MICHÈLE ARTAUD

La graphisation en économie : étape de la mathématisation et stratégie de démathématisation

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995-1996, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. n° 6, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995-1996___3_A7_0>

La graphisation en économie : étape de la mathématisation et stratégie de démathématisation

Michèle ARTAUD
Centre de Recherche sur l'Enseignement et l'Histoire des Sciences et Techniques
Orléans

J'ai commencé l'étude du processus de mathématisation en économie du point de vue des besoins mathématiques que ce processus génère et de la satisfaction de ces besoins mathématiques. Le cadre théorique général de cette étude est la théorie de la transposition didactique, étendue pour l'occasion. Je ne reviendrai ici ni sur les éléments théoriques, ni sur la problématique de mon travail. Je présenterai d'abord un bref historique du processus de mathématisation en économie qui me permettra de situer l'étape graphique de ce processus. Puis nous analyserons un extrait d'un texte d'économie : cette analyse mettra en évidence le phénomène de graphisation ainsi que les principales caractéristiques de l'écologie des objets mathématiques en économie. Je donnerai enfin quelques exemples du même phénomène en mathématiques.

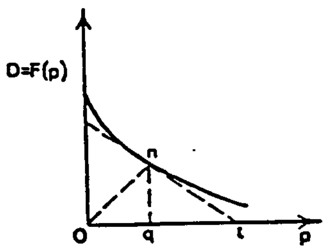
Le processus de mathématisation en économie

L'histoire des rapports entre mathématiques et économie commence avec un ouvrage pionnier, paru en 1838, les *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, dont l'auteur est Antoine-Augustin Cournot (1801-1877). Mathématicien français attaché, avec quelques autres parmi lesquels on compte notamment Condorcet (1743-1794), à l'élaboration d'une science du social ayant la même dignité épistémologique, la même rigueur et la même certitude que les sciences de la nature, Cournot voit également son nom associé à la promotion du point de vue probabiliste[1]. Mais, en 1838, et s'agissant de la matière économique, il recourt au *calcul différentiel et intégral* - au *calculus* des anglo-saxons -, qui doit permettre, selon lui, d'échapper au « vague de la vieille métaphysique ». Ce parti pris va éloigner de l'oeuvre de Cournot nombre de lecteurs potentiels, « trop étrangers à toute espèce de considération géométrique », et conduira l'auteur à reprendre sa théorie pour la débarasser de tout appareil mathématique - dans deux ouvrages *Principes de la théorie des richesses* (1863) et *Revue sommaire des doctrines économiques* (1877).

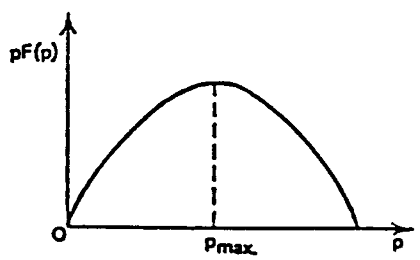
Arrêtons-nous un instant sur le premier moment, qui fournit l'ébranlement décisif. Cournot s'intéresse à la demande effective d'un bien sur le marché, et le concept essentiel est ici celui de

1. Cournot (1843), *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris.

fonction, qui s'est cristallisé à partir du dernier tiers du XVIIIème siècle[2]. Il introduit la fonction de demande, D = F(p), où p est le prix du bien considéré, qu'il suppose *monotone décroissante*, continue, dérivable, et même deux fois dérivable[3]. Le problème posé au calcul économique est alors le suivant : déterminer le *maximum* de la fonction pF(p), produit de la quantité globale du bien demandé par son prix unitaire. Claude Ménard, que nous suivons ici, note à ce propos[4] : « Ainsi sont mises en place les deux fonctions décisives de la théorie des prix [...] ». Ajoutons : ainsi s'introduit le calcul infinitésimal dans la science économique. La détermination du maximum, en effet, relève de ces techniques que devra apprendre - beaucoup plus tard - tout étudiant en économie. Le prix maximum cherché correspond au point où s'annule la dérivée de pF(p) ; il vaut « donc » : $p_{max} = -F(p) / F'(p)$. Ce résultat toutefois ne peut être établi que sous des hypothèses dont la pertinence ne va pas de soi : le prix pour lequel la dérivée s'annule doit être compris dans l'intervalle effectif de variation du prix ; Cournot en outre rejette l'idée que la dérivée puisse s'annuler plusieurs fois dans ce même intervalle ; etc. L'ensemble des hypothèses faites, explicitement ou implicitement, précise, sous une forme analytique, une situation que l'on peut autrement décrire, synthétiquement, par les courbes suivantes[5] :



Loi de demande d'un bien.



Valeur nominale totale d'un débit.

D'emblée, nous trouvons ici réunis les trois ingrédients de la mathématisation en économie : soit la coprésence solidaire de certains *types de courbes*, d'un traitement analytique des *fonctions* auxquelles ces courbes renvoient, et d'un système d'*hypothèses justificatives*, mi-mathématiques, mi-économiques, dont la validité peut être indéfiniment objet de débat. Cette configuration restera au centre des relations entre mathématiques et économie jusqu'à nos jours.

La tentative de Cournot, qui inaugure ce que l'on nommera plus tard l'*économie mathématique*, n'est sans doute pas unique. Le début du XIXème siècle est marqué par un certain nombre de travaux parmi lesquels on peut citer, en Angleterre, William Whewell (1794-1866), aux Etats

2. Cournot a là-dessus beaucoup réfléchi, à la suite de Langrange, Monge ou Poisson, et il publiera en 1841 un *Traité de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal.*
3. Pour éviter tout anachronisme, rappelons ici que les notions de continuité et de dérivabilité ne sont à cette époque pas encore clairement distinguées. Voir Chevallard (1991), pp. 90-91.
4. Ménard (1978), pp. 24-25.
5. Nous les empruntons à Ménard (1978), p. 25.

Unis, Charles Ellet Jr ou encore, en France, Nicolas Canard. Rien pourtant en tout cela qui se compare à Cournot. Quant à Auguste Walras, dont l'essai *De la nature de la richesse et de l'origine de la valeur* paraît en 1831, s'il affirme la possibilité d'une mathématisation, il ne va guère au-delà. Cournot, qui fut son camarade d'étude à l'Ecole normale supérieure, est le vrai fondateur, celui par qui une ère nouvelle s'ouvre, ainsi que le note Ménard[6] :

> [I]l faut attendre l'ouvrage de Cournot pour trouver un traité d'économie politique où les mathématiques ne soient ni simplement expressives ou illustratives, ni outil auxiliaire, mais s'installent au coeur même du discours économique comme méthode d'investigation et d'exposition.

