MARIE-JEANNE PERRIN-GLORIAN

La valeur absolue en seconde : transposition didactique et compétence des élèves

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995-1996, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. nº 5, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995-1996___3_A6_0>

La valeur absolue en seconde : transposition didactique et compétence des élèves

Marie-Jeanne PERRIN – GLORIAN
IUFM Arras
Equipe DIDIREM Université Paris VII

I. Introduction : le cadre général du travail.

Avant d'entrer dans le sujet, il me faut situer le travail que je vais présenter dans la perspective plus générale de recherche dans laquelle il s'insère et dont l'objectif principal n'est pas l'étude de l'enseignement de la valeur absolue.

Mes travaux précédents sur l'enseignement des décimaux et des aires dans des classes faibles de CM2 et de 6ème m'avaient amenée à interpréter les difficultés des élèves en termes de dévolution et d'institutionnalisation et à élargir un peu l'usage de ces concepts pour les voir comme deux processus complémentaires, et en partie contemporains, par lesquels le maître essaie de contrôler l'acquisition des notions mathématiques avec leur sens :
- dans la dévolution, il fait en sorte que l'élève engage ses connaissances, sa responsabilité dans les problèmes pour faire évoluer son rapport personnel aux objets de savoir, contribuant ainsi à contrôler le sens des notions enseignées,
- par l'institutionnalisation, il fait en sorte que l'élève sache ce qu'il y a à retenir, que le rapport personnel de l'élève évolue dans le sens de la conformité au rapport institutionnel, il fixe ainsi certaines techniques, certains "gestes" que l'élève aura à entraîner et à réutiliser.

L'objet de la présente recherche, concernant l'enseignement de la valeur absolue en seconde, était plutôt l'étude des pratiques d'institutionnalisation pour cerner les variables qui interviennent dans sa gestion de façon à tenter de mettre en relation les choix faits sur ces variables et l'apprentissage des élèves. Il nous faut rechercher ces variables du côté de l'enseignant, du côté des élèves et du côté du savoir en jeu. Divers facteurs interviennent, nous ne parlerons ici que de ce qui concerne directement le savoir ou le rapport au savoir des enseignants et des élèves.

Du côté du savoir, il nous faut d'abord déterminer quel est le rapport institutionnel. Notre analyse porte sur une étude succincte de la transposition didactique des contenus choisis, surtout la dernière flèche : étude de l'objet à enseigner et passage de l'objet à enseigner à l'objet enseigné. On étudiera ainsi leur place dans les programmes et dans les manuels (les connaissances visées, les classes de problèmes à résoudre, leurs relations avec les autres contenus de la même classe, avec les notions étudiées dans les programmes des classes antérieures, l'utilisation qui en sera faite dans les classes suivantes) et les choix faits par les professeurs. Une de nos grilles de lecture est ainsi l'organisation de l'enseignement au niveau observé en même temps que la consolidation de l'ancien et la préparation du futur. Une comparaison avec des programmes précédents pourra servir de révélateur pour le rapport institutionnel considéré (les institutions correspondantes seront, suivant le cas, la classe de seconde de l'enseignement français ou chacune des classes observées).

Du côté de l'enseignant les pratiques d'institutionnalisation sont sous-jacentes à presque toutes ses interventions. Le processus d'institutionnalisation est sous la responsabilité du professeur et se manifeste sous diverses formes à différentes occasions de la vie de la classe :
- au cours des phases de bilan, dans ce qu'il sollicite, reprend ou néglige des interventions des élèves, dans les commentaires qu'il fait et explications qu'il donne, ce qu'il demande de noter sur le cahier...
- dans les rappels qu'il fait lui-même ou qu'il sollicite des élèves,
- dans le choix des activités qu'il propose, des exercices et problèmes qu'il donne à chercher ou à rédiger, dans le choix des contrôles ...

Notre hypothèse de travail est que l'enseignant s'adapte à ses élèves. Même s'il utilise la même situation, on attend par exemple des différences dans l'institutionnalisation entre une classe forte et une classe faible. En effet, pour que sa classe fonctionne, le professeur a besoin d'un certain niveau de réussite de ses élèves. Nous attendons qu'à travers son institutionnalisation, il essaie de donner à ses élèves les moyens de réussir ce qu'il va leur demander par la suite, notamment dans les contrôles. Un moyen de repérer des variables a donc été de rechercher des différences entre ce qui se passe à ce niveau, pour un même enseignant, dans une classe forte et dans une classe faible. Par ailleurs l'observation d'enseignants différents et de classes de niveaux différents devait nous permettre d'accroître la diversité des pratiques observées en même temps que de rechercher des régularités à un autre niveau : des choix apparemment différents peuvent correspondre à une régularité dans les pratiques mais à une optimisation de contraintes différentes.

Du côté des élèves, nous observons la création du rapport personnel. Nos questions tournent notamment autour de l'insertion des nouveaux objets de savoir parmi les anciens, autour de l'articulation entre les résolutions de problèmes qui sont censées donner du sens aux contenus enseignés et le cours du professeur qui est censé indiquer ce qui est à retenir et à réutiliser dans d'autres problèmes, dans les contrôles etc... Comment se crée le rapport personnel aux nouveaux objets de savoir, comment se modifie le rapport personnel à des objets de savoir anciens, tout ceci sous l'influence du rapport institutionnel, médiatisé par le professeur qui a son propre rapport personnel au savoir et ses représentations sur les mathématiques, la manière de les enseigner, de les apprendre et les représentations de ses élèves. Nous cherchons à repérer les connaissances que les élèves mettent en jeu dans les activités de recherche, spontanément ou avec l'intervention du professeur, comment elles se modifient dans leurs interactions ou sous l'influence du professeur (interventions au cours de la résolution, cours ...) comment elles sont réinvesties dans les contrôles et quel apprentissage se fait aussi par le contrôle.

Dans la suite de l'exposé, nous présenterons l'analyse du contenu et des diverses présentations aux élèves à travers les programmes, les choix qui ont été faits par quatre professeurs en 94-95 et les résultats des élèves des classes concernées à un contrôle de fin d'année avant de conclure sur la place de la valeur absolue dans l'enseignement secondaire actuel. Les enseignants concernés étaient des enseignants "chevronnés", avec plus de quinze ans d'ancienneté, une expérience de plusieurs années en tant qu'animateurs IREM pour trois d'entre eux, mais des parcours professionnels divers (durée d'enseignement en collège ou lycée, publics des établissements concernés...).

2. Une modification du rapport institutionnel à l'objet "valeur absolue" dans l'enseignement secondaire français (programmes et manuels).

2.1. La présentation classique avant 1990

Avant 1969, la valeur absolue était introduite en classe de 4ème, en même temps que les nombres relatifs : elle servait d'abord à énoncer les règles opératoires sur les relatifs. Elle figurait dans le même chapitre que l'inégalité triangulaire, la formule de Chasles pour 3 points sur un axe, la mesure algébrique d'un segment orienté et la mesure de la longueur de ce segment. Elle ne figurait pas explicitement dans les programmes des classes suivantes. Après 1969, les relatifs sont introduits dès la classe de 6ème. Jusqu'en 1986, la valeur absolue figurait explicitement dans les programmes[1] à partir de la classe de cinquième. Les programmes et les commentaires ne précisaient rien à son sujet, à aucun des niveaux du collège. La mention de "valeur absolue" dans le libellé du programme semblait suffire. Nous pouvons nous faire une idée de l'enseignement correspondant en examinant les manuels. Dans les manuels, le terme "valeur absolue" était introduit dès la classe de sixième (jusqu'en 1985) en même temps que les nombres relatifs, dans un cadre purement numérique. Elle était alors vue comme "le nombre sans son signe" ou, plus précisément, on disait qu'un nombre relatif avait un signe et une valeur absolue et que deux nombres opposés avaient la même valeur absolue. En sixième et en cinquième, elle servait à exprimer les règles d'addition puis de

[1] parus en 1977 pour la 6ème et la 5ème, en 1978 pour la 4ème et la 3ème, en 1981 pour la seconde, appliqués en 6ème à la rentrée 1977, en 5ème en 1978, en 4ème en 1979, en 3ème en 1980, en seconde en 1981.

multiplication des nombres relatifs mais elle était vraiment étudiée dans le cadre algébrique à partir de la classe de quatrième (jusqu'en 1987), en référence aux relatifs et à l'axe gradué et c'est à ce niveau qu'on établissait ses propriétés. Elle était aussi utilisée dans l'étude des fonctions, qui étaient à cette époque introduites en cinquième, et des résolutions d'équations.

La valeur absolue était introduite et traitée presque exclusivement dans les cadres numérique et algébrique (même si on demandait aussi le placement de points sur un axe gradué). Elle était définie de l'une des manières suivantes :

* $|x| = x$ si x positif ou nul, $|x| = -x$ si x négatif ou nul
* $|x|$ est celui qui est positif parmi les deux nombres x et -x
* $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et -x.

L'axe gradué et les mesures algébriques étaient en général traités dans le chapitre suivant où on ne reparlait pas de valeur absolue.

Elle servait aussi à introduire des difficultés dans les exercices de résolution d'équations ou d'études de fonction, éventuellement pour renouveler l'objet d'étude (Duroux, 1983).

On trouvait alors (en 1979) en classe de 4ème

* des exercices comme "Calculer les rationnels pour lesquels $|2x+9| < 3,5$; $|4x-5| = 3$" ; mais aussi "$|\frac{2x-3}{3x-2}| = 2$" ou "$|\frac{2x-3}{3x-2}| \leq 2$" (Hatier, 1979) ; ou "Trouver toutes les valeurs de x vérifiant l'égalité indiquée : $|x^2-4| + |x-2| = 0$", "$||x-1|-1| = 1$", "$||x-1|-1| \leq 1$" (IREM de Strasbourg, ISTRA, 1979)
* des exercices théoriques comme

"Montrer que pour trois nombres quelconques x, y, z, on a $|x + y - z| \leq |x| + |y| + |z|$" (ibidem)

* ou encore des études d'applications comme (Monge, Belin, 1979) :

"On considère l'application f définie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to |x-2|$

1) Calculez f(2) ; f(-5,5) ; $f(\frac{3}{5})$; f(0) ; f(-1)

2) Soit x un réel supérieur ou égal à 2. Comparez les réels (x-2) and $|x-2|$
démontrez que le réel 3,5 admet un seul antécédent supérieur ou égal à 2 ; déterminez cet antécédent.

Même question pour chacun des réels suivants : $\frac{3}{4}$; 5,5 ; 1

3) Soit x un réel inférieur à 2. Comparez alors les réels (x-2) and $|x-2|$.
Démontrez que le réel 3,5 admet un seul antécédent inférieur à 2 ; déterminez cet antécédent.

