J.-P. Conze

A. Raugi

Fonctions propres pour un opérateur de transition

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995___2_A1_0>

Fonctions propres pour un opérateur de transition

J.-P. Conze et A. Raugi

Résumé. - *Nous déterminons, par une méthode élémentaire, les fonctions propres de l'opérateur défini sur l'intervalle ouvert* $]0,1[$ *par :* $P_1 f(x) = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$.

Introduction

Considérons l'opérateur P_1 défini par

$$P_1 f(x) = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}),\ x \in]0,1[.$$

Nous recherchons les fonctions propres de l'opérateur P_1, qui sont soit bornées sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, soit continues sur $]0,1[$. Ces fonctions peuvent avoir un comportement singulier au bord, qui dépend de la valeur propre. Dans le cas, très simple, de l'opérateur P_1, il est possible d'expliciter les fonctions propres et ainsi de préciser leur comportement au bord.

Pour les valeurs de λ vérifiant $|\lambda| = 1$ ou $|\lambda| = \frac{1}{2}$, qui apparaissent comme des valeurs critiques, nous devons faire une hypothèse de régularité pour obtenir une forme explicite des fonctions propres.

Cette étude donne également des renseignements sur les fonctions propres d'autres opérateurs déduits de l'opérateur P_1 et peut être étendue aux opérateurs définis par des noyaux lipschitziens du type de [3], [4].

Plan de l'article :

I. Préliminaires

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$, vérifiant l'équation

$$P_1 f(x) = \lambda f(x), \ \forall x \in]0,1[, \tag{E_λ}$$

λ étant un nombre complexe. Posons $\beta = 1 + \log_2 \lambda$, si λ est réel > 0, $\beta = 1 + \log_2 |\lambda| + i \ Arg\lambda / \ln 2$, $Arg\,\lambda \in [0, 2\pi[$, dans le cas où λ est un nombre complexe non nul. Nous avons $2^\beta = 2\lambda$.

Nous dirons qu'une fonction f définie sur $]0,1[$ est paire (resp. impaire), si elle vérifie $f(1-x) = f(x)$, (resp. $f(1-x) = -f(x)$), $\forall x \in]0,1[$.

L'opérateur P_1 commute avec l'opération de symétrie $x \to 1-x$. On peut donc décomposer toute fonction propre de P_1 en la somme d'une fonction propre paire et d'une fonction propre impaire, au sens de cette symétrie.

Nous commençons par établir des relations qui nous permettront de préciser le comportement au bord des fonctions propres. Nous mettrons en évidence des types de singularités dépendant de la valeur propre λ. Les valeurs $|\lambda| = 1$ et $|\lambda| = \frac{1}{2}$ apparaissent comme des cas critiques qui seront traités à part.

Lemme 1 : *Supposons que* $2|\lambda| > 1$ *(i.e.* $\Re e\,\beta > 0$*). Toute solution* f *de* (E_λ) *bornée sur l'intervalle* $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ *s'écrit*

$$f(x) = \frac{\phi_1(x)}{x^\beta} + \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta} + a(x), \ 0 < x < 1, \tag{f_0}$$

où ϕ_1 *et* ϕ_2 *sont des fonctions bornées sur* $]0,1]$ *vérifiant* $\phi_i(2x) = \phi_i(x)$, $\forall x \in]0, \frac{1}{2}]$, $\forall i \in \{1,2\}$ *et* a *est une fonction définie et bornée sur* $[0,1]$.

Si f *est une solution de* (E_λ) *continue sur* $]0,1[$, *alors on peut choisir* a *continue sur* $[0,1]$, *et* ϕ_1 *et* ϕ_2 *continues sur* $]0,1]$.

Lorsque f *est paire [resp. impaire], on peut choisir* a *paire [resp. impaire], et* $\phi_1 = \phi_2$ *[resp.* $\phi_1 = -\phi_2$*].*

Preuve : A partir de l'équation (E_λ), écrite sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} f(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2\lambda} f(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}),$$

et appliquée aux points $\frac{x}{2^k}$, $0 \leq k \leq n$, on obtient par combinaison :

$$f(x) = \frac{1}{(2\lambda)^n} f(\frac{x}{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\lambda)^k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}).$$

Posons $g(x) = x^\beta f(x)$. On obtient :

$$g(x) = g(\frac{x}{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^\beta}{(2\lambda)^k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}). \tag{f_1}$$

Si la série $\sum_1^\infty (2\lambda)^{-k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2})$ converge (ce qui est réalisé, uniformément en x, pour $2|\lambda| > 1$, si f est bornée au voisinage de $\frac{1}{2}$), alors, pour tout $x \in]0,1[$, la limite $\lim_{n\to\infty} g(\frac{x}{2^n})$ existe et ϕ définie par

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{x}{2^n})$$

vérifie :

$$\phi(2x) = \phi(x), \forall x \in]0, \frac{1}{2}]. \tag{f_2}$$

En passant à la limite dans (f_1), on obtient :

$$g(x) = \phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^\beta}{(2\lambda)^k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}),\ \forall x \in]0,1[.$$

D'où :

$$f(x) = \frac{\phi(x)}{x^\beta} + \frac{1}{2\lambda} f(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda)^k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}),\ \forall x \in]0,1[,$$

soit encore, en réutilisant la relation (E_λ) :

$$\frac{1}{2\lambda} f(\frac{x}{2}) = \frac{\phi(x)}{x^\beta} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda)^k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}),\ \forall x \in]0,1],$$

avec $\phi(1) = \phi(\frac{1}{2})$.

