PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

H. HENNION

Quasi-compacité Cas des noyaux lipschitziens et des noyaux markoviens

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-50
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995___2_A6_0>

QUASI-COMPACITÉ

CAS DES NOYAUX LIPSCHITZIENS ET DES NOYAUX MARKOVIENS

H. HENNION

La quasi-compacité s'est révélée être un outil trés efficace principalement pour l'étude, dans un cadre aléatoire, des itérées de tranformations. Cette notion a été introduite par J. Neveu [Nev] dans le but d'étudier les propriétés ergodiques d'un opérateur markovien. Ionescu Tulcea et Marinescu [I.T.M.] ont donné une condition suffisante de quasi-compacité qui, jointe au fait que cette propriété est stable par perturbation, est un argument essentiel dans la preuve des théorèmes limites pour les fonctions de certaines chaînes de Markov [Le], [G.R.], [G.H.]. Il apparaît également que la quasi-compacité est utile en Théorie Ergodique pour l'étude de l'opérateur de Perron-Frobenius associé à une transformation dilatante [Kel2.], en Mécanique Statistique pour celle de l'opérateur de Ruelle [Rul], ainsi qu'en Analyse dans le cadre de la théorie des ondelettes [Her.]. Dans ces situations, à priori non markoviennes, il semble que la formule de Nussbaum [N.] soit l'outil adapté à la preuve de la quasi-compacité.

Le but des pages qui suivent est de rassembler les résultats d'Analyse Fonctionnelle sur lesquels repose l'utilisation de la quasi-compacité et d'en donner des preuves aussi simples et élémentaires que possible. Ces énoncés sont illustrés par leurs applications au cas type des noyaux lipschitziens. Enfin, on montre comment la quasi-compacité permet l'étude des fonctions et des suites harmoniques pour un noyau markovien sur un espace compact ayant une propriété de quasi-compacité.

L'indulgence du lecteur est demandée pour cette rédaction qui n'est que provisoire et, avant tout, destinée à marquer une étape de ma participation à un travail collectif plus conséquent. On voudra bien excuser en particulier le caractère incomplet des références bibliographiques.

1. GÉNÉRALITÉS SUR LA QUASI-COMPACITÉ

1.1. Notations et définition

Dans ce qui suit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach complexe et Q un opérateur borné de $\mathcal{B}$.

Le spectre de Q, c'est à dire le sous-ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z - Q)$ ne soit pas inversible, est noté $\sigma(Q)$; le rayon spectral de Q est désigné par $\rho(Q)$, on a, [D.S.],

$$\rho(Q) = \sup\{|z| : z \in \sigma(Q)\} = \lim_n \|Q^n\|^{1/n}.$$

Rappelons que, si $z \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de Q, le sous-espace $\bigcup_{\ell \geq 1} \ker(z - Q)^\ell$ est nommé sous-espace caractéristique, et que z est dite d'indice p, si p est le plus petit entier tel que $\ker(z - Q)^p = \bigcup_{\ell \geq 1} \ker(z - Q)^\ell$.

La restriction de Q au sous-espace stable G est désignée par Q_G.

Définition 1.1.
On dit que Q est quasi-compact, si l'on a une décomposition en sous-espaces fermés, Q-stables,

$$\mathcal{B} = F \oplus H,$$

où F est de dimension finie et Q_F n'a que des valeurs propres de module $\rho(Q)$ tandis que $\rho(Q_H) < \rho(Q)$.

La théorie spectrale des opérateurs compacts [D.S.] montre qu'un tel opérateur est quasi-compact, mais la notion de quasi-compacité est évidemment moins restrictive. L'intérêt de la quasi-compacité réside en grande partie dans le fait que, comme nous le verrons au paragraphe 7, elle est conservée par perturbation.

Apportons quelques compléments à la définition de la quasi-compacité.

Le sous-espace F introduit dans la définition se décrit canoniquement.

Proposition 1.1.
Si Q est quasi-compact, alors Q n'a qu'un nombre fini de valeurs spectrales de module $\rho(Q)$, ce sont les valeurs propres notées $z_1, \ldots, z_n$ et

$$F = \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{\ell \geq 1} \ker(z_i - Q)^\ell\Big).$$

Démonstration
Soit z, $|z| = \rho(Q)$. $(z - Q_H)$ est inversible donc $(z - Q)$ est inversible en même temps que $(z - Q_F)$, c'est à dire lorsque z n'est pas une valeur propre de Q. Pour $\ell \geq 1$,

$$\ker(z - Q)^\ell = \ker(z - Q_F)^\ell + \ker(z - Q_H)^\ell = \ker(z - Q_F)^\ell,$$

il résulte de l'analyse spectrale en dimension finie que

$$F = \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{\ell \geq 1} \ker(z_i - Q_F)^\ell\Big) = \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{\ell \geq 1} \ker(z_i - Q)^\ell\Big). \qquad \square$$

Il sera parfois utile d'exprimer la quasi-compacité en termes d'opérateurs plutôt que géométriquement.

Proposition 1.2.

Si Q est quasi-compact, alors $Q = U + V$, *où U et V sont des endomorphismes de $\mathcal{B}$ tels que* $UV = VU = 0$, $\rho(V) < \rho(Q)$, *U est de rang fini, les valeurs propres non nulles de U coincident avec les valeurs propres de module $\rho(Q)$ de Q et les sous-espaces caractéristiques sont identiques.*

Démonstration

D'après le théorème du graphe fermé, les projecteurs Π_F et Π_H de la décomposition $\mathcal{B} = F \oplus H$ sont continus, on pose $U = Q\Pi_F$ et $V = Q\Pi_H$. Les propriétés de U et V résultent immédiatement de la proposition précédente. $\square$

Pour tirer profit de cette écriture de Q, notons que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $Q^n = U^n + V^n$ et que, si $r < 1$ est tel que $\rho(V) < r\rho(Q)$, alors

$$\lim_n \left(\frac{\|Q^n - U^n\|}{r^n \|Q^n\|}\right)^{1/n} = \frac{\rho(V)}{r\rho(Q)} < 1,$$

de sorte que

$$\lim_n \frac{\|Q^n - U^n\|}{r^n \|Q^n\|} = 0.$$

L'étude du comportement asymptotique de $(Q^n)_n$ se ramène à celle de $(U^n)_n$.

1.2. Convergence des moyennes ergodiques d'un opérateur quasi-compact

Un cas particulièrement intéressant est celui où les valeurs propres de module $\rho(Q)$ de Q sont d'indice 1.

Proposition 1.3.

Soit Q quasi-compact de rayon spectral ρ . On a l'équivalence

(i) $\sup_n \rho^{-n}\|Q^n\| < +\infty$,

(ii) toutes les valeurs propres de module ρ sont d'indice 1.

Supposons vérifiée l'une ou l'autre de ces conditions.

Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \rho$, il existe un endomorphisme continu Π_z de $\mathcal{B}$ tel que

$$\lim_n \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}Q^k - \Pi_z\right\| = 0 \ ;$$

si $z \notin \sigma(Q)$, $\Pi_z = 0$, si $z \in \sigma(Q)$, Π_z est un projecteur sur le sous-espace $F_z = \ker(z - Q)$.

Si de plus Q n'a qu'une seule valeur propre z_0 de module ρ, pour tout r tel que $\rho(Q_H) < r < \rho$,

$$\lim_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-n} \|z_0^{-n}Q^n - \Pi_{z_0}\| = 0.$$

Démonstration

Puisque $\rho(Q_H) < \rho$, $\sup_n \rho^{-n}\|Q^n\| = \sup_n \rho^{-n}\|Q_F^n\|$, d'autre part, d'après la proposition 1.1, Q et Q_F ont mêmes valeurs propres et mêmes espaces caractéristiques associés, il suffit donc d'établir l'équivalence de *(i)* et *(ii)* pour l'endomorphisme Q_F, or cette équivalence résulte immédiatement de la réduction de Q_F en blocs de Jordan.

Lorsque l'une de ces conditions est réalisée, Q_F est diagonalisable, la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}Q_F^k\right)_{n\geq 1}$$

converge vers 0 si z n'est pas valeur propre de Q_F, vers un projecteur Π'_z de F sur $\ker(z - Q_F) = \ker(z - Q)$ si z est valeur propre ; d'autre part, puisque $\lim \rho^{-n}\|Q_H^n\| = 0$, on a

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}Q_H^k = 0,$$

d'où la convergence annoncée avec $\Pi_z = \Pi'_z\Pi_F$.

Soit r, $\rho(Q_H) < r < \rho$. Si z_0 est la seule valeur propre de module ρ de Q, $Q_F\Pi_F = z_0\Pi_F$ et $z_0^{-n}Q^n - \Pi_F = z_0^{-n}Q^n\Pi_H$, d'où

$$\lim_n (\tfrac{r}{\rho})^{-n}\|z_0^{-n}Q^n - \Pi_F\| = 0. \qquad []$$

Les projecteurs construits ci-dessus permettent de retrouver la décomposition de la définition 1.1.

Corollaire 1.1.

Avec les notations et sous les hypothèses de la proposition 1.3, si $z_1, \ldots, z_n$ sont les valeurs spectrales de module ρ de Q,

$$\mathcal{B} = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_{z_i}\right) \oplus H, \quad \textit{avec} \quad H = \bigcap_{i=1}^{n} \ker \Pi_{z_i},$$

H est fermé, stable par Q et tel que $\rho(Q_H) < \rho$.

Démonstration

Pour $i \neq j$, $\Pi_{z_i}\Pi_{z_j} = 0$, donc, si $f \in \mathcal{B}$, $f - \sum_{i=1}^{n}\Pi_{z_i}f \in H$.

$\ker \Pi_{z_i}$ est fermé et, puisque Π_{z_i} et Q commutent, stable par Q ; H possède les mêmes propriétés. Si Q_H avait un rayon spectral égal à ρ, il aurait, d'après la propriété de quasi-compacité, une valeur propre de module ρ, ce qui contredit la définition de H. []

1.3. Chaîne de Markov et quasi-compacité

Indiquons brièvement l'intérêt de la quasi-compacité pour l'étude des chaînes de Markov.

Soit E un espace métrique séparable et complet et Q une probabilité de transition sur E. On note $(\Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geq 0})$ la chaîne de Markov canonique de probabilité de transition Q et, pour $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_0, \ldots, X_n$.

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach de fonctions continues sur E tel que Q soit quasi-compact sur $\mathcal{B}$.

Nous montrerons, au paragraphe 9, que, moyennant quelques hypothèses sur $\mathcal{B}$, la quasi-compacité permet, lorsque E est compact, une étude de la chaîne très similaire à celle qui peut être faite dans le cas où E est fini.

Pour obtenir des théorèmes limites, on peut, grâce à la quasi-compacité, utiliser la théorie des martingales. En effet, si 1 est une valeur propre d'indice 1 de Q opérant sur $\mathcal{B}$, il résulte de la proposition 1.1. que l'on peut écrire $\mathcal{B} = (1 - Q)(\mathcal{B}) \oplus \ker(1 - Q)$. Pour $f \in \mathcal{B}$, il existe donc des fonctions g et h de $\mathcal{B}$ telles que $f = (g - Qg) + h$ et $Qh = h$. De là, pour $n \geq 1$, la formule,

$$\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \sum_{k=1}^{n} (g(X_k) - Qg(X_{k-1})) + \sum_{k=1}^{n} h(X_k) - [Qg(X_n) - Qg(X_0],$$

où, pour toute probabilité P_x, $(h(X_k))_k$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ tandis que, pour tout $k \geq 1$, $E_x[g(X_k) - Qg(X_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}] = 0$.

Définissons maintenant ce qu'est un noyau lipschitzien et voyons comment se pose le problème de la quasi-compacité pour un tel noyau.

2. NOYAUX LIPSCHITZIENS

Soit (E, d) un espace métrique compact.

Nous considérons sur E des noyaux positifs, associés à des transformations lipschitziennes de E.

Précisément. Soient G un ensemble d'applications lipschitziennes de E dans lui-même, muni d'une structure d'espace mesuré, d'une probabilité μ, et q une fonction mesurable, *bornée* de $E \times G$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour f borélienne bornée sur E et $x \in E$, on pose

$$Qf(x) = \int q(x,g)f(gx)d\mu(g).$$

Q est un noyau positif, il n'est pas supposé markovien. Il opère sur l'espace $b(\mathcal{E})$ des fonctions boréliennes bornées sur E muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Le rayon spectral de Q agissant sur $b(\mathcal{E})$ est

$$\tilde{\rho}(Q) = \lim_n \|Q^n 1\|_\infty^{1/n},$$

où 1 désigne la fonction constante égale à 1 sur E.

Nous supposerons que q et μ sont telles que

$$c(Q) = \sup_{x,y \in E,\ x \neq y} \int q(x,g)\frac{d(gx,gy)}{d(x,y)}d\mu(g) < +\infty,$$

et nous dirons Q est *lipschitzien.*

Les itérés de Q sont définis par

$$Q^n f(x) = \int \cdots \int q_n(x, g_1, \ldots, g_n) f(g_n \ldots g_1 x) d\mu(g_1) \ldots d\mu(g_n),$$

où $q_1 = q$ et

$$q_{m+n}(x, g_1, \ldots, g_{m+n}) = q_m(x, g_1, \ldots, g_m) q_n(g_m \cdots g_1 x, g_{m+1}, \ldots, g_{m+n}).$$

Posons

$$c(Q^n) = \sup_{x,y \in E,\ x \neq y} \int \cdots \int q_n(x, g_1, \ldots, g_n)\frac{d(g_n \ldots g_1 x, g_n \ldots g_1 y)}{d(x,y)} d\mu(g_1) \ldots d\mu(g_n),$$

il est facile de vérifier que $c(Q^{m+n}) \leq c(Q^m)c(Q^n)$, de sorte que, pour tout n, Q^n est un noyau lipschitzien et que la suite $(c(Q^n)^{1/n})_{n \geq 1}$ converge.

Définition 2.1
Pour Q tel que $\tilde{\rho}(Q) > 0$, on pose $\kappa(Q) = \dfrac{1}{\tilde{\rho}(Q)} \lim_n c(Q^n)^{1/n}$.

Exemple 2.1 [C.R.]

$E = [0,1]$ et d la distance définie par la valeur absolue. Soit u une fonction positive, bornée sur E, l'opérateur

$$Q_u f(x) = u(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) + u(\frac{x+1}{2})f(\frac{x+1}{2}),$$

est lipschitzien. G est ici l'ensemble des deux tranformations affines a et b définies par $a(x) = \frac{x}{2}$ et $b(x) = \frac{x+1}{2}$, μ est la probabilité uniforme sur $\{a,b\}$, on pose $q(x,a) = 2u(a(x))$ et $q(x,b) = 2u(b(x))$.

Pour $g_1,\dots,g_n \in G$, $\frac{d(g_n\dots g_1 x, g_n\dots g_1 y)}{d(x,y)} = 1/2^n$, donc

$$c(Q^n) = \frac{1}{2^n}\sup\{\int\dots\int q_n(x,g_1,\dots,g_n)d\mu(g_1)\dots d\mu(g_n) : x\in E\} = \frac{1}{2^n}\|Q^n 1\|_\infty.$$

Si $\tilde{\rho}(Q) > 0$, $\kappa(Q) = 1/2$. $\kappa(Q)$ n'est pas défini lorsque $\tilde{\rho}(Q) = 0$, ce qui est le cas, par exemple, pour $u(x = \sup\{x(1-2x), 0\}$. []

Exemple 2.2.

E est l'espace projectif associé à $I\!R^d$.

Pour $x, y \in E$ et $0 < \alpha \leq 1$, on pose

$$d(x,y) = \frac{\|\tilde{x}\wedge\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|\|\tilde{y}\|}, \qquad d_\alpha(x,y) = (d(x,y))^\alpha,$$

où les normes figurant au dénominateur et au numérateur sont respectivement la norme euclidienne sur $I\!R^d$ et la norme induite sur $I\!R^d \wedge I\!R^d$ par cette norme et $\tilde{x}, \tilde{y}$ sont des représentants dans $I\!R^d$ de x, y. d et d_α sont des distances sur E. Si θ est une mesure de l'angle des vecteurs $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$, $d(x,y) = |\sin\theta|$.

Le groupe G des automorphismes de l'espace vectoriel $I\!R^d$ agit sur E, chaque $g \in G$ définit une transformation lipschitzienne de (E, d_α) de sorte que, si μ est une probabilité sur G, le noyau markovien

$$Qf(x) = \int f(gx)d\mu(g)$$

est lipschitzien sur (E, d_α).

On sait [Le], [G.R.] que, moyennant des hypothèses convenables sur le support de μ, il existe un α tel que le coefficient $\kappa_\alpha(Q)$ associé à l'action de Q sur (E, d_α) soit < 1. A titre d'exemple, ceci est établi pour un cas particulier dans l'exercice suivant.

Exercice

1. En supposant que, pour tout g du support de μ, $|\det g| = 1$, prouver l'inégalité

$$c_\alpha(Q) \leq \sup_{\tilde{x}\in R^d, \|\tilde{x}\|=1} \int \frac{d\mu(g)}{\|g\tilde{x}\|^{2\alpha}} = F(\alpha).$$

2. On suppose $d = 2$ et $\mu = \delta_a * m$, où m est la probabilité uniforme sur $SO(2)$ et $a = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$, $\lambda > 1$.

a. Vérifier que $F(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\lambda^2\cos^2\theta + \lambda^{-2}\sin^2\theta)^\alpha}$.
b. Montrer que F est strictement convexe et que $F(0) = F(1) = 1$.
c. Conclure que, pour $0 < \alpha < 1$, $\kappa_\alpha(Q) < 1$.

Afin de tirer parti de la propriété de lipschitz dans une étude fonctionnelle de Q, on fera agir cet opérateur sur l'espace des fonctions lipschitziennes sur E.

Pour une fonction complexe f définie sur E, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in E\}, \quad m(f) = sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in E, x \neq y\},$$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + m(f).$$

$\mathcal{C}$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur E, muni de la norme de $\|\cdot\|_\infty$.
$\mathcal{L}$ est l'espace de Banach des fonctions f sur E telles que $m(f) < +\infty$ muni de la norme $\|\cdot\|$.

Le théorème de Stone-Weierstrass montre que $\mathcal{L}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

Proposition 2.1
Soit Q un noyau lipschitzien tel que $\sup_g m(q(\cdot, g)) < +\infty$, *alors Q opère sur $\mathcal{C}$ et sur $\mathcal{L}$.*

Pour tout $f \in \mathcal{L}$ et $n \geq 1$,

$$m(Q^n f) \leq c(Q^n)m(f) + R_n\|f\|_\infty,$$

où $R_n = sup\{m(q_n(.,g_1,\ldots,g_n)) : g_1,\ldots,g_n \in G\} < +\infty$.

Démonstration
Puisque q est bornée sur $E \times G$ et continue en x pour g fixé, si $f \in \mathcal{C}$, $Qf \in \mathcal{C}$, de plus

$$\|Qf\|_\infty \leq \sup_g \|q(\cdot, g)\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Par hypothèse $R_1 < +\infty$, un raisonnement par récurrence utilisant la définition de q_n et l'identité $u'v' - uv = (u' - u)v' + u(v' - v)$, montre que $R_n < +\infty$. La même identité permet d'établir que, pour $f \in \mathcal{L}$, on a

$$|Q^n f(x) - Q^n f(y)| \leq \int \cdots \int q_n(x, g_1, \ldots, g_n)|f(g_n \ldots g_1 x) - f(g_n \ldots g_1 y)| d\mu(g_1) \ldots d\mu(g_n)$$

$$+ R_n d(x,y)\|f\|_\infty.$$

On en déduit que $Qf \in \mathcal{L}$, puis vient l'inégalité annoncée et la continuité de Q sur $\mathcal{L}$. []

Considérons, maintenant, un cas particulier dans lequel il est possible de mettre en évidence rapidement la quasi-compacité sur $\mathcal{L}$ de l'opérateur Q.

