N. GUILLOTIN

Marches aléatoires à une dimension avec auto-intéraction, d'après H. Zoladek

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995___2_A5_0>

Marches aléatoires à une dimension avec auto-intéraction, d'après H. Zoladek.

N. Guillotin

19 janvier 1995

1 Introduction.

Les marches aléatoires sans recoupement dans Z^d jouent un rôle important dans plusieurs problèmes physiques par exemple dans la théorie de la percolation, dans la théorie des solutions macromoléculaires et dans la théorie quantique des champs. Au lieu de prendre la mesure de comptage sur l'ensemble des marches sans recoupement, on peut considérer les marches aléatoires standards avec une probabilité de k auto-intersections proportionnelle à $\exp(-\lambda k)$. Ce modèle est appelé modèle d'Edwards discret. Il existe une version continue de ce modèle. On le définit alors par une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues à valeurs dans R^d, probabilité dont la densité par rapport à la mesure de Wiener est de la forme $Z^{-1}\exp(-\lambda k(\omega))$ où Z est une constante de normalisation, λ un paramètre réel et $k(\omega)$ le nombre de recoupements de la trajectoire ω. On dit que la dimension du modèle est d.
La construction mathématique du modèle d'Edwards est loin d'être triviale. On a donc commencé à construire le modèle en dimension inférieure. A une dimension, il n'y a pas de problèmes. A deux dimensions, les calculs nécessaires à la construction du modèle ont été éffectués par Varadhan [8], qui s'intéressait à tout autre chose, puis repris et explicités par Le Gall [5], mais seulement 17 ans plus tard! Entre-temps, les mathématiciens ont progressé dans l'étude des intersections d'un chemin brownien avec lui-même et se sont rendus compte que la méthode de Varadhan ne s'applique pas à trois dimensions. La construction à trois dimensions a été réalisée par Westwater [9,11]. Il a prouvé l' existence de la mesure const $\times \exp(-\lambda \int\int \delta(x(s)-x(t))dsdt)\, d\omega$ dans l'espace des trajectoires aléatoires du processus de Wiener standard à trois dimensions. Kusuoka [3] s'est aussi intéressé à cette mesure. En dimension supérieure, il ne semble pas possible de construire un modèle d'Edwards.
Le problème mathématique important pour ces systèmes est de décrire le comportement asymptotique d'une trajectoire aléatoire. En dimension 1, pour $\lambda > 0$, Westwater [12] a prouvé que la loi de probabilité de $\frac{x(T.)}{T}$ converge vers une loi centrée sur deux trajectoires $t \to \pm rt$, où r est la vitesse asymptotique. Kusuoka [4] a étudié le comportement asymptotique de la mesure à une dimension. En dimension 3, Westwater [10] a analysé certaines

approximations du modèle de polymère et a mis en vidence le phénomène de dérive pour le processus approximé. Le modèle continu se prête plus facilement aux calculs que le modèle discret, mais celui-ci est aussi très intéressant car il permet notamment de réaliser des calculs numériques, en particulier des simulations Monte Carlo (Voir par exemple la thèse de J.Pasche [7] pour $d = 2$). H.Zoladek [13] s'est quant à lui placé dans le cas discret unidimensionnel et a prouvé que si $\lambda < 0$, $n^{-1/3}\omega(n)$ converge vers une variable aléatoire à densité continue et si $\lambda > 0$, les fonctions aléatoires $t \to n^{-1}\omega([nt])$ converge vers le processus ξ_t de loi $P(\xi_t = \pm rt) = \frac{1}{2}$, où $r = r(\lambda) = \frac{e^{2\lambda}-1}{e^{2\lambda}+1}$. Il donne aussi le comportement asymptotique des fluctuations autour de ce processus. Ici, on explicite certains de ses calculs et on "corrige" un point de convergence.

2 Formulation des résultats.

On considere l'espace des trajectoires dans Z partant de 0:

$$\Omega_n = \{\omega = (\omega(0),..,\omega(n)) : \omega(0) = 0, \omega(i+1) - \omega(i) = \pm 1\}$$

Sur cet espace, on introduit la mesure de probabilité:

$$\mu_n(\{\omega\}) = Z_n^{-1} \exp(-\lambda k(\omega))$$

où

$$k(\omega) = \#\{i \in \{1,..,n\} : \exists j < i : \omega(i) = \omega(j)\}$$

Si $\lambda = 0$, on a les marches aléatoires standards et le théorème de Donsker dit que $n^{-1/2}\omega([nt])$ converge vers le processus de Wiener lorsque $n \to \infty$.
Si $\lambda \neq 0$, on a les théorèmes suivants.

