

LAURENT SCHWARTZ

Le mouvement brownien

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-26

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994__2_A9_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE MOUVEMENT BROWNIEN

Laurent SCHWARTZ (1)

I - LA DECOUVERTE DU MOUVEMENT BROWNIEN.

Le botaniste britannique Robert BROWN découvrit en 1827 qu'un grain de pollen, de la dimension du micron, plongé dans un liquide, était animé de mouvements microscopiques désordonnés. Il l'attribua aux chocs des molécules du liquide sur le grain. Bachelier réétudia ensuite ce mouvement, et montra qu'il était markovien ; nous en reparlerons plus loin. C'est Albert Einstein qui apporte les résultats décisifs en 1905. Il relia le mouvement à l'équation de la diffusion (ou équation de la chaleur) :

$$(1.1) \quad \frac{1}{k^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta u = 0,$$

au sens statistique suivant : si à l'instant 0 la particule de pollen part d'un point a de l'espace, sa loi de répartition μ_t aux différents instants t vérifie cette équation aux dérivées partielles, (où μ_t remplace u), avec la condition initiale $\mu_0 = \delta_{(a)}$ masse de Dirac au point a . On ne peut avoir qu'une loi statistique, parce qu'on ignore le mouvement précis des molécules du liquide. C'est là le passage à la limite d'un processus discret à un processus continu : en réalité le grain décrit de petits segments de droite (de l'ordre du micron), qui varient brusquement de vitesse à chaque choc d'une molécule du liquide. On en fait ici un processus de chocs continus. La quantité k ressemble à une vitesse, mais ce n'en est pas une, on l'appelle la vélocité, elle a la dimension $L T^{-1/2}$ au lieu de $L T^{-1}$ pour une vitesse. En outre, dans cette formule, on assimile la particule à un point.

Puisqu'on a pris un point de vue statistique, on n'a pas une trajectoire unique, mais une trajectoire aléatoire, qu'on appelle le mouvement brownien tri-dimensionnel de vélocité k , de point de départ a . Les mathématiciens prennent également $a = 0$, origine d'un espace euclidien R_N de dimension N , et $k = 1$ (ce qu'on pourra toujours supposer par un choix convenable des unités) ; c'est alors le mouvement brownien canonique de dimension N . Il se trouve qu'il n'a pas seulement un intérêt physique, mais un intérêt mathématique exceptionnel.

(1) Nous remercions le Professeur Laurent SCHWARTZ pour le texte de sa Conférence sur le Mouvement Brownien, donnée dans le cadre du Colloquium d'Analyse et de Probabilités de l'I.R.M.A.R., le 7 janvier 1994.

Einstein avait calculé la vélocité k dans les conditions de l'expérience (dimension 3). Il avait trouvé :

$$(1.2) \quad k^2 = \frac{RT}{N_a} \frac{1}{3\pi\eta r}, \quad R \text{ constante des gaz parfaits} = 8,314 \text{ joules, } N_a$$

nombre d'Avogadro = $6,022 \cdot 10^{23}$ protons par gramme, T température absolue du liquide, r rayon de la particule, η coefficient de viscosité du liquide. Einstein a publié en 1905 trois articles fondamentaux, sur le mouvement brownien, l'effet photoélectrique, et la relativité restreinte. C'était alors un inconnu, non docteur ès sciences, et il les a signés Monsieur Albert Einstein. Il reçut le prix Nobel en 1921 pour les deux premiers articles, pas pour le troisième ; en 1921, on se méfiait encore de la relativité !

Si au lieu d'un grain, on a une multitude de grains, par exemple un gel colloïdal, l'aspect statistique est encore plus net : au lieu d'une position initiale en a , on a une distribution initiale μ_0 .