Nous supposons $q = 1$, c'est à dire

$$Qf(x) = \int f(gx) d\mu(g).$$

Dans ce cas $\tilde{\rho}(Q) = 1$ et $\kappa(Q) = \lim_n c(Q^n)^{1/n}$.

Proposition 2.2.

Si $q = 1$ et si $\kappa(Q) < 1$, alors
Q est un noyau markovien ayant une probabilité invariante unique ν,
$\mathcal{L} = F \oplus H$, où $F = \{z1 : z \in \mathbb{C}\}$, $H = \{f : f \in \mathcal{L},\ \nu(f) = 0\}$,
F et H sont fermés, stables par Q et $\rho(Q_H) \leq \kappa(Q)$.

Pour tout $1 > r > \kappa(Q)$,

$$\lim_n \frac{1}{r^n} \sup\{\|Q^n f - \nu(f)\| : f \in \mathcal{L}, \|f\| = 1\} = 0 \ ;$$

de plus, pour $f \in \mathcal{C}$, $\lim_n \|Q^n f - \nu(f)\|_\infty = 0$.

Démonstration

D'après la proposition 2.1, pour $f \in \mathcal{L}$ et $n \geq 1$,

$$m(Q^n f) \leq c(Q^n) m(f).$$

Soit $\Delta = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}$ le diamètre de E.

Distinguons un point z_0 de E. Puisque E est compact, il est possible d'extraire de la suite de probabilités $(\pi_n)_n$,

$$\pi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(z_0, \cdot),$$

une sous-suite convergeant faiblement vers une probabilité ν, nécessairement Q-invariante.

Soit ν' une probabilité Q-invariante. Pour $f \in \mathcal{L}$,

$$|\nu(f) - \nu'(f)| = |\int (Q^n f(x) - Q^n f(y)) d\nu(x) d\nu'(y)| \leq m(Q^n f)\Delta \leq c(Q^n) m(f)\Delta,$$

par passage à la limite en n, il vient $\nu(f) = \nu'(f)$ et, de la densité de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{C}$, on conclut que $\nu' = \nu$.

Q_F est l'identité de F.

Puisque la forme linéaire ν est continue sur $\mathcal{C}$ donc sur $\mathcal{L}$, H est fermé.

m définit sur H une norme équivalente à la norme initiale $\|\cdot\|$, plus précisément, pour $f \in H$,

$$m(f) \leq \|f\| \leq (2\Delta + 1) m(f);$$

en effet, si $\nu(f) = 0$, il existe x_0 et x_1 dans E tels que $Ref(x_0) = Imf(x_1) = 0$ ce qui conduit à la seconde inégalité. L'inégalité figurant en tête de la preuve montre que, dans l'espace de Banach (H, m), le rayon spectral de Q_H est $\leq \kappa(Q)$, le rayon spectral n'étant pas modifié par passage à une norme équivalente, on a $\rho(Q_H) \leq \kappa(Q)$.

La convergence uniforme à vitesse exponentielle sur la boule unité de $\mathcal{L}$ découle de la proposition 1.3. La convergence ponctuelle sur $\mathcal{C}$ résulte de la convergence ponctuelle sur $\mathcal{L}$, de l'équicontinuité sur $\mathcal{C}$ des opérateurs Q^n, $n \in \mathbb{N}$, et de la densité de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{C}$. []

Exemple 2.3.

Pour illustrer l'importance du choix de l'espace fonctionnel sur lequel on fait opérer Q, étudions plus en détail le cas particulier de l'exemple 2.1. où, sur $E = [0,1]$,

$$Qf(x) = \frac{1}{2}[f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})] = \int f(gx)d\mu(g).$$

Munissons, cette fois, E de la distance $d_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha$, où $0 < \alpha \leq 1$.

On a

$$c(Q^n) = \sup_{x,y\in E,\ x\neq y} \int \dots \int (\frac{|g_n \dots g_1 x - g_n \dots g_1 y|}{|x-y|})^\alpha d\mu(g_1)\dots d\mu(g_n) = \frac{1}{2^{n\alpha}},$$

et

$$\kappa(Q) = \frac{1}{2^\alpha}.$$

La proposition 2.2. s'applique à l'action de Q sur l'espace $\mathcal{L}_\alpha$ des fonctions d_α-lipschitziennes ou α-hölderiennes.

ν est ici la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

En posant $H_\alpha = \{f : f \in \mathcal{L}_\alpha, \nu(f) = 0\}$ et avec F comme dans l'énoncé de la proposition, on a $\mathcal{L}_\alpha = F \oplus H_\alpha$ et $\rho(Q_{H_\alpha}) \leq \frac{1}{2^\alpha}$.

Montrons que $\rho(Q_{H_\alpha}) = \frac{1}{2^\alpha}$. Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. La série $\sum_{n\geq 1} z^{n-1}\cos(2^n\pi x)$ converge uniformément sur E et la fonction

$$f_z(x) = \sum_{n\geq 1} z^{n-1}\cos(2^n\pi x)$$

est une fonction continue, non nulle, vérifiant les relations $Qf_z = zf_z$ et $\nu(f_z) = 0$. Si $|z| < 1/2$, cette fonction est continûment dérivable, donc lipschitzienne, et, plus généralement, d'après [C.R.], α-hölderienne dès que la série de terme général $|z^n 2^{n\alpha}|$, $n \geq 1$, converge, i.e. pour $|z| < 1/2^\alpha$. De l'existence de ces fonctions propres et de la compacité de $\sigma(Q_{H_\alpha})$, il vient $\sigma(Q_{H_\alpha}) = \{z : |z| \leq \frac{1}{2^\alpha}\}$ et $\rho(Q_{H_\alpha}) = \frac{1}{2^\alpha}$.

Il apparaît que la convergence à vitesse exponentielle de $(Q^n)_n$ vers ν sur l'espace $\mathcal{L}_\alpha$ est d'autant plus rapide que α est grand, c'est à dire que l'on se place sur un espace de fonctions plus régulières.

Si l'on considère, maintenant, l'action de Q sur $\mathcal{C}$, on écrira $\mathcal{C} = F \oplus H_0$, où $H_0 = \{f : f \in \mathcal{C}, \nu(f) = 0\}$, mais l'existence des fonctions propres continues f_z, $|z| < 1$, montre que $\rho(Q_{H_0}) = 1$, par suite

$$\lim_n(\sup\{\|Q^n f - \nu(f)\|_\infty : f \in \mathcal{C}, \|f\|_\infty = 1\})^{1/n} = 1$$

et la convergence à vitesse exponentielle est perdue. []

L'étude de la quasi-compacité d'un noyau lipschitzien Q dans le cas où q n'est pas identiquement égal à 1 nécessite un développement plus important, la clé est l'inégalité de la proposition 2.1. Nous montrerons, au paragraphe 4, à l'aide d'un théorème énoncé au paragraphe 3 que, dans le cas général, sous la condition $\kappa(Q) < 1$, Q est quasi-compact sur $\mathcal{L}$. D'autre part, la proposition 1.3. et la proposition 2.2. amènent à préciser la notion de quasi-compacité en introduisant le rayon spectral essentiel d'un opérateur.

3. RAYON SPECTRAL ESSENTIEL
THÉORÈME DE IONESCU TULCEA

Les notations sont celles du paragraphe 1.

Les notions de spectre et de rayon spectral essentiels d'un opérateur ont été introduites par F.E. Browder [B.]. Le rayon spectral essentiel peut être défini comme suit.

Définition 3.1.

Le rayon spectral essentiel de l'opérateur Q, noté $\rho_e(Q)$, est la borne inférieure de $\rho(Q)$ et des réels r, $0 \leq r$, pour lesquels il existe une décomposition en sous-espaces fermés, Q-stables,

$$\mathcal{B} = F_r \oplus H_r,$$

où F_r est de dimension finie et Q_{F_r} n'a que des valeurs propres de modules $\geq r$ tandis que $\rho(Q_{H_r}) < r$.

La quasi-compacité s'écrira désormais $\rho_e(Q) < \rho(Q)$.

Si Q est compact $\rho_e(Q) = 0$.

La conclusion de la proposition 2.2. s'énonce $\rho_e(Q) \leq \kappa(Q)$.

On généralise sans difficulté la proposition 1.1. et avec les notations de la définition on a

Proposition 3.1.

Si Q quasi-compact et si $\rho_e(Q) < r \leq \rho(Q)$, Q n'a qu'un nombre fini de valeurs spectrales de module $\geq r$, ce sont les valeurs propres notées $z_1, \ldots, z_m$ et

$$F_r = \bigoplus_{i=1}^{m} \Big(\bigcup_{\ell \geq 1} \ker(z_i - Q)^\ell \Big).$$

De cet énoncé, il résulte que, si $z \in \sigma(Q)$ et $|z| > \rho_e(Q)$, z est un point isolé de $\sigma(Q)$. Dans le cas de l'exemple 2.3, on en déduit que $\rho_e(Q) \geq \frac{1}{2^\alpha}$ et, finalement, on a $\rho_e(Q) = \frac{1}{2^\alpha}$.

Dans les situations qui seront envisagées ultérieurement, l'argument principal pour la preuve de la quasi-compacité est l'énoncé suivant qui généralise le théorème de Ionescu Tulcea Marinescu [I.T.M.], [Nor.]. Le trait essentiel du théorème est l'usage d'une norme auxiliaire introduisant une propriété de compacité.

Théorème 3.1.

Soit $|\cdot|$ une semi-norme sur $\mathcal{B}$ telle que

(i) $Q(\{f : f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1\})$ est précompacte dans $(\mathcal{B}, |\cdot|)$,

(ii) il existe une constante M telle que,

$$\text{pour tout } f \in \mathcal{B}, \ |Qf| \leq M|f|,$$

(iii) il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et des réels positifs r et R tels que,

$$r < \rho(Q) \text{ et, pour tout } f \in \mathcal{B}, \ \|Q^k f\| \leq R|f| + r^k \|f\|,$$

alors Q est quasi-compact et $\rho_e(Q) \leq r$.

Rappelons que la partie A de $\mathcal{B}$ est dite précompacte dans $(\mathcal{B}, |\cdot|)$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des boules $D(f, \epsilon) = \{g : |g - f| < \epsilon\}$, $f \in \mathcal{B}$.

Ionescu Tulcea et Marinescu ont montré que Q est quasi-compact lorsque $|\cdot|$ est une norme, que $Q(\{f : f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1\})$ est compacte dans $(\mathcal{B}, |\cdot|)$, et que l'on adjoint aux conditions *(ii)* et *(iii)* les hypothèses $\rho(Q) = 1$ et $\sup_n |Q^n| < +\infty$. L'énoncé ci-dessus repose sur des hypothèses moins contraignantes et fournit une conclusion plus précise puisqu'il donne une estimation du rayon spectral essentiel de l'opérateur Q. On peut d'ailleurs en déduire une caractérisation du rayon spectral essentiel.

Proposition 3.2.

Soit r, $\rho_e(Q) < r < \rho(Q)$, alors il existe une semi-norme $|\cdot|$ sur $\mathcal{B}$ satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème 3.1. avec cette valeur de r ; de plus, pour toute norme $|\cdot|'$, (iii) est satisfaite.

Démonstration

Ecrivons, commme dans la définition 3.1, $\mathcal{B} = F_r \oplus H_r$ et, pour $f \in \mathcal{B}$, posons $|f| = \|\Pi_{F_r} f\|$.

(i) et *(ii)* résultent de $\dim F_r < +\infty$ et de la relation $Q\Pi_{F_r} = \Pi_{F_r} Q$. Pour $f \in \mathcal{B}$ et $k \geq 0$, on a

$$\|Q^k f\| \leq \|Q^k_{F_r}\| \|\Pi_{F_r} f\| + \|Q^k_{H_r}\| \|\Pi_{H_r}\| \|f\|,$$

et, pour établir *(iii)*, il suffit de choisir k tel que $r^{-k} \|Q^k_{H_r}\| \|\Pi_{H_r}\| \leq 1$, ce qui est possible, puisque $\rho(Q^k_{H_r}) < r$.

Soit $|\cdot|'$ une norme sur $\mathcal{B}$. Puisque F_r est de dimension finie, $|\cdot|$ est continue sur F_r muni de sa topologie canonique, $|\cdot|$ est donc bornée par un réel c sur le compact $\{f : f \in F_r, |f|' = 1\}$, par suite, pour tout $f \in F_r$, $|f| \leq c|f|'$, d'où *(iii)*. □

Comme remarqué dans [H.], le théorème 3.1. est un corollaire d'une formule générale de Nussbaum [N.] pour le calcul du rayon spectral essentiel d'un opérateur. Cette formule sera énoncée au paragraphe 5, nous y montrerons comment on peut en déduire le théorème 3.1. (corollaire 5.2.), ainsi que le résultat de J. Neveu [Nev.] sur la quasi-compacité, sous la forme plus précise obtenue dans [B.R.] (corollaire 5.3.). La preuve de la formule elle-même sera faite dans l'appendice A.

Une des difficultés d'application du théorème 3.1. réside dans la vérification de l'inégalité $r < \rho(Q)$. Il est parfois plus facile d'estimer la croissance de la suite $(|Q^n|)_n$ que celle de la suite $(\|Q^n\|)_n$, d'où l'intérêt du corollaire 3.1. ci-dessous, qui reprend le cas envisagé par Ionescu Tulcea et Marinescu ; on notera que cet énoncé n'établit pas la quasi-compacité lorsque $\rho(Q) < 1$. Le résultat intermédiaire qui fait l'objet de la proposition 3.3. pourra être utile en relation avec la proposition 1.3.

Proposition 3.3.

Supposons que $|\cdot|$ soit une norme et que Q satisfasse aux conditions (ii) et (iii) du théorème 3.1. Alors,

pour un réel $\alpha > r$, $\sup_n \alpha^{-n}|Q^n| < +\infty$ implique $\sup_n \alpha^{-n}\|Q^n\| < +\infty$,

et, en posant $\tilde{\rho}(Q) = \lim_n |Q^n|^{1/n}$, on a $\rho(Q) \leq \max\{r, \tilde{\rho}(Q)\}$.

Démonstration

Pour une meilleure lisibilité, nous supposerons $k = 1$, il ne sera pas difficile au lecteur de compléter l'argumentation pour traiter le cas général.

En itérant *(iii)* et en utilisant la continuité de Q sur $(\mathcal{B}, |\cdot|)$, il vient, pour $f \in \mathcal{B}$,

$$\|Q^n f\| \leq R \sum_{i=0}^{n-1} r^i |Q^{n-i-1}\|f| + r^n \|f\|,$$

d'où, en posant $b = \sup_n \alpha^{-n}|Q^n|$,

$$\alpha^{-n}\|Q^n\| \leq R\alpha^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} (r\alpha^{-1})^i \alpha^{-(n-i-1)} |Q^{n-i-1}| + (\alpha^{-1}r)^n \leq R\alpha^{-1} \frac{b}{1-\alpha^{-1}r} + 1.$$

L'implication établie a pour conséquence que, si $\alpha > \max\{r, \tilde{\rho}(Q)\}$, on a $\alpha \geq \rho(Q)$, d'où l'inégalité annoncée. []

Corollaire 3.1.

Ajoutons aux conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 3.1. l'hypothèse $\sup_n |Q^n| < +\infty$ *et supposons* $r < 1$, *alors*

soit $\rho(Q) < 1$ *et, pour* $\rho(Q) < r' < 1$, $\lim_n r'^{-n}\|Q^n\| = 0$,

soit $\rho(Q) = 1$ *et* $\rho_e(Q) \leq r$.

Démonstration

Avec les notations de la proposition 3.3, on a $\tilde{\rho}(Q) \leq 1$, d'où $\rho(Q) \leq 1$. Le second terme de l'alternative résulte du théorème 3.1. []

Appliquons maintenant le théorème 3.1. au noyaux lipschitziens.

4. QUASI-COMPACITÉ DES NOYAUX LIPSCHITZIENS

Le contexte est celui du paragraphe 2.

Si Q est un noyau lipschitzien satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2.1, il opère sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$.

Son rayon spectral sur $\mathcal{C}$ est $\tilde{\rho}(Q) = \lim_n \|Q^n\|_\infty^{1/n} = \lim_n \|Q^n 1\|_\infty^{1/n}$.

Son rayon spectral sur $\mathcal{L}$ est noté $\rho(Q)$.

On remarque que $\rho(Q) \geq \tilde{\rho}(Q)$.

En effet $\tilde{\rho}(Q) = \lim_n \|Q^n 1\|_\infty^{1/n} \leq \lim_n \|Q^n 1\|^{1/n} \leq \lim_n \|Q^n\|^{1/n}\|1\|^{1/n} = \rho(Q)$.

Proposition 4.1.

Soit Q un noyau lipchitzien tel que $\tilde{\rho}(Q) > 0$, $\kappa(Q) < 1$ et satisfaisant à $\sup_g m(q(\cdot, g)) < +\infty$.

Alors Q est quasi-compact sur $\mathcal{L}$, plus précisément $\rho_e(Q) \leq \kappa(Q)\rho(Q)$, de plus $\tilde{\rho}(Q) = \rho(Q)$.

Démonstration

Vérifions les hypothèses du théorème 3.1. avec la norme auxiliaire $\|\cdot\|_\infty$.

$Q(\{f : f \in \mathcal{L}, \|f\| \leq 1\})$ est une partie bornée de $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$. Soit A une partie bornée de $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$. Supposons que A ne soit pas précompacte dans $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_\infty)$, alors il existe un $\epsilon > 0$ et une suite $(f_n)_n$ de A telle que, pour tout m et n, $m \neq n$, $\|f_m - f_n\|_\infty \geq \epsilon$. Mais A étant bornée dans $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$, les fonctions de A sont uniformément bornées et équicontinues, du théorème d'Ascoli il résulte que l'on peut extraire de $(f_n)_n$ une sous-suite $(f_{n_k})_k$ convergeant dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$; $(f_{n_k})_k$ est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, ce qui contredit l'inégalité $\|f_m - f_n\|_\infty \geq \epsilon$. L'hypothèse *(i)* est vérifiée.

Q est continu sur $\mathcal{C}$, d'où *(ii)*.

Pour $f \in \mathcal{L}$, on a, d'après la proposition 2.1,

$$\|Q^k f\| \leq (\|Q^k 1\|_\infty + R_k)\|f\|_\infty + c(Q^k)\|f\|;$$

la condition *(iii)* est satisfaite pour tout k tel que $(c(Q^k))^{1/k} < \rho(Q)$, c'est à dire, pour tout k supérieur à un entier k_0, car

$$\lim_k (c(Q^k))^{1/k} = \kappa(Q)\tilde{\rho}(Q) < \tilde{\rho}(Q) \leq \rho(Q).$$

Le théorème 3.1. s'applique avec tout entier $k \geq k_0$, il vient $\rho_e(Q) \leq (c(Q^k))^{1/k}$, puis $\rho_e(Q) \leq \kappa(Q)\tilde{\rho}(Q)$.