Même question pour chacun des réels suivants : $\frac{3}{4}$; 5,5 ; 1

4) L'application f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$?"

La référence aux distances est indiquée pour traiter certains exercices (ce qui montre a contrario qu'on attend un traitement algébrique pour les autres) :
"En interprétant les valeurs absolues comme des distances entre points sur une droite graduée, déterminer x dans les cas suivants: $|x-2| + |x-3| = 5$", $|x-2| + |x-3| > 2$ ..." Remarquons que cet exercice est extrait du manuel de l'IREM de Strasbourg et que ce type d'exercices n'est pas fréquent en général.

Un manuel fait exception, c'est le Deledicq, Lassave et Missenard qui ne donne que des exercices très simples sur la valeur absolue en insistant sur l'axe gradué et le lien avec la distance comme "Représente sur une droite graduée les points d'abscisse x tels que $|x| < 3$; $1 < |x| < 2$; $|x| > x$; $|x| < x$; $|x - 1| < 2$."

En troisième, on l'utilise pour exprimer $\sqrt{x^2}$ comme $|x|$ et produire des fonctions affines par morceaux, comme dans ces exemples extraits du Monge (Belin, 1980) où il s'agit d'étudier des fonctions définies par $|2x+3| + |5x - 4|$ ou encore (de façon plus cachée) $\sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(3x-1)^2}$. Cependant, dans chacun des cas, les intervalles pertinents sont fournis dans les questions : "Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]-\infty , -\frac{3}{2}]$, on a ..."

En classe de seconde, en 1973, la valeur absolue figurait parmi les rappels de 4ème : on définit la distance à l'aide de la valeur absolue et on l'utilise pour définir les intervalles et les encadrements. Dans les programmes de 1981, on la trouve dans la rubrique "Activités

numériques" où il est précisé que "le calcul sur les nombres réels n'est pas revu pour lui-même mais solidairement avec la résolution des problèmes numériques qui sont au cœur de l'analyse" et qu'il faut éviter "d'accumuler ces activités en début d'année". Le paragraphe contient "Pratique des opérations et des inégalités portant sur les nombres réels, en particulier décimaux, rationnels. Valeur absolue ; distance. Exemples d'approximations d'un nombre réel donné au moyen de suites." Les commentaires, qui mettent l'accent sur l'importance des majorations, minorations, approximations, ne précisent rien sur la valeur absolue. Elle apparaît aussi à la rubrique fonction puisque la fonction $x \rightarrow |x|$ figure explicitement au programme, mais on voit aussi qu'on peut l'utiliser dans ce chapitre puisque un des thèmes d'études sur les fonctions, proposés à titre indicatif, est "Taux de variation : encadrement de ce taux ; inégalités du type $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$ pour tous x, y ; interprétation géométrique". Ce thème donne l'occasion de mettre en relation la valeur absolue et la distance. Dans les manuels, les propriétés de la valeur absolue étaient reprises dans le premier chapitre de révision sur les nombres, en même temps que les approximations, mais dans les exercices sur les approximations, les expressions avec inégalités étaient plus utilisées que la valeur absolue. Néanmoins, la valeur absolue était largement utilisée dans les exercices sur les fonctions comme en témoignent ces quelques exemples extraits du Hachette 1985 (Gautier, Gerll, Thiercé, Warusfel) : " Dans les exercices suivants, on demande d'étudier la fonction f et de tracer sa courbe représentative dans un repère (orthonormé) $f(x) = |-2x^2+5x+3|$; $f(x) = x^2-|x|$; $f(x) = ||x| - |2x+1||$; $f(x) = \sqrt{|4-9x|}$; $f(x) = \sqrt{|x|-1}$; $f(x) = \sqrt{|x|+|2x-4|}$; $f(x) = \sqrt{2x+|x-1|}$ "
...

Cependant, les instructions officielles des programmes de seconde précisaient dès le 10-10-1984, après trois ans d'application des nouveaux programmes :"*Les exercices faisant intervenir la valeur absolue de manière artificielle (et souvent cumulative) sont en dehors des objectifs de l'ensemble du second cycle.* L'essentiel est de savoir interpréter $|b-a|$ comme étant la distance des points *a* et *b*, et, dans cette perspective, des relations telles que $|x-2| < 1$ ou $|x-2| < 1/100$ à l'aide des intervalles de centre 2, et de savoir effectuer quelques majorations simples en utilisant l'inégalité triangulaire et les relations donnant la valeur absolue d'un produit ou d'un quotient. On notera que les problèmes mettant en jeu les valeurs absolues nécessitent souvent des raisonnements par disjonction, qui constituent une difficulté supplémentaire pour beaucoup d'élèves. Il convient donc d'aborder ce type de raisonnement à partir de situations simples. L'étude d'exemples de fonctions affines par morceaux, s'appuyant sur des interprétations graphiques, constitue un objectif raisonnable. D'autres exemples accumulant les valeurs absolues, tels que l'étude de la fonction $x \rightarrow |x-|x-1||$ ou la résolution des équations $||x|-3| + |2+|x|| = 1$ ou $\left|\frac{2x+5}{x-1}\right| = \sqrt{(2x+5)^2}$ relèvent de la technicité gratuite et ne peuvent que rebuter les élèves".

Dans le paragraphe sur les fonctions, ils précisent encore "*De façon générale, l'accumulation de difficultés techniques (en particulier de valeurs absolues et de parties entières est tout à fait inopportune.* Des exercices comme ceux qui suivent n'ont pas leur place en seconde : ...

$x \rightarrow \sin|x-1|$ ... $x \rightarrow \frac{1+|x|}{x\,|x+2|}$ "

Remarquons que les exercices mentionnés plus haut ont été relevés dans un manuel de 1985 qui publie à la fin de l'ouvrage les instructions ci-dessus. Bien sûr, cela ne nous dit pas quels exercices choisissaient les professeurs pour leurs classes.

Ces paragraphes de commentaire sont repris, mais un peu allégés, dans les programmes de 1986 qui insistent davantage sur les inégalités et inéquations et précisent que la valeur absolue intervient de façon naturelle dans les problèmes d'approximation. Pour les inéquations, la résolution de $|2x + 1| \leq$ est mentionnée comme un objectif raisonnable.

2.2. Les difficultés des élèves dans l'enseignement classique.

La valeur absolue provoquait beaucoup d'erreurs chez les élèves plusieurs années après son introduction (voir Duroux 1983 ; Chiarugi, Fracassina, Furinghetti, 1990). On se souvient que c'est à son propos que Duroux (1983) avait caractérisé, à la suite de Brousseau,

l'utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques. Rappelons quelques-uns des résultats qu'il avait obtenus auprès d'élèves de 3ème :
"Quel est le maximum de l'ensemble {10 ; -1253 ; 27 ; -3}?" : 92% de réussite. Mais "Si a est un nombre réel, quel est le signe de -a ?" : 48 % de réussite, et "Si $|-a| = 1$, que vaut a ?" : 11% de réussite.
"Si $2a + 3 = 1$, que vaut a ?" : 80% de réussite, mais "Si $|a + 2| = 4$, que vaut a ?" : 22% de réussite, et, "Si l'entier a est inférieur à l'entier b, peut-on avoir $|a-b| = 2$?" : 11% de réussite.

Les difficultés subsistent à l'entrée à l'université et l'utilisation de la valeur absolue comme distance semble peu disponible : les tests utilisés par A. Robert (1983) en première année de DEUG montrent que trouver l'ensemble des (x,y) de $\mathbf{R}^2$ tels que $|x-2| < 0,5$ pose encore problème. Donnons, à titre d'illustration, quelques exemples extraits de copies de licence au printemps 1995 (étudiants ayant donc rencontré la valeur absolue depuis la 5ème) :
- dans un calcul de valeurs propres, deux étudiants qui auront finalement 12,5 ou 17,5 au partiel, ont à résoudre $[\lambda^2 - (2a+b)\lambda + ab + a^2 - 2b^2]\,(a - \lambda - b)$. Ils trouvent $\Delta = 9b^2$ et $\lambda_1 = \frac{(2a+b)+3|b|}{2}$; $\lambda_2 = \frac{(2a+b)-3|b|}{2}$; $\lambda_3 = a - b$. Ils n'expriment pas les racines sans valeur absolue et ne s'aperçoivent pas qu'ils ont une racine double.
- en intégration, plusieurs étudiants écrivent :

$$\int_0^1 |x-y|^{-\alpha}\,dy = \left[\frac{|x-y|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^1 = \frac{|x-1|^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

En novembre 1995 (les plus jeunes étudiants peuvent avoir suivi les nouveaux programmes depuis la 6ème mais peu sont dans ce cas), on peut lire dans des copies de calcul différentiel :
* "$|d(x,x') - d(x',y)| \leq d(x,y)$ et $d(x',y') \geq |d(x',y) - d(y,y')|$ donc $d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') - d(x',y) - d(x',y) + d(y,y')$", ce qui revient à supprimer les valeurs absolues et à soustraire des inégalités !
* deux exemples se ramenant à dire que si $a \leq a'$, alors $|a - b| \leq |a' - b|$:
$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y)$ donc $|d(x,y) - d(x',y')| \leq |d(x,x') + d(x',y) - d(x',y')|$;
$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)$ donc $|d(x,y) - d(x',y')| \leq |d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) - d(x',y')|$, ce qui, cette fois, permet une simplification !

Au collège ou au début du lycée, les erreurs résistantes des élèves consistent soit à faire comme s'il n'y avait pas de valeur absolue, soit à changer la variable de signe ou à distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$, quelle que soit l'expression entre les barres de valeur absolue. On trouve par exemple :
$|a+2| = a+2$ si $a \geq 0$ et $|a+2| = -a - 2$ si $a \leq 0$
si $a < 0$, $|a+2| = - a+2$
si $x > 2$, $|2 - x| = 2 + x$
$|a+2| = 4$ donc $a = 2$
$|a+2| = 4$ donc $a = +2$ ou $a = -2$.
Les erreurs résistantes de ce type ont été attribuées à l'introduction précoce de la valeur absolue comme le nombre sans le signe, ce qui fait que la valeur absolue a disparu des programmes du collège. On l'introduit désormais en seconde, à des élèves qui ont déjà une certaine pratique du calcul algébrique.

2.3. Place dans les actuels programmes de seconde.

Dans les nouveaux programmes du collège qui entrent en vigueur en 1986 pour la classe de sixième, la valeur absolue disparaît entièrement à ce niveau. Elle ne sera introduite qu'en seconde, et avec beaucoup de précautions et de restrictions, ce qui en fait une notion relativement marginale en seconde. Le programme insiste sur la relation à faire entre la notion de valeur absolue, celle de distance et celle d'intervalle. Les manuels ont pris ce commentaire comme une suggestion d'introduire la valeur absolue à partir de la notion de distance qui est abordée naïvement au collège. On s'appuie donc sur l'aspect géométrique de la valeur absolue, mais il faut remarquer que la distance est ici restreinte à la distance sur un axe alors que la notion de distance est plutôt perçue dans le plan ou dans l'espace au collège.