Theoreme 1 *Si $\lambda < 0$, alors les variables aléatoires $n^{-1/3}\omega(n)$ convergent faiblement lorsque $n \to \infty$ vers la variable aléatoire de densité:*

$$\rho(x) = \frac{\pi}{8s}[\pi(1 - \frac{|x|}{s}) \cos \frac{\pi x}{s} + \sin \frac{\pi \mid x \mid}{s}]$$

pour $\mid x \mid \leq s$ et $\rho(x)=0$ sinon, où $s = s(\lambda) = (\frac{\pi^2}{|\lambda|})^{1/3}$.

Theoreme 2 *(a) Si $\lambda \geq 0$, alors les fonctions aléatoires $t \to n^{-1}\omega([nt])$, $t \in [0,1]$, convergent faiblement lorsque $n \to \infty$ vers le processus aléatoire ξ_t de loi $P(\{\xi_t = \pm rt\})=1/2$, où $r = r(\lambda) = \frac{e^{2\lambda}-1}{e^{2\lambda}+1}$.*

(b) Si $\lambda > 0$ et $\mu_{n_+} = \mu_n(./\omega(n) > 0)$, alors les fonctions aléatoires $t \to \{(1-r^2)n\}^{-1/2} \times[\omega([nt]) - rnt]$ convergent faiblement par rapport à la mesure conditionelle μ_{n_+} vers le processus de Wiener standard.

Tout d'abord, on a une transition de phase en $\lambda = 0$. La transition vers un comportement non gaussien apparaît dès qu'on fait intervenir une intéraction contractante ou répulsive.
- Si $\lambda < 0$, on voit que la marche a tendance à rester près du point de départ.
-a). Si $\lambda \geq 0$, la marche a tendance à être d'un seul côté de l'origine. Si $t = 1, \omega(n) \sim \pm rn$ où r peut être vue comme une vitesse de fuite de ω à l'infini croissante en λ.
Lorsque λ est fini, on autorise les recoupements et par conséquent, le point final de la marche sera d'autant plus près de l'origine que λ sera petit.
Lorsque $\lambda \to \infty, r \to 1$, $k(\omega) = 0$ et on retrouve les deux marches sans recoupement sur Z.
-b). Si $\lambda > 0$, on a une transition de phase: deux situations différentes se présentent suivant qu'on conditionne par le fait que $\omega(n)$ sera à droite ou à gauche.

Remarques: 1. On peut utiliser une autre mesure de probabilité sur Ω_n

$$\tilde{\mu}_n(\omega) = \tilde{Z}_n^{-1} \exp\{-\lambda \tilde{k}(\omega)\}$$

où

$$\tilde{k}(\omega) = \#\{(i,j) : i < j, \omega(i) = \omega(j)\}$$

Ceci est une version du modèle d'Edwards.

2. On s'attend à trouver dans le cas multidimensionnel pour $\lambda > 0$:

$$\omega(n) \sim n^{3/4} \textit{ pour } d = 2$$

$$\omega(n) \sim n^{3/5} \textit{ pour } d = 3$$

$$\omega(n) \sim n^{1/2} \textit{ pour } d > 4$$

3. On peut aussi traiter ce modèle comme un modèle de mécanique statistique à une dimension en introduisant les spins $\sigma_i = \omega(i+1) - \omega(i)$.
Le potentiel d'intéraction dans le volume Λ=$\{0,..,n\}\subset$Z est donné par:

$$H(\sigma_\Lambda) = \lambda k(\omega) = \lambda \sum_i (1 - \prod_{j<i} \operatorname{sign}|\sigma_j + ... + \sigma_{i-1}|)$$

Ce modèle rencontre une transition de phase en $\lambda = 0$.

3 Lemmes préliminaires

Lemme 1

$$k(\omega) = n - \{\sup_i \omega(i) - \inf_i \omega(i)\} - 1$$

Preuve.

$$k(\omega) = \#\{i \in \{1,..,n\} : \exists j < i : \omega(i) = \omega(j)\}$$
$$k(\omega) = n - \#\{i \in \{1,..,n\} : \forall j < i, \omega(i) \neq \omega(j)\}$$

Or $\#\{i \in \{1,..,n\} : \forall j < i, \omega(i) \neq \omega(j)\}$ est le nombre de points atteints (pour la première fois) par ω soit $\sup_i \omega(i) - \inf_i \omega(i) + 1$, d'où le lemme.