La fonction f s'écrit donc sur $]0, \frac{1}{2}]$, en tenant compte de (f_2) :

$$f(x) = x^{-\beta}\phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (2\lambda)^{-k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}),\ x \in]0, \frac{1}{2}]. \tag{f_3}$$

Comme on l'a vu, on peut se ramener au cas où la fonction f est paire ($\varepsilon = 1$), ou impaire ($\varepsilon = -1$). On peut dans ce cas représenter f sous la forme :

$$f(x) = \frac{\phi(x)}{x^\beta} + \varepsilon \frac{\phi(1-x)}{(1-x)^\beta} + a(x),\ 0 < x < 1,$$

la fonction a étant définie par :

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2\lambda})^k f(\frac{1}{2} + \frac{x}{2^k}) - \varepsilon \frac{\phi(1-x)}{(1-x)^\beta},\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

et $a(x) = \varepsilon a(1-x)$, pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

La forme générale (f_0) de f en résulte.

Si f est bornée sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2\lambda})^k f(\frac{1}{2} + \frac{x}{2^k})$$

est bornée sur $[0, \frac{1}{2}]$. Si de plus f est bornée sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, la formule (f_3) montre que ϕ est bornée sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Il en résulte, d'après (f_2) que ϕ est bornée sur $]0, 1]$ et que a est bornée sur $[0, 1]$.

Si f est continue, la convergence uniforme de la série dans (f_3) implique la continuité de ϕ et de a.

□

On note que, dans la relation (f_0), ϕ_1 et ϕ_2 sont déterminées de façon unique par f. Nous verrons plus loin que la réciproque est vraie pour $|\lambda| > \frac{1}{2}$.

Si λ est un nombre complexe de module $<\ 1$ et ψ une fonction bornée et de période 1 sur $\mathbb{R}$, la fonction g définie par

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \psi(2^n x),\ x \in \mathbb{R},$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$$P_1 g = \lambda g + P_1 \psi.$$

Réciproquement, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2 : *Soient λ un nombre complexe de module $<\ 1$ et h une fonction définie et bornée sur $[0, 1[$. Toute fonction g, définie et bornée sur $[0, 1[$, vérifiant l'équation fonctionnelle*

$$P_1 g(x) = \lambda g(x) + \lambda h(x),\ \forall x \in [0, 1[,$$

s'écrit sous la forme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \psi(2^n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n h(\{2^n x\}),\ x \in [0, 1[,$$

où ψ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, bornée et de période 1, vérifiant $\psi(x)+\psi(x+\frac{1}{2}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Si g est définie et continue sur $[0,1]$ avec $g(0) = g(1)$, ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Appelons $\widetilde{g}$ et $\widetilde{h}$ les périodisées de g et h définies, pour $x \in \mathbb{R}$, par : $\widetilde{g}(x) = g(\{x\})$, $\widetilde{h}(x) = h(\{x\})$.

On vérifie facilement que : $P_1\widetilde{g}(x) = \lambda\widetilde{g}(x) + \lambda\widetilde{h}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ce qui s'écrit aussi :

$$\lambda\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}[\widetilde{g}(\frac{x+1}{2}) - \widetilde{g}(\frac{x}{2})] - \widetilde{h}(x), \ \forall \in \mathbb{R}.$$

Par suite on a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$,

$$-\lambda\widetilde{g}(2^n x) + \widetilde{g}(2^{n-1}x) = \psi(2^{n-1}x) + \lambda\widetilde{h}(2^n x), \ \forall \in \mathbb{R},$$

en posant, pour $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{1}{2}[\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(x+\frac{1}{2})]$.

Après multiplication par λ^{n-1} et sommation sur $n \geq 1$, on obtient l'expression annoncée pour g. Les autres affirmations du lemme sont claires.

□

Remarque : Si les hypothèses du lemme sont vérifiées uniquement sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, alors la propriété reste vraie pour les réels de $]0,1[$ qui ne sont pas dyadiques.

II. Fonctions propres de P_1, pour $|\lambda| > 1$

Théorème 1 : *Supposons $|\lambda| > 1$. Toute solution de (E_λ) bornée sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ est de la forme :*

$$\frac{\phi_1(x)}{x^\beta} + \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{(x+k)^\beta}\phi_1(\frac{x+k}{2^{[\log_2 k]+1}}) + \frac{1}{(k+1-x)^\beta}\phi_2(\frac{k+1-x}{2^{[\log_2 k]+1}})],$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions bornées sur $]0,1]$ vérifiant (f_2), déterminées de façon unique par f.

Inversement, pour toutes fonctions ϕ_1 et ϕ_2 bornées sur $]0,1]$ et vérifiant (f_2), la formule précédente définit une fonction f solution de $P_1 f = \lambda f$ bornée sur tout compact de $]0,1[$.

Si f est une solution de (E_λ) continue sur $]0,1[$, les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 correspondantes sont continues sur $]0,1]$, et réciproquement.

Preuve : En appliquant la relation $P_1^n f = \lambda^n f$ à l'expression de f donnée par (f_0), on obtient :

$$f(x) = I_n^0(x) + I_n^1(x) + I_n^2(x),\ \forall n \geq 0, \tag{f_4}$$

avec :

$$I_n^0(x) = (2\lambda)^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} a(\frac{x}{2^n} + \frac{k}{2^n}),$$

$$I_n^1(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(x+k)^\beta} \phi_1(\frac{x}{2^n} + \frac{k}{2^n}),$$

$$I_n^2(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2^n - (x+k))^\beta} \phi_2(1 - \frac{x+k}{2^n}).$$