Si Cournot n'a pas véritablement de précurseurs, il n'aura pas non plus de successeurs immédiats : on a dit qu'il renoncera même, en un sens, à se succéder à lui-même. Pourtant, dès la parution des *Recherches*, Cournot avait, semble-t-il, adressé un exemplaire à son ancien condisciple, Auguste Walras (1800-1866) : c'est ainsi que le fils de celui-ci, Léon Walras - le Walras de l'équilibre général - put prendre connaissance des *Recherches* dès 1853, au moment où, après son échec au concours d'admission à l'Ecole polytechnique, il se plonge dans les textes fondateurs de Descartes, Newton et Lagrange, avant de s'orienter définitivement vers l'économie, domaine où il se fera l'héritier et de Cournot, et de son père[7].

Léon Walras (1834-1910), alors jeune économiste peu connu, et dont le *Journal des économistes* avait refusé de publier la communication qu'il avait faite au Congrès international de l'impôt tenu à Lausanne en 1860, fait entendre son propre point de vue dans un compte rendu qu'il parvient tout de même à publier dans... l'*Indépendant de la Moselle* du 13 juillet 1863. Pour Walras, la mathématisation n'est pas simplement expressive : elle est, comme Cournot l'avait bien vu, *constitutive* de la science économique à laquelle entend désormais travailler le fondateur du « marginalisme ». Le paradigme des sciences physiques, et principalement de la mécanique, est ici pleinement assumé [8], comme est assumé le recours à l'outil mathématique (même si Walras dit préférer, au calcul différentiel et intégral, la géométrie analytique). On sait que l'économiste français devait payer cher son obstination dans cette voie. N'obtenant pas en France de situation stable, il s'exile définitivement à Lausanne, où il est élu professeur dès 1870, et où il publiera ses oeuvres principales (notamment ses *Eléments d'économie politique pure* (1874-1877) : l'édition définitive est de 1900). Mais il avait ouvert une route qui ne devait plus être désertée.

La fin du siècle, en fait, vit le décollage de l'économie mathématique et redécouvrit Cournot, regardé désormais comme un père fondateur. Keynes suggère ainsi qu'il prit

---

6. *Op. cit.*, pp. 149-150.
7. Citons à nouveau Ménard (*Op. cit.*, p. 118, note 1) : « Dans une lettre à Jevons (23 mai 1874), Léon Walras dira de son père qu'il n'a pu mathématiser l'économie parce qu'il pensait au seul mouvement uniforme, alors que Cournot saura faire le rapprochement entre les conditions de l'échange et les conditions mathématiques du mouvement varié ».
8. Walras publiera en 1907 un texte intitulé *Economie et mécanique* dont l'idée remonte à 1874 et pour la rédaction duquel il avait recherché la collaboration de Cournot, lequel déclina cette offre en raison de son état de santé.

connaissance des *Recherches* dès les années 1867-1870. Marshall, dans une lettre à Walras du 29 novembre 1886, récuse Jevons (dont la *Theory of Political Economy* avait paru en 1871) et déclare avoir appris ce qu'il a appris « *from anybody, from Cournot, not from him* ». Les temps changeaient - du moins chez les économistes de langue anglaise - et la montée en puissance de la mathématisation en économie apparaissait dès lors inéluctable. Laissons ici la parole à Irving Fisher (1867-1947) pour décrire l'évolution qu'il aura connue entre 1890 et 1940, date où il rassemble ses souvenirs dans le cadre d'une conférence prononcée à l'Université d'Indiana [9] :

> When, thirty years after Cournot, Walras entered the same field his work met nearly the same fate - opposition, followed by belated recognition.
>
> Professor Schumpeter of Harvard has paid a double tribute to mathematical economics, first by becoming himself a mathematical economist after having already had a distinguished career as a nonmathematical economist, and secondly by proclaiming Walras as the greatest economist of all time.
>
> Just as Walras' work was less coldly welcomed than that of Cournot, so the work of Professor F. Y. Edgeworth of Oxford a decade or two later was less opposed than that of Walras. Edgeworth applied mathematics not only to economic theory but also to economic statistics and, as the first editor of what is now *The Economic Journal* put mathematical economics « on the map » much more definitely than it had ever been before.
>
> And yet I well remember the meeting in 1894 in Oxford of the British Association for the Advancement of Science at which Edgeworth was so « dampened », as he then confessed, by the cold words of Sidgwick, who typified the economics of that day - which was akin to philosophy rather than to science - that he, Edgeworth, could scarecely present his paper. Today Edgeworth's work also has a permanent niche in the history of economic thought.

Dans ce même contexte, Fisher indique aussi comment il fut amené lui-même, comme plusieurs autres, à entrer dans le domaine alors balbutiant et méconnu de l'économie mathématique[10] :

> When I was in the graduate school at Yale in 1890 I was chiefly interested in mathematics and more especially the mathematics of J. Willard Gibbs. My interest in economics was then chiefly an interest in William Graham Sumner, the leading American economist and a most picturesque personality, but now better known as a sociologist. Sumner so fascinated me that I found myself spending a great deal of time with his department, entirely outside of my chosen sphere of mathematics. One day I confided to him my growing perplexity as to how I was to write my doctor's dissertation, since only about half my time had been spent on mathematics, the other

9. Fisher (1941), pp. 186-187.
10. *Op. cit.*, p. 185.

> half having been mostly in economics. He immediately said : « Why not write on mathematical economics ? ». I replied, « I never heard of it ». He then told me of Jevons and Walras, who between 1871 and 1874 independently introduced the concept of marginal utility as a differential quotient.
>
> Thus did I enter economics from the side of mathematical method. So later did Warren Persons of Harvard, Harold Hotelling of Columbia, and Griffith C. Evans of California, to mention only three.
>
> When I entered this field - in the so-called gay nineties - mathematical economics was almost as much on the defensive as it had been for the two preceding decades since Jevons and Walras pled for it so earnestly and so vainly.

