PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

FRANÇOIS COQUET
JEAN MÉMIN
YOUSSEF OUKNINE

Distance en loi de solutions d'équations différentielles stochastiques avec temps local

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995___2_A2_0>

DISTANCE EN LOI DE SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES AVEC TEMPS LOCAL

François Coquet(*), Jean Mémin(*), Youssef Ouknine(**)

(*) : IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex.
(**) : Faculté des Sciences Semlalia, Université Cadi Ayyad, MARRAKECH.

Résumé. Etant donnée une suite (M^n) de martingales continues convergeant vers un mouvement brownien, on étudie, en fonction de la vitesse de convergence des variations quadratiques de cette suite, la vitesse de convergence de solutions d'équations différentielles conduites par les M^n et faisant intervenir le temps local.

Abstract. Being given sequence of continuous martingales M^n converging to a Brownian motion, we study the rate of convergence for solutions of stochastic differential equations driven by the M^n's and involving local times, in terms of the rate of convergence of the quadratic variations of the sequence.

I. Introduction- Convergence de la suite de temps locaux associée à une suite de martingales continues

On se donne une suite (M^n) de martingales locales continues sur $[0,T]$, où T est un réel positif fixé, et on suppose que $E(<M^n>_T) < \infty$. On notera dans la suite

$$\mu^n = E\Big(\sup_{0\le t\le T} |<M^n>_t - t|\Big)$$

et, pour une martingale locale quelconque X, $L_t^a(X)$ le temps local au point a et à l'instant t associé à X :

$$L_t^a(X) = |X_t - a| - a - \int_0^t sgn(X_s - a)dX_s,$$

où $sgn(x) = 1$ si $x > 0$, et $sgn(x) = -1$ si $x \le 0$.

Nous renvoyons au livre [8] de Revuz et Yor pour la terminologie et les propriétés de base du temps local.

Dans l'article [1], les deux premiers auteurs ont donné des résultats de majoration de la vitesse de convergence en loi pour des solutions d'équations différentielles stochastiques conduites par des martingales non nécessairement continues vers une diffusion. Nous nous proposons ici de donner une majoration de la distance en loi entre deux solutions d'équations différentielles stochastiques faisant intervenir le temps local. L'une de ces équations différentielles est conduite par un mouvement Brownien, l'autre par M^n ; la majoration sera obtenue en termes de μ^n.

Dans un premier temps, nous montrons un théorème limite simple pour les temps locaux, qui est contenu dans le résultat beaucoup plus général de Słomiński [9].

Proposition 1. *Avec les notations précédentes, si* (M^n) *converge en loi vers* M, *alors*

$$\left(M^n, L^a(M^n), \int_0^{\cdot} sgn(M_s^n - a)dM_s^n\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(M, L^a(M), \int_0^{\cdot} sgn(M_s - a)dM_s\right).$$

Démonstration : Tout d'abord, la suite $\left(M^n, L^a(M^n), \int_0^{\cdot} sgn(M_s^n - a)dM_s^n\right)$ est tendue : en effet, M^n étant une martingale continue, la suite (M^n) vérifie la condition U.T. de [5] ; on a donc convergence de la suite $(M^n, < M^n >)$ vers $(M, < M >)$. De plus, on a

$$< \int_0^{\cdot} sgn(M_s - a)dM_s >_t = < M >_t, \tag{1}$$

d'où, d'après le théorème VI.4.13 du livre [4] de Jacod et Shiryaev, la tension du processus $\int_0^{\cdot} sgn(M_s - a)dM_s$; enfin, comme

$$L_t^a(M^n) = |M_t^n - a| - a - \int_0^t sgn(M_s^n - a)dM_s, \tag{2}$$

on a la tension désirée. On peut donc, à une extraction de sous-suite près, considérer que la suite $\left(M^n, L^a(M^n), \int_0^{\cdot} sgn(M_s^n - a)dM_s^n\right)$ converge en loi vers un triplet (M, L, N), où N est une martingale locale, et L un processus croissant continu. De plus, on a d'après (2) la relation