Pour parler en termes rigoureux de probabilité, on aura un ensemble Ω muni d'une probabilité P , et les trajectoires seront définies par une fonction $B : (t, \omega) \mapsto B(t, \omega)$; la fonction $\omega \mapsto B(t, \omega) = B_t(\omega)$, c'est-à-dire la fonction B_t , variable aléatoire, sera l'état de la particule à l'instant t , la répartition correspondante sera la loi image $\mu_t = B_t(P)$ sur R_N , et la fonction $B(\omega) \mapsto B(\omega)_t = B(t, \omega) = B_t(\omega)$ sera la trajectoire définie par le point ω de Ω . Einstein avait déjà déterminé les lois μ_t , pour $a = 0$ pour simplifier :

$$(1.3) \quad \mu_t = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^N e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx.$$

Bachelier avait remarqué que la loi de $B_t - B_s$, pour $s \leq t$, est la même que celle de B_{t-s} , obtenue en remplaçant, dans (1.3), t par $t-s$. Naturellement, pour $t = s$, on trouve δ , mesure de Dirac de l'origine, et la loi de B_0 est aussi δ . On prouve aussi que la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de tout ce qui se passe avant l'instant s . C'est ce que Bachelier avait exprimé en disant que le processus B est markovien homogène dans le temps. On peut aussi considérer le brownien issu de $a \in R_N$: on le notera $B^a = B + a$, $B_t^a(\omega) = B_t(\omega) + a$. On conviendra que $B^\infty(\omega)$ est le point à l'infini de R_N , et que la trajectoire partant du point à l'infini y reste toujours.

Ces diverses propriétés caractérisent le mouvement brownien, à condition d'en ajouter une, fondamentale : le processus est p.s. (presque sûrement) continu ;

autrement dit, P -presque toutes les trajectoires $B(\omega)$ sont continues. On abrège cela en disant : la trajectoire brownienne est continue. On emploie constamment ce langage : la trajectoire brownienne a la propriété \mathcal{P} ; cela veut dire que, pour P -presque tout ω , $B(\omega)$ a la propriété \mathcal{P} . C'est un évident abus de langage, car cela n'a aucun sens de dire qu'une trajectoire est brownienne, mais tout le monde le comprend.

On peut alors prendre pour ensemble Ω l'espace (de Fréchet) $C(\mathbb{R}_+ ; R_N)$ des fonctions continues sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans R_N . Alors $B(\omega)$ n'est autre que ω elle-même, et $B(t, \omega) = \omega_t$. La continuité du brownien a été démontrée par Norbert Wiener en 1923. Les principales propriétés du brownien ont été démontrées par Paul Lévy à partir de 1934, mais surtout après la guerre jusqu'en 1965 ; et son livre fondamental "Processus stochastiques et mouvement brownien" date de 1948.

Jean Perrin, par de remarquables expériences, a utilisé la formule (1.2) pour calculer le nombre d'Avogadro. Si $\bar{\omega}$ est la pression osmotique du soluté, si elle est faible, on a la loi des gaz parfaits :

$$(1.4) \quad \bar{\omega} V = \frac{m}{M} R T,$$

V volume du solvant, M masse moléculaire du soluté, m sa masse totale. En composant avec (1.2), on trouve

$$(1.5) \quad \bar{\omega} V = \frac{m}{M} 3k^2\pi\eta r N_a.$$

Si l'on connaît toutes les autres quantités, on trouve N_a . Pour ces expériences de 1908, Jean Perrin a obtenu le prix Nobel, en 1926 ; il a donné le nombre d'Avogadro avec la plus grande précision connue alors.

II - LES PROPRIÉTÉS HOLDERIENNES.

Après la continuité, il est normal d'étudier les propriétés höldériennes de la courbe brownienne. Les propriétés höldériennes élémentaires sont assez faciles à démontrer (sans être triviales). Mais les propriétés plus fines sont difficiles.

(2.0) Loi du logarithme itéré : (Paul Lévy) (voir [3]).