En utilisant la relation (f_2), on obtient :

$$\begin{aligned} I_n^1(x) &= \frac{\phi_1(x)}{x^\beta} + \sum_{p=0}^{n} \sum_{2^p \leq k < 2^{p+1}} \frac{1}{(x+k)^\beta} \phi_1(\frac{x+k}{2^{p+1}}), \\ &= \frac{\phi_1(x)}{x^\beta} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{(x+k)^\beta} \phi_1(\frac{x+k}{2^{[\log_2 k]+1}}). \end{aligned}$$

Et de même, en posant $\ell = 2^n - k - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n^2(x) &= \sum_{\ell=0}^{2^n-1} \frac{1}{(\ell+1-x)^\beta} \phi_2(\frac{\ell+1-x}{2^n}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{2^n-1} \frac{1}{(\ell+1-x)^\beta} \phi_2(\frac{\ell+1-x}{2^{[\log_2 \ell]+1}}). \end{aligned}$$

On a $\lim_n I_n^1(x) = 0$, car a est bornée, et on peut passer à la limite en n dans (f_4), ce qui donne l'expression de f.

□

Remarque : La fonction $1/\sin^2(\pi x)$ est une fonction propre pour P_1 de valeur propre 2. L'expression donnée dans le théorème redonne dans ce cas la formule classique :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+k)^2}. \tag{f_5}$$

III. Fonctions propres de P_1, pour $\frac{1}{2} < |\lambda| < 1$

Théorème 2 : *Supposons $\frac{1}{2} < |\lambda| < 1$. Toute solution f de (E_λ) bornée sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ est de la forme :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \psi(2^n x) + \frac{\phi_1(x)}{x^\beta} + \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Big[\frac{\phi_1((\{2^n x\}+1)/2)}{(\{2^n x\}+1)^\beta} + \frac{\phi_2((1-\{2^n x\}+1)/2)}{(1-\{2^n x\}+1)^\beta}\Big],$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonction bornées sur $]0,1]$, vérifiant (f_2) et ψ une fonction de période 1 sur $\mathbb{R}$, bornée, vérifiant $\psi(x) + \psi(x+\frac{1}{2}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Les fonctions ϕ_1, ϕ_2 et ψ sont déterminées de façon unique par f.

Inversement, pour toutes fonctions ϕ_1 et ϕ_2 bornées sur $]0,1]$, vérifiant (f_2) et toute fonction ψ de période 1 sur $\mathbb{R}$, bornée, vérifiant $\psi(x) + \psi(x+\frac{1}{2}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, la formule précédente définit une fonction f solution de (E_λ) bornée sur tout compact de $]0,1[$.

Preuve : Considérons l'expression de f donnée par la relation (f_0). L'équation fonctionnelle (E_λ) vérifiée par f, équivaut à la relation

$$\frac{1}{\lambda} P_1 a(x) = a(x) - h_1(x), \forall x \in]0,1[, \qquad (F)$$

avec

$$h_1(x) = \frac{\phi_1(\frac{1+x}{2})}{(1+x)^\beta} + \frac{\phi_2(\frac{1+(1-x)}{2})}{(1+(1-x))^\beta}.$$

Si l'équation (F) est vérifiée sur $[0,1[$, le lemme 2 nous donne l'expression voulue pour a et donc pour f. Les autres assertions du théorème étant claires, pour achever la preuve, nous montrons que (F) est vérifiée sur $[0,1]$. Nous avons, pour $x \in]0,1[$,

$$\frac{1}{2\lambda} f(\frac{x+1}{2}) = f(x) - \frac{1}{2\lambda} f(\frac{x}{2}) = \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta} - \frac{\phi_2(1-x)}{(2-x)^\beta} + a(x) - \frac{1}{2\lambda} a(\frac{x}{2}).$$

Il en résulte, pour $x = 0$, $a(0) = \frac{1}{2\lambda - 1} f(\frac{1}{2}) - \phi_2(1)$. En changeant la solution f de (E_λ) en $f(1-.)$, on obtient aussi : $a(1) = \frac{1}{2\lambda-1} f(\frac{1}{2}) - \phi_1(1)$.

Ces relations, jointes à :

$$a(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - 2\lambda[\phi_1(1) + \phi_2(1)],$$
$$h_1(0) = \phi_1(1) + \frac{1}{2\lambda}\phi_2(1),$$
$$h_1(1) = \phi_2(1) + \frac{1}{2\lambda}\phi_1(1),$$

permettent de vérifier aisément que l'équation fonctionnelle (F) est satisfaite sur $[0,1]$.

□

Remarque : Sous les hypothèses du théorème, si la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\phi_1(\frac{x+k}{2^{[\log_2 k]+1}})}{(x+k)^\beta}+\frac{\phi_2(\frac{1-x+k}{2^{[\log_2 k]+1}})}{(1-x+k)^\beta}\right]$$

a un sens pour tout $x\in[0,1]$, alors on a aussi :

$$f(x)=\frac{\phi_1(x)}{x^\beta}+\frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\phi_1(\frac{x+k}{2^{[\log_2 k]+1}})}{(x+k)^\beta}+\frac{\phi_2(\frac{1-x+k}{2^{[\log_2 k]+1}})}{(1-x+k)^\beta}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\psi_1(2^k x),$$

où ψ_1 est une fonction de période 1 sur $\mathbb{R}$, bornée, vérifiant $\psi_1(x)+\psi_1(x+\frac{1}{2})=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Théorème 3 : *Supposons* $\frac{1}{2}<|\lambda|<1$. *Toute solution* f *de* (E_λ) *continue sur l'intervalle* $]0,1[$ *est de la forme :*

$$\begin{aligned}f(x)=&c\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(x+k)^\beta}-\frac{1}{(1-x+k)^\beta}\right]\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\psi(2^k x)+\frac{\phi_1(x)}{x^\beta}+\frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta}\\&-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\left[\frac{\phi_1((\{2^n x\}+1)/2)}{(\{2^n x\}+1)^\beta}+\frac{\phi_2((1-\{2^n x\}+1)/2)}{(1-\{2^n x\}+1)^\beta}\right],\end{aligned}$$

où ϕ_1 *et* ϕ_2 *sont des fonction continues sur* $]0,1]$, *vérifiant* (f_2) *et* $\phi_1(1)=\phi_2(1)$, *c est une constante et* ψ *est une fonction continue de période 1 sur* $\mathbb{R}$, *vérifiant* $\psi(x)+\psi(x+\frac{1}{2})=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *Les fonctions* ϕ_1, ϕ_2, ψ *et la constante c sont déterminées de façon unique par* f.