$$L_t = |M_t - a| - a - N_t \tag{3}$$

pour tout réel positif t.
On tire alors de (1) et (3) que $< N >_t = < M >_t = < \int_0^{\cdot} sgn(M_s - a)dM_s >_t$; par ailleurs, en notant $N^n = \int_0^{\cdot} sgn(M_s^n - a)dM_s^n$, on a la convergence en loi de $< N^n, M^n > = M^n N^n - N^n \cdot M^n - M^n \cdot N^n$ vers $MN - N \cdot M - M \cdot N = < N, M >$.
Cela permet, en écrivant N_t sous la forme $\int_0^t H_s dM_s + \hat{N}_t$, pour une martingale locale $\hat{N}$ orthogonale à N, de conclure que $N = \int_0^{\cdot} sgn(M_s - a)dM_s$, puis, par (3), que L est le temps local en a de M, ce qui identifie la limite et achève la démonstration. ∎

Le résultat suivant donne une majoration de la vitesse de convergence dans la Proposition 1, dans le cas où M est un mouvement Brownien. Nous allons pour cela utiliser la distance de Lévy-Prokhorov et un Théorème de plongement du mouvement brownien dans les martingales de carré intégrable dû à Monroe [6]. Nous nous contentons ici de résumer la méthode, renvoyant le lecteur à [2] pour plus de détails.

Soit $C([0,T],\mathbf{R})$ l'espace des fonctions de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}$) continues, muni de la topologie de la convergence uniforme et de sa tribu des boréliens $\mathcal{C}$. Etant donnés deux processus X et Y à valeurs dans $C([0,T],\mathbf{R})$, la distance de Lévy-Prokhorov $\Pi(P_X,P_Y)$ (notée $\Pi(X,Y)$) entre leurs lois est définie par :

$$\Pi(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : \forall A \in \mathcal{C}, P_X(A) \leq P_Y(A^\varepsilon) + \varepsilon\},$$

où $A^\varepsilon = \{x : d(A,x) < \varepsilon\}$, et $d(A,x) = \inf_{x' \in A} d(x,x')$.
Rappelons par ailleurs que la distance de Ky-Fan associée à la topologie de la convergence uniforme entre deux processus continus B définis sur le même espace probabilisé s'écrit

$$\mathcal{K}(A,B) = \inf\{\varepsilon : P(\|A-B\|_T \geq \varepsilon) \leq \varepsilon\},$$

avec la notation $\|A-B\|_T = \sup_{0\leq t\leq T} |A_t - B_t|$. .
La distance de Lévy-Prokhorov entre les lois de A et$B$ est alors plus petite que $\mathcal{K}(A,B)$, et il existe, sur un espace de probabilité adéquat, des processus A' et B', de mêmes lois que A et B respectivement, tels que $\Pi(A,B) = \mathcal{K}(A',B')$.
En ce qui concerne la méthode de plongement, rappelons que toute martingale continue de carré intégrable peut être plongée dans le mouvement Brownien au sens où, il existe un espace de probabilité filtré supportant un mouvement Brownien W sur lequel on peut trouver un changement de temps continu (τ_t) tel que la loi du couple $(W_\tau, < W >_\tau)$ soit la même que la loi de $(M, < M >)$.
Nous avons alors le Théorème suivant :