$\forall a > 1, \forall t, \forall_P \omega, \exists h_0 > 0, 1/h_0 \geq e$ (pour que $\log \log (1/h_0) > 0$), tel que $\forall h,$
 $|h| \leq h_0,$

on ait la loi du logarithme itéré :

$$(2.1) \quad |B(\omega, t+h) - B(\omega, t)| \leq a \sqrt{|h|} \sqrt{2 \log \log(1/|h|)}.$$

Pour $a \leq 1$, ou simplement pour $a = 1$:

$\forall t, \forall_P \omega, \forall h_0 > 0, 1/h_0 \geq e, \exists h, |h| \leq h_0$, tel que

$$(2.2) \quad |B(\omega, t+h) - B(\omega, t)| > \sqrt{|h|} \sqrt{2 \log \log(1/|h|)}.$$

$\forall_P \omega$ veut dire pour P -presque tout ω .

On notera bien que $\forall_P \omega$ vient après $\forall t$: le "presque tout" dépend de t . On a une autre inégalité en plaçant $\forall_P \omega$ avant $\forall t$, mais elle est forcément moins bonne : on doit remplacer, dans (2.1), le logarithme itéré $\log \log$ par le logarithme \log , c'est-à-dire $\log(1/|h|)$.

(2.3) Points lents du brownien (dimension $N = 1$).

Les points lents ont été mis en évidence par J.P. Kahane : (1).

Oscillations en $\sqrt{|h|}$.

$\forall_P \omega, \exists a, \exists t, \exists h_0 > 0, \forall h, |h| \leq h_0$, on ait :

$$(2.3.1) \quad |B(\omega, t+h) - B(\omega, t)| \leq a \sqrt{|h|}.$$

Donc presque toute trajectoire a des points lents où l'oscillation, au lieu d'être en $\sqrt{|h|} \sqrt{2 \log \log(1/|h|)}$, est beaucoup plus faible, en $\sqrt{|h|}$. Mais on ne peut pas descendre au-dessous de cela, car Dvoretzky a montré que :

$\exists b, \forall_P \omega, \forall t, \forall h_0 > 0, \exists h, |h| \leq h_0$, tel que

$$(2.4) \quad |B(\omega, t+h) - B(\omega, t)| > b \sqrt{|h|}.$$

Corollaire 2.5 (Dvoretzky). *La courbe brownienne est partout sans dérivée (N quelconque).*

Weierstrass s'est donné beaucoup de mal pour trouver une courbe partout sans dérivée ($y = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sin b^n x, a < 1, ab > 1$). Ici nous trouvons que P -presque toutes

les courbes sont partout sans dérivée (sans tangente) ! Mais cela ne nous permet pas d'en exhiber une seule !

(1) Jean-Pierre KAHANE, Brownian Motion and Classical Analysis, Bull London Math. Soc., 8 (1976), p 145-155.

En conclusion, la courbe brownienne est formidablement oscillante. Les inégalités précédentes ont lieu presque partout, mais ne donnent pas l'appartenance à un espace fonctionnel sur Ω de fonctions höldériennes ; c'est ce que vont donner les inégalités suivantes, mais alors elles seront moins précises.

(2.5) **Les dérivées d'ordre non entier sur \mathbb{R} .**

On appellera provisoirement primitive d'ordre α d'une fonction f sur \mathbb{R}

l'intégrale $I^\alpha f(t) = \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds / \Gamma(\alpha)$, qui est le produit de convolution $G^\alpha * f$