Lemme 2 *Le nombre de n-trajectoires ω telles que $\sup_i \omega(i) < a, \inf_i \omega(i) > b$ et $\omega(n) = c$ est egal à:*

$$H_n(a,b,c) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (C_n^{(n+2k(a-b)+c)/2} - C_n^{(n+2k(a-b)+2a-c)/2}) \tag{1}$$

où $C_n^k = n!/\{k!(n-k)!\}$ pour $0 \leq k \leq n$, n, k entiers et $C_n^k = 0$ sinon.

Preuve. (Voir Ref.[1], III, 10, Problem 3)
$H_n(a,b,c) = \#\{\omega : 0 \to c\} - \{\#\{\omega : \exists i \in \{1,..,n\} : \omega(i) = a \textit{ et } \forall\, j > i, b < \omega(j) < a\} + \#\{\omega : \exists i \in \{1,..,n\} : \omega(i) = b \textit{ et } \forall\, j > i, b < \omega(j) < a\}\}$
Mais
$\#\{\omega : \exists i \in \{1,..,n\} : \omega(i) = a \textit{ et } \forall n \geq j > i, b < \omega(j) < a\} = \#\{\omega : \exists i \in \{1,.,n\}; \omega(i) = a \textit{ et } \forall\, n \geq j > i, \omega(j) < a\} - \#\{\omega : \exists i_1 \in \{1,..,n\}, \omega(i_1) = a, \exists i_2 > i_1, \omega(i_2) = b \textit{ et } \forall\, j > i_1, \omega(j) < a\}$
$\#\{\omega : \exists i_1 \in \{1,..,n\}, \omega(i_1) = a, \exists i_2 > i_1, \omega(i_2) = b \textit{ et } \forall j > i_1, \omega(j) < a\} = \#\{\omega : \exists i_1 \in \{1,..,n\}, \omega(i_1) = a, \exists i_2 > i_1, \omega(i_2) = b \textit{ et } \forall j : i_1 < j < i_2, \omega(j) < a\} - \#\{\omega : \exists i_1 \in \{1,..,n\}, \omega(i_1) = a, \exists i_2 > i_1, \omega(i_2) = b \textit{ et } \forall j : i_1 < j < i_2, \omega(j) < a, \exists i_3 > i_2 : \omega(i_3) = b \textit{ et } \forall j : i_2 < j < i_3, \omega(j) > b\}$
On itère ce procédé K_1 fois où $K_1 = [(n-c)/2(a-b)]$.
On fait de même pour les trajectoires touchant b puis c (sans toucher a entre b et c) K_2 fois où $K_2 = [(n+2a-c)/2(a-b)]$.
D'où:
$H_n(a,b,c) = \#(0 \to c) - \{\#(0 \to a \to c) - [\#(0 \to a \to b \to c) - [\#(0 \to a \to b \to a \to b) - [...] + \#(0 \to b \to c) - [\#(0 \to b \to c) - [...]\}$
On a:
$\#(0 \to c) = C_n^{(n+c)/2}$
$\#(0 \to a \to c) = C_n^{(n+2a-c)/2}$
De manière générale, en utilisant le principe de réflexion plusieurs fois, on a:
$\forall k$ *tel que* $0 \leq k \leq K_1$,
$\#(0 \to (a \to b\ k\ fois) \to a \to c) = C_n^{(n+2k(a-b)+2a-c)/2}$
$\#(0 \to (a \to b\ k\ fois) \to b \to c) = C_n^{(n+2k(a-b)+c)/2}$

et $\forall k$ *tel que* $-K_2 \leq k \leq 0$,
$\#(0 \to (b \to a\ k\ fois) \to b \to c) = C_n^{(n+2k(a-b)+2a-c)/2}$
$\#(0 \to (b \to a\ k\ fois) \to a \to c) = C_n^{(n+2k(a-b)+c)/2}$
Donc:
$H_n(a,b,c) = -\{C_n^{(n+2b-c)/2} - [C_n^{(n-2(a-b)+c)/2} - [...]\} + C_n^{(n+c)/2} - \{C_n^{(n+2a-c)/2} - [C_n^{(n+2(a-b)+c)/2} - [...]\}$

$$H_n(a,b,c) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (C_n^{(n+2k(a-b)+c)/2} - C_n^{(n+2k(a-b)+2a-c)/2})$$

Lemme 3 *Le nombre de trajectoires* ω *satisfaisant* $\sup \omega = a$, $\inf \omega = b$ *et* $\omega(n) = c$ *est*

$$G_n(a,b,c) = -\partial_a \partial_b H_n(a, b-1, c) \tag{2}$$

où $\partial_x f(x) = f(x+1) - f(x)$.