C'est ainsi qu'Irving Fisher devint économiste, en soutenant en 1892 une thèse intitulée *Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices*. En 1930, il publiera un ouvrage, *The Theory of Interest*, qui est un rejeton plus développé d'un ouvrage édité dès 1907, *The Rate of Interest*. En introduction, Fisher souligne que cet ouvrage marque une progression du mathématique à l'intérieur de l'économique : pour la première fois, les mathématiques apparaissent dans le corps du texte au lieu d'être rejetées en appendices. Pourtant, dans son ouverture aux mathématiques, Fisher ménage des degrés, et la structure de l'ouvrage est, de ce point de vue, éclairante. L'ouvrage est composé de quatre parties. Ce sont les parties II et III qui présentent la théorie. La première présente la théorie en mots (*Theory in Words*) ; la seconde, la théorie en mathématiques (*Theory in Mathematics*). Cette dernière comporte elle-même deux degrés, la théorie en termes géométriques (*Theory in Geometric Terms*) et la théorie en termes de formules (*Theory in Terms of Formulas*). L'exposition en termes géométriques présente ce que l'on peut appeler, avec Fisher, la *méthode graphique*, qui s'imposera en ces premières décennies du XXème siècle comme le premier programme d'étude de la communauté des économistes en mathématiques. Fisher indique d'abord avec grand soin les principes de la représentation graphique, s'adressant visiblement à des lecteurs non familiers avec l'idée même de graphique cartésien. Il s'agit dans un premier temps d'associer à un individu un point P du plan représentant son revenu en deux années consécutives, l'année en cours et l'année suivante.

On obtient le graphique ci-contre, que Fisher présente en désignant respectivement l'abscisse et l'ordonnée par les termes de longitude et de latitude empruntés aux géographes - et qu'employait Nicolas Oresme au XIVème siècle en inaugurant la « méthode graphique » en mathématiques... Semblablement, la première bissectrice est nommée droite du milieu. et la détermination de la position de P et sa traduction en termes de longitude et de latitude font l'objet d'une explicitation d'un style que l'on réserverait aujourd'hui à des élèves de collège débutant en matière de géométrie cartésienne. L'ensemble de l'exposé sera du même style, et Fisher introduira avec les mêmes précautions un certain nombre de graphiques. L'extrait que nous analyserons plus loin est clairement l'héritier de cette méthode graphique.

Dans la première moitié du XXème siècle, ce sont donc principalement des objets graphiques qui représenteront les mathématiques au sein de l'économie. Mais bientôt - en 1947 -, la publication d'un ouvrage de P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*[11], secouera la communauté des économistes. L'auteur, qui obtiendra le prix Nobel en 1970, y utilise notamment le calcul différentiel et intégral en dimension n, et, après un vif débat[12], le curriculum fisherien sera supplanté par ce que Samuelson appelait *le calcul newtonnien.*

Le processus de mathématisation en économie a ainsi progressé tout au long du XXème siècle, suivant en cela le renouvellement constant des besoins mathématiques des économistes. L'économie contemporaine contient du mathématique. Et jusqu'à un certain point, en certains nombre de secteurs, le savoir économique se fabrique avec des mathématiques. A titre d'échantillon, voici ce qu'écrit Bertrand Munier dans un article paru dans la *Revue d'économie politique* de janvier-février 1989 et consacré à l'oeuvre de Maurice Allais, prix Nobel de sciences économiques en 1988. Abordant la question de la formation des anticipations de la part des agents économiques, Munier indique que la théorie H.R.L. proposée par Allais, dont il précise que les prévisions qu'elle permet sont « remarquablement validées par les données observées », se présente sous la forme de trois groupes d'équations. Le premier groupe concerne la mémoire collective, et l'auteur mentionné en donne la présentation suivante[13] :

Soit $x_t = \frac{1}{D_t} \cdot \frac{dD_t}{dt}$ le taux de croissance de la dépense globale D_t à l'époque t.

Maurice Allais définit alors le « coefficient d'expansion psychologique » Z_t de l'économie, évalué à la période t, comme :

$$Z_t = \int_{-x}^{t} x_\tau \cdot e^{-\int_\tau^t \chi(u)du} \, dt \qquad \text{(A)}$$

où l'expression $\int_\tau^t \chi(u)du$ montre que le taux auquel on « oublie » les taux d'expansion x_t passés est variable, le reste de l'équation exprimant que les pondérations traduisant l'oubli sont exponentiellement croissantes et fonctions de l'éloignement temporel $(t - \tau)$ dans le passé. Cette formulation correspond non seulement à l'intuition, mais à l'observation courante.

Ce qui est tout à fait original dans cette formulation par Allais de la mémoire collective en matière monétaire, c'est la façon dont varient les pondérations d'oubli de l'expansion passée.

La pondération instantanée à l'époque t vaut $\int_\tau^t \chi(u)du$, où $\chi(t)$ est défini par :

$$\frac{\chi(t)}{\chi_0} = \frac{i(t)}{i_0} = \frac{1}{\Psi(Z)} \qquad \text{(B)}$$

11. Samuelson (1947).
12. Sur ce point, le lecteur interessé pourra consulter Artaud (1993) ou Artaud (1994).
13. Munier (1989), p. 19.

avec $$\Psi(Z) = \frac{1 + b}{1 + b.e^{\alpha Z}} \qquad (C)$$

a et b étant des paramètres qui spécifient $\Psi(Z)$ et $\chi_0 = i_0$ étant la valeur commune du taux d'intérêt psychologique i et du taux d'oubli χ soit $\chi' = \chi_0 = i_0$, valeur atteinte par i(t) et $\chi(t)$ lorsque $Z(t) = 0$.

Le « temps psychologique » est défini par le postulat que les taux i(t) et $\chi(t)$ sont constants dans un tel référentiel de temps psychologique :

$$\chi(t)\,dt = \chi'.dt'$$

où χ' est précisément la constante que l'on vient de définir.

La mathématisation en économie, nous le voyons, a progressé : on est loin, ici, de l'introduction timide du graphique cartésien par Irving Fisher. La mise en avant d'objets graphiques - et notamment de courbes - se substituant à des objets mathématiques manquants ou latents, soit ce que nous appellerons la *graphisation*, a ainsi constitué une étape du processus de mathématisation en économie qui est maintenant largement dépassée. Pourtant, à un certain niveau de formation, les économistes s'y tiennent étroitement. C'est ce que nous examinerons maintenant.