C'est en fait plutôt le repérage des points sur un axe qui va servir d'appui, mais on va retrouver là les questions de signe et de nombre relatif.

La valeur absolue est reliée aux approximations dans le cadre numérique et ces deux aspects (géométrique et numérique) préparent l'utilisation qui sera faite de la valeur absolue pour formaliser la notion de limite, ce qui n'intervient plus avant l'enseignement supérieur. Dans la classe même de seconde, elle a un usage pour la construction de la notion de fonction: c'est un endroit où on va raisonner par disjonction de cas, même si le programme précise qu'il ne faut pas abuser de ce genre d'exemples. On aura des fonctions qui ne sont pas définies à partir d'une seule formule, mais que la valeur absolue va permettre de ramener à une formule.

Par ailleurs, la fonction valeur absolue est une des fonctions de référence du programme de seconde. Ce sera plus tard une source de contrexemples (pour fabriquer des fonctions continues non dérivables). En classe de seconde elle permet aussi de renouveler l'étude des fonctions linéaires et affines (et va donner une nouvelle occasion d'institutionnaliser ce qu'il y a à savoir sur ces fonctions) et fournit des raisons d'étudier le signe d'un binôme (au programme de seconde) puis d'un trinôme du second degré (en 1ère).

2.4. Examen de quelques manuels de seconde actuels.

Actuellement, les programmes insistent sur la relation à faire entre la valeur absolue et la notion de distance. En réalité, ils ne donnent pas d'indication sur la manière de définir la valeur absolue, cependant tous les auteurs de manuels ont interprété cette recommandation en introduisant la valeur absolue à partir de la distance. La plupart d'entre eux définissent même d'abord $|a-b|$ comme $d(a,b)$ puis $|x|$ comme $d(0,x)$ sans remarquer que cela donne une autre définition de $|a-b|$ mais qu'elles sont équivalentes parce que la distance est invariante par translation et que donc $d(0,a-b) = d(b,a) = d(a,b)$. De plus, on passe en général sans commentaire de la distance entre deux points à la distance entre deux nombres en disant que la distance entre deux nombres est la distance entre les points qui ont ces nombres pour abscisses sur un axe gradué sans dire qu'on admet que cette définition ne dépend pas de l'axe gradué choisi. Or, suivant l'unité, il est clair que les distances entre les points (au sens usuel) ne seront pas les mêmes. On passe aussitôt à une formulation interne aux nombres "le plus grand moins le plus petit" à partir de l'examen de ce qui se passe sur un axe gradué particulier.

Le point de vue mathématique est ainsi renversé : au lieu de définir la distance sur un axe à partir de la valeur absolue définie de façon intrinsèque sur les nombres comme $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$, on définit la valeur absolue à partir de la distance entre nombres qui ne pourrait être définie sans utiliser, au moins implicitement, la valeur absolue.

Le choix de définir $|a-b|$ par $d(a,b)$ avant $|x|$ s'explique, comme me l'a confirmé un professeur ayant fait ce choix, par un désir d'éviter une erreur très résistante : pour étudier $|x-a|$ ou, plus généralement $|f(x)|$, les élèves distinguent les cas $x > 0$ et $x < 0$.

La résistance de cette erreur amenait d'ailleurs une inflation d'exercices où on a besoin d'étudier en disjoignant les cas des expressions du type $|f(x)|$ alors que les traductions en termes d'intervalles ou de graphiques d'expressions comme $|x-a| < r$ étaient traitées plus rapidement parce que plus faciles, ce qui avait pour conséquence qu'une bonne partie des élèves arrivant à l'université ne maîtrisaient toujours pas ce genre de situation. Les programmes actuels expriment une volonté de donner la priorité à cet aspect, fondamental pour la formalisation de la notion de limite notamment.

La conséquence des choix actuels est que les exercices qu'on va demander aux élèves sont essentiellement des exercices de traduction entre différents langages : celui de la valeur absolue, celui de la distance et celui des inégalités, en particulier dans la définition des intervalles. On trouve surtout des exercices du type suivant (donné par un des professeurs observés) :

valeur absolue	distance	droite des réels	encadrement	intervalle
$\|x-2\| \leq 3$	$d(x;2) \leq 3$	-1 0 1 5	$-1 \leq x \leq 5$	$x \in [-1 ; 5]$
$\|x\| \leq 7$				
$\|x-1\| \leq 3/2$				
	$d(x;5) \leq 9/2$			
			$1 \leq x \leq 4$	
				$x \in [-7 ; -2]$
$\|x+3/2\| \leq 2$				
			$1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$	
				$\sqrt{3} \in [1{,}73 ; 1{,}74]$
$\|\pi - 22/7\| \leq 10^{-2}$				

2.5. Les résultats des élèves aux tests EVAPM.

Ce sont d'ailleurs surtout ces traductions que contrôle EVAPM (1991) dès la première année d'application des nouveaux programmes. Pour les traductions entre dessin, écriture usuelle de l'intervalle et inégalités, où il y a congruence entre les registres (Duval, 1995), les résultats sont très bons (entre 75% et 89% de réponses justes aux items concernant ces points). Les résultats sont encore très bons quand il s'agit de traduire $d(x;7) \leq 3$ en $|x-7| \leq 3$ (86% de réussite) mais les réussites tombent en dessous de 50% pour tous les autres cas :

- 48% pour la traduction de $d(x,7) \leq 3$ en $4 \leq x \leq 10$;
- 42% pour la traduction de $|x+5| \leq 1$ en $d(x;-5) \leq 1$ et 29% en $-6 \leq x \leq -4$;
- et seulement 29% pour la traduction de $-2 < x < 2$ en $d(x;0) < 2$ et 28% en $|x| < 2$.

A titre de comparaison, Chiarugi et al. trouvaient 39% d'élèves de 14 ans et 80% d'élèves de 17 ans capables de dessiner sur la droite réelle l'intervalle défini par $|x| < 3$. Les élèves de seconde français se situeraient vraisemblablement entre les deux.

Pour le reste, on peut noter que les élèves réussissent mieux les questions numériques que les questions algébriques puisque 41% donnent une réponse juste pour les 4 questions : "si $a = -5$; $b = 25$; $c = -13$, alors $|a-b| = 20$; $|c| - |b| = -12$; $a + |b-c| = 33$; $|a-b| - |a+b| = 10$, (oui, non, je ne sais pas)" alors que seulement 20% donnent une réponse correcte pour les 4 questions : "quels que soient les réels a et b, on peut affirmer que $|a-b| \leq a$; $|a+b| \geq a+b$; $|a+b| \geq |a| + |b|$; $|a+b| \leq |a| + |b|$".

Pour l'aspect fonction de la valeur absolue, 60% peuvent dessiner le graphe correctement pour g définie par $g(x) = |x|$ et 53% peuvent compléter le tableau de variation de g sur [-5,7].

x	-5 7
g(x)	

Ces résultats permettent de penser que les élèves actuels relient sans doute mieux la notion de valeur absolue à celle de distance et qu'ils peuvent passer du langage de la valeur absolue à celui des distances ou réciproquement, du moins dans le cas où le centre de l'intervalle considéré est positif. La traduction d'un encadrement en termes de valeur absolue est en revanche loin d'être acquise.

Remarquons par ailleurs que si la traduction en termes de distance facilite la résolution d'équations du type $|x-a| = r$, elle risque de rendre plus difficile la résolution des équations ou inéquations pour lesquelles le coefficient de x ne serait pas 1, même des équations aussi simples que $|2x-1| = 3$.

3. Nombres et valeurs absolues. Rapports au savoir dans quatre classes de seconde.

3.1. Comparaison des progressions des quatre professeurs observés.

Nos observations nous ont montré différentes organisations de l'enseignement de cette notion. Le professeur A a été observé dans 4 classes différentes : il avait deux classes de seconde en 92-93, une en 93-94 et une en 94-95. Pour le professeur B, nous disposons de l'enregistrement des séquences de cours en 1993-94 et de l'ensemble de la progression en

1994-95. Pour les professeurs C et D, nous disposons de l'ensemble de la progression 94-95. Dans toutes les (8) classes observées sauf celle du professeur C, la valeur absolue a été définie à partir de la distance, mais avec des variations dans l'organisation générale de l'enseignement. Une des différences d'organisation pour les professeurs qui ont introduit la valeur absolue à partir de la distance tient aux choix concernant l'enseignement des fonctions. L'un d'eux (B) a traité d'abord l'aspect numérique avec intervalles, inégalités, résolution d'équations et d'inéquations, approximations (fin novembre, début décembre), puis est revenu sur la fonction valeur absolue comme une des fonctions de référence, au 2ème trimestre (février), après avoir traité les fonctions en janvier. Les autres professeurs (A et D), qui sont dans le même établissement, ont abordé la notion de fonction dès le début de l'année et traité l'aspect fonction de la valeur absolue dès son introduction, en même temps que ce qui concerne les intervalles, après le signe de ax+b et le traitement des inégalités.
Les professeurs A, B, D ont défini la valeur absolue comme une notation pour la distance sur un axe gradué : d'abord |a-b| comme d(a,b), puis |x| comme d(x,0).
Le professeur A est parti de la distance dans des situations variées : dans l'espace, puis dans le plan, sur une droite, sur un axe gradué, et du calcul de quelques écarts de températures.
Les professeurs B et D sont partis de la distance, mais seulement sur un axe gradué.
Les professeurs A et B ont insisté sur la méthode géométrique de résolution des équations en référence à la distance sur un axe gradué et même le professeur A n'a enseigné que cette méthode et la méthode graphique mais pas la méthode algébrique pour "enlever les barres". Le professeur D a commencé de la même manière mais ensuite, il a encouragé la méthode algébrique.
Le professeur B a d'abord étudié seulement les aspects numérique et algébrique de la valeur absolue, avec ses propriétés, et les approximations. La valeur absolue en tant que fonction a été étudiée dans le chapitre sur les fonctions. La résolution des équations et inéquations avec une valeur absolue a été traitée d'une nouvelle manière à ce moment.
Les professeurs A et D ont commencé les fonctions dès le début de l'année, donc ils ont traité l'aspect fonctionnel en même temps ou juste après l'algébrique.