Dans l'action sur $\mathcal{L}$, les valeurs spectrales de Q de module $\rho(Q)$ sont des valeurs propres, puisque $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$, il en résulte que $\tilde{\rho}(Q) \geq \rho(Q)$ et, finalement, que $\tilde{\rho}(Q) = \rho(Q)$. []

Exemple 4.1.

$$E = [0,1], \quad Qf(x) = u(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) + u(\frac{x+1}{2})f(\frac{x+1}{2}),$$

où u est une fonction lipchitzienne sur E. Si $\tilde{\rho}(Q) > 0$ on a $\kappa(Q) = \frac{1}{2}$ et Q est quasi-compact sur $\mathcal{L}$ avec $\rho_e(Q) \leq \frac{1}{2}\rho(Q)$. []

Dans le cadre de l'étude de certaines transformées de Fourier (cf. ex. 4.2. ci-dessous), on est amené à associer au noyau lipschitzien Q des noyaux qui ne sont plus positifs ; pour ces noyaux, l'énoncé précédent est affaibli.

Précisément. Soient Q un noyau lipschitzien et ψ une fonction complexe, mesurable sur $E \times G$, telle que, pour tout $(x,g) \in E \times G$,

$$|\psi(x,g)| = q(x,g).$$

ψ définit sur $b(\mathcal{E})$ un opérateur Ψ par la formule

$$\Psi f(x) = \int \psi(x,g) f(gx) d\mu(g).$$

Proposition 4.2.

Soit q satisfaisant aux hypothèses de la proposition 4.1. et ψ, Ψ tels que ci-dessus. Si $\sup\limits_g m(\psi(\cdot,g)) < +\infty$, *$\Phi$ opère sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$.*

Si, de plus, $\tilde{\rho}(Q) > 0$ et $\kappa(Q) < 1$, on a

$$\rho_e(\Psi) \leq \kappa(Q)\rho(Q) \quad \textit{et} \quad \rho(\Psi) \leq \rho(Q).$$

Noter que cet énoncé ne permet d'établir la quasi-compacité de Ψ que moyennant une estimation supplémentaire de $\rho(\Psi)$.

Démonstration

La première assertion s'établit comme dans la proposition 2.1. et la preuve fait apparaître l'existence de constantes R'_k telles que, pour $f \in \mathcal{L}$,

$$\|\Psi^k f\| \leq (\|Q^k 1\|_\infty + R'_k)\|f\|_\infty + c(Q^k)\|f\|.$$

Si $\rho(\Psi) \leq \kappa(Q)\rho(Q)$, les deux inégalités sont évidentes.

Supposons $\rho(\Psi) > \kappa(Q)\rho(Q) = \lim_k c(Q^k)^{1/k}$. En reprenant l'argumentation de la proposition précédente, on conclut que Ψ est quasi-compact sur $\mathcal{L}$ et que $\rho_e(\Psi) \leq \kappa(Q)\rho(Q)$. De cette quasi-compacité, on déduit que $\tilde{\rho}(\Psi) \geq \rho(\Psi)$, et l'on termine en remarquant que $\tilde{\rho}(\Psi) = \lim_n \|\Psi^n\|_\infty^{1/n} \leq \lim_n \|Q^n\|_\infty^{1/n} = \tilde{\rho}(Q) = \rho(Q)$. []

Exemple 4.2.

Supposons Q markovien et donnons nous une fonction $\phi \in \mathcal{L}$.

Avec les notations probabilistes du paragraphe 1, la fonction caractéristique, sous la probabilité P_x, de la v.a. $\phi(X_1)$ est, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$E_x[e^{i\lambda\phi(X_1)}] = \int e^{i\lambda\phi(gx)} q(x,g) d\mu(g).$$

En posant $\psi_\lambda(x,g) = e^{i\lambda\phi(gx)} q(x,g)$ et

$$\Psi_\lambda f(x) = \int \psi_\lambda(x,g) f(gx) d\mu(g) = \int e^{i\lambda\phi(gx)} q(x,g) f(gx) d\mu(g) = E_x[e^{i\lambda\phi(X_1)} f(X_1)],$$

on a donc

$$\Psi_\lambda 1(x) = E_x[e^{i\lambda\phi(X_1)}],$$

et, plus généralement,

$$f_{n,\lambda}(x) = E_x[e^{i\lambda\sum_{\ell=1}^{n}\phi(X_\ell)}] = E_x[e^{i\lambda\phi(X_1)}E_x[e^{i\lambda\sum_{\ell=2}^{n}\phi(X_\ell)}|\mathcal{F}_1]]$$
$$= E_x[e^{i\lambda\phi(X_1)}E_{X_1}[e^{i\lambda\sum_{\ell=1}^{n-1}\phi(X_\ell)}]] = \Psi_\lambda f_{n-1,\lambda}(x) = \Psi_\lambda^n 1(x).$$

Si Q satisfait aux hypothèses de la proposition 4.2, on a, pour tout λ,

$$\rho_e(\Psi_\lambda) \leq \kappa(Q) < 1 \quad \text{et} \quad \rho(\Psi_\lambda) \leq 1.$$

Si $\rho(\Psi_\lambda) < 1$, alors, pour tout r', $\rho(\Psi_\lambda) < r' < 1$, $\lim_n r'^{-n}\|\Psi_\lambda^n\| = 0$; si $\rho(\Psi_\lambda) = 1$, Ψ_λ est quasi-compact.

L'ensemble $\Lambda = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}, \rho(\Psi_\lambda) = 1\}$ joue un rôle essentiel dans la preuve de certains théorèmes limites pour les sommes $\sum_{\ell=1}^{n}\phi(X_\ell)$, cf. [G.H.]. []

Remarque 4.1.

Utilisant une méthode différente, D. Ruelle [Ru2] a établi les inégalités de la proposition précédente, dans le cas où il existe un θ, $0 < \theta < 1$, tel que tous les éléments de G soient lipschitziens de coefficient θ. Dans ce contexte, il a également envisagé, comme nous allons le faire maintenant, le cas où E est une variété différentiable et où les éléments de G sont des applications différentiables.

Supposons que E soit une variété riemanienne.

Les différentielles successives au point x d'une application h de E dans $\mathbb{C}$ ou dans E sont désignées par $d_x^i h$, les normes de ces applications multilinéaires sont notées $\|d_x^i h\|$.

Soit ℓ un entier ≥ 1 tel que

$q(\cdot, g)$ est ℓ fois continûment différentiable pour tout $g \in G$ et

$$\sup_{i=1,\ldots,\ell}\ \sup_{g\in G}\ \sup_{x\in E}\|d_x^i q(\cdot, g)\| < +\infty,$$

G est un ensemble d'applications ℓ fois continûment différentiables de E dans lui-même et

$$\sup_{i=1,\ldots,\ell}\ \sup_{g\in G}\ \sup_{x\in E}\|d_x^i g\| < +\infty.$$

On pose

$$c_\ell(Q^n) = \sup_{x\in E}\int\ldots\int q_n(x, g_1, \ldots, g_n)\|d_x(g_n\cdots g_1)\|^\ell d\mu(g_1)\ldots d\mu(g_n).$$

$c_\ell(Q^n)$ est fini et la suite $(c_\ell(Q^n)^{1/n})_n$ est sous-multiplicative.

Définition 4.1.

Pour Q tel que $\tilde{\rho}(Q) > 0$, on pose $\kappa_\ell(Q) = \dfrac{\lim_n c_\ell(Q^n)^{1/n}}{\tilde{\rho}(Q)}$.

L'espace adapté à l'action de Q est alors l'espace $\mathcal{C}^\ell$ des fonctions complexes ℓ fois continûment différentiables sur E. Pour $f \in \mathcal{C}^\ell$, on pose

$$\|f\|_\ell = \sum_{i=0}^{\ell}\sup_{x\in E}\|d_x^i f\|.$$

D'après un théorème classique sur les suites de fonctions différentiables $(\mathcal{C}^\ell, \|\cdot\|_\ell)$ est un espace de Banach.

Proposition 4.3.

Un noyau Q satisfaisant aux conditions ci-dessus opère sur $\mathcal{C}^\ell$.

Si $\tilde{\rho}(Q) > 0$ et $\kappa_\ell(Q) < 1$, alors Q est quasi-compact sur $\mathcal{C}^\ell$, plus précisément $\rho_e(Q) \leq \kappa_\ell(Q)\rho(Q)$, de plus $\tilde{\rho}(Q) = \rho(Q)$.

Démonstration

Soit $i = 1, \dots, \ell$ et $f \in \mathcal{C}^\ell$.

D'après la régle de différentiation d'un produit de fonctions, la condition sur les différentielles de $q(\cdot, g)$ et l'expression de q_n à l'aide de q, il existe des constantes a_{ij}, $j = 0, \dots, i-1$, telles que, pour tout $g_1, \dots, g_n \in G$,

$$\|d_x^i[q_n(.\,, g_1, \dots, g_n) f \circ (g_n \cdots g_1)]\| \leq \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \|d_x^j f \circ (g_n \cdots g_1)\|$$

$$+ q_n(.\,, g_1, \dots, g_n) \|d_x^i f \circ (g_n \cdots g_1)\|.$$

Les régles de différentiation d'une fonction composée et les conditions sur les différentielles des éléments de G montrent qu'il existe des constantes b_{ij}, $j = 0, \dots, i-1$, telles que, pour tout $g_1, \dots, g_n \in G$, on a, en posant $g = g_n \cdots g_1$,

$$\|d_x^i f \circ g\| \leq \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} \|d_{gx}^j f\| + \|d_{gx}^i f(d_x g, \dots, d_x g)\| \leq \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} \|d_{gx}^j f\| + \|d_{gx}^i f\| \|d_x g\|^i.$$

Il en résulte l'existence de constantes c_{ij}, $j = 0, \dots, i-1$, telles que, pour tout $g_1, \dots, g_n \in G$,

$$\|d_x^i[q_n(.\,, g_1, \dots, g_n) f \circ (g_n \cdots g_1)]\| \leq \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij} \|d_{(g_n \cdots g_1)x}^j f\| + \|d_{(g_n \cdots g_1)x}^i f\| \|d_x (g_n \cdots g_1)\|^i.$$

Ces estimations légitiment la différentiation sous le signe intégral dans l'expression de $Q^n f$. On a

$$d_x^i Q^n f(x) = \int \dots \int d_x^i [q_n(.\,, g_1, \dots, g_n) f \circ (g_n \cdots g_1)] d\mu(g_1) \dots d\mu(g_n),$$

d'où

$$\sup_{x \in E} \|d_x^i Q^n f(x)\| \leq \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij} \sup_{x \in E} \|d_x^j f\| + c_i(Q^n) \sup_{x \in E} \|d_x^i f\|.$$

Finalement, Q opère sur $\mathcal{C}^\ell$ et, pour tout entier n il existe une constante R_n telle que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\ell$,

$$\|Q^n f\|_\ell \leq R_n \|f\|_{\ell-1} + c_\ell(Q^n) \sup_{x \in E} \|d_x^\ell f\| \leq R_n \|f\|_{\ell-1} + c_\ell(Q^n) \|f\|_\ell.$$

Appliquons le théorème 3.1. avec pour norme auxiliaire $\|\cdot\|_{\ell-1}$.

$Q(\{f : f \in \mathcal{L}, \|f\|_\ell \leq 1\})$ est une partie bornée de $(\mathcal{C}^\ell, \|\cdot\|_\ell)$. Soit A une partie bornée de $(\mathcal{C}^\ell, \|\cdot\|_\ell)$. Supposons que A ne soit pas précompacte dans $(\mathcal{C}^\ell, \|\cdot\|_{\ell-1})$, alors il existe un $\epsilon > 0$ et une suite $(f_n)_n$ de A telle que, pour tout m et n, $m \neq n$, $\|f_m - f_n\|_{\ell-1} \geq \epsilon$. Comme A est une partie bornée de $(\mathcal{C}^\ell, \|\cdot\|_\ell)$, les fonctions de la suite $(d^i f_n)_n$ sont uniformément bornées et équicontinues, pour $i = 0, \ldots, \ell-1$, du théorème d'Ascoli il résulte que l'on peut contruire une sous-suite $(n_k)_k$ telle que, pour $i = 0, \ldots, \ell - 1$, la suite $(d^i f_{n_k})_k$ converge uniformément vers une fonction h_i. On sait, que dans ce cas, la suite $(f_{n_k})_k$ converge dans $(\mathcal{C}^{\ell-1}, \|\cdot\|_{\ell-1})$, ce qui contredit l'inégalité $\|f_m - f_n\|_{\ell-1} \geq \epsilon$.

La preuve se poursuit comme celle de la proposition 4.1. []

Exemple 4.3.

$$E = [0,1], \quad Qf(x) = u(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) + u(\frac{x+1}{2})f(\frac{x+1}{2}).$$

L'énoncé précédent s'applique directement lorsque u est la restriction à $[0,1]$ d'une fonction ℓ fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, de période 1 et que l'on opère sur des fonctions ayant la même propriété. Il s'adapte immédiatement au cas où ces périodicités sont omises, la définition des espaces $\mathcal{C}^\ell$ étant alors modifiée pour tenir compte des dérivées à droite en 0 et à gauche en 1. Dans ces conditions, si $\tilde{\rho}(Q) > 0$, on a $\kappa_\ell(Q) = \dfrac{1}{2^\ell}$ et, sur $\mathcal{C}^\ell$,

$$\rho_e(Q) \leq \frac{1}{2^\ell}\rho(Q).$$

Une étude dans ce cadre de l'exemple 2.3. montre que l'égalité $\rho_e(Q) = \frac{1}{2^\ell}\rho(Q)$ est possible.

Notons que, dans [C.I.], une estimation similaire est obtenue pour le cas d'une tranformation dilatante plus générale .

Remarque 4.2.

Si l'on substitue à la fonction q une fonction ψ telle qu'en 4.3. et possédant les mêmes régularités différentielles que q, les conclusions de la proposition 4.3. deviennent
$\rho_e(\Psi) \leq \kappa_\ell(Q)\rho(Q)$ et $\rho(\Psi) \leq \rho(Q)$. []

Les propriétés des valeurs propres de plus grand module d'un noyau lipschitzien et les théorèmes de convergence qui en résultent seront énoncés au paragraphe 8.

5. LA FORMULE DE NUSSBAUM

Comme indiqué précédemment, le théorème 3.1. qui fournit une estimation du rayon spectral essentiel d'un opérateur est un corollaire d'une formule de Nussbaum. Dans ce paragraphe, nous énonçons cette formule et en déduisons, entre autres conséquences, le théorème 3.1.

L'élément de base de la formule de Nussbaum est la fonction d'ensemble γ mesurant le défaut de compacité des parties de $\mathcal{B}$.

Pour r, $r > 0$, $f \in \mathcal{B}$, on pose $B(f,r) = \{g : \|g - f\| < r\}$ et, plus particulièrement, $B_1 = B(0,1)$.

Définition 5.1.

Soit $A \subset \mathcal{B}$, $\gamma(A)$ est la borne inférieure des réels r, $r > 0$, tels qu'il existe un recouvrement fini de A par des boules de $\mathcal{B}$ de rayon r.

Indiquons quelques propriétés de la fonction γ.

Proposition 5.1.

Soient A et B deux parties de $\mathcal{B}$,

(i) $\gamma(A) < +\infty$ *si et seulement si A est bornée,*

(ii) $\gamma(A) = 0$ *si et seulement si $\bar{A}$ est compacte,*

(iii) si $A \subset B$, $\gamma(A) \leq \gamma(B)$,

(iv) $\gamma(A + B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$,

(v) si $\bar{A}$ est compacte $\gamma(A + B) = \gamma(B)$,

(vi) $\gamma(B_1) = 1$ *sauf si $\mathcal{B}$ est de dimension finie.*

Démonstration

La vérification des assertions *(i) et (iii)* est immédiate.

La condition $\gamma(A) = 0$ signifie la précompacité de $\bar{A}$, puisque $\mathcal{B}$ est complet, ceci équivaut à la compacité de $\bar{A}$.

Soit $r > \gamma(A)+\gamma(B)$. Ecrivons $r = r' + r''$ avec $r' > \gamma(A)$ et $r'' > \gamma(B)$. Par définition de γ, il existe $f_i, g_j \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(f_i, r'), \quad B \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(g_j, r'').$$

Soient $f \in B(f_i, r')$ et $g \in B(g_j, r'')$, alors

$$\|(f + g) - (f_i + g_j)\| \leq \|f - f_i\| + \|g - g_j\| < r' + r'' = r,$$

donc

$$A + B \subset \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} B(f_i + g_j, r).$$

On en déduit que $\gamma(A + B) \leq r$, d'où *(iv)*.

Supposons $\gamma(A) = 0$, alors, d'après l'inégalité précédente, $\gamma(A + B) \leq \gamma(B)$, mais, d'autre part, A étant supposée non vide, pour $f \in A$, on a $f + B \subset A + B$, d'où $\gamma(B) = \gamma(f + B) \leq \gamma(A + B)$; on conclut que $\gamma(A + B) = \gamma(B)$.

Par définition $\gamma(B_1) \leq 1$. L'inégalité $\gamma(B_1) < 1$ implique, par homothétie et translation, $\gamma(B_1) = 0$. D'après le théorème de Riesz et *(ii)*, $\gamma(B_1) = 0$ équivaut à $\dim \mathcal{B} < +\infty$. $\square$

La fonction d'ensemble γ induit une fonction d'opérateur, encore notée γ.

Définition 5.2.

$\gamma(Q)$ est la borne inférieure de l'ensemble des réels k, $k \geq 0$, tels que, pour tout $A \subset \mathcal{B}$, $\gamma(Q(A)) \leq k\gamma(A)$.

Proposition 5.2.

$\gamma(Q) = \gamma(Q(B_1)) \leq \|Q\|$,

la suite $(\gamma(Q^n))_n$ est sous-multiplicative et, en posant $\rho_\gamma(Q) = \lim_n (\gamma(Q^n))^{1/n}$, on a $\rho_\gamma(Q) \leq \rho(Q)$.

Démonstration

L'inégalité $\gamma(Q(B_1)) \leq \|Q\|$ est immédiate.

Par définition de $\gamma(Q)$, on a $\gamma(Q(B_1)) \leq \gamma(Q)\gamma(B_1) \leq \gamma(Q)$. Pour établir l'inégalité inverse, considérons une partie A bornée, quelconque de $\mathcal{B}$. Soit $r > \gamma(A)$ et $(f_i)_{i=1}^n$ une suite de $\mathcal{B}$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, r)$, alors $Q(A) \subset \bigcup_{i=1}^n Q(B(f_i, r))$ d'où $\gamma(Q(A)) \leq \gamma(Q(B(0,r))) = r\gamma(Q(B_1))$. De la condition initiale sur r, on déduit $\gamma(Q(A)) \leq \gamma(Q(B_1))\gamma(A)$, soit $\gamma(Q(B_1)) \geq \gamma(Q)$.

Pour A bornée, on a

$$\gamma(Q^{m+n}(A)) \leq \gamma(Q^m(Q^n(A))) \leq \gamma(Q^m)\gamma(Q^n(A)) \leq \gamma(Q^m)\gamma(Q^n)\gamma(A),$$

d'où $\gamma(Q^{m+n}) \leq \gamma(Q^m)\gamma(Q^n)$. []

Le résultat de Nussbaum s'énonce

Théorème 5.1.

$\rho_e(Q) = \rho_\gamma(Q)$.

La preuve de ce théorème figure dans l'appendice A, nous consacrons la suite de ce paragraphe à en établir des corollaires.

Comme première conséquence de cette formule, notons deux propriétés générales du rayon spectral essentiel.

Corollaire 5.1.

(i) Pour $n \geq 1$, $\rho_e(Q) = \rho_e\big((Q^n)\big)^{1/n}$.

(ii) Si G est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}$, stable par Q, $\rho_e(Q_G) \leq \rho_e(Q)$.

Démonstration

Ces relations résultent des formules correspondantes pour ρ_γ.