La graphisation, stratégie de satisfaction de besoins mathématiques

Le texte que nous allons étudier est extrait de l'ouvrage de Copeland et Weston intitulé *Financial Theory and Corporate Policy*, dont la troisième édition sera publiée en 1988. Cet ouvrage, destiné à des étudiants de MBA, est représentatif d'un niveau moyen dans la théorisation économique, niveau moyen au sens où on y trouve des mathématiques mais pas trop - nous le verrons -, au contraire des textes savants où la mathématisation est nettement plus avancée. L'extrait que nous considèrerons est constitué de quelques pages du premier chapitre, *Capital Markets, Consumption and Investment*. L'objet de ce chapitre est de montrer la raison pour laquelle l'existence de marchés financiers est si importante pour le développement économique. L'introduction présente brièvement le chapitre. Elle indique en particulier que le travail de modélisation effectué se place d'abord dans le cadre d'une économie à un bien et une personne, Robinson Crusoë, avant de traiter le cas d'une économie multipersonnes. L'économie considérée ne comporte qu'une période : le début de la période, aujourd'hui, est représenté par 0, et la fin de la période, demain, par 1. Robinson Crusoë doit choisir entre ce qu'il va consommer aujourd'hui, et ce qu'il consommera demain. La première partie du chapitre examine cette question en supposant qu'il n'existe pas de marchés de capitaux. Robinson Crusoë est muni d'un revenu de début de période, y_0, et d'un revenu de fin de période,y_1. Il doit déterminer C_0, sa consommation de début de période, et C_1, consommation de fin de période. (On doit donc avoir $C_0 \leq y_0$ et $C_1 \leq y_1 + (y_0 - C_0)$.) On suppose de plus l'existence d'une *fonction d'utilité*, qui est une fonction de deux variables, $U(C_0 ; C_1)$: elle mesure la satisfaction de l'individu devant le choix de consommation $(C_0 ; C_1)$; et on fait l'hypothèse que tout individu préfère plus de consommation à moins. La première étape consiste alors à introduire les *courbes d'indifférence*, soit les courbes d'iso-utilité, qui sont décroissantes et concaves (confère la figure 1.3 ci-dessous).

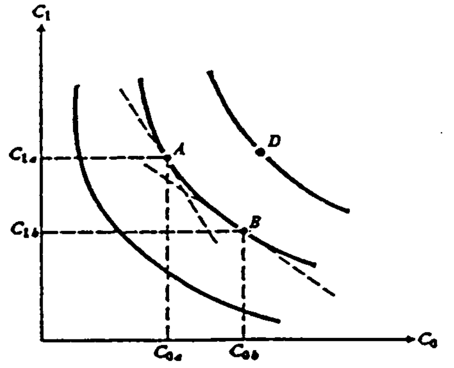


Figure 1.3

Ces courbes d'indifférences constituent un graphique de base que l'on va enrichir. La première étape consiste en l'introduction de la tangente à une courbe d'indifférence, et de sa pente. La pente de la tangente à la courbe d'indifférence mesure le taux d'échange (*rate of trade-off*) entre C_0 et C_1 : c'est ce que l'on appelle le taux marginal de substitution, noté $MRS_{C_0}^{C_1} = \left.\frac{\partial C_1}{\partial C_0}\right|_{U=ct}$.

Les courbes d'indifférence étant décroissantes et concaves, la pente de la tangente à l'une de ces courbes est négative. On peut donc écrire que $MRS_{C_0}^{C_1} = -(1 + r_i)$; r_i est appelé *taux subjectif de préférence intertemporel.*

Voilà donc planté le décor où va maintenant s'introduire un nouveau personnage - le *schedule of productive investment opportunities*. Résumons l'intrigue. Le héros - l'individu - se voit offert une possibilité nouvelle au temps 0 : il peut investir. Plus précisément, il dispose de différentes «opportunités » d'investissement, ayant chacune un certain rendement (*rate of return*). Ces rendements peuvent être ordonnés du plus fort au plus faible. Voici alors le texte des auteurs sur ce point[14] :

> We assume that each individual in the economy has a schedule of productive investment opportunities that can be arranged from the highest rate of return down to the lowest (Fig. 1.4). Although we have chosen to graph the investment opportunities schedule as a straight line, any decreasing function would do. This implies diminishing marginal returns to investment because the more an individual invests, the lower the rate of return on the marginal investment.

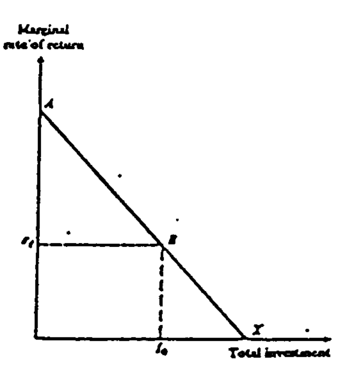


Figure 1.4

14. Copeland et Weston (1988), p.6.

C'est le langage des graphiques qui parle avec la figure 1.4. Le segment de droite ABX qui y figure est la représentation graphique partielle, limitée, du rendement marginal (*marginal rate of return*) en fonction de l'investissement. (Le choix d'une fonction affine, c'est-à-dire, graphiquement, d'une droite, est - nous préviennent les auteurs - quelque peu arbitraire : toute fonction décroissante aurait fait l'affaire.) La conclusion essentielle à laquelle il s'agit d'arriver est alors énoncée préalablement à toute justification[15] :

> An individual will make all investments in productive opportunities that have rates of return higher than his or her subjective rate of time preference, r_i.

Plus explicitement, notre individu va investir en choisissant d'abord les opportunités à plus forts rendements, et il continuera ainsi jusqu'au moment où les opportunités restantes ont un rendement inférieur à son taux de préférence intertemporel. (On observera au passage que ce mécanisme pourrait être limité par les ressources financières disponibles : mais cette objection peut aisément être laissée de côté dans la mesure où, à l'acte suivant, on introduira les marchés de capitaux.) Il reste, bien entendu, à justifier l'affirmation annoncée. La justification a pour ressort essentiel le passage de la figure 1.4 à la figure 1.5[16] :

> This can be demonstrated if we transform the schedule of productive investment opportunities into the consumption argument plane (Fig. 1.5).

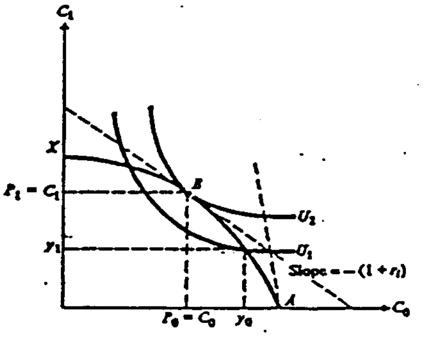


Figure 1.5

Le passage de la figure 1.4 à la figure 1.5 constitue le point délicat et le maillon faible de l'exposé. Les auteurs en sont si conscients qu'ils ont ajouté à l'affirmation que nous citions plus haut une note conseillant au lecteur d'examiner le problème 1.6, placé en fin de chapitre, afin de voir comment peut se faire cette transition *between the schedule of productive investment opportunities and the consumption argument plane*. L'élucidation de ce passage, en effet, ne va pas de soi. Nous sommes ici, typiquement, à une croisée de chemins. L'un de ces chemins est celui emprunté par les auteurs : à la présentation *discursive-graphique*, ils rajoutent, avec le problème 1.6, un élément d'illustration - supposé clarificateur - qui prend la forme d'un modèle *numérique*. Mathématiquement, il s'agit là d'un chemin qui descend. Il est évidemment un autre chemin, que nous parcourrons ici rapidement.