Preuve.
$G_n(a,b,c) = \#\{\omega : \sup_i \omega(i) < a+1 \text{ et } \inf_i \omega(i) = b\} - \#\{\omega : \sup_i \omega(i) < a \text{ et } \inf_i \omega(i) = b\}$
$= [\#\{\omega : \sup_i \omega(i) < a+1 \text{ et } \inf_i \omega(i) > b-1\} - \#\{\omega : \sup_i \omega(i) < a+1 \text{ et } \inf_i \omega(i) > b\}] - [\#\{\omega : \sup_i \omega(i) < a \text{ et } \inf_i \omega(i) > b-1\} - \#\{\omega : \sup_i \omega(i) < a \text{ et } \inf_i \omega(i) > b\}]$
$= (H_n(a+1, b-1, c) - H_n(a+1, b, c)) - (H_n(a, b-1, c) - H_n(a,b,c))$
$= (H_n(a,b,c) - H_n(a+1,b,c)) - (H_n(a,b-1,c) - H_n(a+1,b-1,c))$
$= \partial_b(H_n(a,b-1,c) - H_n(a+1,b-1,c))$
$= -\partial_a \partial_b H_n(a,b-1,c)$

4 Preuve du théorème 1.

Soit $f \in L^1(R)$.
On suppose que $\{\hat{f}(\frac{2\pi n}{\alpha})\}_{n\in Z} \in l^1(Z)$, que pour tout $x \in R$, $\{f(x+\alpha n)\}_{n \in Z} \in l^1(Z)$ et que $x \to \sum_{m\in Z} f(x+\alpha m)$ est continue sur $[0,\alpha]$, alors on a la formule de sommation de Poisson classique suivante:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+\alpha k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{2\pi k}{\alpha}) e^{\frac{2\pi i k x}{\alpha}} \tag{3}$$

(Voir par exemple [1] pour plus de détails).

Soit

$$f(z) = \begin{cases} C_n^{[n/2+z]} & \text{si } y \in \{-\frac{n}{2}, .., \frac{n}{2}+1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

f est définie sur R et continue sauf aux points $x = \frac{c}{2}$, c impair, $c \in \{-n, .., n+2\} - \{1\}$.

$g(x) = \sum_{m \in Z} f(x + \alpha m)$ est une somme finie de fonctions discontinues en $\frac{c}{2}$ et en $a - \frac{c}{2}$, c impair. On ne peut donc pas appliquer directement la formule (3) à la fonction f avec n impair, $\alpha = a - b$, $x = \frac{c}{2}$ ou $a - \frac{c}{2}$. Mais, g étant une fonction dérivable par morceaux, sa série de Fourier au point $x_0 = \frac{c}{2}$, c impair, converge vers $\frac{1}{2}[g(x_0^+) + g(x_0^-)]$ et on a la relation suivante:

$$\frac{1}{2}\sum_{m \in Z}(f[(x_0 + \alpha m)^+] + f[(x_0 + \alpha m)^-]) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\frac{2\pi k}{\alpha})e^{\frac{2\pi i k x_0}{\alpha}}$$

Malgré tout, il semble que la preuve de Zoladek reste exacte.

$$\forall \xi \in R, \hat{f}(\xi) = \int_R e^{ix\xi} f(x)\, dx$$

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\int_{k-n/2}^{k-n/2+1} e^{ix\xi}\, dx)$$

$$\hat{f}(\xi) = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\xi k})e^{-i\xi n/2}\frac{\sin(\xi/2)}{(\xi/2)}e^{i\xi/2}$$

$$\hat{f}(\xi) = (2\cos(\xi/2))^n \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}e^{i\xi/2}$$

Si on écrit:

$$\sum_k C_n^{(n+2k(a-b)+c)/2} \simeq (2/\pi)^{1/2}\sum_k (2\cos\frac{\pi k}{a-b})^n \frac{\sin[\pi k/(a-b)]}{k}e^{\pi i(c+1)k/(a-b)}, \qquad (4)$$

l'erreur alors commise est négligeable (en cours de rédaction).
On suppose que $c \geq 0$.

$$\mu_n(\omega(n) = c) = \sum_{a \geq c; b \leq 0}\ \sum_{\omega; \sup \omega = a, \inf \omega = b} \mu_n(\omega)$$

$$= \frac{e^{-\lambda(n-1)}}{Z_n}\sum_{a \geq c; b \leq 0} G_n(a, b, c)e^{-\lambda(a-b)}$$

