.
Une des conséquences remarquables de ce phénomène est que l'on ne peut pas considérer une telle EDSR avec sauts et frontières comme la solution, même "rétrograde", d'un problème de réflexion de Skorokhod, contrairement à ce qui se produit pour une EDS ordinaire.
Quant à l'explication, la raison de fond semble être que le processus (Poisson ou Browien) qui dirige l'EDSR ne la dirige en fait qu'à travers la filtration qu'il engendre. Cela étant, il m'a semblé intéressant de voir sur un exemple le comportement précis de K afin de disposer d'une explication plus constructive de ce phénomène. J'ai donc pris un processus frontière élémentaire, mais tout de même dépendant du processus de Poisson, et l'EDSR la plus simple imaginable dans ce contexte (en fait, ce n'est même plus à proprement parler une équation différentielle), puis mené les calculs jusqu'au bout, tâche sans autre intérêt ni prétention que de satisfaire ma curiosité.

Soit donc à résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$Y_t = \xi - \int_t^1 U_s d(N_s - s) + K_1 - K_t, \tag{1}$$

où :
-N désigne un processus de Poisson standard engendrant une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$;
-$\xi = \mathbf{1}_{\{N_1=0\}}$ désigne la "variable terminale", mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_1$;

-K est un processus croissant, nul en 0, et ne croissant que sur l'ensemble des $t \geq 0$ tels que $Y_t = S_t$, où le processus frontière S est défini par :

$$S_t = \mathbf{1}_{[0,T[}(t) + T\frac{1-t}{1-T}\mathbf{1}_{[T,1]}(t),$$

avec $T = \inf\{t > 0, \quad N_t \geq 1\} \vee 1$;
-Y, U, et K sont des processus adaptés à la filtration $\mathcal{F}$; de plus K est continu ;
-le processus Y est astreint à vérifier $Y_t \geq S_t$ pour tout $t \leq 1$.

On se propose donc de trouver un triplet (Y, U, K) vérifiant ce cahier des charges.

Remarquons d'emblée qu'un conditionnement immédiat transforme (1) en

$$\begin{aligned} Y_t &= E(\xi/\mathcal{F}_t) + E(K_1/\mathcal{F}_t) - K_t \\ &= e^{-(1-t)}\mathbf{1}_{\{N_t=0\}} + E(K_1/\mathcal{F}_t) - K_t. \end{aligned} \tag{2}$$

K étant croissant, Y reste au-dessus de la frontière S tant que $t < T$, et K reste donc uniformément nul sur cet intervalle (cela peut se déduire aussi du fait que K est $\mathcal{F}$-adapté, et que cette filtration reste triviale sur le même intervalle).
D'autre part, il découle de (2) que, si $t \geq T$, Y_t est donné par l'action de la poussée :

$$Y_t = E(K_1/\mathcal{F}_t) - K_t.$$

A partir de l'instant T, c'est-à-dire du premier saut de N, tout est donc joué : la frontière S va descendre en ligne droite pour rejoindre 0 à l'instant 1, et Y est uniquement contrôlé par la poussée K qui l'empêche de passer en dessous de S. Toute l'information nécessaire pour réaliser cela est désormais disponible. Il est donc raisonnable de chercher un K_1 mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{t\wedge 1}$. On aura donc

$$Y_t = K_1 - K_t, \qquad t \geq T.$$

Enfin, la condition $Y_1 = 0$ si $T < 1$ et le caractère minimal de la poussée (K ne peut croître que quand $Y = S$) amènent à conclure que $Y_t = S_t$ si $t \geq T$.
Toutes ces considérations nous amènent à chercher K tel que $K_t = 0$ si $t \leq T$ et

$$K_1 - K_t = T\frac{1-t}{1-T}, \qquad t \geq T,$$

d'où il découle, en utilisant la continuité de K en T, que $K_1 = T\mathbf{1}_{\{T\leq 1\}}$ et

$$K_t = t\frac{t-T}{1-T}, \qquad t \geq T.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que ces remarques heuristiques mènent bien à la solution de l'équation (1).

Tout d'abord, (2) devient

$$Y_t = \left[e^{-(1-t)} + E(T\mathbf{1}_{\{T<1\}}/\mathcal{F}_t)\right]\mathbf{1}_{\{t<T\}} + T\frac{1-t}{1-T}\mathbf{1}_{\{t\geq T\}}.$$

Comme

$$E(T\mathbf{1}_{\{T<1\}}/\mathcal{F}_t)\mathbf{1}_{\{t<T\}} = (1+t-2e^{t-1})\mathbf{1}_{\{t<T\}},$$

on en déduit que

$$Y_t = (1+t-e^{t-1})\mathbf{1}_{[0,T[}(t) + T\frac{1-t}{1-T}\mathbf{1}_{[T,1](t)}\mathbf{1}_{\{T\leq 1\}}.$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer le processus U. Rappelons que celui-ci est donné par

$$\begin{aligned}\int_t^1 U_s d(N_s - s) =& \mathbf{1}_{\{T>1\}} + K_1 - K_t - Y_t \\ =& \mathbf{1}_{\{T>1\}} + T\mathbf{1}_{\{T\leq 1\}} - T\frac{t-T}{1-T}\mathbf{1}_{[T,1]}(t)\mathbf{1}_{\{T\leq 1\}} \\ & - (1+t-e^{t-1})\mathbf{1}_{[0,T[}(t) + T\frac{1-t}{1-T}\mathbf{1}_{[T,1](t)}\mathbf{1}_{\{T\leq 1\}}.\end{aligned}$$

On a donc, sur $\{T>1\}$,

$$\int_t^1 U_s d(N_s - s) = -t + e^{t-1},$$

d'où

$$U_t\mathbf{1}_{\{T>1\}} = (-1+e^{t-1})\mathbf{1}_{\{T>1\}}$$

(car N n'a alors pas de saut entre 0 et 1),
et, sur $\{T \leq 1\}$,

$$\int_t^1 U_s d(N_s - s) = [T - (t+1-e^{t-1})]\mathbf{1}_{[0,T]}(t),$$

d'où, en se rappelant que U est nul après l'instant T,

$$-\int_t^1 U_s ds + U_t = [T - (t+1-e^{t-1})]\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$$

et finalement

$$U_t\mathbf{1}_{\{T\leq 1\}} = (-1+e^{s-1})\mathbf{1}_{[0,T]}(s)\mathbf{1}_{\{T\leq 1\}}.$$

Le lecteur vérifiera sans problème que le triplet (Y, U, K) ainsi calculé est bien solution de l'EDSR (1).

Références :

[1] : F. Coquet, M. Guillemeau : *A remark on Skorokhod topologies for the Skorokhod reflexion problem*, Preprint.
[2] : Y. Ouknine : *Reflected Backward Stochastic Differential Equations with Jumps* , Preprint.