15. *Op. Cit.* p.7.
16. *Ibid.*

L'individu i dispose des dotations y_0 et y_1 respectivement aux temps 0 et 1. Désignons par R(I) le rendement de l'investissement I. La figure 1.4 représente alors le graphe de la fonction R'(I) : on a $R'(I) \geq 0$ et $R''(I) < 0$. [17]. Si l'individu i décide d'investir une somme I (avec, en principe, $I \leq y_0$), les quantités C_0 et C_1 correspondantes seront données par les égalités :

$$\begin{cases} C_0 = y_0 - I \\ C_1 = y_1 + I + R(I) \end{cases}$$

On en déduit C_1 comme fonction de C_0 : $C_1 = y_1 + R(y_0 - C_0) + y_0 - C_0$. Pour tout couple (y_0, y_1), il existe ainsi une « courbe de production » unique, donnée par l'équation précédente, de la forme $C_1 = \phi(C_0)$. On a $dC_1/dC_0 = -1 - R'(y_0 - C_0) \leq 0$, ce qui indique que la courbe de production de la figure 1.5 est décroissante, et aussi $d^2C_1/dC_0^2 = R''(y_0 - C_0) < 0$, ce qui indique que cette courbe a sa concavité tournée vers le bas. Dans le cas particulier où R'(I) est une fonction affine de I (figure 1.4), la courbe de production est un arc de parabole (figure 1.5). Voyons cela plus précisément.

Pour éviter toute ambiguïté, désignons par A' et X' les points notés A et X sur la figure 1.5, en réservant A et X pour désigner les points correspondants de la figure 1.4. Soient alors $a > 0$ l'ordonnée de A et $x > 0$ l'abscisse de X. La droite (AX) a pour équation :

$$R'(I) = -\frac{a}{x} I + a,$$

où R'(I) désigne le « rendement marginal de l'investissement ». En tenant compte du fait que l'on a a priori $R(0) = 0$ (un investissement nul ne rapporte rien), on en déduit :

$$R(I) = -\frac{a}{2x} I^2 + aI.$$

Soit alors un couple (y_0, y_1) donné avec y_0 et y_1 strictement positifs. La courbe de production qui passe par (y_0, y_1) a pour équation :

$$\begin{aligned} C_1 &= y_1 + R(y_0 - C_0) + y_0 - C_0 \\ &= -\frac{a}{2x} C_0^2 + \left(\frac{a}{x} y_0 - (a+1)\right)C_0 + \left(y_1 - \frac{a}{2x} y_0^2 + (a+1)y_0\right). \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une parabole dont le sommet a pour coordonnées $C_0 = y_0 - x(1 + 1/a)$ et $C_1 = y_1 + (a+1)^2 x/2a$. L'arc de parabole contenu dans le premier quadrant est limité par les points X' et A' correspondant aux points A et X de la figure 1.5. Des calculs élémentaires montrent que X', d'abscisse nulle, a pour ordonnée

$$y_1 - \frac{a}{2x} y_0^2 + (a+1)y_0,$$

17. Notons au passage que la condition $R'(I) \geq 0$ apparaît restrictive : ainsi Quintart et Ziswiller donnent-ils l'exemple d'une situation où le rendement marginal de l'investissement devient négatif ; voir Quintart et Ziswiller (1990), pp. 23-25.

et que A', d'ordonnée nulle, a pour abscisse

$$y_0 + x(1 + \frac{1}{a})(\sqrt{1 + \frac{2ay_1}{(1 + a)^2 x}} - 1).$$

La pente de la tangente à l'arc A'X' (c'est-à-dire à l'arc ABX de la figure 1.5), soit la dérivée dC_1/dC_0, est une fonction décroissante de C_0 puisque (comme on l'a vu) $d^2C_1/dC_0^2 = R''(y_0 - C_0)$, qui vaut ici $-a/x$, est strictement négatif. La pente en X' vaut $dC_1/dC_0 = (a/x)(y_0 - x(1 + 1/a))$, la pente en A' vaut

$$dC_1/dC_0 = -(1 + a) \sqrt{1 + \frac{2ay_1}{(1 + a)^2 x}} .$$

Dans le cas choisi par les auteurs, le sommet de la parabole, d'abscisse $y_0 - x(1 + 1/a)$, se situe hors du premier quadrant, c'est-à-dire que l'on a $y_0 < x(1 + 1/a)$. Dès lors la pente en X' est négative, puisqu'égale à $(a/x)(y_0 - x(1 + 1/a))$, et un calcul simple permet de vérifier que l'on a bien :

$$\text{pente en X'} = \frac{a}{x}(y_0 - x(1 + \frac{1}{a})) > -(1 + a) \sqrt{1 + \frac{2ay_1}{(1 + a)^2 x}} = \text{pente en A'}.$$

Sur l'arc de parabole A'X', la valeur absolue de la pente atteint son maximum au point A'.

Rien de tout cela, bien entendu, n'est explicité par les auteurs. Pour aborder la figure 1.5, le lecteur se voit muni, pour tout viatique, de la formulation suivante[18] :

> The slope of a line tangent to curve ABX in Fig. 1.5 is the rate at which a dollar of consumption foregone today is transformed by productive investment into a dollar of consumption tomorrow. It is the *marginal rate of transformation* (MRT) offered by the production/investment opportunity set. The line tangent to point A has the highest slope in Fig. 1.5 and represents the highest rate of return at point A in Fig. 1.4.

C'est alors qu'est présenté le « raisonnement » graphique que la figure 1.5 rend possible : si l'individu dispose a priori du panier de biens (y_0, y_1), c'est-à-dire de y_0 au temps 0 et de y_1 au temps 1, avec une utilité $U_1 = U(y_0, y_1)$, il va pouvoir augmenter son utilité en investissant à

18. Copeland et Weston (1988), pp. 7-8.

l'instant 0 une partie I du bien disponible, ce qui fixera sa consommation à $C_0 = y_0 - I$ au temps 0 et à $C_1 = y_1 + I + R(I)$ au temps 1. Pour cela, il cherchera à déterminer I de manière à maximiser $U(C_0, C_1)$. En d'autres termes, il s'agira pour lui de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max U(C_0, C_1) \\ C_1 = y_1 + R(y_0 - C_0) + y_0 - C_0. \end{cases}$$

Les auteurs, évitant cette formulation, expriment la chose en ces termes [19] :

> An individual endowed with a resource bundle (y_0, y_1) that has utility U_1 can move along the production opportunity set to point B, where the indifference curve is tangent to it and he or she receives the maximum attainable utility, U_2. Because current consumption, C_0, is less than the beginning-of-the-period endowment, y_0, the individual has chosen to invest. The amount of investment is $y_0 - C_0$. Of course, if $C_0 > y_0$, he or she will disinvest.