En supposant que:

$$\lim_{n \to \infty}\frac{\log(Z_n)}{n} = -\lambda$$

on a, lorsque $n \to \infty$:

$$\mu_n(\omega(n) = c) = \text{const} \times \sum_{a \geq c; b \leq 0}(-\partial_a \partial_b H_n(a, b-1, c)e^{\lambda(a-b)}$$

$$= \text{const} \times \sum_{a > c; b < 0} e^{\lambda(a-b)} H_n(a, b, c)$$

On pose:

$$d = a - b$$

D'où:

$$\mu_n(\omega(n) = c) = \text{const} \times \sum_{d=c+2}^{\infty} e^{\lambda d} \sum_{a=c+1}^{d-1} H_n(a, a-d, c) \tag{5}$$

En utilisant (1) et (4), on obtient:

$$\sum_{a=c+1}^{d-1} H_n(a, a-d, c) = \sum_k C_n^{(n+2kd+c)/2} - C_n^{(n+2kd+2a-c)/2}$$

$$\simeq (2/\pi)^{1/2} \sum_k (2\cos(\pi k/d))^n \frac{\sin(\pi k/d)}{k} \sum_{a=c+1}^{d-1} [e^{i\pi k(c+1)/d} - e^{i\pi k(2a-c+1)/d}]$$

$$= (2/\pi)^{1/2} \sum_k (2\cos(\pi k/d))^n \frac{\sin(\pi k/d)}{k} [(d-c-1)e^{i\pi k(c+1)/d} + \frac{\sin(\pi k(c+1)/d)}{\sin(\pi k/d)} e^{i\pi k/d}]$$

$$= 2(2/\pi)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} (2\cos(\pi k/d))^n \frac{\sin(\pi k/d)}{k} [(d-c-1)\cos(\pi k(c+1)/d) + \cos(\pi k/d) \frac{\sin(\pi k(c+1)/d)}{\sin(\pi k/d)}]$$

$$= 2(2/\pi)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} (2\cos(\pi k/d))^n \frac{1}{k} [\frac{d-c-1}{2} \sin(\pi k(c+2)/d) - \frac{d-c-1}{2} \sin(\pi kc/d) + \cos(\pi k/d) \sin(\pi k(c+1)/d)] \tag{6}$$

Il reste à vérifier que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(Z_n)}{n} = -\lambda$$

On a

$$Z_n = \frac{1}{2^n} \sum_{\omega \in \Omega_n} \exp(-\lambda k(\omega))$$

$$\simeq 2(2/\pi)^{1/2} e^{-\lambda(n-1)} \sum_{|c| \leq n} \sum_{d=|c|+2}^{\infty} e^{\lambda d} \sum_{k=1}^{\infty} (\cos(\pi k/d))^n \frac{\sin(\pi k/d)}{k}$$

$$[(d-|c|-1)\cos(\pi k(c+1)/d) + \cos(\pi k/d) \frac{\sin(\pi k(|c|+1)/d)}{\sin(\pi k/d)}]$$

Donc

$$\frac{\log(Z_n)}{n} \simeq -\lambda + \frac{\lambda}{n} + \frac{\log W_n}{n}$$

où

$$W_n = 2(2/\pi)^{1/2} \sum_{|c| \leq n} \sum_{d=|c|+2}^{\infty} e^{\lambda d} \sum_{k=1}^{\infty} (\cos(\pi k/d))^n$$

$$\frac{\sin(\pi k/d)}{k} [(d-|c|-1)\cos(\pi k(c+1)/d) + \cos(\pi k/d) \frac{\sin(\pi k(|c|+1)/d)}{\sin(\pi k/d)}]$$

$$\leq 4(2/\pi)^{1/2}(n+1) \sum_{d=2}^{\infty} d e^{\lambda d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k/d)}{k}$$

Comme

$$\sum_{d=2}^{\infty} d e^{\lambda d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k/d)}{k} < \infty,$$

on a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log W_n}{n} = 0$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(Z_n)}{n} = -\lambda$$

On pose $d = [\eta n^{1/3}]$ et $c = [\nu n^{1/3}]$. Lorsque $n \to \infty$, le terme avec k=1 dans la somme de droite prédomine. Pour le voir, on décompose la série de la manière suivante:

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_k = \sum_{s=2,3,..,d/2} u_s + \sum_{l=1}^{\infty} [u_{ld-1} + u_{ld+1} + \sum_{s=2,3,..,d/2} (u_{ld-s} + u_{ld+s})]$$

où

$$u_k = (2\cos(\pi k/d))^n \frac{1}{k} [\frac{d-c-1}{2} \sin(\pi k(c+2)/d) - \frac{d-c-1}{2} \sin(\pi kc/d)$$
$$+ \cos(\pi k/d)\sin(\pi k(c+1)/d)]$$

a).