La première est claire. Pour établir la seconde, notons γ' la fonction d'ensemble sur G déterminée par la définition 5.1. Pour $n \geq 1$, on a

$$\gamma'(Q_G^n) = \gamma'(Q^n(B_1 \cap G)) \leq 2\gamma(Q^n(B_1 \cap G)) \leq 2\gamma(Q^n(B_1)) = 2\gamma(Q^n),$$

d'où $\rho_{\gamma'}(Q_G) \leq \rho_\gamma(Q)$. []

Revenons maintenant au théorème 3.1.

Corollaire 5.2

Sous les hypothèses du théorème 3.1, $\rho_e(Q) \leq r$.

Démonstration

Les notations sont celles du théorème 3.1.

On pose $\tau = \|Q\|$ et, pour $f \in \mathcal{B}$, $r > 0$, $D(f,r) = \{g : g \in \mathcal{B}, |f-g| < r\}$.

Estimons $\gamma(Q^{ks+1})$.

En itérant l'inégalité *(iii)* et en utilisant *(ii)*, on voit que, pour tout $s \geq 1$, il existe une constante R_s telle que, pour tout $f \in \mathcal{B}$,

$$\|Q^{ks}f\| \leq R_s|f| + r^{ks}\|f\|.$$

Puisque $Q(B_1)$ est pré-compacte dans $(\mathcal{B}, |\cdot|)$, pour tout ϵ, $\epsilon > 0$, il existe $(g_i)_{i=1}^n$, $g_i \in \mathcal{B}$, telle que

$$Q(B_1) \subset \left(\bigcup_{i=1}^n D(g_i,\epsilon)\right) \cap B(0,\tau).$$

Si $g \in D(g_i,\epsilon) \cap B(0,\tau)$, on a

$$\|Q^{ks}g_i - Q^{ks}g\| \leq R_s|g_i - g| + r^{ks}\|g_i - g\| \leq R_s\epsilon + 2\tau r^{ks},$$

soit

$$Q^{ks}(Q(B_1)) \subset \bigcup_{i=1}^n B\big(Q^{ks}g_i, (R_s\epsilon + 2\tau r^{ks})\big),$$

de l'arbitraire de ϵ, il vient $\gamma(Q^{ks+1}) = \gamma(Q^{ks}(Q(B_1))) \leq 2\tau r^{ks}$, d'où $\rho_\gamma(Q) \leq r$. []

La quasi-compacité d'un opérateur est liée à la possibilité d'approximation de cet opérateur par un opérateur compact [Nev.], une formule de Nussbaum exprime en ces termes le rayon spectral essentiel.

Corollaire 5.3.

(i) Si $Q = U + V$, où U est un opérateur compact et $\rho(V) < \rho(Q)$, alors Q est quasi-compact et $\rho_e(Q) \leq \rho(V)$.

(ii) Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{B}$, on a

$$\rho_e(Q) = \lim_n (\inf\{\|Q^n - K\| : K \in \mathcal{K}\})^{1/n}.$$

Démonstration

Rappelons que $\mathcal{K}$ est un idéal de l'anneau des opérateurs bornés sur $\mathcal{B}$.

Sous les hypothèses de *(i)*, pour s, $s \in \mathbb{N}$, $Q^s = U_s + V^s$, où U_s est un opérateur compact, par suite

$$\gamma(Q^s) = \gamma(Q^s(B_1)) = \gamma(U_s(B_1) + V^s(B_1)) = \gamma(V^s(B_1)) = \gamma(V^s) \leq \|V^s\|,$$

d'où $\rho_e(Q) = \rho_\gamma(Q) \leq \rho(V)$.

Posons $u_n = \inf\{\|Q^n - K\| : K \in \mathcal{K}\}$.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon > 0$, il existe $K', K'' \in \mathcal{K}$ tels que $\|Q^m - K'\| \leq u_m + \epsilon$ et $\|Q^n - K''\| \leq u_n + \epsilon$, d'où

$$\|Q^m Q^n - (K'Q^n + Q^m K'' - K'K'')\| = \|(Q^m - K')(Q^n - K'')\| \leq (u_m + \epsilon)(u_n + \epsilon),$$

puisque $(K'Q^n + Q^m K'' - K'K'')$ est compact, on a $u_{m+n} \leq (u_m + \epsilon)(u_n + \epsilon)$, de l'arbitraire de ϵ, on conclut que $u_{m+n} \leq u_m u_n$. La suite $(u_n^{1/n})_n$ est donc convergente.

Soient m, ϵ, K' tels que ci-dessus. Le corollaire 5.1, l'identité $Q^m = K' + (Q^m - K')$ et l'assertion précédente montrent que

$$\rho_e(Q) = (\rho_e(Q^m))^{1/m} \leq (\rho(Q^m - K'))^{1/m} \leq (u_m + \epsilon)^{1/m},$$

de l'arbitraire de ϵ, on déduit $\rho_e(Q) \leq u_m^{1/m}$ et, par passage à la limite $\rho_e(Q) \leq \rho_K(Q)$.

Inversement, soit $r > \rho_e(Q)$, on a, comme dans la définition 3.1, $\mathcal{B} = F_r \oplus H_r$; si Π_{F_r} et Π_{H_r} désignent les projecteurs correspondant à cette décomposition, on écrit $Q = Q\Pi_{F_r} + Q\Pi_{H_r}$, $Q\Pi_{F_r}$ est de rang fini donc compact, tandis que $Q\Pi_{H_r}$ a un rayon spectral $< r$. Il vient $\rho_K(Q) \leq r$, puis $\rho_K(Q) \leq \rho_e(Q)$. []

Terminons par un énoncé qui permet de placer dans le contexte de ce paragraphe le cas de la contraction stricte envisagé dans la proposition 2.2.

Rappelons que, si F est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}$, l'espace quotient $\mathcal{B}/F$ muni de la norme quotient, $|||\bar{f}||| = \inf\{\|f + h\| : h \in F\}$, est un espace de Banach et que, si F est stable par Q, Q agit sur $\mathcal{B}/F$ et son action $\bar{Q}$ est continue pour la norme quotient.

Corollaire 5.4.

Soit m une semi-norme sur $\mathcal{B}$ telle que

(i) $F = \{f : f \in \mathcal{B}, m(f) = 0\}$ est un sous-espace de dimension finie,

(ii) la norme induite sur $\mathcal{B}/F$ par m est équivalente $|||\cdot|||$,

(iii) il existe un réel $c \geq 0$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{B}$, $m(Q(f)) \leq cm(f)$,

alors $\rho_e(Q) \leq c$ et, pour tout $r > c$, $\sigma(Q) \cap \{z : |z| \geq r\} = \sigma(Q_F) \cap \{z : |z| \geq r\}$.

Démonstration

Les objets relatifs à $\mathcal{B}/F$ sont surlignés.

Si A une partie bornée de $\mathcal{B}$, on a $\gamma(A) = \bar{\gamma}(\bar{A})$.

Nous établissons l'inégalité $\gamma(A) \leq \bar{\gamma}(\bar{A})$, laissant au lecteur le soin d'établir l'inégalité inverse qui, en fait, ne sera pas utilisé ici. Soit a une borne de A et $r > \bar{\gamma}(\bar{A})$. Il existe $f_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$ tels que $\bar{A} \subset \cup_{i=1}^n \bar{B}(\bar{f}_i, r)$, d'où $A \subset \cup_{i=1}^n B(f_i, r) + 2B(0, a) \cap F$. Comme F est de dimension finie, $B(0, a) \cap F$ est relativement compact, et, par suite $\gamma(A) \leq \gamma(\cup_{i=1}^n B(f_i, r)) \leq r$, ce qui prouve l'inégalité.

De l'égalité $\gamma(Q^n(B_1)) = \bar{\gamma}(\bar{Q}^n(\bar{B}_1))$, il vient $\rho_\gamma(Q) = \rho_{\bar{\gamma}}(\bar{Q}) \leq \rho(\bar{Q})$, mais *(ii)* et *(iii)* montrent que $\rho(\bar{Q}) \leq c$, et l'on conclut d'après la formule de Nussbaum. []

Remarque

On peut utiliser la formule *(ii)* du corollaire 5.3, pour montrer que, si $(E, \mathcal{E}, \nu)$ est un espace probabilisé et si Q est un opérateur markovien Q sur $(E, \mathcal{E})$ satisfaisant à la condition de Doeblin,

il existe η, $\eta > 0$ tel que, si $\nu(A) \leq \eta$, on a, pour tout $x \in E$, $Q(x, A) \leq 1 - \eta$,

alors Q est quasi-compact sur l'espace $b(E, \mathcal{E})$ des fonctions mesurables, bornées sur E.

6. QUASI-COMPACITÉ ET RÉSOLVANTE

Rappelons que la valeur propre z est dite d'indice p, si p est le plus petit entier tel que

$$\ker(z-Q)^p = \bigcup_{\ell \geq 1} \ker(z-Q)^\ell.$$

Soit $R(z,Q) = (z-Q)^{-1}$ la résolvante de Q.

$R(\cdot, Q)$ est holomorphe dans l'ouvert $\sigma(Q)^c$, [D.S.].

D'après la proposition 3.1, si Q est quasi-compact, si $\rho_e(Q) < r \leq \rho(Q)$ et si $z_1, \ldots, z_m$ sont les valeurs propres de modules $\geq r$ de Q, on a

$$\mathcal{B} = (\bigoplus_{k=1}^m F_k) \oplus H_r = F_r \oplus H_r,$$

où $F_k = \ker(z_k - Q)^{p_k}$, p_k est l'indice de z_k et H_r est fermé, stable par Q, tel que $\rho(Q_{H_r}) < r$.

On désigne par Π_{F_k}, $k = 1, \ldots, m$, par Π_{F_r} et par Π_{H_r} les projecteurs correspondant à ces sommes directes.

Proposition 6.1.

Sous les conditions ci-dessus, pour $z \notin \sigma(Q)$,

$$R(z,Q) = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^{p_k} (z-z_k)^{-\ell} (z_k - Q_{F_k})^{\ell-1} \Pi_{F_k} + (z - Q_{H_r})^{-1} \Pi_{H_r}.$$

Soient, dans $\mathbb{C}$, Δ_1 un ouvert relativement compact et Δ_2 le disque de centre 0 et de rayon r', choisis tels que

$$\overline{\Delta}_1 \cap \overline{\Delta}_2 = \emptyset, \qquad \Delta_1 \cup \Delta_2 \supset \sigma(Q),$$

$$\Delta_1 \cap \sigma(Q) = \{z : |z| > r\} \cap \sigma(Q) = \{z_k : k = 1, \ldots, m\}, \quad \rho(Q_{H_r}) < r' < r,$$

en parcourant dans le sens positif les bords $\partial\Delta_1$ et $\partial\Delta_2$ de Δ_1 et Δ_2 on a, pour tout $n \geq 0$,

$$Q_{H_r}^n \Pi_{H_r} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_2^+} z^n R(z,Q) dz,$$

$$\Pi_{F_r} = \sum_{k=1}^m \Pi_{F_k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_1^+} R(z,Q) dz.$$

Démonstration

Soit $z \notin \sigma(Q)$.

Résoudre l'équation $(z-Q)f = g$, à l'inconnue f équivaut, par projections et stabilité des sous-espaces, à rechercher les solutions du système

$$\Pi_{F_k} g = (z - Q_{F_k}) f_k, \quad f_k \in F_k, \; k = 1, \ldots, m,$$

$$\Pi_{H_r} g = (z - Q_{H_r}) f_{m+1}, \quad f_{m+1} \in F_{m+1},$$

de sorte que l'on a

$$R(z,Q) = \sum_{k=1}^{m}(z - Q_{F_k})^{-1}\Pi_{F_k} + (z - Q_{H_r})^{-1}\Pi_{H_r}.$$

Si U est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel G et $j \geq 1$ est tel que $U^j = 0$ et $U^{j-1} \neq 0$, alors, pour tout $z \neq 0$,

$$(z - U)^{-1} = \sum_{\ell=1}^{j} z^{-\ell}U^{\ell-1}.$$

Appliquant ce résultat à l'endomorphisme $(z_k - Q_{F_k})$ de F_k, il vient

$$(z - Q_{F_k})^{-1} = \big((z - z_k) - (z_k - Q_{F_k})\big)^{-1} = \sum_{\ell=1}^{p_k}(z - z_k)^{-\ell}(z_k - Q_{F_k})^{\ell-1},$$

d'où l'expression de $R(z,Q)$.

Les points $z_1, \ldots, z_m$ n'appartenant pas à $\overline{\Delta}_2$, on a

$$\int_{\partial\Delta_2^+} z^n R(z,Q)dz = \int_{\partial\Delta_2^+} z^n(z - Q_{H_r})^{-1}\Pi_{H_r}dz,$$

mais, puisque $\rho(Q_{H_r}) < r'$, on a, uniformément pour $z \in \partial\Delta_2$

$$(z - Q_{H_r})^{-1} = \sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{z^{\ell+1}}Q_{H_r}^{\ell},$$

d'où, par intégration termes à termes, la première formule intégrale. La seconde s'obtient directement par intégration le long de $\partial\Delta_1$ en notant que $(z - Q_{H_r})^{-1}$ est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\Delta}_1$. []

Cette proposition nous conduit à une caractérisation du rayon spectral essentiel à l'aide de la résolvante.

Soit z_0 un point isolé de $\sigma(Q)$. $R(\cdot,Q)$ est développable en série de Laurent au voisinage de z_0, plus précisément, il existe un δ, $\delta > 0$, et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'endomorphismes de $\mathcal{B}$ tels que, pour $0 < |z - z_0| < \delta$, la série de terme général $((z-z_0)^n A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit convergente et que l'on ait

$$R(z,Q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(z - z_0)^n A_n.$$

On dit que z_0 est un pôle d'ordre k, $k \geq 1$, de $R(\cdot,Q)$, si $A_{-k} \neq 0$ et $A_n = 0$, pour tout $n < -k$.

Proposition 6.2.

$\rho_e(Q)$ est la borne inférieure de $\rho(Q)$ et des réels r, $r \geq 0$, tels que, tout $z \in \sigma(Q)$, $|z| \geq r$, est un pôle de $R(\cdot,Q)$ et $\dim \bigcup_{\ell\geq 1} \ker(z - Q)^{\ell} < +\infty$.

Démonstration

D'après la proposition 6.1, si $z \in \sigma(Q)$ et $|z| > \rho_e(Q)$, z est un pôle de $R(z, Q)$.

Inversement, soit r tel que dans l'énoncé, alors $r > \rho_e(Q)$. Cette implication ne nous sera pas utile, cependant, pour être complet, nous en donnons brièvement la démonstration.

On raisonne par récurrence sur le nombre de pôle de $R(\cdot, Q)$ de module $\geq r$, en utilisant le lemme qui suit dont la preuve est inspirée de [Sh].

Lemme 6.1.

Soit z_0 un pôle d'ordre p, $p \geq 1$, de $R(\cdot, Q)$, alors

(i) $(z_0 - Q)^p(\mathcal{B})$ *et* $\ker(z_0 - Q)^p$ *sont des sous-espaces fermés de* $\mathcal{B}$,

(ii) $\mathcal{B} = (z_0 - Q)^p(\mathcal{B}) \oplus \ker(z_0 - Q)^p$

(iii) $(z_0 - Q)$ *est un automorphisme bicontinu de* $(z_0 - Q)^p(\mathcal{B})$.

Démonstration

Au voisinage de z_0, écrivons

$$R(z, Q) = \sum_{n \geq -p} (z - z_0)^n A_n, \quad z - Q = (z_0 - Q) + (z - z_0),$$

par identification des développements en série de Laurent dans les relations

$$1 = (z - Q)R(z, Q) = R(z, Q)(z - Q),$$

il vient

$$(z_0 - Q)A_{-p} = A_{-p}(z_0 - Q) = 0 \ (1), \quad (z_0 - Q)A_0 + A_{-1} = A_0(z_0 - Q) + A_{-1} = 1 \ (2),$$

et, pour $n > -p$, $n \neq 0$, $(z_0 - Q)A_n + A_{n-1} = A_n(z_0 - Q) + A_{n-1} = 0$ (3).

En itérant (3), il vient

$A_{-p} = (Q - z_0)^{p-1}A_{-1} = A_{-1}(Q - z_0)^{p-1}$, $A_0 = (Q - z_0)^{p-1}A_{p-1} = A_{p-1}(Q - z_0)^{p-1}$, reportant dans (1) et (2) en posant $U = (Q - z_0)^p$, on obtient les relations, désormais seules utiles,

$$UA_{-1} = A_{-1}U = 0 \ \ (4), \qquad 1 - A_{-1} = UA_{p-1} = A_{p-1}U \ \ (5).$$

Multipliant (5) par U, on a $U = A_{p-1}U^2 = U^2A_{p-1}$, d'où l'on déduit $\ker U = \ker U^2$ et $U(\mathcal{B}) = U^2(\mathcal{B})$, il en résulte que $\mathcal{B} = \ker U \oplus U(\mathcal{B})$ et que U est un automorphisme de l'espace vectoriel $U(\mathcal{B})$.

Multipliant (5) par A_{-1}, on obtient $A_{-1}^2 = A_{-1}$, A_{-1} est donc un projecteur et l'on a $\mathcal{B} = \ker A_{-1} \oplus \ker(1 - A_{-1})$, les sous-espaces de cette décomposition étant fermés.

Comme d'après (4) et (5), $U(\mathcal{B}) \subset \ker A_{-1}$ et $\ker U \subset \ker(1 - A_{-1})$, on conclut que $U(\mathcal{B}) = \ker A_{-1}$ et que $\ker U = \ker(1 - A_{-1})$. Puisque U est une bijection de $U(\mathcal{B})$, il en est de même de $(z_0 - Q)$ et, d'après le théorème de Banach, $(z_0 - Q)$ est un automorphisme bicontinu de $U(\mathcal{B})$. []

7. PERTURBATIONS D'OPÉRATEURS QUASI-COMPACTS

Les énoncés de ce paragraphe montrent que la propriété de quasi-compacité est stable par perturbations. Les preuves sont regroupées dans l'appendice B.

$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ est l'anneau des opérateurs bornés de $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, muni de la norme induite par celle de $\mathcal{B}$.

Λ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, pour $\beta > 0$,

$$\Lambda(\beta) = \Lambda \cap \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < \beta\}.$$

$Q(\cdot)$ est une application de Λ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, pour laquelle on utilise les notations abrégées

$$\sigma(\lambda) = \sigma(Q(\lambda)), \quad \rho(\lambda) = \rho(Q(\lambda)),$$

et, pour $z \notin \sigma(\lambda)$, $$R(z, \lambda) = (z - Q(\lambda))^{-1}.$$

Proposition 7.1.

Supposons $Q(0)$ quasi-compact et $Q(\cdot)$ continue.

Soient dans $\mathbb{C}$, Δ_1 un ouvert relativement compact et Δ_2 le disque ouvert de centre 0, de rayon r, choisis tels que

$$\overline{\Delta}_1 \cap \overline{\Delta}_2 = \emptyset, \qquad \Delta_1 \cup \Delta_2 \supset \sigma(0),$$

$$\rho_e(0) < r, \qquad \sigma(0) \cap \Delta_1 \neq \emptyset.$$

Alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour $\lambda \in \Lambda(\beta)$,

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \subset \sigma(\lambda),$$

$$\rho_e(0) < r, \qquad \sigma(0) \cap \Delta_1 \neq \emptyset.$$

Considérons maintenant la situation particulière envisagée dans le cadre de la preuve des théorèmes limites.

Définition 7.1.

On dira que $Q(\lambda), \lambda \in \Lambda$, a une valeur propre simple dominante, $k(\lambda)$, si
(i) $Q(\lambda)$ est quasi-compact,
(ii) $k(\lambda)$ est la seule valeur propre de module $\rho(\lambda)$,
(iii) $\dim\ker(k(\lambda) - Q(\lambda))^2 = \dim\ker(k(\lambda) - Q(\lambda)) = 1.$

Proposition 7.2.