La contrainte d'optimisation $C_1 = y_1 + R(y_0 - C_0) + y_0 - C_0$ s'exprime ici par le fait d'avoir à se déplacer sur la courbe ABX, et cela jusqu'au point où se rencontre une courbe d'indifférence tangente - soit, dans le cas de la figure 1.5, jusqu'au point B. Il est alors supposé *graphiquement évident* que ce point, dont l'existence et l'unicité sont elles-mêmes regardées comme graphiquement évidentes, fournit le maximum cherché.

On mesurera l'économie de moyens mathématiques réalisée par le traitement graphique du problème étudié. En vérité, il semble bien que l'enjeu didactique soit ici l'apprentissage de ce style de *raisonnement graphique*, que le lecteur retrouvera quelques pages plus loin en étudiant la consommation et l'investissement lorsqu'existe un marché de capitaux.

Le fragment d'analyse que je viens de présenter permet de mettre en évidence les caractéristiques essentielles de l'écologie des objets mathématiques en économie. D'un côté, en effet, les objets mathématiques doivent pouvoir être mis en relation avec des objets économiques, ce qui introduit des contraintes nouvelles sur la vie de ces objets mathématiques. De l'autre côté, ils peuvent « s'appuyer » sur les objets économiques avec lesquels ils n'entretenaient pas d'interrelation jusque-là, ce qui leur crée des conditions inédites de vie.

Le style de solutions apportées par le texte examiné comporte alors deux caractéristiques principales : l'algébrique est mis en retrait, et ne subsiste plus guère que sous forme de traces emblématiques ; le graphique est mis en avant, essentiellement par l'emploi de différents types de courbes, qui vont constituer le point d'articulation entre les deux domaines de réalités que

---

19. *Op. Cit.* p. 8.

l'exposé rapproche - le mathématique et l'économique[20]. Il y a là un processus transactionnel évident, qui permet en particulier l'abaissement du niveau des besoins mathématiques - et donc leur satisfaction « à moindre coût ». On peut s'interroger sur le caractère spécifique ou non spécifique de ce phénomène de graphisation du savoir mathématique comme du savoir économique. Je donnerai maintenant quelques indications sur ce point.

Quelques exemples du même phénomène

S'agissant des mathématiques savantes, j'évoquerai d'abord tout le travail fait au XIXème siècle pour dégager les mathématiques des illusions de l'évidence géométrique. On a vu par exemple que des mathématiciens parmi les meilleurs de leur temps ont longtemps regardé comme incontestable le fait que toute fonction continue admette une dérivée, puisque toute courbe admet à l'évidence une tangente en chacun de ses points... La critique qui devait permettre d'aboutir fut alors celle de l'appel au témoignage des objets graphiques, ou comme on dit encore, de l'intuition géométrique, véritable fabrique de fausses évidences. De ce point de vue, l'analyse explicitée par Bernhard Bolzano (1780-1848) vaut d'être mentionnée.

Dans son mémoire de 1817, examinant le théorème que nous énoncerions en disant qu'une fonction continue possède la propriété des valeurs intermédiaires, Bolzano rappelle d'abord que la démonstration de ce théorème « s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie » [21] :

> à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement), doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées.

Or ce qu'il reproche à cette manière de faire est moins son caractère non convaincant que son aspect *épistémologiquement douteux*, ou, pour employer un mot plus faible, insatisfaisant. Ecoutons-le [22] :

> Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou

20. Le mathématicien pourrait dire négativement que les mathématiques se trouvent réduites à la présence de courbes ; et le praticien de la réalité économique pourrait dire de même que c'est l'économie que l'on réduit à une collection de courbes.
21. Le texte du mémoire de Bolzano est cité ici d'après la traduction française de Dhombres *et al.* (1987), p. 206.
22. *Ibid.*

de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir la géométrie.

On notera tout particulièrement *le caractère second* attribué à la géométrie, domaine *appliqué*, qui ne saurait pour cela fonder ses propres vérités ni *a fortiori* fonder des vérités générales. Et Bolzano de conclure :

> Si l'on insiste pour être conséquent ailleurs, ne doit-on pas s'efforcer de l'être ici aussi ? En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de « fabrication d'évidences », mais doivent être bien plutôt des fondements ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer : celui qui se rend compte de lui-même de cela saura qu'une démonstration véritablement scientifique, c'est-à-dire le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non de l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour les grandeurs qui appartiennent à l'espace. Conformément à cette opinion, une telle démonstration géométrique est un vrai cercle vicieux dans la plupart des cas et en particulier dans le cas présent, comme on le comprend facilement.

La critique inaugurée par Bolzano annonce un renversement fondateur, et ouvre un programme de recherche qui devait occuper partiellement les meilleurs mathématiciens du XIXème siècle. Tout un processus de déconstruction des évidences fabriquées par l'intuition géométrique va se développer qui aboutira à refonder entièrement les mathématiques. Que devient alors le rôle des objets graphiques, et en l'espèce des courbes, dans un travail mathématique ainsi renouvelé ? La citation suivante, extraite d'un ouvrage de mathématiques contemporain s'adressant à des étudiants d'université, énonce une réponse devenue banale aujourd'hui :

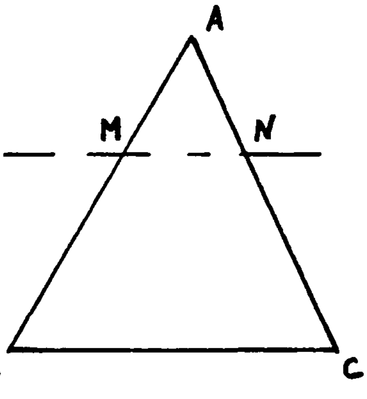
> Les représentations graphiques des fonctions sont utilisées non seulement en analyse, mais aussi dans les autres secteurs des mathématiques, notamment en géométrie différentielle, en mécanique et en calcul des probabilités, et dans les autres sciences pour visualiser la variation des grandeurs.
>
> D'autre part, la représentation graphique des fonctions permet de conjecturer de nombreux résultats de la théorie des fonctions (théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle, formule des accroissements finis, propriété des fonctions réciproques, comportement des suites de fonctions, etc.). Il est donc très utile dans ce type de questions de tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions

mises en jeu ; bien entendu, cela ne dispense pas d'effectuer ensuite une démonstration dans le seul cadre de l'analyse mathématique.