de la fonction f avec la fonction $G^\alpha : s \mapsto Y(s) s^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha)$. (Y fonction d'Heaviside). Cette convolution s'étend même à des distributions f , mais, dans tous les cas, on doit supposer le support de f limité à gauche sur \mathbb{R} , et alors $I^\alpha f$ a la même propriété. Ici $\alpha > 0$. On a alors $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$. Pour α entier on obtient une formule bien connue. Le défaut de cette méthode est d'obliger le support à être limité à gauche. On va alors changer la définition, quitte à ne plus retrouver la primitive usuelle pour α entier : on remplace la fonction G^α par un produit $G^\alpha \phi$, où ϕ est une fonction C^∞ à support compact, égale à 1 au voisinage de l'origine, et on posera $I^\alpha f = G^\alpha \phi * f$. Le résultat dépend complètement du choix de la fonction ϕ ; mais, modulo une fonction C^∞ , il n'en dépend pas. On a alors $I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha+\beta} f$ modulo C^∞ . On peut alors faire la convolution avec n'importe quelle distribution f . On peut ensuite prendre α réel quelconque, et non plus seulement > 0 . Il suffit de poser, si $\alpha \leq 0$, $I^\alpha f = (\frac{d}{dt})^m I^{m+\alpha} f$, où m est choisi entier assez grand pour que $m+\alpha$ soit strictement positif. Le résultat dépend de m , mais pas modulo C^∞ . Et on a toujours $I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha+\beta} f$ modulo C^∞ . Ensuite I_0 est l'identité modulo C^∞ , et, si m est entier, I^{-m} est la dérivation d'ordre m modulo C^∞ . On posera $D^\alpha = I^{-\alpha}$ modulo C^∞ , et on aura des dérivées d'ordre réel quelconque.

(2.6) On appellera $Lip^\alpha(F)$ l'espace des fonctions sur \mathbb{R} , localement α -höldériennes à valeurs dans le Fréchet F , $0 < \alpha < 1$, avec une topologie évidente. On démontre alors le théorème suivant, où $0 < \alpha, \beta < 1$:

(2.7) Si $f \in Lip^\alpha(F)$, alors, pour tout $\beta < \alpha$, $D^\beta f$ est une fonction continue. Si $D^\beta f$ est une fonction continue, alors, pour tout $\alpha < \beta$, f est dans $Lip^\alpha(F)$.

On a ensuite le théorème de Sobolev-Krylov :

(2.8) Si $f \in L_{loc}^p(F)$, alors $I^\alpha f \in Lip^\beta(F)$ si $\alpha - \beta > 1/p$.

Dans l'énoncé qui suit, les dérivations et les Lip seront toujours relatifs à la variable de temps.

(2.9) *Pour presque tout ω , $B(\omega) \in \text{Lip}^\beta(R_N)$ pour tout $\beta < 1/2$. (Autrement dit la courbe brownienne est localement β -höldérienne de tout ordre $< 1/2$). En outre, $B \in L^p(\Omega, \mathbb{P}; \text{Lip}^\beta(R_N))$ pour tous p fini et $\beta < 1/2$.*

Démonstration. La première partie est beaucoup moins précise qu'un résultat comme ce qui suit (2.2) avec $\sqrt{|h|} \sqrt{\log(1/|h|)}$. Mais les résultats du type (2.2) ne donnent que du p.s., alors qu'ici nous obtenons l'appartenance à un L^p d'un Lip^β . La démonstration n'a rien de probabiliste, elle repose uniquement sur les dérivées d'ordre non entier et l'inégalité de Sobolev, (2.7 et 2.8).

On sait que $B_t - B_s$ suit une loi gaussienne de paramètre $\sqrt{t-s}$; la loi de Gauss a des moments d'ordre p finis pour tout p fini, donc $B \in \text{Lip}^{1/2}(L^p(\Omega, \mathbb{P}; R_N))$. De (2.7) on déduit que $D^{1/2-\varepsilon} B \in C(L^p(\Omega, \mathbb{P}; R_N))$, pour tout $\varepsilon > 0$. Mais ce dernier espace fonctionnel est contenu dans $L_{\text{loc}}^p(L^p(\Omega, \mathbb{P}; R_N))$; le C et le L_{loc}^p sont relatifs à la droite des temps. Cet espace est isomorphe à $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+ \times \Omega, dtP(d\omega); R_N)$ (intégrale double), et à $L^p(\Omega, \mathbb{P}; L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+, dt; R_N))$.