Supposons que $Q(0)$ ait une valeur propre simple dominante et que $Q(\cdot)$ soit m fois continûment dérivable.

Alors, il existe $\beta, \beta > 0$, tel que, pour $\lambda \in \Lambda(\beta)$, $Q(\lambda)$ ait une valeur propre simple dominante $k(\lambda)$.

Plus précisément, étant donné ϵ, $0 < \epsilon < \dfrac{|k(0)| - \rho_e(0)}{2}$, on peut choisir $\beta_\epsilon > 0$ tel que, pour $\lambda \in \Lambda(\beta_\epsilon)$, il existe un projecteur de rang 1 $\Pi(\lambda)$, *et un opérateur borné* $V(\lambda)$ *tels que*

$$Q(\lambda) = k(\lambda)\Pi(\lambda) + V(\lambda),$$

$$\Pi(\lambda)V(\lambda) = V(\lambda)\Pi(\lambda) = 0,$$

$$|k(\lambda) - k(0)| < \epsilon, \qquad \rho(V(\lambda)) \leq \rho_e(0) + \epsilon,$$

$\Pi(\cdot)$, $k(\cdot), V(\cdot)$ *sont m fois continûment dérivables sur* $\Lambda(\beta_\epsilon)$,
pour tout $\ell = 0, \ldots, m$, il existe une constante c telle que, pour tout n,

$$\|\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}(V(\lambda))^n\| \leq c(\rho_e(0) + \epsilon)^n.$$

8. NOYAUX QUASI-COMPACTS POSITIFS SUR UN ESPACE MÉTRIQUE COMPACT

Dans ce paragraphe, E est un espace métrique compact.

$(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ est l'algèbre de Banach des fonctions continues sur E, munie de la norme de la convergence uniforme.

$(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}$ complète pour $\|\cdot\|$ telle que

$\mathcal{D}$ est dense dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$,

pour $f \in \mathcal{D}$, $\|f\|_\infty \leq \|f\|$.

Par exemple, si E est une variété riemannienne, $\mathcal{D}$ pourra être $\mathcal{L}$, un des espaces $\mathcal{C}^k$ définis au paragraphe 4 ou $\mathcal{C}$ lui- même.

Q est un opérateur positif sur $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ de rayon spectral $\tilde{\rho}(Q)$, quasi-compact sur $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$, de rayon spectral $\rho(Q)$ et de spectre $\sigma(Q)$, abrégés en ρ et σ.

On dispose, par conséquent, d'une décomposition de $\mathcal{D}$ en sous-espaces fermés, Q-stables, $\mathcal{D} = F \oplus H$, où $\dim F < +\infty$, Q_F n'a que des valeurs propres de modules ρ et $\rho(Q_H) < \rho$. Dans ce qui suit, il sera fait appel à cette décomposition sans autre commentaire. On retiendra aussi que, puisque $\dim F < +\infty$, il existe une constante c_F telle que, pour tout $f \in F$, $\|f\| \leq c_F \|f\|_\infty$.

Pour $f \in \mathcal{C}$, $|f|$ est la fonction définie par $|f|(x) = |f(x)|$, la positivité de Q implique $Q(|f|) \geq |Qf|$.

Proposition 8.1.

$\rho(Q) = \tilde{\rho}(Q)$, $\rho(Q)$ est une valeur propre de Q d'indice maximal parmi les valeurs propres de module $\rho(Q)$ et il lui est associé une fonction propre positive.

Cet énoncé est un corollaire du théorème de Krein-Rutman [Sh.], car il est clair que, dans ce théorème, la quasi-compacité peut être substituée à la compacité. Cependant, la spécificité des espaces considérés ici autorise une argumentation plus élémentaire, nous reprenons la preuve de [He.].

Démonstration

L'égalité $\rho(Q) = \tilde{\rho}(Q)$ s'établit comme dans la proposition 4.1.

Soit $(t_n)_n$ une suite de réels telle que $t_n > 1$, $\lim_n t_n = 1$ et $R(\cdot, Q)$ la résolvante de Q. On pose

$$\phi_n = R(\rho t_n, Q)1 = \sum_{k \geq 0} (\rho t_n)^{-(k+1)} Q^k 1,$$

cette série converge dans $\mathcal{D}$ et ϕ_n est positive.

Si z_0 est un complexe de module ρ, on a

$$\|R(z_0 t_n, Q_F)\| \leq c_F \|\phi_n\|.$$

En effet, pour tout $f \in F$,

$$|R(z_0 t_n, Q_F) f| \leq \sum_{k \geq 0} (\rho t_n)^{-(k+1)} Q^k |f| \leq \|f\|_\infty \phi_n,$$

d'où

$$\|R(z_0 t_n, Q_F) f\| \leq c_F \|R(z_0 t_n, Q_F) f\|_\infty \leq c_F \|f\|_\infty \|\phi_n\|_\infty \leq c_F \|f\| \|\phi_n\|.$$

Soit z_0 une valeur propre de module ρ de Q, on a, proposition 6.1, $\lim_n \|R(z_0 t_n, Q_F)\| = +\infty$ donc $\lim_n \|\phi_n\| = +\infty$. Ecrivons alors $1 = f + h$ où $f \in F$ et $h \in H$, on a $\phi_n = f_n + h_n$ avec $f_n = R(\rho t_n, Q)f$ et $h_n = R(\rho t_n, Q)h$. $(h_n)_n$ est bornée, car $\rho(Q_H) < \rho$, en posant $c_n = \|\phi_n\|^{-1}$, on a $\lim_n c_n\phi_n - c_n f_n = 0$, il en résulte que $(c_n f_n)_n$ est bornée dans l'espace de dimension finie F donc relativement compacte et, par conséquent, que $(c_n\phi_n)_n$ est elle-même relativement compacte, en passant à la limite selon une sous-suite convenable dans l'égalité

$$\rho t_n(c_n\phi_n) - Q(c_n\phi_n) = c_n 1,$$

on prouve l'existence de f, $\|f\| = 1$, $f \geq 0$ telle que $\rho f - Qf = 0$.

D'après la proposition 6.1, une valeur propre de Q, de module ρ est d'indice p si et seulement si elle est un pôle d'ordre p de $R(\cdot, Q)$ ou, de façon équivalente, de $R(\cdot, Q_F)$. Si z_0 est un pôle d'ordre k de $R(\cdot, Q_F)$, on a, pour tout $\ell \leq k-1$, $\lim_n (1-t_n)^\ell \|R(z_0 t_n, Q_F)\| = +\infty$, et, de l'inégalité précédemment établie, il vient $\lim_n (1 - t_n)^\ell \|R(\rho t_n, Q)1\| = +\infty$, de sorte que le pôle ρ a une multiplicité $\geq k$. []

Le théorème ergodique énoncé dans un cadre général au paragraphe 1 peut être précisé. Pour $z \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{D}$, on pose

$$M_n^z f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}Q^k f.$$

Proposition 8.2.

On a l'équivalence

(i) $\sup_n \rho^{-n}\|Q^n 1\|_\infty < +\infty$*,*

(ii) toutes les valeurs propres de module ρ *de* Q *sont d'indice* 1*,*

(iii) ρ *est une valeur propre d'indice* 1*.*

Supposons vérifiée l'une ou l'autre de ces conditions et donnons-nous $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \rho$*.*
Il existe un opérateur Π_z *agissant continument sur* $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$ *et* $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$ *tel que*

$$\lim_n \ \sup\{\|M_n^z f - \Pi_z f\| : f \in \mathcal{D}, \|f\| = 1\} = 0,$$

tandis que, pour $f \in \mathcal{C}$, $\lim_n \|M_n^z f - \Pi_z f\|_\infty = 0$*.*

Les sous-espaces $\ker(z - Q) \cap \mathcal{D}$ *et* $\ker(z - Q) \cap \mathcal{C}$ *coincident. Ce sous-espace de dimension finie étant noté* F_z*,* Π_z *est un projecteur sur* F_z*, tel que* $\Pi_z Q = z\Pi_z$*.*

Si z *n'est pas une valeur propre de* Q *dans* $\mathcal{D}$*,* $\Pi_z = 0$*.*

Si z *est une valeur propre de* Q *dans* $\mathcal{D}$*, pour tout* $x \in E$*,* $\Pi_z(\cdot)(x)$ *est une mesure (positive si* $z = \rho$*) sur* E *et, si* f *est une fonction borélienne, bornée sur* E*,* $\Pi_z f \in F_z$*.*

Démonstration

D'après la proposition 8.1, *(ii)* et *(iii)* sont équivalents.

D'après la proposition 1.3, *(ii)* équivaut à

(i') $\sup_n \rho^{-n}\|Q^n\| < +\infty$,

il suffit donc d'établir l'équivalence de *(i')* et *(i)*.

Puisque $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|$, *(i')* implique *(i)*.

Inversement, supposons $\sup_n \rho^{-n}\|Q^n 1\|_\infty < +\infty$.

Avec les notations de la preuve de la proposition 8.1, pour tout $f \in F$,

$$\sup_n \rho^{-n}\|Q_F^n f\| \leq c_F \sup_n \rho^{-n}\|Q_F^n f\|_\infty \leq c_F \sup_n \rho^{-n}\|Q_F^n |f|\|_\infty$$

$$\leq c_F\|f\|_\infty \sup_n \rho^{-n}\|Q^n 1\|_\infty \leq c_F\|f\|_\infty \sup_n \rho^{-n}\|Q^n 1\| < +\infty.$$

D'autre part, $\sup_n \rho^{-n}\|Q_H^n\| < +\infty$, car $\rho(Q_H) < \rho$. *(i')* résulte de ces deux inégalités.

En appliquant la proposition 1.3, il vient, pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \rho$,

$$\lim_n \|M_n^z - \Pi'_z\| = 0,$$

où Π'_z est un projecteur de $\mathcal{D}$ sur $F_z = \ker(z - Q) \cap \mathcal{D}$.

Par hypothèse $\sup_n \rho^{-n}\|Q^n\|_\infty = \sup_n \rho^{-n}\|Q^n 1\|_\infty < +\infty$, de sorte que la suite d'opérateurs $(M_n^z)_n$ est équicontinue sur $\mathcal{C}$, comme $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{C}$, il en résulte que, pour $f \in \mathcal{C}$,

$$\lim_n \|M_n^z f - \Pi_z f\|_\infty = 0.$$

L'endomorphisme Π_z limite simple d'une suite équicontinue est continu sur $\mathcal{C}$, il est facile de voir que c'est un projecteur de $\mathcal{C}$ sur $\ker(z - Q) \cap \mathcal{C}$.

Π_z prolonge continument Π'_z à $\mathcal{C}$, comme F_z est de dimension finie donc fermé dans $\mathcal{C}$, on a $F_z = \ker(z - Q) \cap \mathcal{C}$.

Il est clair que Π_z commute avec Q, d'où $\Pi_z Q = z\Pi_z$.

Pour $x \in E$, $\Pi_z(\cdot)(x)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}$, donc une mesure. Il en résulte que l'on peut définir $\Pi_z f$ pour toute f borélienne, bornée sur E, montrons que $\Pi_z f \in F_z$.

Soit $(f_i)_{i=1}^d$ une base de F_z. En raisonnant, par récurrence sur d, on voit qu'il existe une suite $(x_j)_{j=1}^d$ d'éléments de E tels que le déterminant de la matrice $[f_i(x_j)]_{i,j=1,\dots,d}$ soit non nul. Par suite, il existe une matrice $[a_{ij}]_{i,j=1,\dots,d}$ telle que, pour tout $f \in F_z$,

$$f = \sum_{i=1}^d \lambda_i(f) f_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i(f) = \sum_{j=1}^d a_{ij} f(x_j).$$

Soit $x \in E$. Pour $f \in \mathcal{C}$, $\Pi_z f(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i(\Pi_z f) f_i(x)$, les deux membres de cette égalité définissent des mesures sur E, donc, si f est une fonction borélienne, bornée sur E, on a

$$\Pi_z f(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i(\Pi_z f) f_i(x)$$

et l'on conclut que $\Pi_z f \in F_z$. []

Une meilleure compréhension du comportement asymptotique de la suite $(Q^n)_{n\geq 0}$ nécessite des connaissances supplémentaires sur les valeurs propres de module ρ. Ces précisions peuvent être obtenues lorsque Q est markovien ou dans les cas qui s'y ramènent par relativisation.

Proposition 8.3.

Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{D}$, strictement positive, telle que $1/h \in \mathcal{D}$ et que $Qh = \rho h$, alors *(i) Q satisfait aux hypothèses de la proposition 8.2,*

(ii) pour $z \in \sigma$, $|z| = \rho$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(z/\rho)^p = 1$ et, si $\ell = 0, \ldots, p-1$, z^ℓ est une valeur propre de Q,

(iii) soit $z_1, \ldots, z_n$ les valeurs propres de module ρ de Q et $\Pi = \sum_{j=1}^{n} \Pi_{z_j}$, si d le plus petit entier tel que, pour tout $j = 1, \ldots, n$, on ait $(z_j/\rho)^d = 1$, alors il existe r, $0 < r < 1$, tel que

$$\lim_n \frac{1}{r^n} \sup\{\|\rho^{-nd} Q^{nd} f - \Pi f\| : f \in \mathcal{D}, \|f\| = 1\} = 0,$$

tandis que, pour $f \in \mathcal{C}$, $\lim_n \|\rho^{-nd} Q^{nd} f - \Pi f\|_\infty = 0$.

Démonstration

Par compacité de E, il existe $c > 0$ tel que $1 \le ch$, d'où

$$\rho^{-n} \|Q^n 1\|_\infty \le c\rho^{-n} \|Q^n h\|_\infty = c\|h\|_\infty < +\infty,$$

la proposition 8.2. s'applique à Q.

On appelle opérateur relativisé de Q, l'opérateur $\bar{Q}$ défini sur $\mathcal{C}$ par

$$\bar{Q} f(x) = \frac{1}{\rho h(x)} Q(hf)(x),$$

cet opérateur est markovien.

Si, pour $f \in \mathcal{C}$, on pose $R_h f = hf$, on définit un automorphisme de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ et l'on a la relation de conjuguaison

$$\bar{Q} = R_h^{-1} (\rho^{-1} Q) R_h.$$

$\bar{Q}$ et $\rho^{-1} Q$ étant conjugués ont les mêmes propriétés spectrales. En particulier, $\bar{Q}$ est quasi-compact sur $\mathcal{D}$, z est une valeur propre de module 1 de $\bar{Q}$ si et seulement si ρz est une valeur propre de Q, et, avec les notations de la proposition 8.2, on a $\bar{\Pi}_z = R_h^{-1} \Pi_z R_h$. Il suffit donc d'établir la proposition 8.3. dans le cas où Q est markovien.

Nous supposons désormais Q markovien et nous notons $Q^n(x, \cdot)$ la probabilité $Q^n(\cdot)(x)$ et par S_n^x son support.

L'argument essentiel dans l'étude des valeurs propres est le lemme suivant pour lequel la quasi-compacité n'est pas requise. Pour usage ultèrieur, nous donnons à cet énoncé une forme plus précise que ce qui est immédiatement nécessaire.

Lemme 8.1.

Q désigne un opérateur markovien sur $\mathcal{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ et $f \in \mathcal{C} \backslash \{0\}$ telle que $Qf = zf$.

Si $E_f = \{x : x \in E, |f(x)| = \max_{y \in E} |f(y)|\}$, alors, pour $x \in E_f$, $n \ge 0$ et $y \in S_x^n$,

$$f(y) = z^n f(x).$$

Démonstration du lemme

Soit $x_0 \in E_f$, posons $g(y) = \dfrac{f(y)}{z^n f(x_0)}$.

On a, d'après le choix de x_0, $\Re g(y) \le |g(y)| \le 1$; d'autre part

$$0 = 1 - Q^n g(x_0) = \int_{S_{x_0}^n} (1 - g(y)) Q^n(x_0, dy) = \int_{S_{x_0}^n} (1 - \Re g(y)) Q^n(x_0, dy).$$

D'où, pour $y \in S^n_{x_0}$, l'égalité $1 = \Re g(y)$ puis $g(y) = 1$. []

Etablissons, maintenant, le point *(ii)* de la proposition.

Soit $z \in \sigma$, $|z| = 1$ et $f \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$ telle que $Qf = zf$. Si f^ℓ est définie par $f^\ell(x) = (f(x))^\ell$, $f^\ell \in \mathcal{D}$ et $h_\ell = \Pi_{z^\ell} f^\ell$ est un élément de $\mathcal{D}$ tel que $Qh_\ell = z^\ell h_\ell$. D'après le lemme 8.1, si $x \in E_f$,

$$h_\ell(x) = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-\ell k} \int_{S^k_x} Q^k(x, dy) f^\ell(y) = f^\ell(x) \neq 0,$$

donc, pour tout $\ell \geq 0$, z^ℓ est une valeur propre de Q. Comme le nombre de valeurs propres de module 1 est fini, on a $z^p = 1$ pour un p convenable.

D'après la proposition 8.2, toutes les valeurs propres de module 1 sont d'indice 1, Q_F est diagonalisable et Q^d_F n'a que la valeur propre 1, donc Q^d_F est l'identité de F. On a

$$\frac{1}{r^n} \sup\{\|Q^{nd} f - \Pi_F f\| : \|f\| = 1\} = \frac{1}{r^n} \sup\{\|Q^{nd} \Pi_H f\| : \|f\| = 1\} \leq \frac{1}{r^n} \|Q^{nd}_H\| \|\Pi_H\|,$$

si $\rho(Q_H) < r < 1$, le second membre tend vers 0.

Le corollaire 1.1 montre que $\Pi_F = \sum_{j=1}^n \Pi_{z_j}$.

La densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$ permet d'établir la dernière assertion. []

On trouvera dans [Her.] une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{D}$, strictement positive, telle que $Qf = \rho f$. Cette existence est assurée sous l'hypothèse d'irréductibilité de Q et nous concluons ce paragraphe en précisant, dans ce cas, les énoncés précédents.

Proposition 8.4

Si Q est irréductible, i. e. si, pour tout $x \in E$ et $f \in \mathcal{C}$, positive, non nulle, il existe n tel que $Q^n f(x) > 0$, alors
(i) ρ est d'indice 1 et le sous-espace propre associé est engendré par une fonction strictement positive h,
(ii) il existe une probabilité unique ν telle que $\nu Q = \rho \nu$,
(iii)

$$\lim_n \sup\{\|M^\rho_n f - \frac{\nu(f)}{\nu(h)} h\| : f \in \mathcal{D}, \|f\| = 1\} = 0,$$

pour $f \in \mathcal{C}$, $\lim_n \|M^\rho_n f - \frac{\nu(f)}{\nu(h)} h\|_\infty = 0.$

Si il existe n_0 tel que, pour tout $x \in E$ et $f \in \mathcal{C}$, positive, non nulle, $Q^{n_0} f(x) > 0$, alors
(iv) ρ est la seule valeur propre de module ρ,
(iv) il existe un réel r, $0 < r < 1$, tel que,

$$\lim_n \frac{1}{r^n} \sup\{\|\rho^{-n} Q^n f - \frac{\nu(f)}{\nu(h)} h\| : f \in \mathcal{D}, \|f\| = 1\} = 0,$$

pour $f \in \mathcal{C}$, $\lim_n \|\rho^{-n} Q^n f - \frac{\nu(f)}{\nu(h)} h\|_\infty = 0.$

Démonstration

Soit $h \geq 0$, $h \neq 0$, telle que $Qh = \rho h$. Si $x \in E$, il existe n tel que $0 < Q^n h(x) = \rho^n h(x)$, donc h est strictement positive. D'après la proposition 8.3, ρ est d'indice 1.