C'est donc maintenant l'analyse (ou quelque autre théorie mathématique dans laquelle on se situe) qui doit fonder ce que les objets graphiques ne peuvent que suggérer.

Portons nos regards vers la géométrie élémentaire traditionnellement enseignée au Collège (et, beaucoup plus marginalement, au Lycée). Le rôle directeur des objets graphiques est ici tellement prégnant et ancien, et tellement emblématique aussi, qu'il semble aller de soi. Or on peut reprendre à son propos la critique même que Bolzano élevait contre certaines pratiques courantes de son temps dans le domaine de l'analyse. Cette critique, on le sait, a été en fait reprise et développée dans le dernier tiers du XIXème siècle, pour nourrir le mouvement d'axiomatisation qui a conduit, notamment à l'instigation de David Hilbert (1862-1943) et de ses élèves, à la mise en évidence d'un certain nombre de lacunes dans ce que l'on considérait jusqu'alors comme le parangon du raisonnement mathématique et de la rigueur démonstrative.

J'illustrerai cela à propos d'un seul thème, à peu près entièrement ignoré dans la tradition euclidienne, celui de la *géométrie de l'ordre* (cette expression elle-même étant due à Emil Artin). Considérons un triangle propre ABC et un point M du côté]AB[. Soit alors Δ la parallèle à la droite (BC) passant par M. La modélisation graphique de cette situation *montre* que Δ coupe le côté [AC] en un point N.



Or ce que la géométrie euclidienne traditionnelle nous permet *seulement* de démontrer, c'est que Δ coupe la *droite* (AC) : (AC), sécante à (BC), est en effet sécante à Δ, puisque Δ est parallèle à (BC). Et ce que nous rajoutons ordinairement *comme un fait d'évidence*, c'est que Δ coupe la droite (AC) *entre* A et C. Cela, la géométrie euclidienne ne nous fournit *aucun moyen de le démontrer*. La chose, pourtant, est tenue pour aller de soi et - pour paraphraser Bolzano -, si la leçon de l'évidence graphique est incontestable, il n'en reste pas moins que ce constat n'est pas, en bonne méthode, fondé.

Devant cette situation, comment réagir ? Hilbert et ses élèves, et quelques autres encore, s'emploient à sauver l'édifice euclidien en en comblant les lacunes. La géométrie de l'ordre qu'ils élaborent a précisément cette fin. Essentiellement, pour ce qui nous concerne ici, il faut faire entrer en jeu un axiome, dû à Moritz Pasch (1843-1930), énonçant qu'une droite qui coupe l'un des côtés d'un triangle et ne passe par aucun de ses sommets *coupe nécessairement l'un des deux autres côtés*. Dans l'affaire qui nous occupe, la droite Δ coupe]AB[(par hypothèse) ; elle ne peut couper le côté [BC] (puisque Δ est parallèle à la droite (BC)) ; en outre, elle ne passe pas par A (sinon elle serait identique à la droite (AB) et couperait donc (BC)). D'après l'axiome de Pasch, Δ coupe donc la droite (AC) entre A et C.

Il est cependant une autre solution qui ne consiste pas tant à démontrer ce que le graphique nous fait voir comme évident *qu'à le fonder mathématiquement*. Après quoi il devient loisible *de se fier aux enseignements de la figure*. La solution consiste en l'espèce à passer de la géométrie *euclidienne* à la géométrie *cartésienne* (ou *analytique*). Considérons le repère affine du plan dans lequel le point B a pour coordonnées (0, 0) tandis que les points A et C ont pour coordonnées respectivement (0, 1) et (1, 0). La droite Δ a alors pour équation $y = \alpha$ où $\alpha \in]0, 1[$. Les points N de]AC[s'écrivent comme barycentres des points A et C sous la forme $N = (1 - \lambda)A + \lambda C$ où $\lambda \in]0, 1[$. Par ailleurs, l'équation de la droite (AC) est $x + y = 1$. Les coordonnées du point N, intersection de Δ avec la droite (AC), sont donc $(1 - \alpha, \alpha)$, ce qui permet d'écrire $N = (1 - \alpha)A + \alpha C$, égalité qui montre que N est situé sur la droite (AC) *entre* A et C.

La légitimité de l'entreprise mathématique consistant à combler les lacunes de l'édifice euclidien ne saurait en elle-même être mise en cause. Mais cette entreprise savante, par son succès même, relance la tension entre un point de vue culturellement valorisé et les formes technologiquement les plus efficaces de la mathématisation en géométrie. Et, en redonnant vie, implicitement au moins, à la vieille querelle des partisans de la « géométrie synthétique » - tel Jacob Steiner (1796-1863) - contre la « géométrie analytique » à l'époque en plein développement[23], les travaux refondateurs n'ont sans doute pas peu contribué à maintenir, dans l'enseignement secondaire notamment, l'antique privilège *culturel* de la géométrie à la manière d'Euclide, que quelques énergiques protestations - telle la suivante, due à Jean Dieudonné[24] - ne sont pas parvenues jusqu'à aujourd'hui à annuler :

> Soit, dira-t-on, les énoncés des théorèmes enseignés aux élèves des lycées sont destinés à être oubliés au profit de notions plus importantes ; mais du moins, en s'exerçant sur ces thèmes artificiels, auront-ils acquis des *méthodes* de recherche et

23. Sur ce point, on pourra consulter par exemple Kline (1972), p. 264 et suivantes.
24. Dieudonné (1964), p. 10-11.

> des habitudes de pensée qui leur seront plus tard d'un grand secours. Ici encore, cela était sans doute exact avant Descartes, mais avait déjà cessé de l'être pour les contemporains de Newton. C'est un des effets du progrès en mathématiques que des résultats auxquels leurs inventeurs n'arrivent qu'après des considérations fort difficiles et des cheminements très tortueux et parfois obscurs, se démontrent souvent en quelques lignes et presque sans effort 50 ou 100 ans plus tard. Un exemple universellement connu est l'invention du Calcul infinitésimal, qui a d'un seul coup ramené à des calculs presque automatiques la solution de problèmes qui avaient exercé la sagacité d'un Eudoxe ou d'un Archimède. Ce que l'on sait moins (...), c'est que depuis les travaux de Grassmann et Cayley entre autres (qui remontent à plus de 100 ans), on dispose en « Géométrie élémentaire », comme l'a si bien dit Choquet, d'une « route royale » par laquelle, à partir d'axiomes extrêmement simples à énoncer (au contraire de ceux d'Euclide-Hilbert) tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complet et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints « cas d'égalité » ou « cas de similitude » des triangles, points d'appui de toute la technique traditionnelle. Cela peut paraître surprenant au non initié, mais les mathématiciens professionnels sont depuis longtemps familiers avec de tels phénomènes, où le remplacement d'un système d'axiomes par un système *équivalent*, mais mieux choisi, amène parfois des simplifications considérables.