D'après (2.8) appliqué au L_{loc}^p , $B = (\text{modulo } C^\infty) I^{2-\varepsilon} D^{1/2-\varepsilon} B \in L^p(\Omega, \mathbb{P}; \text{Lip}^\beta(R_N))$, pourvu que $1/2 - \varepsilon - \beta > 1/p$; comme p est arbitrairement grand et que ε est arbitrairement petit, cela donne la condition $\beta < 1/2$.

Remarque. La courbe n'est pas höldérienne d'ordre $1/2$, comme le montre (2.2).

III - LES POINTS MULTIPLES.

Un point double d'une courbe est un point qui est atteint à deux valeurs distinctes du temps.

Regardons d'abord la dimension 2, $N = 2$. On montre que la courbe brownienne a une infinité de points doubles, ayant la puissance du continu, dans tout intervalle de temps. Mais ce n'est pas tout : elle a une infinité de points triples, quadruples, ..., n -uples, ayant la puissance du continu, dans tout intervalle de temps. Ceci est un résultat de Dvoretzky-Erdős-Kakutani ⁽²⁾. Puis des points ∞ -uples, ∞ ayant la puissance du dénombrable ou celle du continu ! Allons encore plus loin. Soit F un ensemble fermé sans intérieur de l'axe des temps.

(2) Voir Le Gall et Freidling, cours de Saint-Flour, Lecture Notes in Mathematics, n° 1527, 1991.

Un ensemble est dit semblable à F s'il résulte de F par un homéomorphisme de \mathbb{R} . Alors, quel que soit F , la courbe a une infinité de points multiples constituant un ensemble de valeurs du temps semblable à F , dans tout intervalle de temps. Il est quelque peu difficile de se représenter cette courbe et de la dessiner ! Un problème me semble rester ouvert. Peut-on intervertir le $\forall F$ et le $\forall_P \omega$? Autrement dit, est-il exact que la courbe brownienne ait, pour tout F , des points multiples formant un ensemble semblable à F ? Je suis sceptique. Existe-t-il même une seule courbe ayant cette propriété ? J'ai rencontré un mathématicien qui m'a affirmé que le résultat était vrai pour la courbe brownienne ; mais il y a déjà plusieurs années et il n'a jamais publié la démonstration.

Regardons maintenant le cas des dimensions plus grandes que 2. Il y a dans l'espace \mathbb{R}^3 tellement de place pour se mouvoir qu'il est peu vraisemblable qu'une courbe honnête ait des points multiples. La courbe brownienne a une infinité de points doubles ayant la puissance du continu dans tout intervalle de temps, mais n'a pas de point triple. Dans R_N , $N \geq 4$, il n'y a pas de point multiple.

IV - L'AIRE DE LA COURBE BROWNIENNE PLANE (voir [3]).

D'après le II, la courbe brownienne est höldérienne de tout ordre $< \frac{1}{2}$, mais pas d'ordre $\frac{1}{2}$. Justement ceci ne nous renseigne pas pour savoir si elle recouvre une aire nulle ou non. Paul Lévy a démontré qu'elle recouvrait une aire nulle. Voici la démonstration qu'il a donnée.

L'aire de la courbe $B(\omega)$ est $\int \int_{B(\omega)} dx dy$. Son espérance, c'est-à-dire son intégrale par rapport à $P(d\omega)$ est donc

$$\int P(d\omega) \int \int_{B(\omega)} dx dy = \int P(d\omega) \int \int 1_{\{(x,y) \in B(\omega)\}} dx dy.$$

Par Fubini, c'est $\int \int dx dy \int P(d\omega) 1_{\{(x,y) \in B(\omega)\}}$.