Comme vu dans la preuve de la proposition 8.3, Q est conjugué d'un opérateur markovien et pour l'étude des valeurs propres de module maximal on peut supposer que Q lui-même est markovien.

Soit $f \in \mathcal{D}$, non nulle telle que $Qf = f$. Avec les notations du lemme 8.1, pour $x_0 \in E_f$ et $y \in \cup_{n \geq 0} S^n_{x_0}$, $f(y) = f(x_0)$. Comme l'irréductibilité implique $E = \cup_{n \geq 0} S^n_{x_0}$, f est constante. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par la fonction 1.

Supposons, maintenant, que Q satisfasse à l'hypothèse de la deuxième partie de l'énoncé.

Soit $f \in \mathcal{D}$, non nulle et z, $|z| = 1$, tels que $Qf = zf$. D'après le lemme 8.1, pour $x_0 \in E_f$ et $y \in S^{n_0}_{x_0} = E$, $f(y) = z^{n_0} f(x_0)$. f est constante, donc $z = 1$. La seule valeur propre de module 1 est 1.

Poursuivons la preuve en considérant un opérateur Q non nécessairement markovien.

Supposons Q irréductible.

Π_ρ est un projecteur sur la droite vectorielle $F_\rho = \{zh : z \in \mathbb{C}\}$ et l'on peut écrire, pour $f \in \mathcal{C}$,

$$\Pi_\rho f = \frac{\nu(f)}{\nu(h)} h,$$

où ν est une probabilité sur E. L'égalité $Q\Pi_\rho = \rho\Pi_\rho$ s'écrit $\nu Q = \rho\nu$. D'après la proposition 8.2, la suite $(M^\rho_n)_n$ converge vers Π_ρ, uniformément sur la sphère unité de $\mathcal{D}$ et simplement sur $\mathcal{C}$. Si ν' est une probabilité telle que $\nu' Q = \rho\nu'$, on a, pour $f \in \mathcal{C}$,

$$\frac{\nu(f)}{\nu(h)} \nu'(h) = \lim_n \nu'(M^\rho_n f) = \nu'(f),$$

d'où $\nu = \nu'$.

Si Q satisfait à l'hypothèse de la deuxième partie de l'énoncé, la proposition 8.3. s'applique avec $d = 1$. []

9. NOYAUX MARKOVIENS QUASI-COMPACTS SUR UN ESPACE MÉTRIQUE COMPACT

Dans ce paragraphe Q est markovien ($Q1 = 1$) et, sauf pour les premiers énoncés, quasi-compact sur $\mathcal{D}$.

Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent. On rappelle que $Q^n(x,\cdot)$ désigne la probabilité $Q^n(\cdot)(x)$ et S_n^x le support de cette probabilité ; plus généralement, le support d'une fonction ou d'une mesure sera désigné par supp.

$(\Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x\in E}, (X_n)_{n\geq 0})$ est la chaîne de Markov canonique de probabilité de transition Q.

Cette étude est inspirée de [N.], voir aussi [Her.]

9.1. Généralités sur les fonctions propres associées à des valeurs propres de module 1

L'étude des solutions de l'équation $Qf = zf$, où $f \in \mathcal{C}$ et $|z| = 1$, est liée à certains sous-ensembles de E.

Définition 9.1.

On dit que le compact K est (Q-)invariant , s'il est non vide et si, pour tout $x \in K$, $Q(x,K) = 1$.

Le compact K est une classe ergodique (de Q) s'il est invariant et minimal pour la relation d'inclusion, i.e. si, pour tout compact invariant K' tel que $K' \subset K$, on a $K' = K$.

Si K est invariant, on a, pour tout $x \in K$, $P_x(\cap_{n\geq 0}[X_n \in K]) = 1$.

Proposition 9.1.

Tout compact invariant contient une classe ergodique.

Deux classes ergodiques distinctes sont disjointes.

Démonstration

Soit K un compact invariant. Désignons par $(K_i)_{i\in I}$ une famille, totalement ordonnée pour l'inclusion, de compacts invariants contenus dans K. Puisque K est compact, $K_0 = \cap_{i\in I} K_i$ est non vide. Pour montrer que K_0 est invariant, c'est à dire que, pour tout $x \in K_0$, $Q(x, K_0^c) = 0$, il suffit de prouver, que K_0^c s'écrit comme réunion au plus dénombrable de certains des K_i^c. Ceci est un résultat classique [D.S. I.4.14.], néanmoins, pour être complet, donnons en la preuve. L'espace métrique compact E a une base d'ouverts dénombrable, soit $(B_n)_{n\in N}$. Tout ouvert K_i^c contient un des B_n et l'on définit M comme l'ensemble des entiers n pour lesquels il existe un indice $i_n \in I$ tel que $B_n \subset K_{i_n}^c$. On a $\cup_{n\in M} B_n \subset \cup_{n\in M} K_{i_n}^c \subset K_0^c$. Inversement, soit $x \in K_0^c$, il existe $i \in I$ tel que K_i^c soit un voisinage de x et, par suite, il existe n_0 tel que $x \in B_{n_0} \subset K_i^c$, d'où $K_0^c \subset \cup_{n\in M} B_n$. Il est donc établi que $K_0^c = \cup_{n\in M} K_{i_n}^c$. Le compact invariant K_0 est la borne inférieure de la famille $(K_i)_{i\in I}$. L'on conclut, en utilisant le lemme de Zorn, que l'ensemble des compacts invariants contenus dans K a un élément minimal pour l'inclusion, ce qui établit la première assertion.

Soient K_1 et K_2 deux classes ergodiques, si $K = K_1 \cap K_2$ est non vide, c'est un compact invariant, mais alors la minimalité de K_1 et K_2 conduit à $K = K_1 = K_2$. []

Enonçons les propriétés, relatives aux classes ergodiques, des fonctions propres associées à des valeurs propres de module 1.

On désigne par $\mathcal{K}$ la famille des classes ergodiques de Q.

Proposition 9.2.

Soient $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, et $f \in \mathcal{C}$ telle que $Qf = zf$, alors

(i) si $f = 0$ sur tout $K \in \mathcal{K}$, $f = 0$ sur E,

(ii) $|f|$ est constante sur tout $K \in \mathcal{K}$ et, pour tout $x \in K$, $n \geq 0$ et $y \in S_x^n$, $f(y) = z^n f(x)$,

(iii) si $z = 1$, f est constante sur tout $K \in \mathcal{K}$.

Démonstration

Cette preuve repose sur une variante de lemme 8.1. obtenue en remplaçant, dans cet énoncé, E par un compact invariant. La démonstration est identique.

Lemme 9.1.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $f \in \mathcal{C}\backslash\{0\}$ telle que $Qf = zf$ et K un compact invariant. Si $K_f = \{x : x \in K, |f(x)| = \max_{y \in K} |f(y)|\}$, alors, pour $x \in K_f$, $n \geq 0$ et $y \in S_x^n$,

$$f(y) = z^n f(x).$$

Soit K et K_f tels que dans le lemme précédent. Pour $x \in K_f$ et $y \in S_x^1$, $|f(y)| = |f(x)|$, donc K_f est invariant et, d'après la proposition 9.1, contient une classe ergodique C_f.

Choisissons $K = E$, alors $\max_{y \in C_f} |f(y)| = \max_{y \in E} |f(y)|$, de sorte que, si f est non nulle sur E, elle est non nulle sur C_f. *(i)* en résulte.

Choisissons, maintenant, pour K une classe ergodique. On a $C_f = K$ et $K_f \subset K$, donc $K_f = K$ et $|f|$ est constante sur K ; pour compléter la preuve de *(ii)*, il suffit d'appliquer le lemme. Si $z = 1$, fixons $x_0 \in K$ et posons $K' = \{x : x \in K, f(x) = f(x_0)\}$. Pour $x \in K' \subset K_f = K$ et $y \in S_x^1$, $f(y) = 1f(x)$, de sorte que $y \in K'$. K' est invariant donc égal à K, il s'en suit que f est constante sur K. []

Désormais Q est supposé quasi-compact sur $\mathcal{D}$.

Comme nous venons de le constater, l'application qui à une fonction propre continue, associée à une valeur propre de module 1, fait correspondre sa restriction à $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ est injective. Nous allons voir que, lorsque Q est quasi-compact sur $\mathcal{D}$, cette application est également surjective. Cela est du à la possibilité de construire des fonctions propres continues à l'aide des projecteurs Π_z définis dans la proposition 8.2.

Aux propriétés déja répertoriées de Π_z, ajoutant deux remarques relatives aux compacts invariants.

Lemme 9.2

Soit K un compact Q-invariant, alors

(i) pour tout $x \in K$, $\operatorname{supp} \Pi_z(x, \cdot) \subset K$,

(ii) si $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, et $f \in \mathcal{C}$ telle que, pour tout $x \in K$, $Qf(x) = zf(x)$, alors, pour tout $x \in K$, $\Pi_z f(x) = f(x)$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $f \in \mathcal{C}$ et $x \in K$, à cause de l'invariance de K,

$$\Pi_z f(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} \int_K Q^k(x, dy) f(y).$$

Si $\operatorname{supp}(f) \subset K^c$, alors $\Pi_z f(x) = 0$, d'où $\operatorname{supp} \Pi_z(x, \cdot) \subset K$.

Si f satisfait aux hypothèses de *(ii)*, le second membre est constant et égal à $f(x)$. []

9.2. Représentation des fonctions harmoniques continues Applications

Théorème 9.1.

(i) Il n'existe qu'un nombre fini de classes ergodiques $(K_i)_{i=1}^d$.

(ii) Les fonctions de $\mathcal{D}$, $h_i = \Pi_1 1_{K_i}$, $i = 1, \ldots, d$, *forment une base de* $\ker(1-Q) \cap \mathcal{C}$.

(iii) Si $h \in \ker(1-Q) \cap \mathcal{C}$, *on a* $h = \sum_{i=1}^{d} \delta_i(h) h_i$, *où* $\delta_i(h)$ *désigne la valeur de h sur* K_i.

Démonstration

Soient $(K_i)_{i=1}^{\ell}$ des classes ergodiques de Q.

D'après le point *(i)* du lemme 9.2, si $x \in K_i$, $\operatorname{supp} \Pi_1(x,\cdot) \subset K_i$, c'est à dire $\Pi_1 1_{K_i}(x) = 1$ et donc, si $j \neq i$, $0 \leq \Pi_1 1_{K_j}(x) \leq \Pi_1 1_{K_i^c}(x) = 0$. Il en résulte que les ℓ fonctions de $\ker(1-Q) \cap \mathcal{D}$, $(\Pi_1 1_{K_i})_{i=1}^{\ell}$ sont linéairement indépendantes. Le nombre de classes ergodiques d est donc fini et inférieur à $\dim \ker(1-Q) \cap \mathcal{D}$.

Soient $(K_i)_{i=1}^d$ les classes ergodiques de Q.

Utilisons les résultats de la proposition 9.2. pour représenter $h \in \ker(1-Q) \cap \mathcal{C}$ à l'aide des $(h_i)_{i=1}^d$. Les fonctions h_i et la fonction h sont constantes sur tout K_j. Comme il a été vu au début de la preuve, $\delta_j(h_i) = 1$ si $i = j$, $= 0$ sinon, la fonction $f = h - \sum_{i=1}^d \delta_i(h) h_i$ est donc nulle sur tout K_j, puisqu'elle appartient à $\ker(1-Q) \cap \mathcal{C}$, elle est nulle sur E, d'où la formule annoncée. []

En faisant appel à la convergence sur $\mathcal{C}$ des moyennes ergodiques de Q, on peut déduire de la représentation des fonctions harmoniques une représentation des probabilités invariantes.

Corollaire 9.1.

Soit $f \in \mathcal{C}$, *la formule* $\nu_i(f) = \delta_i(\Pi_1 f)$ *définit l'unique probabilité* Q*-invariante portée par* K_i, *son support est* K_i.

Toute probabilité Q*-invariante* ν *s'écrit* $\nu = \sum_{i=1}^{d} \nu(K_i) \nu_i$, *les probabilités* ν_i *sont les probabilités invariantes extrémales.*

Démonstration

Soit $x_i \in K_i$, posons $\nu_i = \Pi_1(x_i, \cdot)$. ν_i est invariante, car, d'après la proposition 8.2, $\Pi_1 Q = \Pi_1$, le lemme 9.2. montre qu'elle est portée par K_i.

Toute combinaison convexe des ν_i est invariante.

Inversement, soit ν une probabilité invariante. Puisque, pour $f \in \mathcal{C}$, $\lim_n \|M_n^1(f) - \Pi_1 f\|_\infty = 0$, on a $\nu(f) = \nu(\Pi_1 f)$, mais, d'après la proposition 9.3,

$$\Pi_1 f = \sum_{i=1}^{d} \delta_i(\Pi_1 f) \Pi_1 1_{K_i}, \text{ d'où } \nu(f) = \sum_{i=1}^{d} \nu_i(f) \nu(\Pi_1 1_{K_i}), \text{ soit } \nu = \sum_{i=1}^{d} \nu(K_i) \nu_i.$$

En comparant les supports des deux membres de l'égalité ci-dessus, on constate que ν_i est la seule probabilité invariante portée par K_i ; il en résulte que les probabilités ν_i sont extrémales et que ce sont les seules.

Le lemme suivant et la minimalité de K_i montrent que le support de ν_i est K_i.

Lemmme 9.3.

Le support d'une probabilité invariante est un compact invariant.

Démonstration du lemme

Soit ν invariante de support S, on a $1 = \nu(S) = \int Q(x,S)\nu(dx)$, d'où $\nu(\{x : Q(x,S) < 1\}) = 0$.

Soit $(f_\ell)_{\ell \geq 0}$ une suite décroissante de fonctions définies sur E, continues, positives, convergeant simplement vers 1_S. Puisque $\{x : Q(x,S) < 1\} = \cup_{\ell \geq 0}\{x : Qf_\ell(x) < 1\}$, le premier membre est un ouvert de E, il est de ν probabilité nulle, donc $S \subset \{x : Q(x,S) = 1\}$. []

Si x appartient à l'une des classes ergodiques K_i, il est clair que l'on a $P_x(\cap_{n\geq 0}[X_n \in K_i]) = 1$; si x n'est dans aucune des classes ergodiques, nous allons prouver que, P_x p.s. la chaîne $(X_n)_n$ tend vers une de ces classes.

Nous faisons, pour cet énoncé, l'hypothèse supplémentaire que, pour tout compact K de E, il existe une fonction f positive de $\mathcal{D}$ telle que $K = \{x : x \in E, f(x) = 0\}$.

Théorème 9.2.

Il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ et une v.a. η à valeurs dans $\{1, \ldots, d\}$ tels que, pour tout $x \in E$, $P_x(\Omega_0) = 1$ et, pour tout $\omega \in \Omega_0$, $\lim_n d(X_n(\omega), K_{\eta(\omega)}) = 0$.

On a $h_i(x) = P_x([\eta = i])$.

Démonstration

Posons $\hat{K} = \cup_{i=1}^d K_i$.

Soit $f \in \mathcal{D}$, $f \geq 0$, telle que $\hat{K} = \{x : f(x) = 0\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, et $x \in \hat{K}$

$$\Pi_z f(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} \int_{\hat{K}} f(y) Q^k(x, dy) = 0.$$

$\Pi_z f \in \ker(z - Q) \cap \mathcal{D}$ est nulle sur $\hat{K}$ donc partout, proposition 9.2. *(i)*. D'après le corollaire 1.1, f appartient à un sous-espace fermé, stable par Q, en restriction auquel Q à un rayon spectral $r < 1$, il existe donc une constante c telle que, pour tout $n \geq 0$,

$$|Q^n f|_\infty \leq \|Q^n f\| \leq c r^n \|f\|.$$

En utilisant la positivité de f, il vient

$$E_x[\sum_{n\geq 0} f(X_n)] = \sum_{n \geq 0} Q^n f(x) < +\infty.$$

On en déduit, P_x p.s, la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} f(X_n)$, et, de là, celle de son terme général vers 0. Du choix de f, il résulte que, si $\Omega_1 = \{\omega : \lim_n d(X_n(\omega), \hat{K}) = 0\}$, on a, pour $x \in E$, $P_x(\Omega_1) = 1$.

Puisque h_i est harmonique et bornée, la martingale $(h_i(X_n))_{n\geq 0}$ est convergente ; plus précisément, si Ω_2 est l'ensemble des ω tels que, pour tout $i = 1, \ldots, d$, la suite $(h_i(X_n(\omega)))_{n \geq 0}$ converge, on a, pour tout x, $P_x(\Omega_2) = 1$.

Si $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2$, $P_x(\Omega_0) = 1$.

Soit $\omega \in \Omega_0$ et a, b deux valeurs d'adhérence de la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 0}$. D'après ce qui précède, il existe i et j tels que $a \in K_i$ et $b \in K_j$. Si $i \neq j$, on a, proposition 9.3, $h_i(a) = 1$

et $h_i(b) = 0$, ce qui contredit la convergence de $(h_i(X_n(\omega)))_{n\geq 0}$, par conséquent $i = j$. Il vient $\lim_n d(X_n(\omega), K_i) = 0$. La première assertion en résulte.

La suite $(h_i(X_n(\omega)))_{n\geq 0}$ converge vers 1 si $\eta(\omega) = i$, vers 0 sinon. Puisque h_i est bornée, on peut écrire

$$h_i(x) = E_x[h(X_n)] = E_x[\lim_n h(X_n)] = P_x([\eta = i]).$$

[]

Corollaire 9.2

Pour tout $f \in \mathcal{C}$, la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)\right)_{n\geq 0}$ converge P_x p.s, pour tout $x \in E$, vers la v.a. $\nu_\eta(f)$.

Démonstration

Comme vu au paragraphe 1.3, il existe des fonctions g et h de $\mathcal{B}$ telles que $f = (g - Qg) + h$ et $Qh = h$, de sorte que, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \sum_{k=1}^{n}(g(X_k) - Qg(X_{k-1})) + \sum_{k=1}^{n} h(X_k) - [Qg(X_n) - Qg(X_0],$$

où, pour toute probabilité P_x, $(h(X_k))_k$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ tandis que, pour tout $k \geq 1$, $E_x[g(X_k) - Qg(X_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}] = 0$.

Le corollaire résulte alors des théorèmes classiques de convergence p.s, le théorème 9.2 permettant une identification de la limite. []

9.3. Représentation des fonctions propres associées à des valeurs propres de module 1

Si les fonctions harmoniques décrivent le comportement de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ en dehors des classes ergodiques, le comportement de la chaîne dans une classe ergodique est lié aux propriétés des solutions de l'équation $Qf = zf$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, sur cette classe ergodique, cette étude en restriction conduit à une caractérisation des solutions sur E de l'équation ci-dessus.

Pour K compact, on désigne par $\mathcal{C}_K$ l'espace des fonctions définies et continues sur K et par $\ker(z - Q) \cap \mathcal{C}_K$, le sous-espace des fonctions de $\mathcal{C}_K$ telles que, pour tout $x \in K$, $Qf(x) = zf(x)$.

On pose $\hat{K} = \bigcup_{i=1}^{d} K_i$.