Théorème 1. *Sous les conditions de la Proposition 1, et si M est un mouvement Brownien,*

$$\Pi(L^a(M^n), L^a(M)) \leq O(\mu^{1/3}|\ln \mu|).$$

Démonstration. Nous plongeons donc M^n dans un mouvement brownien W, sur un espace $(\overline{\Omega}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T}, \overline{P})$, de telle sorte que $\Pi(L^a(M^n), L^a(M)) = \Pi(L^a(W_\tau), L^a(W)) \leq \mathcal{K}(L^a(W_\tau), L^a(W))$. C'est ce dernier terme que nous allons maintenant majorer.
Pour ε fixé, on a par (2)

$$\begin{aligned}\overline{P}\Big(\|L^a_t(W_\tau), L^a_t(W)\|_T \geq \varepsilon\Big) \leq & \overline{P}\Big(\|W_{\tau.} - W\|_T \geq \varepsilon/2\Big) \\ & + \overline{P}\Big(\Big\|\int_0^\cdot sgn(W_{\tau_s})dW_{\tau_s} - \int_0^\cdot sgn(W_s)dW_s\Big\|_T \geq \varepsilon/2\Big) \quad (4)\end{aligned}$$

Mais, M^n étant une martingale continue, le changement de temps τ est continu, donc W est adapté à τ au sens de Jacod [3], p. 315. Le Lemme 10-18 de [3] nous dit alors que

$$\begin{aligned}&\overline{P}\Big(\Big\|\int_0^\cdot sgn(W_{\tau_s})dW_{\tau_s} - \int_0^\cdot sgn(W_s)dW_s\Big\|_T \geq \varepsilon/2\Big) \\ &= \overline{P}\Big(\Big\|\int_0^{\tau.} sgn(W_s)dW_s - \int_0^\cdot sgn(W_s)dW_s\Big\|_T \geq \varepsilon/2\Big).\end{aligned}$$

De plus, le processus $B := \int_0^\cdot sgn(W_s)dW_s$ est un mouvement brownien standard. Le membre de droite de (4) s'écrit donc, pour α positif arbitraire,

$$\overline{P}\Big(\|W_{\tau_\cdot} - W\|_T \geq \varepsilon/2\Big) + \overline{P}\Big(\|B_{\tau_\cdot} - B\|_T \geq \varepsilon/2\Big) \leq \overline{P}\Big(\sup_{|t-s|\leq\alpha} |W_t - W_s| \geq \varepsilon/2\Big)$$
$$+ \overline{P}\Big(\sup_{|t-s|\leq\alpha} |B_t - B_s| \geq \varepsilon/2\Big) + 2\overline{P}(\|\tau - Id\|_T > \alpha). \tag{5}$$

Maintenant, les termes du membre de droite de (5) ont été majorés dans [2] par l'inégalité bien connue (voir Outev, [7]) du module de continuité d'un mouvement brownien, et par l'équation (33), avec ici la circonstance particulière que l'on part d'une martingale continue : on arrive alors à

$$\overline{P}\Big(\sup_{|t-s|\leq\alpha} |W_t - W_s| \geq \varepsilon/2\Big) = \overline{P}\Big(\sup_{|t-s|\leq\alpha} |B_t - B_s| \geq \varepsilon/2\Big) \leq \frac{K}{\sqrt{\alpha}\varepsilon} e^{\frac{-\varepsilon^2}{K\alpha}} \tag{6}$$

pour une constante K bien choisie, et

$$\overline{P}(\|\tau - Id\|_T > \alpha) = P(\| < M^n > -Id\|_T \geq \alpha) \leq \mu/\alpha. \tag{7}$$

Résumons la conclusion, dont on peut trouver les détails dans [1] ou [2] : on est amené à choisir α pour que le second membre de (5) soit inférieur à ε. Pour ce, on pose $\alpha = C\mu^\delta$ (on ne s'intéresse pas à la valeur précise de C) ; on s'assure alors du caractère négligeable du terme apparaissant dans (6) en prenant $\varepsilon = \sqrt{\alpha}|\ln\mu|$; on reporte alors dans (7) pour trouver finalement que le meilleur choix pour δ est $2/3$, d'où le résultat.