Le professeur C avait défini la valeur absolue à partir de la distance les années précédentes mais avait décidé de commencer par la définition algébrique cette année parce qu'il avait constaté qu'avec la distance tout se passait facilement au moment de l'introduction, mais que les difficultés arrivaient un peu plus tard, au moment où il voulait utiliser la fonction valeur absolue. Il a donc défini |x| comme x si x est positif et -x si x est négatif et a traité en même temps les points de vue numérique et fonctionnel. Il avait commencé l'étude des fonctions avant la valeur absolue aussi a-t-il traité la fonction |x| juste après la définition de la valeur absolue et l'étude de ses propriétés. Mais la relation avec la distance et les intervalles a été faite plus tard. Pour résoudre les équations et inéquations algébriquement, le professeur C a introduit un tableau "pour enlever les barres" en se référant au tableau de signe utilisé avant pour étudier le signe d'un produit de facteurs.

Pour résoudre des équations comme $|x-a| = r$ ou des inéquations comme $|x-a| \leq r$, nous avons donc trouvé les 4 méthodes suivantes :

* méthode géométrique : $|x-a| = r$ veut dire $d(x,a) = r$, les élèves dessinent l'axe et trouvent a-r et a+r,
$|x-a| \leq r$: la distance est plus courte, on trouve l'intérieur du segment,
$|x-a| \geq r$: la distance est plus grande, on trouve l'extérieur du segment. Cette méthode est aussi adaptée pour résoudre des équations ou inéquations comme $|x-a| \leq |x-b|$.

* méthode algébrique : $|x-a| = r$ signifie $x-a = r$ ou $x-a = -r$;
$|x-a| \leq r$ signifie $-r \leq x-a \leq r$;
pour $|x-a| \geq r$, il est nécessaire de distinguer 2 cas,

* méthode algébrique avec un tableau :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$|x-a|$ sans $|\ |$	$-x+a$		$x-a$
résolution	$-x+a \leq r$ $a-r \leq x \leq a$		$x-a \leq r$ $a \leq x \leq a+r$

Cette méthode est commode pour des équations complexes.

* méthode graphique : on dessine le graphe de la fonction pour résoudre l'équation ou l'inéquation et on vérifie, ou on utilise le graphe pour choisir la bonne forme algébrique pour résoudre ensuite par une méthode algébrique.

Dans la classe A, le professeur a donné seulement la première et la dernière méthodes. Dans la classe B, les mêmes ont été encouragées mais la seconde a aussi été donnée dans le cours comme un résumé de ce que les élèves avaient fait dans les exercices. Dans la classe D, les méthodes 1, 2, 4 ont été données mais la seconde a été encouragée. Dans la classe C, le professeur a encouragé la troisième et la quatrième méthodes. La première n'a été donnée que plus tard, pour définir les intervalles puisque la relation avec la distance n'a été vue qu'à ce moment là.

Les niveaux des classes ont été comparés grâce à l'évaluation nationale de début de seconde. La classe A est de niveau faible, la classe B est très hétérogène avec à la fois les élèves les meilleurs de tout l'échantillon et des élèves comparables aux plus faibles de la classe A, la classe C est plutôt homogène et de bon niveau, mais sans élève excellent, la classe D est de niveau moyen faible.

3.3. Résultats d'un questionnaire de fin d'année.

En fin d'année, nous avons fait passer un questionnaire dans les quatre classes. Il comportait une partie destinée à repérer les représentations des élèves sur les nombres et une autre destinée à vérifier les diverses compétences concernant l'utilisation de la valeur absolue. Nous avions introduit la partie sur les nombres parce que l'observation des élèves en classe nous faisait penser que les difficultés rencontrées à propos de la valeur absolue étaient en fait des difficultés avec la notion de nombre, en particulier de nombre réel.
Nous ne donnons ici que quelques résultats. Les résultats détaillés se trouvent dans le rapport de recherche à paraître à l'IREM de Paris 7.

a) ***Valeur absolue et nombres irrationnels***
La question 7 comportait deux parties : "Donne un encadrement aussi précis que possible de $1-\sqrt{2}$ et explique comment tu l'as trouvé. Quelle est la valeur exacte de $|1-\sqrt{2}|$?"
Placée après les exercices plus classiques sur la valeur absolue, elle permet, comme les 4 premières questions, de tester les nombres, cette fois en relation avec la valeur absolue. Nous avions écrit $|1-\sqrt{2}|$ et non $|\sqrt{2}-1|$ pour que la réponse correcte ne soit pas confondue avec celle qu'on obtient en enlevant les barres. Nous pensions que les élèves pouvaient fournir un encadrement avec la calculatrice, mais nous attendions un nombre important de non réponse à la deuxième question à cause de la présence de la racine et du fait que $1-\sqrt{2}$ n'est pas perçu vraiment comme un nombre avec lequel on peut calculer : $\sqrt{2}$ risque de fonctionner comme "x" et d'entraîner des réponses "$1-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}-1$". Nous attendions aussi l'identification de $\sqrt{2}$ à une valeur approchée et des réponses décimales approchées de $|1-\sqrt{2}|$, ou des réponses du type "il n'y a pas de valeur exacte", le terme "valeur" étant réservé aux décimaux. Les résultats sont nettement conformes à notre analyse a priori .

Pour l'encadrement, c'est l'absence de réponse qui est majoritaire dans toutes les classes. Certes, cette question venait en deuxième partie de questionnaire mais la plupart des élèves qui n'ont pas répondu à cette question, sont allés plus loin dans le questionnaire, parfois jusqu'à la question 11, plus classique. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant où nous distinguons :
réponse 1 : encadrement correct
réponse 2 : inégalités dans le mauvais sens (exemple $-0,41 < 1-\sqrt{2} < -0,42$)

réponse 4 : valeur approchée ou même valeur de chaque côté de l'encadrement
réponse 5 : autre réponse (souvent quelque chose comme $-0,41 < \sqrt{2} < 0,42$)
non réponse

	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	0	5	11	1	0	17
réponse 2	3	5	7	4	1	20
réponse 3	1	2	2	0	0	5
réponse 4	1	1	1	0	0	3
autre rép.	4	2	2	1	0	9
non réponse	15	14	12	16	1	58
total	24	29	35	22	2	112

Notons l'importance de la réponse 2 qui correspond au fait que les élèves oublient de retourner les inégalités quand ils passent à l'opposé. Dans la classe A, aucun élève ne fournit d'encadrement correct et un seul dans la classe D. Dans ces deux classes, le taux de non réponse est particulièrement important. La classe D a manqué de temps, mais dans la mesure où cette question est celle où le taux de non réponse est le plus fort dans toutes les classes, on peut penser qu'il exprime quand même une difficulté des élèves. Pour croiser avec la réponse suivante, nous pouvons regrouper les élèves qui avaient une réponse (1, 2 , 4) leur permettant d'affirmer que $1-\sqrt{2}$ est négatif et donc de répondre correctement à la question suivante :

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponses 1,2,4	4	11	19	5	1	40
autres	5	4	4	1	0	14

Pour la valeur exacte de $|1-\sqrt{2}|$, nous avons distingué :
réponse 1 : $\sqrt{2} - 1$
réponse 2* : valeur approchée ou "il n'y a pas de valeur exacte"
réponse 5 : $\sqrt{2}-1$ ou $1-\sqrt{2}$,
réponse 6 : $1-\sqrt{2}$
réponse 7 : valeur décimale négative
réponse 8 : $1+\sqrt{2}$

	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse 1	1	5	3	2	1	12
réponse 2*	9	3	8	2	0	22
réponse 5	0	2	9	1	0	12
réponse 6	0	6	3	1	0	10
réponse 7	2	1	0	2	0	5
réponse 8	3	1	1	0	0	5
autre rép.	1	2	1	2	0	6
non réponse	9	9	10	12	1	41
total	24	29	35	22	2	112

La réponse correcte est rare (25% dans la classe B qui a le meilleur score. On peut remarquer que les réponses (1, 5, 6, 8) comportant une $\sqrt{2}$ sont majoritaires dans les classes B et C (avec une inversion de fréquences pour les réponses 5 et 6), alors qu'elles sont très rares dans la classe A qui utilise surtout des valeurs approchées. Ceci est peut-être lié au fait que l'usage de la calculatrice est très encouragé dans la classe A. Dans la classe D, le trop grand nombre de non réponse donne peu d'élèves dans chaque cas. Pour vérifier le statut différent de $\sqrt{2}$ suivant les classes, on peut regrouper les réponses comportant $\sqrt{2}$ d'une part même fausses (1, 5, 6, 8) et celles qui n'envisagent que les décimaux (2*, 7) d'autre part, ce qui donne :

	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponses 1,5,6,8	4	14	16	4	1	39
réponses 2*,7	11	4	8	4	0	27

En revanche, si l'on assimile les valeurs approchées aux réponses justes (réunion des réponses 1, 2*), les résultats de la classe A s'améliorent notablement : ces élèves ont des problèmes avec les inégalités, il est probable que pour eux seuls les nombres décimaux ont statut de nombre mais beaucoup d'entre eux peuvent traiter $|1-\sqrt{2}|$ par une valeur approchée alors que dans les classes B et C les élèves produisent plus de réponses fausses conservant $\sqrt{2}$, ce qu'on peut vérifier en comptabilisant les réponses 5, 6, 8 :

	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponses 1 ou 2*	10	8	11	4	1	34
Pourcentages	0,42	0,28	0,31	0,18		0,30
réponses 5,6,8	3	9	13	2	0	27
Pourcentages	0,13	0,31	0,37	0,09		0,24

Comparons les 2 parties de la question, pour savoir notamment quels sont les élèves qui font une réponse exacte ou donnent une valeur approchée parmi ceux qui avaient un encadrement permettant de conclure sur le signe de $1-\sqrt{2}$, ce que nous appellerons "Encad", les autres réponses étant regroupées sous le titre "non Encad." dans les tableaux ci-dessous :

	Encad. 1, 2, 4	non Encad. 3, 5	Enc. non réponse
réponse $\sqrt{2}-1$	10	0	2
réponses 2*	10	6	6
autre réponse	14	7	14
non réponse	6	1	36

On trouve 20 élèves qui donnent pour l'encadrement une réponse montrant que $1-\sqrt{2}$ est négatif et une réponse fausse pour $|1-\sqrt{2}|$ (14 d'entre eux) ou aucune réponse (6 d'entre eux). On voit aussi que les élèves qui ne donnent pas un encadrement pertinent produisent rarement la réponse attendue. Certains donnent cependant une valeur approchée correcte. Les profils ne sont pas exactement les mêmes selon les classes :

classe A	Encad.	non Enc.	non rép
rép. 1	1	0	0
rép. 2 *	1	3	4
autres	1	2	3
non rép.	1	0	8

classe B	Encad.	non Enc.	non rép
rép. 1	5	0	0
rép. 2 *	2	1	1
autres	3	3	4
non rép.	1	0	9

classe C	Encad.	non Enc.	non rép
rép. 1	2	0	1
rép. 2 *	5	2	1
autres	8	2	4
non rép.	4	0	6

classe D	Encad.	non Enc.	non rép
rép. 1	1	0	1
rép. 2 *	2	0	0
autres	2	0	3
non rép.	0	1	12

On voit que c'est surtout dans la classe A que des élèves qui ne sont pas capables de fournir l'encadrement fournissent néanmoins une valeur approchée correcte alors qu'ils ont tendance à donner des réponses formelles à partir de $\sqrt{2}$ dans les classes B et C. Dans la classe C, 8 élèves fournissent un encadrement pertinent, aux problèmes d'écriture des inégalités près, mais une réponse non pertinente pour $|1-\sqrt{2}|$. Il y a 14 élèves en tout dans ce cas ; l'importance de la classe C dans cette catégorie s'explique par le nombre élevé dans cette classe d'élèves qui répondent $1-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}-1$. En effet, les réponses de ces 14 élèves se répartissent ainsi :

* $1-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}-1$: B19, C14, C15, C21, C28, C29
* $1-\sqrt{2}$: B25, C17,
* $1+\sqrt{2}$: A9, B23, C16, C19, D15

* -0,41 : D14.