Proposition 9.4.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$,

(i) pour $x \in E$, $\operatorname{supp} \Pi_z(x, \cdot) \subset \hat{K}$,

(ii) soit $\hat{\Pi}_z$ l'extension naturelle de Π_z à $\mathcal{C}_{\hat{K}}$, $\hat{\Pi}_z$ est une bijection linéaire de $\ker(z-Q)\cap\mathcal{C}_{\hat{K}}$ *sur* $\ker(z - Q) \cap \mathcal{C}$ *telle que, pour $f \in \ker(z - Q) \cap \mathcal{C}_{\hat{K}}$ et $x \in \hat{K}$, $\hat{\Pi}_z f(x) = f(x)$,*

(iii) l'application qui à $f \in \ker(z - Q) \cap \mathcal{C}_{\hat{K}}$ fait correspondre les restrictions f_i de f à K_i, $i = 1, \ldots, d$, est une bijection de $\ker(z - Q) \cap \mathcal{C}_{\hat{K}}$ *sur* $\Pi_{i=1}^{d} \ker(z - Q) \cap \mathcal{C}_{K_i}$.

Démonstration

Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset \hat{K}^c$. D'après le point *(i)* du lemme 9.2, $\Pi_z f$ est nulle sur $\hat{K}$, mais $\Pi_z f \in \ker(z - Q) \cap \mathcal{C}$, donc $\Pi_z f = 0$. *(i)* est établi.

Soit R l'opérateur de restriction à $\hat{K}$ d'une fonction de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}_{\hat{K}}$ s'identifie au quotient $\mathcal{C}/\ker R$. Nous venons de voir que, si $f \in \ker R$, $\Pi_z f = 0$, il en résulte que Π_z définit un endomorphisme $\hat{\Pi}_z$ de $\mathcal{C}_{\hat{K}}$ dans $\mathcal{C}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, $\Pi_z f = \hat{\Pi}_z Rf$.

Soit $f \in \ker(z - Q) \cap \mathcal{C}$, $\Pi_z f = f$, d'où $\hat{\Pi}_z Rf = f$, de sorte que $\hat{\Pi}_z$ est une surjection de $\ker(z - Q) \cap \mathcal{C}_{\hat{K}}$ sur $\ker(z - Q) \cap \mathcal{C}$.

D'après le point *(ii)* du lemme 9.2. et la définition de $\hat{\Pi}_z$, pour $f \in \ker(z - Q) \cap \mathcal{C}_{\hat{K}}$, $\hat{\Pi}_z f(x) = f(x)$. L'injectivité en résulte, en effet, si $\hat{\Pi}_z f = 0$, alors f est nulle sur $\hat{K}$, donc partout.

(iii) est clair. []

Les assertions *(ii)* et *(iii)* ci-dessus permettent de poursuivre l'étude en se restreignant à une classe ergodique.

Proposition 9.5.

Soit K une classe ergodique.
Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des compacts $C_1, \dots, C_p$, indexés par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, formant une partition de K tels que, pour $\ell = 1, \dots, p$,

$$Q 1_{C_\ell} = 1_{C_{\ell-1}}.$$

Les compacts C_ℓ sont appelés classes cycliques.

Posons $\alpha = e^{2i\pi/p}$. L'équation $Qf(x) = zf(x)$, où f est continue sur K et $|z| = 1$, a une solution non nulle si et seulement si il existe k tel que $z = \alpha^k$; toutes les solutions s'écrivent alors

$$f = c \sum_{\ell=1}^{p} \alpha^{k\ell} 1_{C_\ell},$$

où c est un complexe arbitraire.

Démonstration

Soit G l'ensemble des valeurs propres de module 1 de Q opérant sur $\mathcal{C}_K$. Pour $i = 1, 2$, soit $z_i \in \mathbb{C}$, $|z_i| = 1$, et $f_i \in \mathcal{C}_K$, $f_i \neq 0$, tels que, sur K, $Qf_i = z_i f_i$. D'après la proposition 9.2, $|f_i| > 0$ et, pour tout $x \in K$ et $y \in S_x^1$, $f_i(y) = z_i f_i(x)$, d'où $(f_1/f_2)(y) = z_1/z_2(f_1/f_2)(x)$, par suite

$$Q(f_1/f_2)(x) = \int_{S_x^1} (f_1/f_2)(y) Q(x, dy) = z_1/z_2(f_1/f_2)(x).$$

On en déduit que G est un sous-groupe du groupe multiplicatif des complexes de module 1. La proposition 8.2. montre qu'il résulte de la quasi-compacité que l'ensemble des valeurs propres de module 1 de Q agissant sur $\mathcal{C}$ est fini, il découle alors des points *(ii)* et *(iii)* de la proposition 9.4. que G est fini. Par suite, il existe un entier $p > 0$ tel que G coincide avec l'ensemble des solutions de l'équation $z^p = 1$.

Soit $f \in \mathcal{C}_K$, $f \neq 0$ telle que, sur K, $Qf = \alpha f$.
Fixons $x_0 \in K$ et posons, pour $\ell = 1, \dots, p$, $C_\ell = \{x : f(x) = \alpha^\ell f(x_0)\}$.
Comme vu précédemment, pour tout $x \in K$ et $y \in S_x^1$, $f(y) = \alpha f(x)$, d'où l'on déduit que $Q(x, C_{\ell+1}) = 1$ si $x \in C_\ell$, $= 0$ sinon. Il est clair que les compacts C_ℓ sont disjoints, d'autre part $\cup_{\ell=1}^p C_\ell$ est un compact invariant de K donc égal à la classe ergodique K.

La fonction $h_k = \sum_{\ell=1}^{p} \alpha^{k\ell} 1_{C_\ell}$ est continue sur K et satisfait à $Qh_k = \alpha^k h_k$. Si $f \in \mathcal{C}_K$ vérifie $Qf = \alpha^k f$, il en est de même de la fonction $g = f - (f(x_0)/h_k(x_0))h_k$, d'aprés le point *(ii)* de la proposition 9.2, $|g| = |g(x_0)| = 0$. []

L'énoncé suivant montre que les classes cycliques associées à la classe ergodique K peuvent être caractérisées comme les éléments de la plus fine partition de K par un nombre fini de compacts F_i, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, satisfaisant à $Q1_{F_i} = 1_{F_{i-1}}$.

Corollaire 9.3.

Sous les conditions de la proposition 9.5, soient $q \in \mathbb{N}^*$ et des compacts $C'_1, \dots, C'_q$, indexés par $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ tels que, pour $m = 1, \dots, q$,

$$Q1_{C'_m} = 1_{C'_{m-1}},$$

alors il existe des entiers r et j tels que $p = rq$ et, pour $m = 1, \dots, q$,

$$C'_m = \bigcup_{i=0}^{r-1} C_{m+j+iq}.$$

Démonstration

$\cup_{m=1}^{q} C'_m$ est un compact invariant de K, il est donc égal à K. Par décalage des indices, on peut supposer que $C'_q \cap C_p \neq \emptyset$. Posons $\alpha' = e^{2i\pi/q}$ et, pour $k = 0, \dots, q-1$,

$$h'_k = \sum_{m=1}^{q} \alpha'^{km} 1_{C'_m}.$$

h'_k est continue sur K et l'on a $Qh'_k = \alpha'^k h'_k$. Il en résulte que $\alpha'^p = 1$, donc il existe un entier r tel que $p = qr$ et l'on a $\alpha' = \alpha^r$.

La formule de représentation de l'énoncé précédent montre que, pour $k = 0, \dots, q-1$, il existe une constante c_k telle que

$$h'_k = \sum_{m=1}^{q} \alpha^{rkm} 1_{C'_m} = c_k \sum_{\ell=1}^{rq} \alpha^{k\ell} 1_{C_\ell}.$$

De l'égalité sur $C'_q \cap C_p$, il vient $c_k = 1$, et, en tenant compte de $\alpha^{rq} = 1$, on a

$$\sum_{m=1}^{q} \alpha^{rkm} 1_{C'_m} = \sum_{m=1}^{q} \alpha^{rkm} 1_{D_m},$$

avec

$$D_m = \bigcup_{i=0}^{r-1} C_{m+iq}.$$

Puisque $\det[\alpha^{rkm}]_{k,m=1,\dots,q} \neq 0$, on conclut que, pour tout $x \in K$ et tout $m = 1, \dots, q$, $1_{C'_m}(x) = 1_{D_m}(x)$. []

Revenons à l'étude des valeurs propres de module 1 de Q sur E.

Notations

Pour $i = 1, \dots, d$, désignons par $C^i_1, \dots, C^i_{p_i}$ les classes cycliques, indexées par $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$, associées à la classe ergodique K_i. On pose $d_1 = \sum_{i=1}^{d} p_i$ et on note p le plus petit commun multiple des entiers p_i.

Des propositions 9.4. et 9.5. il résulte

Corollaire 9.4.

La dimension du sous-espace F engendré par les fonctions propres associées aux valeurs propres de module 1 est d_1.

1 est la seule valeur propre de module 1 de l'opérateur quasi-compact Q^p.

Achevons ce paragraphe en montrant comment les classes cycliques permettent de représenter les fonctions harmoniques pour la chaîne espace-temps sur $\mathcal{D}$.

Définition 9.2.

On appelle fonction harmonique pour la chaîne espace-temps sur $\mathcal{D}$, une suite bornée, $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, de fonctions de $\mathcal{D}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $Qh_n = h_{n-1}$.

L'ensemble $\mathcal{H}_t$ des fonctions harmoniques pour la chaîne espace-temps sur $\mathcal{D}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel.

Du point de vue fonctionnel, la quasi-compacité de Q montre que $\mathcal{H}_t$ est déterminé par les fonctions propres associées aux valeurs propres de module 1.

Proposition 9.6.

Soient $f_1, \dots, f_{d_1}$ un système libre maximal de fonctions propres de Q associées aux valeurs propres de module 1 et $z_1, \dots, z_{d_1}$ les valeurs propres correspondantes. Les suites $(z_i^{-n} f_i)_{n\in\mathbb{Z}}$, $i = 1, \dots, d_1$, forment une base de $\mathcal{H}_t$.

Pour tout $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{H}_t$, on a $Q^p h_n = h_n$.

Démonstration

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{H}_t$.

Posons $\Pi = \sum_{i=1}^{d_1} \Pi_{z_i}$ et $h'_n = h_n - \Pi h_n$. Puisque Π commute avec Q, $(h'_n)_n \in \mathcal{H}_t$; d'autre part, on sait, corollaire 1.1, que la restriction de Q à $\ker \Pi$ à un rayon spectral $r < 1$, il existe donc une constante c telle que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\|h'_n\| = \|Q^\ell h'_{n+\ell}\| \leq c r^\ell \sup_m \|h'_m\|,$$

d'où $h'_n = 0$.

On peut alors écrire, pour tout n,

$$h_n = \sum_{i=1}^{d_1} a_i(n) f_i,$$

la condition $Qh_n = h_{n-1}$ conduit à $a_i(n-1) = z_i a_i(n)$, de sorte que, avec des constantes a_i convenables,

$$h_n = \sum_{i=1}^{d_1} a_i z_i^{-n} f_i.$$

Inversement, il est clair que toutes les fonctions définies par le second membre de l'égalité ci-dessus sont dans $\mathcal{H}_t$, ce qui prouve la première assertion.

Pour le dernier point, il suffit de rappeler que $z_i^p = 1$. []

Adoptons, maintenant, un point de vue probabiliste.

Proposition 9.7.

Pour $i = 1, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, p_i$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$h_n^{(i,j)}(x) = P_x(\{\omega : \lim_k d(X_{kp}(\omega), C_{j+n}^i) = 0\}).$$

Les d_1 suites $(h_n^{(i,j)})_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base de $\mathcal{H}_t$.

Démonstration

Elle est basée sur le

Lemme 9.4.

Les classes ergodiques de Q^p sont les classes cycliques de Q.

Démonstration

Soit D_0 une classe ergodique de l'opérateur markovien Q^p. Puisque, pour $x \in D_0$, $\lim_n d(X_n, \hat{K}) = 0$ P_x p.s, on a $d(D_0, \hat{K}) = 0$, d'où $D_0 \cap \hat{K} \neq \emptyset$; il existe donc i et j tels que $D_0 \cap C_j^i \neq \emptyset$, comme $D_0 \cap C_j^i$ est Q^p-invariant, il vient $D_0 \subset C_j^i$.

Prouvons que $D_0 = C_j^i$. Pour cela, posons, pour $\ell \geq 1$,

$$D_\ell = \{x : x \in K_i, Q^\ell(x, D_0) = 1\}.$$

Par construction, $D_\ell \subset C_{j-\ell}^i$ et d'après la preuve du lemme 9.3. D_ℓ est compact. Supposons $\ell \geq 1$ et $D_\ell \neq \emptyset$, si $x \in D_\ell$, l'égalité

$$1 = Q^\ell(x, D_0) = \int Q(x, dy) Q^{l-1}(y, D_0),$$

montre que $D_{\ell-1} \neq \emptyset$ et que $Q(x, D_{\ell-1}) = 1$. Par hypothèse $D_0 \subset D_p$, donc $D_\ell \neq \emptyset$, pour $\ell = 0, \ldots, p-1$ et, pour $x \in D_0$, $Q(x, D_{p-1}) = 1$. Il en résulte que le compact $D = D_0 \cup \ldots \cup D_{p-1}$ est Q-invariant, puisque $D \subset K_i$, on a $D = K_i$ et, de $D_\ell \subset C_{j-\ell}^i$, il vient $D_0 = C_j^i$. []

D'après le théorème 9.1. appliqué à l'opérateur quasi-compact Q^p, on a

$$h_n^{(i,j)} = \Pi_1^{(p)} 1_{C_{j+n}^i} \in \mathcal{D},$$

où $\Pi_1^{(p)}$ est défini, pour $f \in \mathcal{C}$, par

$$\Pi_1^{(p)} f = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^{kp} f,$$

et l'on sait que les fonctions $h_n^{(i,j)}$, $i = 1, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, p_i$, sont indépendantes.

Comme $\hat{K}$ est $\Pi_1^{(p)}$-invariant, on a, pour $x \in \hat{K}$,

$$\Pi_1^{(p)} Q 1_{C_{j+n}^i}(x) = \Pi_1^{(p)} 1_{\hat{K}} Q 1_{C_{j+n}^i}(x),$$

c'est à dire que les fonctions figurant dans cette égalité coincident sur les classes ergodiques de Q^p, comme elles sont Q^p-harmoniques, elles sont égales. D'autre part il est clair que Q et $\Pi_1^{(p)}$ commutent et l'on peut écrire

$$Q h_n^{(i,j)} = \Pi_1^{(p)} Q 1_{C_{j+n}^i} = \Pi_1^{(p)} 1_{\hat{K}} Q 1_{C_{j+n}^i} = \Pi_1^{(p)} 1_{C_{j+n-1}^i} = h_{n-1}^{(i,j)},$$

de sorte que $(h_n^{(i,j)})_n \in \mathcal{H}_t$.

Un argument de dimension permet de conclure. []

APPENDICE A
DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE NUSSBAUM

Supposons $\rho_e(Q) < r \le \rho(Q)$. On a $\mathcal{B} = F_r \oplus H_r$, où F_r et H_r sont des sous-espaces fermés, Q-stables, F_r est de dimension finie et Q_F n'a que des valeurs propres de modules $\ge r$, tandis que $\rho(Q_{H_r}) < r$. Si Π_{F_r} et Π_{H_r} désignent les projecteurs relatifs à cette décomposition, $Q = U + V$, où $U = Q\Pi_{F_r}$ est un opérateur de rang fini et $V = Q\Pi_{H_r}$ a un rayon spectral $< r$. L'argument développé lors de la preuve du point *(i)* du corollaire 5.3. montre que $\rho_e(Q) \le \rho(V) \le r$. D'où l'inégalité

$$\rho_\gamma(Q) \le \rho_e(Q).$$

Si $\rho_\gamma(Q) = \rho(Q)$, la preuve est achevée, nous supposons donc désormais que $\rho_\gamma(Q) < \rho(Q)$ et nous montrons que

$$\rho_e(Q) \le \rho_\gamma(Q).$$

La démonstration repose sur les lemmes A.1. et A.2. ci-dessous ; ces lemmes étant établis les arguments classiques de l'étude des opérateurs compacts s'adaptent à la situation considérée.

$\rho(Q)$, $\rho_e(Q)$, $\rho_\gamma(Q)$ sont abrégés en ρ, ρ_e, ρ_γ.

Pour $r > 0$, on note $C_r = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| \ge r\}$.

Lemme A.1.

Soient z, $|z| > \rho_\gamma$, $g, g_n, f_n \in \mathcal{B}$ tels que

$$g_n = (z - Q)f_n, \ \sup_n \|f_n\| < +\infty, \ \lim_n \|g_n - g\| = 0,$$

alors il existe $(n_k)_k$ et $f \in \mathcal{B}$ tels que

$$\lim_k \|f_{n_k} - f\| = 0, \ \ zf - Qf = g.$$

Démonstration

Utilisant l'identité $z^k - Q^k = Q_k(z - Q)$, où $Q_k = \sum_{\ell=0}^{k-1} z^\ell Q^{k-1-\ell}$, on écrit

$$z^k f_n = Q^k f_n + Q_k g_n.$$

Posons $B = \{f_n : n \ge 1\}$, $C = \{g_n : n \ge 1\}$ et $b = \sup\{\|f_n\| : n \ge 1\}$, on a

$$z^k B \subset Q^k(B) + Q_k(C) \subset Q^k(B(0,b)) + Q_k(C),$$

puisque C est relativement compacte, il vient, proposition 5.1,

$$|z|^k \gamma(B) \le b\gamma(Q^k(B_1)) = b\gamma(Q^k),$$

puis

$$\gamma(B) \le \liminf_k \frac{\gamma(Q^k)}{|z|^k} = 0,$$

de sorte que $(f_n)_n$ est relativement compacte. La propriété énoncée en découle. []

Lemme A.2.

Soient $r > \rho_\gamma$, $J \subset \mathbb{Z}$ tel que, si m et $n \in J$, $[m,n] \cap \mathbb{Z} \subset J$, et z_n, $n \in J$, une suite bornée de C_r, F_n, $n \in J$, des sous-espaces fermés de $\mathcal{B}$ tels que, si $n, n+1 \in J$, $F_n \subset F_{n+1}, F_n \neq F_{n+1}$.

Supposons que, pour tout $n \in J$, l'on ait

$$Q(F_n) \subset F_n \quad \text{et, si} \quad n-1 \in J,\ (z_n - Q)(F_n) \subset F_{n-1},$$

alors J est fini.

Démonstration

Supposons J infini, désignons par z une valeur d'adhérence de $(z_n)_n$ et choisissons l'entier s tel que $8|z|^{-s}\gamma(Q^s) < 1$, ce qui est possible puisque $|z| \geq r > \rho_\gamma$.

D'après le lemme de Riesz [D.S., VII-4-3], si $n, n+1 \in J$, il existe $f_{n+1} \in F_{n+1}$ telle que

$$\|f_{n+1}\| = 1 \quad \text{et} \quad d(f_{n+1}, F_n) = \inf\{\|f_{n+1} - h\| : h \in F_n\} \geq 1/2,$$

posons $h_n = z^{-s}Q^s f_n$.

Pour $n, n+p \in J$, $p > 0$, on a

$$h_{n+p} - h_n = f_{n+p} - \tilde{f}_{n,p} + (z^{-s} - z_{n+p}^{-s})Q^s f_{n+p},$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{n,p} &= [f_{n+p} - z_{n+p}^{-s}Q^s f_{n+p}] + z^{-s}Q^s f_n \\ &= [\sum_{i=0}^{s-1} z_{n+p}^{-i}Q^i](f_{n+p} - z_{n+p}^{-1}Qf_{n+p}) + z^{-s}Q^s f_n \quad \in F_{n+p-1},\end{aligned}$$

de là $\quad \|h_{n+p} - h_n\| \geq \|f_{n+p} - \tilde{f}_{n,p}\| - |z^{-s} - z_{n+p}^{-s}|\|Q^s\| \geq 1/2 - |z^{-s} - z_{n+p}^{-s}|\|Q^s\|$.