II. Résultat principal

On s'intéresse maintenant à une suite d'équations différentielles du type

$$X_t^n = x + \int_0^t \sigma(X_s^n)dM_s^n + \int_0^t \nu(da)L_t^a(X^n), \tag{8}$$

ainsi qu'à l'équation limite:

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t \nu(da)L_t^a(X), \tag{9}$$

où :
ν est une mesure finie sur $\mathbf{R}$, vérifiant $\nu(\{x\}) < 1/2$ pour tout x ;
σ est une application à variation bornée, minorée par une constante $\varepsilon > 0$;
(M^n) est une suite de martingales continues convergeant en loi vers un mouvement brownien ;
B est un mouvement brownien standard.

On note $\Pi(X^n, X)$ la distance de Lévy-Prokhorov entre X^n et X calculée sur l'intervalle $[0, T]$.
Nous commençons par préciser un résultat de [1] :

Lemme 1. *Si M est une martingale locale continue telle que $E(< M >_T) < \infty$, si τ est une application à variation bornée, minorée par une constante strictement positive, et si Z et W désignent les solutions uniques des équations différentielles*

$$Z_t = x_0 + \int_0^t \tau(Z_s)dM_s \tag{10}$$

et

$$W_t = x_0 + \int_0^t \tau(W_s)dB_s, \tag{11}$$

alors

$$\Pi(W, Z) \leq O(\mu^{1/3}|\ln \mu|).$$

Preuve. Il suffit de reprendre la remarque de la fin de l'article [1], et de vérifier que la démonstration n'utilise pas explicitement les hypothèses de bornitude et de lipschitzianité sur le coefficient de diffusion. Il s'ensuit que le résultat reste vrai, pourvu qu'on ait unicité de la solution des EDS (10) et (11), ce qui est assuré par les hypothèses faites sur τ.

On peut maintenant énoncer le

Théorème 2. $\Pi(X^n, X) \leq O(\mu^{1/3}|\ln \mu|)$

Preuve. Suivant Stroock et Yor [10], nous considérons

$$F_\nu(t) = \int_0^t e^{-2\nu^c]-\infty,x]} \prod_{y \leq x} \Big(1 - 2\nu(\{y\})\Big)dx. \tag{12}$$

La formule d'Itô appliquée à $F_\nu(X)$ donne alors :

$$\begin{aligned}
F_\nu(X_t) &= F_\nu(x) + \int_0^t F_\nu'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int F_\nu''(da)L_t^a(X) \\
&= F_\nu(x) + \int_0^t F_\nu'(X_s)\sigma(X_s)dB_s + \int_0^t F_\nu'(X_s)\int \nu(da)dL_s^a(X) + \frac{1}{2}\int F_\nu''(da)L_t^a(X) \\
&= F_\nu(x) + \int_0^t F_\nu'(X_s)\sigma(X_s)dB_s + \int F_\nu'(a)L_t^a(X)\nu(da) + \frac{1}{2}\int F_\nu''(da)L_t^a(X),
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que la mesure $dL_s^a(X)$ ne charge que l'ensemble $\{X_s = a\}$. Il en ressort que

$$F_\nu(X_t) = F_\nu(x) + \int_0^t F'\nu(X_s)\sigma(X_s)dB_s \tag{13}$$

dès que

$$\int F'_\nu(a)L_t^a(X)\nu(da) + \frac{1}{2}\int F''_\nu(da)L_t^a(X) = 0,$$

ce qui est vérifié avec notre choix de F_ν.
On vient donc de montrer que $F_\nu(X)$ était solution de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = F_\nu(x) + \int_0^t (\sigma \times F'_\nu) \circ F_\nu^{-1}(Y_s)dB_s. \tag{14}$$

On trouve de la même façon que $F_\nu(X^n)$ est solution de l'EDS

$$Y_t^n = F_\nu(x^n) + \int_0^t (\sigma \times F'_\nu) \circ F_\nu^{-1}(Y_s^n)dM_s^n. \tag{15}$$