$$|\sum_{l=1}^{\infty}(u_{ld-1} + u_{ld+1})| \leq \frac{d-c-1}{2} 2^n |\cos(\pi/d)|^n | \sum_{r=0,2} \sum_{l=1}^{\infty} [\frac{\sin(\pi(ld-1)(c+r)/d)}{ld-1}$$
$$+ \frac{\sin(\pi(ld+1)(c+r)/d)}{ld+1}]| + 2^n |\cos(\pi/d)|^n | \sum_{l=1}^{\infty} [\frac{\sin(\pi(ld-1)(c+1)/d)}{ld-1} + \frac{\sin(\pi(ld+1)(c+1)/d)}{ld+1}]|$$

$\forall r = 0, 1, 2,$

$$|\cos(\pi/d)|^n | \sum_{l=1}^{\infty} \{ \frac{\sin(\pi(ld-1)(c+r)/d)}{ld-1} + \frac{\sin(\pi(ld+1)(c+r)/d)}{ld+1} \}|$$
$$\leq |\cos(\pi/d)|^n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{l^2 d^2}$$
$$\leq \frac{K}{d^2} |\cos(\pi/d)|^n$$

b).
$\forall s = 2, 3, .., d/2,$

$$|u_s + \sum_{l=1}^{\infty} (u_{ld-s} + u_{ld+s})| \leq \frac{d-c-1}{2} 2^n |\cos(\pi s/d)|^n$$

$$|\sum_{r=0,2}\{\frac{sin(\pi s(c+r)/d)}{s}+\sum_{l=1}^{\infty}[\frac{\sin(\pi(ld-s)(c+r)/d)}{ld-s}$$

$$+\frac{\sin(\pi(ld+s)(c+r)/d)}{ld+s}]\}|+2^n|\cos(\pi s/d)|^n|\frac{sin(\pi s(c+1)/d)}{s}+$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}[\frac{\sin(\pi(ld-s)(c+1)/d)}{ld-s}+\frac{\sin(\pi(ld+s)(c+1)/d)}{ld+s}]|$$

$\forall r=0,1,2,$

$$|\cos(\pi s/d)|^n|\sum_{l=1}^{\infty}\{\frac{\sin(\pi s(c+r)/d)}{s}+\sum_{l=1}^{\infty}[\frac{\sin(\pi(ld-s)(c+r)/d)}{ld-s}$$

$$+\frac{\sin(\pi(ld+s)(c+r)/d)}{ld+s}]|\leq|\cos(\pi s/d)|^n\{2+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2s}{l^2d^2-s^2}\}$$

$$\leq K|\cos(\pi/d)|^{(1+\varepsilon)n}$$

où $\varepsilon>0, K>0$ ne dépendent pas de n,c,d ou s.
On a alors:

$$|\sum_{l=1}^{\infty}(u_{ld-1}+u_{ld+1})|\leq K\frac{d-c+1}{2d^2}2^n|\cos(\pi/d)|^n$$

et

$$|\sum_{s=2,..,d/2}[u_s+\sum_{l=1}^{\infty}(u_{ld-s}+u_{ld+s})]|\leq K\frac{d-c+1}{2}(d/2-1)2^n|\cos(\pi/d)|^{(1+\epsilon)n}$$

Donc, $u_1\simeq 2^n(\cos(\pi/d))^n\sin(\pi/d)[(d-c-1)\cos(\pi(c+1)/d)+\cos(\pi/d)\frac{\sin(\pi(c+1)/d)}{\sin(\pi/d)}]$ prédomine. A partir de (5) et (6), on obtient que lorsque $n\to\infty$:

$$\mu_n(\omega(n)=[\nu n^{1/3}])=\text{const}\times 2^n n^{1/3}\sum_{d=c+2}^{\infty}e^{\lambda d}(\cos(\pi/d))^n\sin(\pi/d)$$

$$[(d-c-1)\cos(\pi(c+1)/d)+\cos(\pi/d)\frac{\sin(\pi(c+1)/d)}{\sin(\pi/d)}][1+o(1)]$$

$$\mu_n(\omega(n)=[\nu n^{1/3}])=\text{const}\times 2^n n^{1/3}\int_{\nu}^{\infty}d\eta[\exp(\lambda\eta-\pi^2/(2\eta^2))]^{n^{1/3}}$$
$$\times[\pi(1-\nu/\eta)\cos(\pi\nu/\eta)+\sin(\pi\nu\eta)][1+o(1)] \qquad (7)$$

La fonction $\eta\to\lambda\eta-\pi^2/(2\eta^2)$ prend sa valeur maximale au point $\eta=s(\lambda)=(\pi^2/|\lambda|)^{1/3}$. Donc, par la méthode de Laplace, (7) est proportionnelle à $\pi(1-\nu/s)\cos(\pi\nu/s)+\sin(\pi\nu/s)$.