Inversement, pour toutes fonctions ϕ_1 *et* ϕ_2 *continues sur* $]0,1]$, *vérifiant* (f_2) *et* $\phi_1(1)=\phi_2(1)$, *toute constante c et toute fonction* ψ *continue de période 1 sur* $\mathbb{R}$, *vérifiant* $\psi(x)+\psi(x+\frac{1}{2})=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, *la formule précédente définit une fonction* f *solution de* (E_λ) *continue sur* $]0,1[$.

Preuve : En reprenant la preuve du théorème 2, on voit que a est continue sur $[0,1]$, h_1 est continue sur $[0,1]$, ϕ_1 et ϕ_2 sont continues sur $]0,1]$. Le seul problème provient de la continuité de la fonction ψ associée à la fonction a par le lemme 2.

Si les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 vérifient la relation $\phi_1(1)=\phi_2(1)$, alors nous avons : $h_1(0)=h_1(1)=\phi_1(1)[1+\frac{1}{2\lambda}]$ et $a(0)=a(1)=\frac{1}{2\lambda-1}f(\frac{1}{2})-\phi_1(1)$, ce qui assure la continuité de ψ.

Dans le cas général, on se ramène à ce cas en remplaçant f par la fonction

$$f(x) - \frac{1}{2}[\phi_1(1) - \phi_2(1)]\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{(x+k)^\beta} - \frac{1}{1-x+k)^\beta}],$$

qui est encore solution de (E_λ) et est continue sur $]0,1[$.

□

IV. Fonctions propres de P_1, pour $0 < |\lambda| < 1/2$

Théorème 4 : *Supposons $0 < |\lambda| < 1/2$. Toute solution de (E_λ) bornée sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (resp. continue sur $]0,1[$) est de la forme :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \psi(2^k x),$$

pour une fonction ψ bornée (resp. continue), de période 1 sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\psi(x) + \psi(x+\frac{1}{2}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Inversement, pour toute fonction ψ bornée (resp. continue), de période 1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\psi(x) + \psi(x+\frac{1}{2}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, la formule précédente définit une fonction f solution de (E_λ) bornée sur $\mathbb{R}$ (resp. continue sur $\mathbb{R}$).

Preuve : On a, sur $]0,1[$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\lambda)^n} f(\frac{x}{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\lambda)^k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2});$$

d'où :

$$f(\frac{x}{2^n}) = (2\lambda)^n f(x) - \sum_{k=1}^{n} (2\lambda)^{n-k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}).$$

Soit M un majorant de f sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. On a, $\forall x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $\forall n \geq 0$:

$$|f(\frac{x}{2^n})| \leq M(1 + \frac{1}{1-2\lambda}),$$

ce qui montre que f est bornée sur $]0, \frac{1}{2}]$ et par suite, en appliquant ce résultat à la fonction symétrique de f, sur $]0,1[$.

Si f est continue sur $]0,1[$, montrons que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1, avec $f(0) = f(1) = \frac{1}{1-2\lambda} f(\frac{1}{2})$.

Soit (y_n) une suite de nombres positifs convergeant vers zéro. Notons $p_n = [\log_2(1/y_n)] - 1$. On a $y_n = 2^{-p_n} x_n$, avec $x_n \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, et on peut écrire :

$$f(y_n) = (2\lambda)^{p_n} f(x_n) - \sum_{k=1}^{p_n} (2\lambda)^{p_n - k} f(\frac{1}{2} + \frac{x_n}{2^k}).$$

Pour $\epsilon > 0$, il existe $\ell = \ell(\epsilon)$ tel que : $|f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2} + \frac{x_n}{2^k})| < \epsilon$, pour $k \geq \ell$. On a alors la majoration :

$$\begin{aligned} |f(\frac{1}{2}) \sum_{k=0}^{p_n} (2\lambda)^k - f(y_n)| &\leq (2\lambda)^{p_n} M + \sum_{k=0}^{p_n - \ell} (2\lambda)^k |f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2} + \frac{x_n}{2^k})| \\ &+ \sum_{k=p_n-\ell}^{p_n} (2\lambda)^k |f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2} + \frac{x_n}{2^k})| \\ &\leq (2\lambda)^{p_n} M + \frac{1}{2\lambda - 1}[\epsilon + 2M(2\lambda)^{p_n - \ell}]. \end{aligned}$$

Ceci montre la convergence :

$$\lim_n f(y_n) = -f(\frac{1}{2}) \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda)^k = \frac{1}{2\lambda - 1} f(\frac{1}{2}).$$

Il en résulte que f peut être prolongée par continuité en 0. En remplaçant f par $f(1 - .)$, on obtient que f est aussi prolongeable par continuité au point 1, avec $f(0) = f(1) = \frac{1}{2\lambda-1} f(\frac{1}{2})$.

Dans le cas non continu, on peut toujours définir $f(0) = f(1) = \frac{1}{2\lambda-1} f(\frac{1}{2})$, si bien qu'on est, dans les deux cas, en mesure d'appliquer le lemme 2.