Mais on peut démontrer que, pour un point (x, y) fixé, il est P -presque sûr que la courbe n'y passe jamais, sauf pour $x = y = 0$, qui est le point initial (on dit qu'un tel point est un ensemble polaire ; voir plus loin, (5.2)). Donc, sauf pour $x=y=0$, la deuxième intégrale est nulle, donc aussi son intégrale en $dx dy$. En revenant alors au point antérieur, l'espérance de l'aire est nulle, donc elle est p.s. nulle, cqfd. C'est une démonstration très simple et très élégante, mais il y

a un petit point qui n'est pas démontré et que Paul Lévy n'a même pas songé à démontrer ; d'ailleurs il ne le pouvait pas à cette époque : c'est que la fonction de 3 variables $(x, y, \omega) \mapsto 1_{\{(x,y) \in B(\omega)\}}$ est $dx dy P(d\omega)$ -mesurable, pour qu'on puisse appliquer Fubini ; ou encore que l'ensemble $\{(x, y) \in B(\omega)\}$ est mesurable. Cet ensemble est la projection sur $\mathbb{R}^2 \times \Omega$ de l'ensemble fermé de $\mathbb{R}^2 \times \Omega \times \mathbb{R}_+$: $\{(x, y) = B(\omega, t)\}$. Or ces différents espaces sont polonais, et la projection sur un des facteurs d'un fermé d'un produit de polonais est souslinienne, donc universellement mesurable (voir [2]).

V - TRAJECTOIRES TRANSIENTES OU RECURRENTES.

Nous démontrerons ici beaucoup de résultats qui ne sont pas forcément plus intéressants que d'autres qui précèdent et que nous avons admis, mais il faut bien démontrer quelque chose. La présente démonstration n'est pas la plus simple, mais elle donne beaucoup de résultats intermédiaires intéressants. Ceux qui voudraient uniquement connaître la conclusion peuvent passer tous ces intermédiaires et lire uniquement l'énoncé du théorème (5.4).

(5.1) Espérance du temps de séjour dans un ensemble.

Soit D un ensemble Lebesgue-mesurable de R_N , et soit τ_D la mesure de Lebesgue de l'ensemble des temps de séjour dans D de la courbe ; c'est une fonction de ω , donc une variable aléatoire. Elle est égale à :

$$\tau_D(\omega) = \int_0^{+\infty} 1_{\{B(t, \omega) \in D\}} dt, \text{ et son espérance est :}$$

$$(5.2) \quad E \tau_D = \int P(d\omega) \int_0^{+\infty} 1_{\{B(t, \omega) \in D\}} dt.$$

Par Fubini, c'est encore

$$\int_0^{+\infty} dt \int 1_{\{B(t, \omega) \in D\}} P(d\omega).$$

Pour t fixé, la deuxième intégrale est la mesure de D pour la mesure image de P par l'application $B_t : \omega \mapsto B_t(\omega)$ de Ω dans R_N ; cette image est $B_t(P) = \mu_t$ du I. Finalement $E \tau_D = \int_0^{+\infty} \mu_t(D) dt = \int_0^{+\infty} dt \int_D (1/\sqrt{2\pi t})^N e^{-|x|^2/2t} dx$.

Tant que t reste borné, il n'y a aucune difficulté puisque $\mu_t(D) \leq 1$. Quand t tend vers $+\infty$, l'exponentielle tend vers 1, donc la deuxième intégrale est équivalente à $\text{const.}(1/\sqrt{t})^N$ si D n'est pas Lebesgue-négligeable, donc le deuxième membre est fini pour $N \geq 3$, infini pour $N = 1$ ou 2 . Si D est Lebesgue-négligeable, $E \tau_D = 0$, donc p.s. $\tau_D = 0$; ce qui ne veut nullement dire que la courbe ne rencontre pas D , elle y passe seulement un temps négligeable ; un ensemble D est dit polaire si la courbe brownienne ne le rencontre pas aux temps > 0 ; D doit être beaucoup plus petit que simplement négligeable. Dans R_N , une sous-variété de dimension d est polaire ssi $d \leq N-2$, alors qu'elle est Lebesgue négligeable dès que $d \leq N-1$. Pour $N = 1$, un ensemble non vide n'est jamais polaire ; pour $N \geq 2$, un point est polaire, mais il y a des ensembles polaires ayant la puissance du continu.