5 Preuve du théorème 2.

Nous allons tout d'abord montrer que:

$$\lim \omega(n)/n = \pm r$$

$$\text{et } \lim[\omega(n) - rn]/[(1-r^2)n]^{1/2} = N(0,1).$$

D'après le lemme 1, on doit considérer la loi conjointe du point final et des points extrêmaux de la trajectoire aléatoire.
Soit $a = [nx], b = [ny], c = [nz]$, où $x \geq 0,\ y \leq 0,\ x \geq z \geq y, x > y$ *et* $x - y - \frac{|z|}{2} < 1/2$.
A partir du lemme 3, on montre que:

$$G_n(a,b,c) = -\frac{1}{n^2}\frac{\partial^2 H_n(a,b,c)}{\partial_x \partial_y}[1 + O(1/n)]$$

Le nombre de termes dans (1) étant fini, il suffit de trouver une formule asymptotique pour le plus grand. Le plus grand terme non nul aprés différentiation est $C_n^{(n+2(a-b)-|c|)/2}$.
On utilise ensuite la formule:

$$\begin{aligned}(C_n^k)^{-1} &= (n+1)\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} \\ &= (n+1)B(k+1, n-k+1) \\ &= (n+1)\int_0^1 \tau^k(1-\tau)^{n-k}\, d\tau\end{aligned}$$

où B est la fonction bêta.

$$(C_n^{(n+2(a-b)-|c|)/2})^{-1} = (n+1)\int_0^1 e^{n[(1/2+(x-y)-|z|/2)\log\tau + (1/2-(x-y)+|z|/2)\log(1-\tau)]}\, d\tau[1 + O(1)]$$

On applique la méthode de Laplace.
$f(\tau) = (1/2 + (x-y) - |z|/2)\log\tau + (1/2 - (x-y) + |z|/2)\log(1-\tau)$ prend sa valeur maximale en $1/2 + (x-y) - |z|/2$, d'où:

$$\begin{aligned}(C_n^{(n+2(a-b)-|c|)/2})^{-1} = \exp\{&n[(1/2 + (x-y) - |z|/2)\log(1/2 + (x-y) - |z|/2) \\ &+ (1/2 - (x-y) + |z|/2)\log(1/2 + (y-x) + |z|/2)] + \text{const} \times \ln n + O(1)\}\end{aligned}$$

On a donc

$$\mu_n(\inf\omega = b, \sup\omega = a, \omega(n) = c) = \exp[-n\gamma(x,y,z) + \text{const} \times \ln n + O(1)]$$

où $\gamma(x,y,z) = (1/2 + (x-y) - |z|/2)\log(1/2 + (x-y) - |z|/2)$

$$+ (1/2 - (x-y) + |z|/2)\log(1/2 + (y-x) + |z|/2) - \lambda(x-y)$$

On montre que la fonction γ prend ses valeurs minimales sur les frontières $S_+ = \{y = 0, x = z\}$ et $S_- = \{x = 0, y = z\}$ du domaine D={(x,y,z): $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x \geq z \geq y, x > y$ et $x - y - \frac{|z|}{2} < 1/2\}$.
γ est minimale en $P_+ = (r, 0, r)$ sur S_+ et en $P_- = (0, -r, -r)$ sur S_-
où

$$r = \frac{e^{2\lambda} - 1}{e^{2\lambda} + 1}$$

et

$$(\gamma|_{S_\pm})''(P_\pm) = 1/(1 - r^2).$$

Donc,

$$\mu_n(\inf \omega = b, \sup \omega = a, \omega(n) = c) = \exp[-n(\gamma(P_\pm) + 1/2(z \pm r)^2(\gamma|_{S_\pm})''(P_\pm) + O((z \pm r)^2)) + \text{const} \times \ln n + O(1)]$$

On en déduit le théorème 2 pour t=1.

Soit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_s = 1$ une subdivision de l'intervalle [0,1].
On pose:
$\forall j = 0, .., s - 1$,
$a_j = [([nt_{j+1}] - [nt_j])x_j], b_j = [([nt_{j+1}] - [nt_j])y_j], c_{j+1} = [([nt_{j+1}] - [nt_j])z_j]$.