Le problème du « retard technologique », dû à la resistance culturelle au progrès de l'outillage, est ici clairement posé. Jacob Steiner, que j'ai mentionné plus haut, et dont le talent mathématique fut incontestable, dut pourtant à son entêtement « synthétiste » de connaître quelques déboires. Dès 1838, il donne ainsi une démonstration du plus fameux peut-être des problèmes dits *isopérimétriques* - parmi toutes les figures planes ayant un périmètre p donné, c'est le cercle (de rayon $R = p/2\pi$) qui délimite l'aire la plus grande. Or la démonstration de Steiner comporte une faille : elle suppose en effet a priori *l'existence* d'une courbe d'aire maximum. Dirichlet (1805-1859) essaya à plusieurs reprises de le persuader qu'il y avait là un problème non résolu, mais il se heurta à l'obstination de Steiner qui voyait dans cette propriété une pure évidence. Le problème, en réalité, devait rester longuement ouvert. Et ce n'est que dans les années 1870 que Weierstrass put s'y attaquer victorieusement en recourant au calcul des variations. J'ajoute pour être complet [25] que, ultérieurement, la démonstration que Steiner avait poursuivie sans succès fut donnée, sans doute plus comme un exercice d'école qu'à titre

25. Voir Kline (1972), pp. 838-839.

d'avancée mathématique réelle, par Constantin Carathéodory et Eduard Study, dans un article publié en 1909.

Ces péripéties, en elles-mêmes de peu d'incidence, sont pourtant les symptômes d'un *obstacle* épistémologique, culturellement surdéterminé, que la communauté mathématique ne parviendra à dépasser qu'après un bon siècle de débats. On ne s'étonnera donc pas que cet obstacle, toujours présent dans l'enseignement secondaire, ait resurgi, dans des formes pour l'essentiel inchangées, au cours de l'histoire récente de la théorisation en économie[26]. De fait, ce que l'on peut nommer aussi bien *l'outil graphique* que *l'obstacle graphique* apparaît rétrospectivement comme un leg *des mathématiques à l'économie*, que celle-ci reçut très exactement des mains de Cournot, le grand ancêtre. Citons Ménard [27] :

> Les représentations graphiques auxquelles Cournot a constamment recours jouent à des niveaux différents, parfois simultanément, parfois successivement. A certains moments la fonction pédagogique domine, le recours à la géométrie servant à illustrer les résultats en rappelant les particularités de la fonction initiale, ce qui s'avère nécessaire par exemple à chaque étape de la théorie des pôles. Mais le raisonnement géométrique peut aussi déborder ce caractère d'illustration et avoir une fonction complémentaire, servant à confirmer et à représenter un résultat, par exemple pour l'étude des variations résultant d'un impôt, ou une fonction motrice permettant d'établir une conclusion que l'analyse vient confirmer, par exemple dans l'étude de la concurrence oligopolistique. La représentation permet alors au raisonnement de progresser, et intervient dans la délimitation même des conditions qui lui sont imposées.

Or Cournot est à cet égard un mathématicien *d'avant* la critique des fausses évidences « géométriques » dans l'emploi des figures. L'économie « théorique » hérite donc d'un certain état de la science mathématique, sur lequel la théorisation économique *moyenne* va faire fond. Et la mathématisation par objets graphiques en économie fixe ainsi un repère quantitatif en ce qui concerne la teneur mathématique du savoir économique.

Ajoutons pour terminer que les échanges ne se font pas à sens unique. L'enseignement secondaire des mathématiques a ainsi accueilli depuis quelques années, à l'enseigne des problèmes mathématiques issus de l'économie, des problèmes élémentaires - à *deux* variables - de *programmation linéaire*. Ironie de l'histoire, la non importation simultanée des outils

26. Sur ce point, voir Artaud (1993) ou Artaud (1994).
27. Ménard (1978), pp. 157-158.

mathématiques impeccablement élaborés par des « économistes mathématiciens »[28], permettant une gestion mathématique rigoureuse de ces problèmes[29], a laissé se développer au Lycée le « raisonnement » sur de nouveaux objets graphiques, situation que l'on pouvait croire typique des pratiques « moyennes » en économie théorique. Juste retour du refoulé...

BIBLIOGRAPHIE

Artaud M. (1993), *La mathématisation en économie comme problème didactique - Une étude exploratoire*, thèse pour le doctorat de mathématiques, Marseille.

Artaud M. (1994), « L'antimathématisme comme symptôme », *Actes du séminaire didactique et technologies cognitives en Mathématiques*, Grenoble, pp.85-117.

Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, deuxième édition, La pensée Sauvage, Grenoble.

Copeland T. E. et Weston J.F. (1988), *Financial Theory and Corporate Policy*, troisième édition, Addison-Wesley, New-York.

Dhombres J. et al (1987), *Mathématiques au fil des âges*, Gauthiers-Villars, Paris.

Dieudonné J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris.

Fisher I. (1930), *The Theory of Interest*, Reprints of Economic Classics, Augustus M. Kelley, New-York, 1965.

Kline M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New-York.

Koopmans T.C. (1970), *Trois essais sur la science économique contemporaine*, Dunod, Paris.

Ménard C. (1978), *La formation de la rationalité économique : A. A. Cournot*, Flammarion, Paris.

---

28. Pour une définition de ce que j'entends par économistes mathématiciens, voir Artaud (1993) pp.35-37.
29. Par exemple l'algorithme du simplexe, dû à G. Dantzig : voir ainsi Koopmans (1970).

Munier B. (1989), « Portée et signification de l'oeuvre de Maurice Allais Prix Nobel d'Economie 1988 », *Revue d'Economie Politique*, 99ème année n°1 (janv-fev 1989), pp.1-27.

Quintart A. et Ziswiller R. (1990), *Théorie de la finance*, deuxième édition, PUF, Paris.

Samuelson P.A. (1947), *Fondations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Massachussetts, Enlarged Edition, 1983.