Puisque z est une valeur d'adhérence de $(z_n)_n$, il en résulte qu'il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que, pour tout ℓ, $\|h_{n_{k+\ell}} - h_{n_k}\| \geq 1/4$, donc, si $A = \{h_{n_k} : k \geq 1\}$, on a $\gamma(A) \geq 1/8$.

Mais, par définition de h_n, $\gamma(A) \leq \gamma(z^{-s}Q^s(B_1)) = |z|^{-s}\gamma(Q^s) < 1/8$, de cette contradiction, on conclut que J est fini. []

Proposition A.1.

Pour r, $\rho \geq r > \rho_\gamma$, $\sigma \cap C_r$ est un sous-ensemble fini, non vide de valeurs propres de Q.

Démonstration

Soit σ_p l'ensemble des valeurs propres de Q.

Si $z \in Fr(\sigma) = \sigma \setminus \sigma^\circ$ et $|z| > r$ alors $z \in \sigma_p$. En effet, soit $z_n \notin \sigma$ tels que $\lim_n z_n = z$, puisque [D.S., VII-3-3] $\|(z_n - Q)^{-1}\| \geq |z - z_n|^{-1}$, il existe $(g_n)_n$ et $(f_n)_n$ telles que

$$g_n = (z_n - Q)f_n, \ \|f_n\| = 1, \ \lim_n \|g_n\| = 0,$$

appliquant alors le lemme A.1. à l'égalité

$$[g_n + (z - z_n)f_n] = (z - Q)f_n,$$

on conclut à l'existence de f telle que $\|f\| = 1$ et $zf - Qf = 0$.

$C_r \cap \sigma_p$ est fini. Cela résulte du lemme A.2., car, si $\{z_n, n \in J\}$, $J = \{1, \ldots, b\}$, $b \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, est un sous-ensemble au plus dénombrable de $C_r \cap \sigma_p$, si f_n est une fonction propre associée à z_n et si F_n est le sous-espace engendré par $f_1, \ldots, f_n$, $(z_n)_{n \in J}$ et $(F_n)_{n \in J}$ satisfont aux hypothèses de ce lemme de sorte que J est fini.

Des deux assertions précédentes on déduit que $Fr(\sigma) \cap C_r$ est fini, puisque σ est borné cela implique $\sigma^\circ \cap C_r = \emptyset$, donc $\sigma \cap C_r = Fr(\sigma) \cap C_r$ est fini, non vide, et inclus dans σ_p. []

Proposition A.2.

Soit z, $|z| > \rho_\gamma$, une valeur propre de Q, alors
(i) pour tout ℓ, $N_\ell(z) = \ker(z - Q)^\ell$ est de dimension finie et $I_\ell = (z - Q)^\ell(\mathcal{B})$ est fermé,
(ii) $p(z) = \inf\{\ell : N_\ell(z) = N_{\ell+1}(z)\} < +\infty$,
(iii) si $N(z) = N_{p(z)}(z)$ et $I(z) = I_{p(z)}(z)$, $\mathcal{B} = N(z) \oplus I(z)$
(iv)$(z - Q)$ est un homéomorphismede $I(z)$.

Démonstration

Les notations $N_\ell(z), I_\ell(z)$ sont abrégées en N_ℓ et I_ℓ.

D'après le lemme A.1. la boule unité fermée de l'espace $(N_1, \|\cdot\|)$ est compacte donc N_1 est de dimension finie. Supposons N_ℓ de dimension finie ; soit $(f_n)_n$ une suite unitaire de $(N_{\ell+1}, \|\cdot\|)$, la suite $(g_n)_n$, $g_n = (z - Q)f_n$, est une suite bornée de N_ℓ, donc relativement compacte, du lemme A.1. il découle que $(f_n)_n$ possède une valeur d'adhérence, on conclut que $N_{\ell+1}$ est de dimension finie.

Pour établir la deuxième assertion, il suffit de montrer que l'image $H = (z - Q)(F)$ d'un sous-espace fermé F est fermée.

Soit $g_n \in H$ et $g \in \mathcal{B}$ telles que $\lim_n \|g_n - g\| = 0$. N_1 étant de dimension finie, il existe $f_n \in F$ telle que

$$g_n = (z - Q)f_n \quad \text{et} \quad \|f_n\| = d(f_n, N_1 \cap F) = \inf\{\|f_n - h\| : h \in N_1 \cap F\}.$$

Si $\sup_n \|f_n\| < +\infty$, le lemme A.1. permet de conclure. D'autre part, $\sup_n \|f_n\| = +\infty$ est impossible car, dans ce cas, en posant $f'_n = \|f_n\|^{-1} f_n$ et $g'_n = \|f_n\|^{-1} g_n$, on a

$$g'_n = z f'_n - Q f'_n$$

et, puisque $\inf_n \|g'_n\| = 0$, le lemme A.1. montre qu'il existe $(n_k)_k$ et $f \in F$ tels que $\lim_k \|f'_{n_k} - f\| = 0$ et $zf - Qf = 0$, ce qui contredit $d(f, N_1 \cap F) = \lim_k d(f'_{n_k}, N_1 \cap F) = 1$.

Le lemme A.2. permet d'achever la preuve.

Les sous-espaces N_ℓ, $\ell \geq 1$, et $I_{-\ell}$, $\ell \leq -1$, satisfont aux hypothèses du lemme A.2. avec $z_\ell = z_{-\ell} = z$, les suites $(N_\ell)_\ell$ et $(I_\ell)_\ell$ sont donc stationnaires à partir des rangs p et q respectivement.

$N_\ell = N_{2\ell}$ implique $N_\ell \cap I_\ell = \{0\}$ tandis que $I_\ell = I_{2\ell}$ entraine $\mathcal{B} = N_\ell + I_\ell$, de sorte que, si $s = \max\{p, q\}$, on a $\mathcal{B} = N_s \oplus I_s$. Puisque $(z - Q)(I_s) = I_s$ et que $N_1 \cap I_s \subset N_s \cap I_s = \{0\}$, $(z - Q)$ est une bijection de I_s donc un homéomorphisme car I_s est un fermé de l'espace de Banach $\mathcal{B}$. Enfin N_s étant de dimension finie on conclut que $p = q = s$. []

Proposition A.3.

Soient $z_1, \ldots, z_n$ des valeurs propres de modules $> \rho_\gamma$, alors

$$\mathcal{B} = (\bigoplus_{k=1}^{n} N(z_k)) \oplus H_n,$$

où H_n est fermé, stable par Q et, pour $k = 1, \ldots, n$, les restrictions à H_n de $(z_k - Q)$ sont des homéomorphismes.

Démonstration

D'après la proposition A.2, cet énoncé est acquis pour $n = 1$.

Supposons le correct au rang n et considérons la valeur propre z_{n+1} telle que $|z_{n+1}| > \rho_\gamma$. Il est clair que $N(z_{n+1}) \subset H_n$; d'autre part, munissant l'espace de Banach H_n de la fonction d'ensemble γ_n et désignant par Q_n la restriction de Q à H_n, on a, comme vu dans la preuve du corollaire 5.1, $\rho_{\gamma_n}(Q_n) \leq \rho_\gamma(Q)$, de sorte que $|z_{n+1}| > \rho_{\gamma_n}(Q_n)$ et que, d'après la proposition A.2, $H_n = N(z_{n+1}) \oplus H_{n+1}$, où H_{n+1} est fermé, stable par Q_n et la restriction de $(z_{n+1} - Q_n)$ à H_{n+1} est un homéomorphisme. La décomposition de $\mathcal{B}$ qui en résulte répond aux conditions de l'énoncé. []

Finalement, il découle des propositions A.1, A.2. et A.3. que $r > \rho_\gamma$ implique $r > \rho_e$, d'où $\rho_\gamma \geq \rho_e$, ce qu'il fallait démontrer. []

B. DÉMONSTRATIONS DES ÉNONCÉS RELATIFS AUX PERTURBATIONS

Commençons par établir un lemme général de la théorie des perturbations.

Lemme B.1

Supposons $Q(\cdot)$ m fois continûment dérivable de Λ dans $\mathcal{L}_B$.

Soit Δ un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\sigma(0) \subset \Delta$ alors, il existe β_1, $\beta_1 > 0$, tel que

(i) pour $\lambda \in \Lambda(\beta_1)$, $\sigma(\lambda) \subset \Delta$,

(ii) les dérivées partielles $\dfrac{\partial^\ell R}{\partial \lambda^\ell}(z,\lambda)$, $\ell = 0, \ldots, m$, existent et sont continues sur $\Delta^c \times \Lambda(\beta_1)$.

Démonstration

$R(\cdot, 0)$ est bornée à l'infini et continue sur Δ^c, donc

$$M = \sup\{\|R(z,0)\| : z \in \Delta^c\} < +\infty.$$

Soit $\beta_1, \beta_1 > 0$, et une constante M_1 tels que, pour $\lambda \in \Lambda(\beta_1)$, $\|Q(\lambda) - Q(0))\| \leq \dfrac{1}{2M}$, et, pour $\ell = 0, \ldots, m$, $\|\dfrac{d^\ell}{d\lambda^\ell}(Q(\lambda) - Q(0))\| \leq M_1$.

Posons $U(z,\lambda) = (Q(\lambda) - Q(0))R(z,0)$. La série

$$S(z,\lambda) = \sum_{n \geq 0} [U(z,\lambda)]^n$$

converge normalement sur $\Delta^c \times \Lambda(\beta_1)$.

En comparant au voisinage de λ le développement limité à l'ordre m de $[U(z,\cdot)]^n$ et la puissance n-ième du développement limité au même ordre de $U(z,\cdot)$, il vient, pour $\ell = 1, \cdots, m$,

$$\frac{\partial^\ell}{\partial \lambda^\ell}[U(z,\lambda)]^n = \sum_{\ell_1 + \cdots + \ell_n = \ell} \frac{\ell!}{\ell_1! \cdots \ell_n!} \frac{\partial^{\ell_1}}{\partial \lambda^{\ell_1}} U(z,\lambda) \cdots \frac{\partial^{\ell_n}}{\partial \lambda^{\ell_n}} U(z,\lambda),$$

mais, pour $n > \ell$ et pour $(z,\lambda) \in \Delta^c \times \Lambda(\beta_1)$, le nombre de facteurs effectivement dérivés dans le terme général du second membre est au plus égal à ℓ, d'où successivement

$$\|\frac{\partial^{\ell_1}}{\partial \lambda^{\ell_1}} U(z,\lambda) \cdots \frac{\partial^{\ell_n}}{\partial \lambda^{\ell_n}} U(z,\lambda)\| \leq \frac{(M_1 M)^\ell}{2^{n-\ell}}, \quad \|\frac{\partial^\ell}{\partial \lambda^\ell}[U(z,\lambda)]^n\| \leq \frac{n^\ell (M_1 M)^\ell}{2^{n-\ell}}.$$

Les séries dérivées jusqu'à l'ordre m en λ de la série $S(z,\lambda)$ sont donc normalement convergentes sur $\Delta^c \times \Lambda(\beta_1)$. La fonction

$$S(z,\lambda) = [I - U(z,\lambda)]^{-1} = [I - (Q(\lambda) - Q(0))R(z,0)]^{-1}$$

a donc les propriétés de régularité décrites en *(ii)*.

On a

$$(z - Q(\lambda)) = [I - (Q(\lambda) - Q(0))R(z,0)](z - Q(0)),$$

d'où *(i)*, de là $R(z,\lambda) = R(z,0)S(z,\lambda)$ et *(ii)*. $\square$

Introduisons maintenant un argument spécifique au rayon spectral essentiel.

Lemme B.2

Supposons $Q(\cdot)$ continue de Λ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$.

Soit $\rho_e(\lambda)$ le rayon spectral essentiel de $Q(\lambda)$, la fonction $\rho_e(\lambda)$ est semi-continue supérieurement, c'est à dire que, si $\rho_e(\lambda_0) < r$, on a $\rho_e(\lambda) < r$ dans un voisinage de λ_0.

Démonstration

On a vu, corollaire 5.3, que

$$\rho_e(\lambda) = \lim_n (\inf\{\|Q^n(\lambda) - K\| : K \in \mathcal{K}\})^{1/n},$$

où $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{B}$; la suite dont la limite figure au second membre étant sous-multiplicative, on peut aussi écrire

$$\rho_e(\lambda) = \inf_n (\inf\{\|Q^n(\lambda) - K\| : K \in \mathcal{K}\})^{1/n}.$$

Pour $K \in \mathcal{K}$ et n fixés, $\|Q(\lambda)^n - K\|$ est une fonction continue, donc semi-continue supérieurement, de λ. L'assertion de l'énoncé résulte du fait que l'ensemble des fonctions semi-continues supérieurement est stable par passage à l'enveloppe inférieure. []

Preuve de la proposition 7.1.

Le lemme B.1. avec $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ montre qu'il existe β_1 tel que, pour $\lambda \in \Lambda(\beta_1)$, $\Delta_1 \cup \Delta_2 \supset \sigma(\lambda)$, le lemme B.2. montre qu'il existe β_1' tel que, pour $\lambda \in \Lambda(\beta_1)$, $\rho_e(\lambda) < r$.

D'après le lemme B.1, $R(\cdot,\cdot)$ est continue sur $\partial\Delta_1 \times \Lambda(\beta_1)$ d'où

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{\partial\Delta_1^+} R(z,\lambda)dz = \int_{\partial\Delta_1^+} R(z,0)dz.$$

Cette limite est, d'après la proposition 6.1, un projecteur $\Pi(0)$, non nul car $\sigma(0) \cap \Delta_1 \neq \emptyset$, il existe donc un β_1'' tel que, pour $\lambda \in \Lambda(\beta_1'')$, les intégrales du premier membre sont différentes de 0. La proposition 6.1. permet d'en déduire que $\sigma(\lambda) \cap \Delta_1 \neq \emptyset$ et que

$$\Pi(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_1^+} R(z,\lambda)dz$$

est un projecteur non nul.

La proposition est établie avec $\beta = \min\{\beta_1, \beta_1', \beta_1''\}$. []

Preuve de la proposition 7.2.

On suppose maintenant que $Q(0)$ a une valeur propre simple dominante $k(0)$. Poursuivons l'argumentation développée dans les lignes précédentes en posant

$$\Delta_1 = \{z : |z - k(0)| < \epsilon\}, \quad \Delta_2 = \{z : |z| < \rho_e(0) + \epsilon\}, \quad \beta_\epsilon' = \beta,$$

où $0 < \epsilon < \dfrac{|k(0)| - \rho_e(0)}{2}$.

Pour montrer qu'au voisinage de 0 $Q(\lambda)$ a une valeur simple dominante, il nous suffit d'établir que le rang de $\Pi(\lambda)$ est égal à 1. Nous pouvons choisir $\beta_\epsilon'' < \beta_\epsilon'$ tel que $\|\Pi(\lambda) - \Pi(0)\| < \frac{1}{2}$; si, dans ces conditions, le rang de $\Pi(\lambda)$ était ≥ 2, il existerait f

telle que $g = \Pi(\lambda)f \neq 0$ et $\Pi(0)g = 0$, on aurait $(\Pi(\lambda) - \Pi(0))g = g$, ce qui impliquerait $\|\Pi(\lambda) - \Pi(0)\| \geq 1$.

Les préliminaires à la proposition 6.1. montrent que l'on a, pour λ fixé, $\lambda \in \Lambda(\beta''_\epsilon)$,

$$Q(\lambda) = k(\lambda)\Pi(\lambda) + V(\lambda),$$

avec les propriétés requises dans les deux lignes qui suivent dans l'énoncé de la proposition.

D'après la proposition 6.1, on a, pour $n \geq 0$,

$$\Pi(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta_1^+} R(z,\lambda)dz, \quad V(\lambda)^n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta_2^+} z^n R(z,\lambda)dz.$$

Du lemme B.1. on déduit que $\Pi(\cdot)$ et $V(\cdot)$ sont m fois continûment dérivables pour $\lambda \in \Lambda(\beta''_\epsilon)$, et que, pour $\ell = 0,\ldots,m$, on a en posant $r = \rho_e(0) + \epsilon$,

$$\|\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}V(\lambda)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{n+1}\|\frac{\partial^\ell}{\partial\lambda^\ell}R(re^{i\theta},\lambda)\|d\theta \leq cr^{n+1}.$$

Soit $f \neq 0$ telle que $Q(0)f = k(0)f$ et f^* une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}$ telle que $\langle f, f^*\rangle = 1$. Pour $\lambda \in \Lambda(\beta''_\epsilon)$,

$$\langle Q(\lambda)\Pi(\lambda)f, f^*\rangle = k(\lambda)\langle\Pi(\lambda)f, f^*\rangle.$$

Choisissons β_ϵ, $0 < \beta_\epsilon < \beta''_\epsilon$, tel que, pour $\lambda \in \Lambda(\beta_\epsilon)$, $\langle\Pi(\lambda)f, f^*\rangle \neq 0$, ce qui est possible d'après la continuité de $\Pi(\cdot)$, on en déduit que $k(\cdot)$ est m fois continûment dérivable sur $\Lambda(\beta_\epsilon)$. □

RÉFÉRENCES

[B.] F.E. BROWDER On the spectral theory of elliptic differential operators. *Math., Ann.,* **142** , (1961), 22-130.

[B.R.] A. BRUNEL et D. REVUZ Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* **10, 3**, (1974), 301-337.

[C.I.] P. COLLET et S. ISOLA On the essential spectrum of the transfer operator for expanding maps. *Com. Math. Phys,* **139**, (1991), 551-557.

[C.R.] J.P. CONZE et A. RAUGI Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications *Bull. Soc. Math. France,* **118**, (1990), 273-310.

[D.S.] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ Linear operators. Part. I. Pure and Applied Mathematics. Vol. VII. Interscience.

[G.H.] Y. GUIVARC'H et J. HARDY Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* **24, 1**, (1988), 73-98.

[G.R.] Y. GUIVARC'H and A. RAUGI Products of random matrices : convergence theorems. *Contemporary Mathematics,* **50**, (1986), 31-54.

[H.] H. HENNION Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens. *Proc. Am. Math. Soc.Com,* **118, 2**, (1993), 627-634.

[Her.] L. HERVÉ Etude d'opérateurs quasi-compacts positifs. Application aux opérateurs de Perron-Frobenius.

[I.T.M.] C.T. IONESCU TULCEA et G. MARINESCU Théorie ergodique pour des classes d'opérateurs non complètement continus. *Ann. of Math,* **52, 2**, (1950), 140-147.

[Kel.] G. KELLER Markov extensions, zeta functions, and Fredholm theory for piecewise invertible dynamical systems. *Trans. of Amer. Math. Soc.,* **314, 2**, (1989), 433-497.

[Kel2.] G. KELLER Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations. *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, **69**, (1985), 461-478.

[Le] E. LE PAGE Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. Probability measures on groups, Proceedings Oberwolfach, Lectures Notes Series in Math., **928**, (1982), 258-303.

[Nor.] M.F. NORMAN Markov processes and learning models. Academic Press, (1972).

[N.] R.D. NUSSBAUM The radius of essential spectrum. *Duke, Math., J.* **37**, (1970), 473-478.

[Nev.] J. NEVEU Bases Mathématiques du calcul des Probabilités.

[Ru1.] D. RUELLE Thermodynamic formalism. Encyclopedia Math. Appl, vol 5, Cambridge Univ. Press, Cambridge and New York, 1978.

[Ru2.] D. RUELLE An extension of the theory of Fredholm determinants, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **72**, (1990).

[Sh] H.H. SCHAEFER Topological vector spaces. Macmillan Series in Advanced Mathematics and Theoretical Physics.