$$\mu_n(\inf_{[nt_j] \leq i \leq [nt_{j+1}]} \omega(i) = b_j, \sup_{[nt_j] \leq i \leq [nt_{j+1}]} \omega(i) = a_j, \omega([nt_{j+1}]) = c_{j+1})$$

$$= \exp(-([nt_{j+1}] - [nt_j])\gamma(x_j, y_j, z_j) + \text{const} \times \ln([nt_{j+1}] - [nt_j]) + O(1)]$$

où

$$\gamma(x, y, z) = (1/2 + (x - y) - |z|/2) \log(1/2 + (x - y) - |z|/2) + (1/2 - (x - y) + |z|/2) \log(1/2 + (y - x) + |z|/2) - \lambda(x - y)$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on peut choisir une subdivision $0 = t_0 < t_1 < .. < t_s = t$ de [0,t] et poser:
$a = [[nt]x], b = [[nt]y], c = [[nt]z]$.

$$\mu_n(\inf \omega = b, \sup \omega = a, \omega([nt]) = c)$$

$$= \mu_n(\bigcap_{j=0}^{s-1} \{\inf_{[nt_j] \leq i \leq [nt_{j+1}]} \omega(i) = b_j, \sup_{[nt_j] \leq i \leq [nt_{j+1}]} \omega(i) = a_j, \omega([nt_{j+1}]) = c_{j+1}\})$$

$$= \prod_{j=0}^{s-1} \mu_n(\inf_{[nt_j] \leq i \leq [nt_{j+1}]} \omega(i) = b_j, \sup_{[nt_j] \leq i \leq [nt_{j+1}]} \omega(i) = a_j, \omega([nt_{j+1}]) = c_{j+1})$$

$$= \exp\{-[nt][\gamma(P_\pm) + 1/2(z \pm r)^2(\gamma|_{S_\pm})''(P_\pm) + O((z \pm r)^2)] + \text{const} \times \sum_{j=0}^{s-1} \ln([nt_{j+1}] - [nt_j]) + O(1)\}$$

D'où le théorème 2.

6 Conclusion.

On a obtenu des lois limites conditionnelles décrivant une transition de phase en dimension 1. Le problème reste ouvert en dimension $d > 1$. La méthode utilisée dans cet article ne s'applique plus en dimension supérieure, car il n'est plus possible d'établir des lemmes combinatoires tels ceux rencontrés dans le paragraphe 3. Toutefois, il est possible que la méthode marche sur l'arbre (recherche en cours), sa structure étant plus riche que celle de Z^d et on peut s'attendre à trouver des lois limites conditionnées par un nombre infini de points. Les méthodes de Madras et Slade [6] permettent peut-être de résoudre le problème.

REFERENCES

1. W. FELLER, *An Introduction to the Probability Theory and its Applications,* Vol. 1 (McGraw-Hill, New York, 1970).
2. E. HEWITT and K. A. ROSS, *Abstract Harmonic Analysis,* Vol. 2 (Springer-Verlag, New York, 1970).
3. S.KUSUOKA, *The Path Property of Edward's Model for Long Polymer Chains in Three Dimensions,* in *Infinite Dimensional Analysis and Stochastic Processes,* S.Albeverio, ed. (Pitman, Boston, 1985), pp. 48-65.
4. S.KUSUOKA, *Asymptotics of Polymer Measures in One Dimension,* in *Infinite Dimensional Analysis and Stochastic Processes,* S.Albeverio, ed. (Pitman, Boston, 1985), pp. 66-82.
5. J.F LE GALL, *Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan, et la méthode de renormalisation de Varadhan,* Séminaire de probabilité XIX, Lectures notes in mathematics, Vol. 1123, Springer, Berlin Heidelberg New York, 314-331, 1985.
6. MADRAS et SLADE, *The self-avoiding walk,* Probability and Its Applications (Birkhauser Boston 1993).
7. J.PASCHE, *Comportement critique de modèle d'Edwards à deux dimensions,* Thèse de l'Université de Rennes I (1992).
8. S.R.S VARADHAN, Appendix to euclidian quantum field theory by K.Symanzik, *Local quantum theory* (R.Jost (ed.), Academic press, New York, 1969).
9. J.WESTWATER, *On Edward's Model for Long Polymer Chains,* Commun. Math. Phys. **72**:131-174 (1980).
10. J.WESTWATER,*On Edward's Model for Polymer Chains,* Commun. Math. Phys. **79**:53-73 (1981).
11. J.WESTWATER,*On Edward's Model for Polymer Chains,* Commun. Math. Phys. **84**:459-470 (1982).
12. J.WESTWATER,*On Edward's Model for Polymer Chains,* in *Trends and Developments in the Eighties,* S.Albeverio and Ph.Blanchard, eds.,384-404 (World Publishing Co., Singapore, 1985).
13. H. ZOLADEK, *One-Dimensional Random Walk with Self-Interaction,* Journal of Statistical Physics 47 (1987), no 3-4, 543-550.