Nous pouvons maintenant majorer la vitesse de convergence en loi de Y_n vers Y définis par (14) et (15), à l'aide des résultats de [1] et du Lemme 1. En effet, on a uniformément $\sigma > \varepsilon > 0$; de plus, comme ν est une mesure finie, vérifiant $\nu(\{x\}) < 1/2$ pour tout x, on a, pour tout a,

$$F'_\nu(a) \geq e^{-2\nu^c(\mathbf{R})} \prod_y \Big(1 - 2\nu(\{y\})\Big) > 0,$$

le produit dans l'expression ci-dessus étant strictement positif, puisque $\sum_y \nu\{y\} < \infty$. Les hypothèses du Lemme 1 sont donc vérifiées, avec $\tau = (\sigma \times F'_\nu) \circ F_\nu^{-1}$.
On a donc

$$\Pi(F_\nu(X^n), F_\nu(X)) \leq O\Big(\mu^{1/3}|\ln\mu|\Big). \tag{16}$$

Enfin, on peut trouver, sur un espace de probabilité adéquat, deux processus $\overline{Y}^n$ et $\overline{Y}$, respectivement de même loi que $F_\nu(X^n)$ et $F_\nu(X)$, tels que

$$\Pi(F_\nu(X^n), F_\nu(X)) = \Pi(\overline{Y}^n, \overline{Y}) = \mathcal{K}(\overline{Y}^n, \overline{Y}). \tag{17}$$

Mais l'application $x \to F_\nu(x)$ est bi-lipschitzienne, ainsi que sa réciproque. il en découle immédiatement que $\mathcal{K}(\overline{Y}^n, \overline{Y})$ et $\mathcal{K}(F_\nu^{-1}(\overline{Y}^n), F_\nu^{-1}(\overline{Y}))$ sont du même ordre de grandeur. Comme $F_\nu^{-1}(\overline{Y}^n)$ et $F_\nu^{-1}(\overline{Y})$ ont respectivement même loi que X^n et X, le résultat s'ensuit de (16) et (17). ∎

Remarque Si on suppose maintenant que ν est $1/2\delta_a$, les équations (8) et (9) sont des équations de réflexion. Les techniques du Théorème 2 ne s'appliquent plus, mais on majore alors directement la distance entre X^n et X par celle entre les solutions des équations sans temps local, et le résultat précédent reste toujours valable.

Références.

[1] F. Coquet, J. Mémin : *Vitesse de convergence en loi pour des solutions d'équations différentielles stochastiques vers une diffusion*, à paraître au Séminaire de Probabilités XXVIII.
[2] F. Coquet, J. Mémin, L. Vostrikova : *Rate of convergence in the functional limit theorem for likelihood processes*, à paraître dans Mathematical Methods of Statistics.
[3] J. Jacod : **Calcul stochastique et problèmes de martingales.** Lect. Notes in Math. 714, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1979.
[4] J. Jacod, A. N. Shiryaev : **Limit theorems for stochastic processes.** Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1987.
[5] J. Mémin, L. Słomiński : *Condition UT et stabilité en loi des solutions d'équations différentielles stochastiques*, Lec. Notes in Maths 1485, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1991.
[6] I. Monroe : *On embedding right-continuous martingales in Brownian motion*, Ann. Math. Stat. 43, 1293-1311, 1972.
[7] S.A. Outev : *Remark on rate of convergence in the invariance principle*, Sibirski Math. Journal XXII, 206-209, 1981.
[8] D. Revuz, M. Yor : **Continuous martingales and Brownian motion**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1991.
[9] L. Słomiński : *On existence, uniqueness and stability of solutions of multidimensional SDE's with reflecting boundary conditions*, Ann. Inst. H. Poincaré 29, 163-198, 1993.
[10] D.W. Stroock et M. Yor : *Some remarkable martingales*, Lec. Notes in Maths 850, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1981.