□

V. Etude des cas critiques : $|\lambda| = 1$, $|\lambda| = \frac{1}{2}$.

Une condition de régularité :

Dans le cas des valeurs "critiques" $|\lambda| = 1$ et $|\lambda| = \frac{1}{2}$, nous restreignons l'étude des fonctions propres à celles qui vérifient une condition de régularité.

Nous dirons que f est *régulière au voisinage de* $\frac{1}{2}$ s'il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que : $\sum_n \delta_f^\alpha(\frac{1}{2^n}) < \infty$, où

$$\delta_f^\alpha(t) = \sup\{|f(\frac{1}{2} + x) - f(\frac{1}{2} + y)|,\ x, y \in] - \alpha, \alpha[, |x - y| \leq t\}.$$

V.1 Cas $|\lambda| = 1$ et $f \in C(]0,1[)$

L'expression $I_n^0(x)$ du paragraphe II est une somme de Riemann. Si f est continue sur $]0,1[$, alors la fonction a est continue sur $[0,1]$, et on a $\lim_n \lambda^n I_n^0(x) = \int_0^1 a(t)\,dt$. On peut encore passer à la limite dans (f_4). On en déduit que la suite

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n-1} [\frac{\phi_1(\frac{x+k}{2^{[\log_2 k]+1}})}{(x+k)^\beta} + \frac{\phi_2(\frac{k+1-x}{2^{[\log_2 k]+1}})}{(k+1-x)^\beta}] + \lambda^{-n}\int_0^1 a(t)\,dt$$

doit converger pour tout $x \in]0,1[$. La fonction f est alors de la forme :

$$f(x) = \frac{\phi_1(x)}{(x)^\beta} + \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta} + \lim_n S_n(x).$$

Faisons l'étude de la convergence de S_n. Cette somme peut s'écrire :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} 2^{-p} \sum_{k=0}^{2^p-1} [h_1(\frac{x+k}{2^p}) + h_2(\frac{1-x+k}{2^p})] + \lambda^{-n}\int_0^1 a(t)\,dt,$$

où l'on a posé $h_i(x) = (1+x)^{-\beta}\phi_i(\frac{1}{2}+\frac{x}{2})$, pour $x \in [0,1]$, $i = 1,2$.

Une condition nécessaire de convergence est donc :

$$\int_0^1 (h_1(t) + h_2(t))\,dt = 0.$$

Pour que la suite S_n converge, il suffit que les fonctions ϕ_i soient régulières, au sens de la définition précédente, dans un voisinage de $\frac{1}{2}$ et que, pour $\lambda \neq 1$, $\int_0^1 a(t)\,dt = 0$.

Si ces conditions sont vérifiées, on obtient alors des solutions de (E_λ), pour $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$, de la forme :

$$\frac{\phi_1(x)}{x^\beta} + \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{(x+k)^\beta}\phi_1(\frac{x+k}{2^{[\log_2 k]+1}}) + \frac{1}{(k+1-x)^\beta}\phi_2(\frac{k+1-x}{2^{[\log_2 k]+1}})].$$

Dans le cas $\lambda = 1$, à ces solutions s'ajoutent la solution $f(x) = c$, où c est une constante.

On trouve, parmi les fonctions invariantes pour P_1, continues sur $]0,1[$, les combinaisons linéaires des constantes et de la fonction $\mathrm{cotg}(\pi x)$. Ce sont les seules fonctions f invariantes telles que les limites $\lim_{x\to 0} xf(x)$ et $\lim_{x\to 1}(1-x)f(x)$ existent.

V.2 Cas $\lambda = \frac{1}{2}$

Les fonctions $x - \frac{1}{2}$ et $\log_2 \sin \pi x + 1$ sont des fonctions propres pour la valeur propre $\lambda = \frac{1}{2}$. On notera en particulier la relation :

$$\log \sin \pi x = \log \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \log \sin \pi(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2}).$$

Théorème 5 : *Toute solution f de $(E_{\frac{1}{2}})$, bornée sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et régulière au voisinage de $\frac{1}{2}$ s'écrit :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi(2^n x) + c(\log_2 \sin \pi x + 1),$$

avec ψ bornée, 1-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $\psi(x) + \psi(x + \frac{1}{2}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et c constante.

Si de plus on suppose f continue sur $]0, 1[$, elle s'écrit

$$\begin{aligned} f(x) = &\phi_1(x) + \phi_2(1-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} [\frac{\phi_1(x)}{(\{2^n x\} + 1)^\beta} - \frac{\phi_2(x)}{(1 - \{2^n x\} + 1)^\beta}] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi(2^n x) + c_1(x - \frac{1}{2}) + c_2(\log_2 \sin \pi x + 1), \end{aligned}$$

avec ψ continue, 1-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $\psi(x) + \psi(x + \frac{1}{2}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et ϕ_1 et ϕ_2 continues sur $]0, 1]$, vérifiant (f_2), c_1, c_2 étant des constantes.

Preuve : Nous avons : $f(x) = f(\frac{x}{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2})$.

Quitte à remplacer $f(x)$ par $f(x) - f(\frac{1}{2})[\log_2(\sin \pi x) + 1]$, on se ramène au cas où $f(\frac{1}{2}) = 0$,

La fonction f étant régulière au voisinage de $\frac{1}{2}$, la série $\sum_n f(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2})$ est uniformément convergente. On a en effet :

$$|f(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2})| = |f(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| \leq \delta_f^\alpha(\frac{1}{2^n}),$$

pour tout $\alpha > 0$, dès que $\frac{1}{2^n} < \alpha$.