Les réponses aux premières questions du questionnaire laissaient penser que seuls les entiers, les décimaux et quelques fractions sont considérés par beaucoup d'élèves comme des nombres "réels", que les seules différences entre nombres qu'ils peuvent imaginer sont reliées au signe ou à l'écriture et que les expressions qui n'ont pas une écriture avec un seul signe comme $|2-\pi|$ ne sont pas considérées comme des nombres. Nous en trouvons une confirmation ici. $1-\sqrt{2}$ ne semble pas être un nombre dont on peut facilement prendre l'opposé, sauf en le remplaçant par une valeur décimale approchée. La distance de 1 à $\sqrt{2}$ ne semble pas plus facile à évaluer. Les difficultés rencontrées sur cette question sont sans doute reliées à celles concernant la notion de nombre irrationnel plutôt que la valeur absolue.

b) *Valeur absolue et intervalles.*

Les questions 5 et 6 permettaient de tester les traductions dans les définitions des intervalles entre la donnée des bornes et la définition sous la forme $|x-c| \leq r$ en même temps que la résolution d'équations ou inéquations $|ax+b| = r$ ($\leq r$), en demandant dans chaque cas la réponse dans le cadre géométrique et le registre de la droite graduée, qui est un moyen de passer d'une définition de l'intervalle à l'autre par l'intermédiaire du centre et du rayon. La question 5b était une vérification de la lecture correcte d'un intervalle à partir de ses bornes, elle est réussie par presque tous les élèves. Quelques-uns n'y ont pas répondu peut-être parce qu'il n'y avait aucun calcul à faire pour y répondre, quelques autres ont fait une erreur de signe sur une des bornes ou mal placé $\frac{3}{4}$.

5. Dans chaque cas, dessine une droite graduée et colorie tous les points qui ont une abscisse x qui vérifie la condition donnée :

a) $|x - 3{,}5| \leq 1{,}5$ ______________________

b) $x \in [\frac{3}{4} ; 2]$ ______________________

c) $|x + \frac{3}{2}| \leq 2$ ______________________

d) $|2x + 1| = 3$ ______________________

e) $|2x + 1| \leq 3$ ______________________

6. Quel est le centre de l'intervalle $[-\frac{7}{2} ; \frac{1}{2}]$?

Quel est son rayon ?

Ecris une relation ayant la même signification que $x \in [-\frac{7}{2} ; \frac{1}{2}]$ mais utilisant la valeur absolue

Nous faisons l'hypothèse (raisonnable d'après les résultats de 5b) que les traductions entre l'intervalle défini par ses bornes et le dessin de l'intervalle ne posent pas d'autre problème, pour la quasi totalité des élèves, que celui du placement ou de la lecture d'abscisses sur un axe gradué. Les réponses aux questions 5a, c, d, e peuvent donc être considérées comme des résolutions d'équations ou d'inéquations. Nous attendons des différences dans la réussite de 5a et 5c d'une part, 5d et 5e d'autre part pour les classes A, B, D qui ont introduit les valeurs absolues par les distances mais peu de différences pour la classe C où la définition de la valeur absolue s'est faite dans le cadre algébrique.

La question 6 demandait la traduction inverse de 5c mais en demandant des intermédiaires, ce qui devait nous permettre d'analyser les erreurs de traduction. Nous comparerons les résultats de 5b) et 6b) (écriture de la relation à partir des centre et rayon trouvés).

Nous avons codé les réponses des élèves en utilisant un même code pour les réponses qui nous semblaient relever d'une même conception, ou plus exactement d'un même type de procédures ; nous devrions, si notre analyse est correcte trouver une certaine cohérence dans les réponses aux diverses questions. Les résultats détaillés seraient très longs à décrire. Nous donnons seulement les réussites et les types d'erreurs.

i) - réussites

catégorie	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
5a code 1	9	11	27	10	0	57
5c code1	8	8	18	6	0	40
5d code 1	4	4	22	6	0	36
5e code 1	3	3	29	4	0	39
5a et 5c code1	7	7	18	6	0	38
5d et 5e code1	3	3	20	4	0	30
5 tout juste	2	1	12	1	0	16
6a code 1	9	14	24	9	1	57
6b code 1	7	7	6	6	0	26
6a et 6b code 1	5	6	6	4		21
5a, 5c, 6b code1	4	4	5	3	0	16

Nous pouvons constater une meilleure réussite à l'exercice 5 dans la classe C que dans les autres classes. Cette tendance se maintient pour le début de l'exercice 6 (déterminer le centre et le rayon) mais non dans la deuxième partie (écrire avec une valeur absolue). La meilleure réussite de la classe C peut s'expliquer par deux facteurs : d'une part les élèves de cette classe se sont plus investis dans la résolution de cet exercice classique parce qu'ils pensaient le contrôle noté et ils ont bénéficié d'un temps plus long ; d'autre part, tous ceux qui donnent une explication (27) utilisent une méthode algébrique et parmi eux, 9 utilisent la méthode de résolution en tableau pour d et e (dont 4 l'utilisent aussi pour a et/ou c). Dans les autres classes, très peu d'élèves font apparaître des calculs (aucun dans la classe B), on peut penser qu'ils ont résolu géométriquement sur le dessin, certains l'indiquent par des accolades, deux élèves de la classe A indiquent le calcul des bornes, deux élèves de la classe A utilisent une méthode algébrique (dont un, A14, correctement, y compris pour d et e), 7 élèves de la classe D font de même (dont 4 correctement mais deux font des erreurs dans le report sur le dessin).
Une autre différence entre les classes est la baisse beaucoup plus forte de réussite entre 6a et 6b dans la classe C que dans les autres classes : pour la moitié des élèves de la classe C, connaître le centre et le rayon ne permet pas d'écrire la définition de l'intervalle à l'aide de la valeur absolue. C'est aussi le cas du quart de séleves de la classe B mais nous savons qu'ils se sont moins investis (14 non réponse pour cette question, parmi lesquels 3 avaient un centre et un rayon corrects et 4 autres avaient un centre juste mais n'ont pas cherché le rayon).

ii) - erreurs

Nous relevons ici 6 types d'erreurs, dont les 3 premières ne concernent que la question 5 et la dernière les questions 5d et 5e :
erreur A : élèves qui enlèvent les barres de valeur absolue et résolvent algébriquement
erreur B : élèves qui donnent un segment délimité par centre et rayon ou une demi droite délimitée par centre et rayon (cumulée éventuellement avec une erreur de signe pour le centre)
erreur O : intervalle centré en 0 avec le bon rayon
erreur CR : interversion du centre et du rayon, que ce soit en dessinant l'intervalle ou en lisant le dessin,
erreur S : erreur de signe sur une borne ou sur le centre et qui ne font que cette erreur
Pour les questions d et e, nous repérons par 3 codes les élèves qui traitent la question en se référant probablement aux distances comme dans le cas $|x-a|$, sans complètement tenir compte du coefficient :
- co pour les élèves qui font comme si on avait x au lieu de 2x et répondent -4, 2 ou $-4 \leq x \leq 2$
- R pour ceux qui prennent un centre correct mais un rayon 3 (-3,5 ; 2,5 pour bornes) ce qui revient à résoudre $|x + \frac{1}{2}| \leq 3$
- C pour ceux qui prennent un rayon correct mais un centre -1 (-2,5 ; 0,5), ce qui revient à résoudre $|x + 1| \leq \frac{3}{2}$.
Nous regrouperons ces codes sous le titre "erreur D"

erreurs	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
5 erreur A	10	8	8	2	2	30
5 erreur B	7	6	0	4	0	17
5 erreur O	4	3	2	2	1	12
5 ou 6 erreur CR	1	2	0	1		4
5 ou 6 erreur S	4	4	3	8		19
erreur D	5	3	0	2		10
total	24	29	35	22	2	112

iii) - comparaison des résultats de 5c et 6b

Il s'agit de comparer les résultats de 5c et 6b qui correspondent aux deux sens de traduction pour les écritures des intervalles et pour lesquelles des différences étaient attendues.

5c. traduction de $|x+c| \leq r$ en $x \in [a,b]$

6b. traduction de $x \in [a,b]$ en $|x+c| \leq r$

La traduction dans 6b sera considérée comme bonne quand elle est compatible avec le centre et le rayon trouvés dans 6a, même faux.

	classe A	classe B	classe C	classe D	total
5c et 6b	0,25	0,21	0,17	0,23	0,21
5c et non 6b	0,08	0,14	0,43	0,05	0,20
non 5c et 6b	0,13	0,03	0,00	0,14	0,06
ni 5c ni 6b	0,54	0,62	0,37	0,59	0,53

Nous voyons que les élèves de la classe C, avec une approche algébrique peuvent réussir la traduction de $|x+c| \leq r$ en $x \in [a,b]$, ce qui revient à résoudre une inéquation, bien plus facilement que l'autre sens.

Dans les classes A et D, s'ils peuvent faire un sens, ils peuvent faire l'autre, ou le sens de l'intervalle vers la valeur absolue est un peu mieux réussi.

Pour les classes A, B, le succès dans 5c et non 6b est dû à la non réponse dans 6b, dans la classe D, il y a un élève qui prend le mauvais signe du centre pour la traduction, dans la classe C il y a des non réponse mais il y a beaucoup de réponses comme "$0 \leq |x| \leq 3,5$ ou même $-\frac{7}{2} \leq |x| \leq \frac{1}{2}$.

iv) - comparaison des résultats de 5a et 5c d'une part, 5d et 5e d'autre part :

Nous attendons ici aussi des différences entre la classe C (peut-être D) et les autres : avec la méthode algébrique, et en particulier avec la méthode du tableau il n'y a pas de différence entre ces items, peut-être même 5d et 5e sont-ils plus faciles parce qu'ils utilisent des entiers, alors que 5d et 5e sont beaucoup plus difficiles que 5a et 5c avec la méthode géométrique,

	réussite a et c	non (a et c)
réussite d, e	A: 2, B: 1, C:17, D: 1	A: 1, B: 2, C: 9, D: 3
non (d et e)	A: 5, B: 5, C: 3, D: 5	A:16, B:21, C: 6, D:13

Les différences sont tout à fait claires, comme attendu et comme on peut le voir sur le tableau de pourcentages de chaque type dans chaque classe

pourcentages 1	classe A	classe B	classe C	classe D	total
ac et de	0,08	0,03	0,49	0,05	0,19
ac et non de	0,21	0,17	0,09	0,23	0,16
(non ac) et de	0,04	0,07	0,26	0,14	0,14
ni ac ni de	0,67	0,72	0,17	0,59	0,51

et, dans chaque type, la contribution de chaque classe est :

pourcentages 2	classe A	classe B	classe C	classe D
ac et de	0,10	0,05	0,81	0,05
ac et non de	0,28	0,28	0,17	0,28
(non ac) et de	0,07	0,13	0,60	0,20
ni ac ni de	0,28	0,37	0,11	0,23
total	0,22	0,26	0,32	0,20

Ces deux tableaux montrent bien la différence sur ce point entre la classe C et les autres : Les élèves de la classe C ont une meilleure réussite dans d,e que dans a,c, et la meilleure réussite pour le tout, souvent par la méthode du tableau. Dans les classes A et B, très peu d'élèves peuvent réussir d et e mais a,c est un peu plus facile ; dans la classe D, ce qui est plus facile n'est pas clair.

Rappelons qu'il faut relativiser les résultats obtenus dans ce paragraphe en se souvenant que les conditions de passation n'ont pas été identiques :
- pour la classe A, le test a été passé assez peu de temps après l'enseignement de la valeur absolue, et le professeur a incité les élèves à réviser et a dit que ce contrôle compterait dans la moyenne,
- pour la classe B, l'enseignement de la valeur absolue était fini depuis 3 mois, le professeur a simplement prévenu les élèves que je ferais un test mais que cela ne le regardait pas, qu'il ne regarderait pas leurs réponses. Le test a eu lieu juste avant les vacances de Pâques, ceci explique l'absence de 5 élèves et peut-être l'investissement moindre de certains autres,
- pour la classe C, le test a aussi eu lieu lors de la dernière séance avant les vacances de Pâques mais le professeur avait annoncé un contrôle surprise, comme il en fait quelquefois, ce qui explique la présence de tous les élèves et leur investissement sur les questions concernant la valeur absolue jugées "rentables", les questions du début étant plus inattendues ont parfois été moins investies alors même que les élèves disposaient de plus de temps (1h 1/4 environ),
- pour la classe D, la passation a eu lieu dans la dernière séance de cours avant la libération des élèves pour le baccalauréat, ce qui explique quelques absences et sans doute un investissement moindre : le professeur ne pouvait plus utiliser les réponses pour l'évaluation des élèves. De plus, des circonstances indépendantes de notre volonté ont fait que les élèves n'ont pu disposer que de 45 à 50 minutes. Comme pour la classe B, le test avait lieu plus de 3 mois après l'enseignement.

c) ***Expression algébrique de la valeur absolue.***
Nous analysons ici les résultats de la question 9 :
9. Pour chacune des affirmations, entoure ce qui convient et explique ta réponse :
◊ pour tous les nombres réels x positifs, on a $|x - 2| = x - 2$ vrai faux je ne sais pas
◊ pour tous les nombres réels x négatifs, on a $|2 - x| = 2 + x$ vrai faux je ne sais pas
◊ pour tous les nombres réels supérieurs à 2, on a $|2 - x| = x - 2$ vrai faux je ne sais pas
Cette question cherchait à repérer des erreurs classiques sur la définition algébrique de la valeur absolue. On pouvait attendre que beaucoup d'élèves répondent "vrai" à la première affirmation qui n'est contredite que par les nombres entre 0 et 2. La réponse "vrai" à la deuxième est une erreur classique qui consiste à dire que la valeur absolue est positive donc qu'il faut mettre +x si x est négatif. La troisième affirmation était vraie mais l'écriture sous la forme $|2-x|$ plutôt que $|x-2|$ pouvait induire en erreur. C'est ce qui s'est passé pour beaucoup d'élèves pour qui $|2-x|$ n'est sans doute pas équivalent à $|x-2|$, comme en témoignent d'ailleurs les commentaires qui accompagnent les réponses.

D'abord, nous pouvons dire que très peu d'élèves donnent une réponse correcte pour les 3 questions :

les 3	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
correct FFV	1	5	6	1	0	13
2 cor. 1 jnsp	1	0	1	0	0	2

Si nous regardons une assertion à la fois, nous voyons que ce n'est pas la même assertion qui donne la meilleure réussite dans chaque classe :

% réussite	classe A	classe B	classe C	classe D	total
affirm.1	0,43	0,59	0,44	0,65	0,52
affirm.2	0,43	0,45	0,82	0,35	0,54
affirm.3	0,70	0,38	0,24	0,65	0,44

La 1ère affirmation est la mieux réussie des 3, bien que peu nettement, dans la classe B, à égalité avec la 3ème dans la classe D ; c'est la 2ème assertion qui a, de loin, le meilleur taux de réponses correctes dans la classe C, et la 3ème affirmation est la mieux réussie dans la classe A, à égalité avec la 1ère pour la classe D mais c'est la moins bien réussie dans la classe B et dans la C où les écarts sont d'ailleurs les plus grands. La troisième question est aussi celle pour laquelle la réponse des étudiants est le plus souvent "Je ne sais pas", en particulier dans la classe C (22 : 3 + 5 + 10 + 4).
Remarquons de plus qu'ici, nous n'avons tenu compte que des réponses et non des justifications alors que certains élèves donnent de mauvaises justifications à des réponses justes, nous les comptabilisons cependant avec les autres puisque d'autres élèves ne donnent aucune justification. Les mauvaises raisons ne devraient pas permettre de fournir des réponses justes à toutes les questions. Voyons donc ce que donne l'examen du nombre de réponses justes à l'ensemble des questions.

Ensemble	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
réponse FFV	1	5	6	1	0	13
2 Corrects, 1JSP	1	0	1	0	0	2
2 rép.justes	13	7	8	12	0	40
1 rep.juste	5	12	15	6	1	39
réponse VVF	2	5	2	0	1	10
autre réponse	1	0	2	1	0	4
non réponse	1	0	1	2	0	4
total	24	29	35	22	2	112

Les réponses entièrement correctes ne sont plus qu'au nombre de 13. Il y a certes 55 élèves qui fournissent au moins deux réponses justes mais il est à craindre qu'en tenant compte des explications, nous découvrions que cela ne recouvre pas la compréhension de la valeur absolue, surtout pour ceux qui déclarent vraie la seconde affirmation. Il est à noter que, pour les élèves qui répondent correctement à 2 questions, la 3ème est presque toujours correcte pour les classe A, B, D qui ont eu la présentation par les distances et presque jamais pour la classe C. Pour ceux qui ont une seule réponse correcte, nous retrouvons le fait que la classe C a le plus d'élèves qui ne répondent juste qu'à la deuxième affirmation, et les classes A et B pour la première. On a très rarement des réponses justes à la 3ème seule : rappelons que c'est celle qui inspire le plus de doute.
Ces résultats ne sont pas étonnants a priori : on peut penser que la présentation algébrique amène à rencontrer l'erreur correspondant à l'assertion 2 au cours de l'apprentissage, ce qui amène une institutionnalisation forte sur ce point, alors que la présentation par la distance amène à attirer l'attention sur le 2 qui est à l'intérieur de la valeur absolue pour séparer les deux déterminations. Mais, dans la classe C, 11 élèves donnent une réponse juste au b en pensant que, dans ce cas, $|2-x| = -2+x$: l'un d'eux explique que $|2-x| = -(2-x)$ si $x < 0$. Le grand nombre de réponses correctes au b) dans la classe C s'explique donc par une erreur.
Il faut donc analyser les explications fournies pour tirer des conclusions plus précises. Il y a peu d'explications, surtout pour la dernière affirmation.
** Pour la première affirmation, sur 49 explications (dont 36 pour des réponses justes),*
- 19 élèves fournissent une réponse juste avec une explication pertinente dont 12 donnent le contrexemple $x = 1$, les autres disent qu'il faut $x > 2$ ou redonnent la définition,
- 7 élèves donnent une réponse juste avec des explications non fausses mais non pertinentes,
- 10 élèves donnent une réponse juste avec une explication fausse dont 6 répondent "car $|x-2| = x+2$"

- 3 élèves donnent une explication pertinente mais une réponse fausse parce qu'ils n'ont pas tenu compte de "x positif" : exemple "vrai car |x-2| = x - 2 si x ≥ 2"
- 10 élèves donnent une réponse fausse avec une explication fausse ou non pertinente.
** Pour la deuxième affirmation, sur 43 explications (dont 29 avec des réponses justes)*
- 9 élèves fournissent une réponse juste avec une explication pertinente dont 5 fournissent un contrexemple (-1 le plus souvent),
- 2 déclarent qu'une V.A. est toujours positive,
- 18 donnent une réponse juste avec une explication fausse, dont 11 (tous de la classe C) disent que |2-x| = -2+x,
- 14 tentent de justifier la réponse "vrai" dont 3 élèves (D6, D15 et D24) ont fourni des justifications correctes pour les deux autres affirmations. Les explications vont toutes dans le même sens : "on fait la différence du plus grand nombre et du plus petit donc le signe est +" (A9), "car x < 0 et - par - donne +" (A10), "|-x| = x" (B13), "2 signes - à la suite se transforment en +" (B35), ... sauf une : "|2-x| avec x négatif = x-2" (D30).
** Pour la troisième affirmation, sur 17 explications (dont 8 avec des réponses justes)*
- 4 ont des réponses correctes et des explications pertinentes : "différence entre le plus grand et le plus petit" (A9, D6), "car x≥2" (D15, D24)
- 2 prennent un exemple (x = 3) (A10, A16),
- 2 ont une réponse juste et une explication fausse,
- 9 ont des réponses et des justifications fausses

On peut voir que les explications fournies montrent bien les difficultés avec les nombres négatifs, notamment la difficulté à penser -x positif. On retrouve ici des explications tout à fait conformes aux résultats de la thèse de Tchoubou.

d) *Représentation graphique*
C'est la question pour laquelle on observe la meilleure réussite pour la question entière.
question 10. Trace les représentations graphiques des fonctions f(x) = |x + 2| ; g(x) = |x| ; h(x) = |x - 3| sur la feuille quadrillée jointe."
Pour cette question, nous ne tenons pas compte des "non réponse" parce que quelques élèves, spécialement dans les classes A et D n'avaient pas assez de temps pour atteindre cette question (pour diverses raisons le temps laissé n'a pas été exactement le même dans toutes les classes).