On en déduit la convergence de la suite $\left(f(\frac{x}{2^n})_{n \geq 1}\right)$ pour n tendant vers $+\infty$, ce qui montre l'existence d'une fonction ϕ continue sur $[0, 1]$, vérifiant la condition (f_2), telle que :

$$f(x) = \phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}).$$

Si f est bornée sur $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$, alors ϕ est bornée sur $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ et donc sur $]0,1]$. Il en résulte que f est bornée sur $]0,1[$ et d'après le lemme 2, f s'écrit $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\psi(2^k x)$, pour une fonction ψ bornée, 1-périodique sur $\mathbb{R}$, telle que $\psi(x)+\psi(x+\frac{1}{2})=0$.

Si $f\in C(]0,1[)$, en reprenant les arguments de la preuve du lemme 1 on obtient que f est de la forme $f(x)=\phi_1(x)+\phi_2(1-x)+a(x)$, avec $a\in C([0,1])$ et ϕ_1 et ϕ_2 vérifiant (f_2), continues sur $]0,1]$.

En changeant $f(x)$ en $f(x)-[a(1)-a(0)](x-\frac{1}{2})$, on se ramène alors au cas où $a(0)=a(1)$. La fonction a vérifie $2P_1 a=a-h_1$, avec $h_1(x)=\phi_1(\frac{x+1}{2})+\phi_2(\frac{1-x+1}{2})$.

Du lemme 2, il résulte alors que :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\psi(2^n x)+\phi_1(x)+\phi_2(1-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}h_1(\{2^n x\}),$$

avec ψ continue, 1-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $\psi(x)+\psi(x+\frac{1}{2})=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

□

c) Cas $|\lambda|=\frac{1}{2}$, $\lambda\neq\frac{1}{2}$

Construction d'une solution particulière, pour $|\lambda|=\frac{1}{2}$, $\lambda\neq\frac{1}{2}$.

Considérons la fonction

$$f_\lambda(x)=\frac{1}{x^\beta}-\frac{1}{(1-x)^\beta}-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n[\frac{1}{(\{2^n x\}+1)^\beta})-\frac{1}{(1-\{2^n x\}+1)^\beta}]$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\psi_0(2^n x),$$

avec $\psi_0(x)=\{x+\frac{1}{2}\}-\{x\}$.

On vérifie que f_λ est une solution de (E_λ) et qu'elle est continue sur $]0,1[$. Pour $\lambda=\frac{1}{2}$, cette formule se réduit à $f_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\psi_0(2^k x)=1-2x$, $\forall x\in]0,1[$, solution particulière de $(E_{\frac{1}{2}})$ introduite dans le théorème précédent.

Théorème 6 : *Toute solution f de (E_λ) bornée sur $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ et régulière au voisinage de $\frac{1}{2}$ s'écrit :*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\psi(2^n x),$$

avec ψ bornée, 1-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $\psi(x)+\psi(x+\frac{1}{2})=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Si l'on suppose de plus que f est continue sur $]0,1[$, elle s'écrit

$$f(x) = \frac{\phi_1(x)}{x^\beta} + \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta} - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left[\frac{\phi_1(x)}{(\{2^n x\}+1)^\beta} - \frac{\phi_2(x)}{(1-\{2^n x\}+1)^\beta}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \psi(2^n x) + c f_\lambda(x),$$

avec ψ continue, 1-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $\psi(x) + \psi(x+\frac{1}{2}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et ϕ_1 et ϕ_2 continues sur $]0,1]$, vérifiant (f_2) et telles que $\phi_1(1) = \phi_2(1)$, c étant une constante.

Preuve: La relation $f(x) = \frac{1}{(2\lambda)^n} f(\frac{x}{2^n}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\lambda)^k} f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2})$ peut s'écrire aussi :

$$f(x) - \frac{f(\frac{1}{2})}{2\lambda - 1} = \frac{1}{(2\lambda)^n}\left[f(\frac{x}{2^n}) - \frac{f(\frac{1}{2})}{2\lambda - 1}\right] + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2\lambda)^k}\left[f(\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})\right].$$

La régularité de f au voisinage de $\frac{1}{2}$ assure la convergence uniforme de la série. En reprenant les arguments de la preuve du lemme 1, on montre que

$$f(x) = \frac{\phi_1(x)}{x^\beta} + \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^\beta} + a(x).$$

avec ϕ_1 et ϕ_2 bornées sur $]0,1]$, vérifiant (f_2) et a bornée sur $[0,1]$.

De plus, si $f \in C(]0,1[)$, on a ϕ_1 et $\phi_2 \in C(]0,1])$ et $a \in C([0,1])$.

Dans le cas où f est bornée sur $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, il en résulte que f est bornée sur $]0,1[$. Le lemme 2 donne alors le résultat annoncé.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $f \in C(]0,1[)$. On procède comme dans la preuve du théorème précédent, en changeant f en $f - cf_\lambda$, où f_λ est la fonction propre particulière construite plus haut.

□

VI. Relation avec d'autres opérateurs

VI.1 Application à l'opérateur $P_{\cos^2\pi.}$

Soit $P_{\cos^2\pi.}$ l'opérateur défini par

$$P_{\cos^2\pi.}f(x) = \cos^2(\frac{\pi x}{2})f(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{\pi x}{2})f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}),$$

opèrant sur les fonctions définies sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

On notera u la fonction $u(x) = \cos^2\pi x$, et P_u l'opérateur $P_{\cos^2\pi.}$.