Graphes	classe A	classe B	classe C	classe D	autres	total
tout correct	8	17	28	4	1	58
réponse 2	0	0	3	2	0	5
réponse 3	0	0	1	1	0	2
réponse 4	5	3	1	2	0	11
réponse 5	3	0	1	3	1	8
réponse 6	1	5	1	2	0	9
total réponses	17	25	35	14	2	93
% rép. cor.	0,47	0,68	0,80	0,29	0,50	0,62
non réponse	7	4	0	8	0	19

* la réponse 2 est une réponse correcte mais restreinte aux x > 0 ou x > a ou x < a,
* la réponse 3 correspond à un changement de la pente : |3x| pour un élève (autres graphes corrects), |0,5 x+1| pour l'autre (|x| correct, non réponse pour |x-3|)
* la réponse 4 est la réponse fausse dominante : les élèves font un décalage vertical au lieu d'un horizontal (le plus souvent, ils tracent le graphe de |x|+2 ou |x|-3)
* la réponse 5 correspond aux élèves qui dessinent des droites,
* la réponse 6 comprend les élèves qui dessinent un graphe correct pour |x+2| ou |x-3| et font une erreur 4 ou 5 pour un autre graphe, sauf l'un d'eux qui dessine un graphe correct seulement pour |x| et y = 2, y = 3 pour les autres.

e) *Eléments de comparaison.*

Nous pouvons comparer certains de nos résultats à ceux des tests nationaux de l'A.P.M.E.P. (intervalles, graphes) et à ceux de Chiarugi et al. obtenus en Italie (définition, graphes):

*** Comparaison aux résultats du test national de l'A.P.ME.P.:**

- dans le test national 48% des élèves peuvent traduire $|x-7| \leq 3$ en $4 \leq x \leq 10$,

dans le nôtre, nous avons presque le même résultat : 49,1% pour $|x-3{,}5| \leq 1{,}5$ mais avec des différences entre les classes (37,5% dans A, 37,9% dans B, 71,4% dans C, 45,5 % dans D). Notons la très bonne réussite de la classe C.

- nous avons un résultat un peu meilleur que l'A.P.M.E. P.quand le centre a une abscisse négative :

* dans le test national 29% des élèves peuvent traduire $|x+5| \leq 1$ en $-6 \leq x \leq -4$ alors que 36,6% des élèves réussissent une traduction plus difficile dans notre test : $|x+\frac{3}{2}| \leq 2$ en $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ là encore avec un avantage pour la classe C (33,3% dans A, 27,6 % dans B, 57,1% dans C, 22,7% dans D)

* dans le test national 28% peuvent traduire $-2 < x < 2$ en $|x| < 2$ alors que 27 % réussissent une traduction nettement plus difficile dans notre test : $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ en $|x+\frac{3}{2}| \leq 2$ mais avec des différences entre classes (38% dans A, 24% dans B, 17% dans C, 37 % dans D) et cette fois une moindre réussite de C. Nous devons cependant noter que si les nombres étaient plus difficiles dans notre test, nous avons négligé les erreurs de calcul. Néanmoins, une erreur qui consiste à donner un intervalle symétrique produit une réponse correcte dans le test national et une fausse dans le nôtre : cela concerne 12 élèves pour nous (10,7%).

- dans nos classes, les résultats sont un peu meilleurs pour les graphes puisque nous avons 70% de graphes corrects pour $|x|$ au lieu de 60% dans le test national (54,2% dans la classe A, 75,9% dans la classe B, 85,7% dans la classe C, 40,9% dans la classe D). Chiarugi et al. ont trouvé 51% à 14 ans et 92% à 17 ans. En seconde, les élèves ont 16 ans mais, dans notre curriculum, c'est la première fois qu'ils rencontrent la valeur absolue et les fonctions (mais pas les graphes).

*** Comparaison avec Chiarugi et al. pour la définition algébrique de $|x|$**

- Nous pouvons comparer notre question 9a "pour tous les nombres réels positifs, nous avons $|x-2| = x-2$ vrai, faux, je ne sais pas" avec la question 6 de Chiarugi et al. " est-il vrai que $|x-1| = x-1$ pour $x \in R$ et $x > 0$?". Les résultats sont proches :

Chiarugi 14 ans : 25%, 17 ans : 57%, 19 ans : 69 %
notre 9a : 52% (A : 43%, B : 59%, C : 44%, D : 65%)

- Nous comparons aussi nos questions 9b "pour tous les nombres réels négatifs, nous avons $|2-x| = 2+x$ vrai, faux, je ne sais pas" et 9c "pour tous les nombres réels plus grands que 2, nous avons $|2-x| = x-2$ vrai, faux, je ne sais pas" avec la question 7 de Chiarugi et al. " est-il vrai que $|1-x| = 1+x$ pour $x \in R$ et $x > 1$?" même si elles ne sont pas équivalentes : nous pouvons attendre que notre question 9b soit plus difficile que la question 7 de Chiarugi parce que $x < 0$ donne la tentation de changer x en -x, et notre 9 c devrait donner un score proche même si la réponse "vrai" peut être plus difficile à donner parce qu'elle nécessite de reconnaître que $|2-x| = |x-2|$. En fait, nos prévisions semblent se vérifier dans les classes A et D mais pas dans les classes B et C :

Chiarugi 14 ans : 54%, 17 ans : 72%, 19 ans : 69 %
notre 9b : 54% (A : 43%, B : 45%, C : 82%, D : 35%)
notre 9c : 44% (A : 70%, B : 38%, C : 24%, D : 65%)

Rappelons que nous avons souvent trouvé des réponses justes avec des explications fausses, particulièrement pour 9b dans la classe C où beaucoup d'élèves pensent que si $x < 0$, $|2-x| = -2+x$, et que le 9c a entraîné beaucoup de réponses "je ne sais pas", une réponse "vrai" dans un cas peu habituel comme ici est sans doute plus difficile à justifier qu'une réponse "faux".

f) *autres questions.*
Nous manquons de place pour rendre compte ici des autres questions : l'utilisation du langage des valeurs absolues dans des problèmes d'encadrements de longueurs et d'aire et la résolution d'équations comportant des valeurs absolues. Le premier point est assez mal réussi, particulièrement l'encadrement d'une différence qui n'est réussi que par 6 élèves de chacune des classes B et C et par 1 élève de la classe D.

Les résolutions d'équations arrivaient en fin de test et beaucoup d'élèves ont manqué de temps. Il faut noter cependant que les élèves en difficulté de la classe A ont tendance à aborder ce type de question (après en avoir passé d'autres éventuellement) en inventant une méthode algébrique alors que le professeur avait évité ce point de vue et avait insisté sur les méthodes géométrique et graphique.

4. Quelle est la place de la valeur absolue dans l'enseignement secondaire français actuel ?

4.1. Quels types de problèmes la valeur absolue permet-elle de résoudre au lycée ?

Une particularité de la valeur absolue est que c'est surtout un outil de formulation, il est donc difficile de trouver des problèmes où elle intervienne comme outil de résolution, sauf des problèmes déjà formalisés en mathématiques. C'est notamment un moyen d'écrire des fonctions sans disjonction de cas, par exemple des racines carrées : $\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$ ou des distances, des aires de figures qui dépendent d'un paramètre.

De plus, pour traiter les problèmes qui mettent en jeu une valeur absolue, par exemple pour résoudre des équations ou inéquations, il faut en général disjoindre les cas, sauf quand on l'utilisera pour la notion de limite. Mais, comme il n'y a plus dans l'enseignement secondaire de formalisation de la notion de limite, on peut prévoir que les élèves n'auront pas souvent l'occasion de l'utiliser dans leur scolarité au lycée. En seconde, on peut prévoir que les expressions que les élèves auront à considérer pourront le plus souvent s'écrire sans la valeur absolue et que les élèves ne l'utiliseront que si on le leur demande ou si elle directement objet d'étude donnée dans le texte, comme un raccourci de langage, par exemple "étudier la fonction $|2x-1|$ ou résoudre $|2x-1| = 3$". Si on leur donne à modéliser une situation de distance, on peut attendre que les élèves disjoignent les cas plutôt que d'utiliser la valeur absolue, sauf peut-être s'ils ont à communiquer avec un ordinateur, par exemple pour faire tracer le graphe de la fonction obtenue.
Dans ces conditions, peut-elle fonctionner au lycée autrement que par le contrat ?

4.2. Témoignages de professeurs : éléments de régulation des choix.

Des entretiens avec les professeurs, il ressort qu'un élément important de régulation de leurs choix en ce qui concerne le temps et l'énergie qu'ils vont consacrer à l'enseignement d'une notion est l'usage qui en est fait dans les classes auxquelles se destinent la majorité de leurs élèves et les difficultés que les élèves risquent de rencontrer dans les classes ultérieures. La perte de ce repère lors d'un changement de niveau d'enseignement enlève des moyens à l'enseignant, comme le pointe le professeur A qui a enseigné longtemps au collège:

> Ce qui s'est passé aussi, c'est que, face aux difficultés d'adaptation des élèves au lycée, j'ai pas assez de recul. La gestion du temps... J'ai du mal encore à discerner les connaissances visées raisonnables. Quelles sont les connaissances utiles pour les années suivantes mais surtout les difficultés rencontrées par les élèves pour les connaissances mal implantées en seconde. Je commence à mieux voir pour les premières, c'est pour ça que je fais plus de fonctions en seconde parce que je vois que les difficultés en première sont dues à la fonction mal implantée en seconde mais je vois pas plus tard.

Les choix vont ainsi se référer à l'expérience professionnelle que les professeurs ont des classes suivantes et aux cursus qu'ils prévoient pour leurs élèves. Le professeur A a cette année une classe faible et il enseigne aussi en 1ère S et en 1ère ES : ce sont les contenus de cette classe qui vont régler ses choix en seconde. Le professeur B a une classe très hétérogène mais dont la moitié peut espérer une 1ère S et il enseigne en Terminale S : le travail sur les inégalités et la structuration des démonstrations sont des enjeux importants.

> Professeur A : Maintenant, j'ai attaqué les vecteurs, après inéquations, j'ai sauté fonctions affines et linéaires, je me suis juste appuyée sur construire une droite, j'ai

insisté sur coefficient directeur et ordonnée à l'origine : on lit sur l'expression. J'ai fait ça parce que mes élèves vont aller au mieux en ES ou en STT et quelles vont être leurs difficultés en première, ça va être de construire les tangentes, donc ce qui m'importe le plus c'est qu'ils sachent dessiner une droite connaissant le coefficient directeur, et ça c'est pas de la tarte, même en 1ère, pour faire dessiner des tangentes donc je m'attache là-dessus. ...
... les pourcentages j'ai décidé que je les sautais puisqu'on en fait beaucoup l'an prochain...
transformations des configurations planes, c'est pas la peine d'en parler, ils ne feront pas de géométrie l'an prochain
Ensuite, pour les vecteurs, c'est plus pour leur culture générale, plus pour les inciter... parce que les vecteurs ils vont pas s'en reservir plus tard, pour leur culture générale ...
La géométrie dans l'espace, ils en auront pas besoin mais je vais la faire parce que c'est un endroit où ils seront pas en échec donc je vais la faire... mais d'un point de vue ... c'est simplement un moment où ils seront bien... où je vais leur demander des choses faciles... ensuite... les transformations, je ne les ferai pas ... c'est trop compliqué, pour les faire comme il faut...
Je ferai peut-être l'homothétie parce que ça me fait un réinvestissement des vecteurs... point de vue culturel aussi, c'est intéressant qu'ils aient vu l'homothétie... et après je vais faire la trigo. En fait, cette classe, quand je vois où ils vont aller l'an prochain, il faut qu'ils arrivent à décoder les fonctions, à s'habituer au passage de l'expression au graphique.

Professeur B : Les fonctions, y'a une difficulté... ça dépend des classes, le niveau de la classe si j'insiste ou pas mais si on demande des démonstrations sur les inégalités, les sens de variation, les élèves ont des problèmes parce que, je pense, quand on veut montrer qu'une fonction est croissante, il y a plusieurs opérations qui s'enchaînent et comme il y a plusieurs opérations... s'il y a quatre étapes, c'est difficile à structurer.
... ou bien on écrit f(b) - f(a) et on factorise et là y'a un calcul algébrique et puis en soi, c'et pas intéressant, donc, moi, quand je le fais, c'est par composition et inégalités successives. Alors, maintenant, quand je leur pose ce genre d'exercice, je leur mets la structure... Je leur dis : on prend a et b dans et des fois je mets pas l'intervalle... enfin, je fais un exercice à trous et je leur demande de compléter les intervalles ou les inégalités... parce que pour eux, ça c'est difficile et c'est peut-être pas un objectif de la classe de seconde.
I. En première quand ils vont avoir la dérivée, ils vont plus avoir besoin de cela ?
B. Oui, mais il n'empêche que c'est un travail sur les inégalités : quand tu prends 2 nombres et que tu prends les inverses, tu utilises bien que la fonction inverse est décroissante ... on en aura besoin de toute façon, mais c'est peut-être pas la meilleure façon de le mettre en œuvre...

Sur la valeur absolue, ils nous disent tous les deux qu'ils en feront peu, et, à travers leur discours, on voit que c'est l'occasion de poursuivre d'autres objectifs : travail sur la notion de fonction dans un cas, sur les inégalités dans l'autre.

Professeur A. un minimum... Je vais sans doute la traiter quand même ... Ça va être très vite fait, ça va se limiter à "les points qui sont à égale distance d'un même nombre", on va faire $|x-a| = 3$ par exemple, je pense quon ne va pas aller au delà de ça, de toute façon, la valeur absolue, ils ne la reverront jamais...
.(en 1ère S)...... je suis en train de préparer les limites, on suppose $x > 0$ ou $x < 0$, on se met toujours du bon côté ... Je n'ai pas encore vu la nécessité de la valeur absolue en 1ère S... Peut-être je la ferai parce que c'est une fonction intéressante à voir mais ça ne m'est vraiment pas indispensable. Ce qui est vraiment indispensable en seconde, c'est la notion de fonction... qu'ils sachent repérer que, quand ils tracent un graphique, quand ils ont un point sur un dessin, c'est parce que ce point là a pour coordonnées x et f(x) et qu'inversement, s'ils prennent le point, ils peuvent lire x et f(x), je suis contente parce les miens, au mieux ils iront en 1ère ES... alors en 1ère ES, qu'est-ce qu'on va leur demander... de construire des tangentes ...

Professeur B. La valeur absolue, pas grand chose... Que quand ils voient écrit "valeur absolue" d'abord ils aient pas peur et que quand ils voient $|x-a|$ ils aient dans la tête l'image de la distance parce que... on s'en sert pas tellement si ce n'est pour exprimer plus petit que ε ou que 10 puissance moins quelque chose...
I. On s'en sert pas tellement en seconde et quand est-ce qu'on s'en sert alors ? en terminale quand on introduit les limites ?
B. oui par exemple pour dire $|x_n-l| < 10^{-4}$ c'est tout...
I. en terminale et en 1ère ?
B. Y'a très longtemps que j'ai pas eu de 1ère. ... Quand je te disais que je voulais qu'ils aient une image géométrique avec $|x-a|$, qu'ils aient aussi un encadrement... D'ailleurs, moi, l'exercice qui sert de résumé à la fin sur ce que j'attends d'eux, c'est un exercice où on traduit de 4 façons différentes distance, valeur absolue, intervalle et encadrements, c'est tout ce que je leur demande...
B. ... je ne fais que des exercices qui tournent autour de ça. L'année dernière, j'ai fait "Monsieur Dupont"[2] pour participer à la recherche mais je suis pas convaincue... je crois que je le ferai pas cette année hein...
I. en fait M. Dupont, c'est plutôt sur la notion de fonction...
B. oui, et comme moi, j'ai pas commencé les fonctions quand je fais la valeur absolue...

Conclusion

L'exemple de la valeur absolue, à travers les déclarations des professeurs, confirmées par une étude des manuels, illustre d'abord quelques phénomènes liés à la transposition didactique :

- la réduction d'une niche écologique : les objectifs de formalisation des limites ayant disparu des programmes de Terminale, l'utilisation de la valeur absolue pour compliquer les études de fonction ou les résolutions d'équation et renouveler ainsi les objets d'enseignement (Duroux, 1983) ayant été dénoncée et qualifiée d'inutile par l'institution, la valeur absolue devient un objet sans enjeu et s'est réfugiée uniquement dans la définition des intervalles. Elle devient très marginale et a peu d'occasions d'utilisation. On peut se demander si la présence de ce langage, une manière parmi quatre d'écrire un intervalle, va pouvoir vivre longtemps dans le secondaire non scientifique ou si on va finalement se contenter de l'écriture $d(x,a) \leq r$.

Les professeurs ne s'y trompent pas et c'est un des chapitres qu'ils sacrifieront éventuellement s'ils sont pressés par le temps : un des professeurs que nous avions contactés et qui avait une classe très faible nous a déclaré qu'il ne la traiterait pas. Les professeurs, comme nous avons pu le voir dans les déclarations des professeurs A et B, ont tendance à valoriser ce qui va être utile dans les classes suivantes. Une modification de programme dans une classe de fin de cursus a donc assez rapidement des modifications en amont : les notions qui étaient principalement utilisées dans le domaine qui disparaît perdent de leur importance et auront tendance à disparaître aussi.

- la centration sur le point de vue donné par la définition : on constate que la définition algébrique amène certaines difficultés chez les élèves, notamment la mauvaise utilisation ou l'absence d'utilisation de la valeur absolue pour décrire des intervalles. La solution proposée est de changer la définition pour la rendre conforme à l'usage qu'on veut que les élèves en fassent. Ce faisant les élèves améliorent leurs performances dans les types de tâches incriminées mais d'autres deviennent plus difficiles.

Pour la comparaison des classes, nous devons modérer nos conclusions parce que toutes les classes n'étaient pas dans les mêmes conditions. Néanmoins, je pense que nous pouvons dire que les différences dans l'institutionnalisation produisent des différences sur les résultats des élèves. La classe C a les meilleurs résultats dans la résolution des équations (les méthodes algébriques sont plus efficaces pour des inéquations comme $|2x+1| \leq 3$) mais le sont moins dans la traduction du langage des intervalles dans le langage de la valeur absolue (où les méthodes géométriques sont plus efficaces). Il semble que la première méthode introduite

[2] Le professeur B fait ici allusion à un problème d'une séquence de travaux dirigés mise au point par le professeur A et qu'elle a elle-même donné à ses élèves comme devoir à la maison.

est la plus utilisée par les élèves, sauf peut-être pour les méthodes algébriques que les élèves veulent utiliser même si elles n'ont pas été enseignées (voir classe A).

On a donc au moins deux conceptions (au sens de Brousseau) pour la valeur absolue : la conception algébrique liée aux nombres relatifs et la conception géométrique liée aux distances. Il semble que le transfert entre les deux ne se fait spontanément ni dans un sens ni dans l'autre et que les deux points de vue doivent être enseignés. Le point de vue géométrique est plus facile et doit probablement être valorisé au début de l'apprentissage mais le point de vue algébrique semble nécessaire aussi dès le début parce que les élèves l'utilisent, même s'il n'est pas enseigné, parce qu'ils savent résoudre les équations du premier degré.

Il ressort de la comparaison des quatre classes que les élèves apprennent à faire ce qui est attendu par le professeur, à résoudre certains types d'exercices : ce sont les pratiques les plus fortement institutionnalisées dans chaque classe qui sont le plus reprises par les élèves. C'est seulement sur le long terme que ceux-ci relient les différentes approches et les différentes utilisations de la même notion, à condition qu'ils rencontrent les problèmes pour lesquels ces points de vue sont adaptés. Nous devons regarder dans les classes postérieures pour savoir si un nouveau point de vue est plus facile à mettre en place à partir d'une introduction ou d'une autre.

Références bibliographiques.

A.P.M.E.P. (1991) *Evaluation du programme de mathématiques. Seconde* 1991. Publication n° 88, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris.

Brousseau G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques n°7/2.* ; 33-115

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques n°12/1* ; 73-111.

Chiarugi I., Fracassina G. and Furinghetti F. (1990) Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceedings of PME 14,* Mexico 1990, vol. III, 231-238.

Duroux A. (1983) La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x* n°3, 43-87.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.

Perrin-Glorian M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des "classes faibles" *Recherches en didactique des mathématiques n°13/1.2.* ; 5-118

Perrin-Glorian M.J. (1994) Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de "classes faibles". *Petit x n° 36, IREM de Grenoble* 5-40.