L'opérateur P_1 est relié à P_u par la propriété suivante : si f est une fonction propre pour P_1, de valeur propre λ, alors $g = \sin^2(\pi.)f$ est propre pour P_u, de valeur propre $\frac{\lambda}{2}$:

$$P_1 f = \lambda f \Longleftrightarrow P_u g = \frac{\lambda}{2}g.$$

D'après le résultat du paragraphe II. les solutions continues sur $]0,1[$ de l'équation $P_1 f = 2f$, sont données par

$$f(x) = \frac{\phi_1(x)}{x^2} + \frac{\phi_2(1-x)}{(1-x)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{\phi_1(\frac{x+k}{2^{[\log_2 k]+1}})}{(x+k)^2} + \frac{\phi_2(\frac{k+1-x}{2^{[\log_2 k]+1}})}{(k+1-x)^2}],$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions continues sur $]0,1]$ vérifiant (f_2).

Parmi ces fonctions, celles qui donnent des solutions g de $P_u g = g$, continues sur $[0,1]$, sont celles pour lesquelles ϕ_1 et ϕ_2 admettent des limites en 0, ce qui implique que ϕ_1 et ϕ_2 sont constantes. D'où :

$$g(x) = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^2\pi x}{(x+k)^2} + b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^2\pi x}{(1-x+k)^2},$$

a et b étant deux constantes réelles.

D'après l'étude faite en V.2, une famille de solutions continues sur $]0,1[$ de l'équation $P_1 f = f$ est donnée par

$$f(x) = c + \frac{\phi_1(x)}{x} + \frac{\phi_2(1-x)}{1-x} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{\phi_1(\frac{x+k}{2^{[\log_2 k]+1}})}{x+k} + \frac{\phi_2(\frac{k+1-x}{2^{[\log_2 k]+1}})}{k+1-x}], \qquad (f_6)$$

avec $c \in \mathbb{R}$, et ϕ_1 et ϕ_2 vérifiant (f_2), régulières au voisinage de $\frac{1}{2}$ et telles que

$$\int_0^1 \frac{\phi_1(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}) + \phi_2(\frac{1}{2}+\frac{t}{2})}{1+t}\,dt = 0.$$

Parmi ces fonctions se trouve $cotg\pi x$.

Observons également que les fonctions propres de P_1 de valeur propre 2 fournissent par intégration des fonctions F définies sur $]0,1[$, vérifiant $P_1F = F + C$, où C est une constante. En particulier, la fonction

$$F_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{\frac{1}{2}+k}\right),$$

primitive s'annulant en $\frac{1}{2}$ de la fonction $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{(x+k)^2}$, qui est une solution de $P_1f = 2f$, vérifie l'équation :

$$P_1F_0 = F_0 + \ln 2.$$

Remarques : 1) On notera que la formule (f_5) peut être également obtenue comme une conséquence du fait que les constantes sont les seules fonctions continues périodiques invariantes par l'opérateur P_u (cf.[1]) et reliée à la construction de l'analyse multirésolution associée au "filtre de Haar", pour laquelle la transformée de Fourier de la fonction d'échelle $1_{[0,1]}$ est

$$\widehat{\phi}(x) = e^{-\pi i x}\frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

La périodisée de $|\widehat{\phi}|^2$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(x+k)|^2 = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+k)^2}$, est égale à la fonction constante 1, qui est la seule fonction continue périodique invariante par P_u égale à 1 en 0 ; d'où (f_5).

2) Parmi les solutions continues sur $]0,1[$ de $P_1f = f$ données par l'expression (f_6), on peut construire des fonctions C^∞ et même analytiques sur $]0,1[$.

Plaçons nous en effet pour simplifier dans le cas $\phi_1 = -\phi_2$, ce qui fournira des solutions f impaires. Pour obtenir une solution f qui soit C^∞ (resp. analytique), on montre, en reprenant l'étude effectuée au paragraphe I, que ϕ_1 doit être C^∞ (resp. analytique). Inversement, il est possible de construire des fonctions ϕ_1 de classe C^∞ (resp. analytiques) sur $]0,1[$, vérifiant la condition (f_2), c'est-à-dire : $\phi_1(2x) = \phi_1(x), \forall x \in]0,\frac{1}{2}]$. En utilisant la forme

$$f(x) = \frac{\phi_1(x)}{x} + \frac{\phi_2(1-x)}{1-x} + \lim_n S_n(x),$$

avec

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{2^p-1}\left[\frac{\phi_1(\frac{1}{2}+\frac{k+x}{2^{p+1}})}{x+2^p+k} + \frac{\phi_2(\frac{1}{2}+\frac{k+1-x}{2^{p+1}})}{2^p+k+1-x}\right],$$

donnée dans V.2, on peut justifier la convergence dans l'expression (f_6) vers une solution f qui est C^∞ (resp. analytique).

Par contre, contrairement à ce que nous avions écrit dans [1], la fonction F_0 ne fournit évidement pas une solution de l'équation homogène $P_1F = F$!

VI.2 Application à l'opérateur $P_{|\cos \pi .|}$

Notons v la fonction $v(x) = |\cos \pi x|$ et considérons l'opérateur non normalisé $P_v = P_{|\cos \pi .|}$ opèrant sur les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$, défini par

$$P_v f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)f(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}x)f(\frac{x+1}{2}),\ 0 \le x \le 1.$$

La théorie des opérateurs développée dans [3] s'applique à cet opérateur. Nous sommes ici dans un cas particulier simple où P_v, qui est de rayon spectral 1, possède, comme nous le verrons, une forme de Jordan pour la valeur spectrale $\lambda = 1$ (cf. [3], [4]). (L'indice ν est le plus petit entier n tel que $\ker(P_v - 1)^n = \ker(P_v - 1)^{n+1}$.)

On a l'équivalence :

$$P_v g = g \Longleftrightarrow P_1 f = f,$$

avec $g(x) = \sin \pi x f(x)$, puisque l'application $f \to Sf = \sin(\pi .)f$ conjugue les opérateurs P_1 et $P_{|\cos \pi .|}$:

$$P_1 = S^{-1} P_{|\cos \pi .|} S,$$

et l'étude spectrale de l'opérateur $P_{|\cos \pi .|}$ est liée à l'équation $P_1 f = f + C$, où C est une constante.

L'opérateur P_v possède deux fonctions invariantes évidentes $G_0(x) = \sin \pi x$ et $\cos \pi x$. La soultion G_0 est strictement > 0, pour $x \neq 0$, et s'annule en 0. Les solutions g de l'équation $P_v g = g$ qui sont prolongeables par continuité en 0 et en 1 sont celles qui correspondent dans l'expression (f_6) à des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 admettant des limites en zéro. Ceci implique que ϕ_1 et ϕ_2 sont constantes. Les solutions continues sur $[0, 1]$ de $P_v g = g$ sont donc de la forme

$$g(x) = a \sin \pi x + b \cos \pi x,$$

où a et b sont des constantes.

Soit C_1 une constante. La fonction $G_1(x) = \frac{1}{\pi}(F_0(x) + C_1)\sin \pi x$ a pour limite 1 quand x tend vers 0^+ et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$P_v G_1(x) = G_1(x) + \frac{\ln 2}{\pi} \sin \pi x. \qquad (f_7)$$

On peut choisir C_1 telle que G_1 soit partout > 0. On a ainsi construit une fonction $G_1 > 0$ telle que $P_v G_1 = G_1 + \frac{\ln 2}{\pi} G_0$. Nous sommes donc dans le cas d'une forme de Jordan d'indice $\nu = 2$ pour l'opérateur P_v (cf. [3]).

Remarque : Ce calcul est relié à l'étude de la croissance de l'intégrale des produits ergodiques :

$$p_n = 2^n \int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} |\cos(2^k \pi x)|\ dx = \int_0^1 P_v^n 1\ dx = \int_0^1 |\frac{\sin 2^n \pi x}{\sin \pi x}|\ dx.$$

Montrons que l'on a

$$p_n = \frac{2\ln 2}{\pi^2} n + O(1), \qquad (f_8)$$

ce qui correspond bien au cas d'un indice $\nu = 2$.

Posons

$$\theta(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x},$$
$$\psi(t) = \int_0^t |\frac{\sin u}{u}|\ du.$$

La fonction θ est continue ≥ 0 sur $[0, \pi/2]$. On a :

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |\sin(2^n x)|\, \theta(x)\ dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |\frac{\sin(2^n x)}{x}|\ dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |\sin(2^n x)|\, \theta(x)\ dx + \frac{2}{\pi} \psi(2^{n-1}\pi). \end{aligned}$$

Le premier terme reste borné et le deuxième est donné par :

$$\psi(2^{n-1}\pi) = \int_0^{2^{n-1}\pi} |\frac{\sin x}{x}|\ dx = \frac{\ln 2}{\pi} n + O(1),$$

d'où (f_8).

La relation (f_7) permet de retrouver (f_8). En effet, observons d'abord que, si h est une fonction sur $[0,1]$, de la forme $h(x) = u(x) \sin \pi x$, avec u continue, l'étude des itérées $P_v^n h$ se déduit de celle des itérées $P_1^n u$, ce qui montre que $\lim_n P_v^n h(x) = \left(\int_0^1 u(t)\, dt\right) sin \pi x$. Il en résulte que si f est une fonction de classe C^1 nulle en 0, on a :

$$\lim_n P_v^n f(x) = \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{\sin \pi t}\, dt\right) sin \pi x.$$

Ce résultat montre en particulier que la différence $\int_0^1 P_v^n 1\ dx - \int_0^1 P_v^n G(x)\ dx$ reste bornée quand n tend vers l'infini. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_v^n G(x)\ dx &= \int_0^1 [G(x) + n \frac{\ln 2}{\pi} \sin \pi x]\ dx \\ &= \frac{2\ln 2}{\pi^2} n + \int_0^1 G(x)\ dx. \end{aligned}$$

3. Autres exemples :

L'étude précédente peut être généralisée en dimension 1, quand on remplace 2 par p.

On peut également considérer le cas de la dimension $d > 1$. Comme dans [2], soient A une matrice dilatante à coefficients entiers, et $\mathcal{D}$ un système complet de réprésentants de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$. Une généralisation de l'opérateur P_1 étudié plus haut est l'opérateur de moyenne, noté encore P_1, associé à A, défini par :

$$P_1 f(x) = \frac{1}{|det A|} \sum_{r \in \mathcal{D}} f(A^{-1}(x+r)).$$

L'étude des fonctions propres de ces opérateurs fera l'objet d'un travail ultérieur.

Références

[1] Conze (J.-P.) et Raugi (A.). - Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications, Bull. Soc. Math. France, no 118, 1990, p. 273-310.

[2] Conze (J.-P.), Hervé (L.) et Raugi (A.). - Pavages auto-affines, opérateurs de transfert et critères de réseau dans $\mathbb{R}^d$, prétirage, Université de Rennes I, octobre 1995.

[3] Hennion (H.). - Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens, Proc. A. M. S., no 118, 1993, p. 627-634.

[4] Hervé (L.). - Etude d'opérateurs quasi-compacts et positifs, applications aux opérateurs de transfert, Ann. Inst. H. Poincaré, Proba. et Statist., Vol. 30, no 3, 1994, p. 437-466.

Adresse des auteurs:
Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu,
35042, Rennes Cedex, France

le 11 novembre 1995