(5.3) La trajectoire est dite transiente si elle tend vers l'infini de R_N quand t tend vers $+\infty$, récurrente si elle peut aller très loin, de plus en plus loin, mais repasse toujours à distance finie ; plus précisément si, quel que soit l'ouvert non vide U de R_N , elle revient une infinité de fois dans U quand t tend vers $+\infty$. Le résultat précédent sur $E(\tau_D)$ laisse prévoir, mais ne démontre nullement le résultat suivant :

Théorème (5.4). *La courbe brownienne est récurrente pour $N = 1$ ou 2 , transiente pour $N \geq 3$.*

Il y a de multiples démonstrations ; celle que nous donnerons est longue, elle n'est pas la plus simple, mais elle a l'avantage de faire intervenir beaucoup de notions intéressantes en elles-mêmes. Elle est assez difficile pour une personne connaissant peu les probabilités qui n'aura alors, si elle se décourage, qu'à sauter toute la fin du V.

(5.5) **La suite des temps d'arrêt T_n ; les L_n et L .**

Soient D_1, D_2 , deux boules ouvertes de centre origine, $D_1 \subset D_2$. (On pourrait supposer le centre quelconque a , en remplaçant B par B^a , de loi analogue). Pour tout ω , soient $T_0(\omega)$ le premier instant où la courbe $B(\omega)$ atteint la sphère bordant D_1 , $T'_0(\omega)$ le temps de sortie (postérieur à T_0) de $B(\omega)$ de D_2 , puis $T_1(\omega)$ le temps de rentrée dans D_1 postérieur à $T'_0(\omega)$, puis $T'_1(\omega)$ le temps de sortie de D_2 postérieur à $T_1(\omega)$, ..., $T_n(\omega)$ le temps de rentrée dans D_1 postérieur à $T'_{n-1}(\omega)$, $T'_n(\omega)$ le temps de sortie de D_2 postérieur à $T_n(\omega)$,

Les T_n, T'_n , sont des variables aléatoires, qu'on appelle des temps d'arrêt ; en termes plus physiques que mathématiques, un temps d'arrêt est la

première fois qu'un évènement déterminé se produit, il ne dépend que de ce qui s'est passé avant lui, pas de ce qui se passera après. Posons, pour $n \geq 1$, $L_n = T'_n - T_n$, et $L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n$. Si, à la sortie de D_2 au temps T'_{n-1} , la courbe ne rentre plus dans D_1 , on pose $T_n = +\infty$. Bien sûr alors $T'_n = +\infty$, et on pose $L_n = \infty - \infty = 0$. En appelant, comme au début du paragraphe, τ la mesure du temps de séjour, on a : $\tau_{D_1} \leq L \leq \tau_{D_2}$; en effet, dans l'intervalle de temps $[T_n, T'_n]$, la trajectoire est certainement dans D_2 , donc $L \subset \tau_{D_2}$; ensuite, dans chaque intervalle de temps $]T'_{n-1}, T_n[$, elle n'est pas dans D_1 ; donc, si la courbe est dans D_1 , elle est dans la réunion des $[T_n, T'_n]$.

(5.6) **Les espérances $E(L_n)$.** On appellera \mathcal{F}_n la tribu des évènements antérieurs au temps T_n , et on va calculer l'espérance conditionnelle $E_{\mathcal{F}_n}(L_n)$, qui est une variable aléatoire. Le principe de Markov fort dit que, si T est un temps d'arrêt, la loi du brownien après l'instant T est la même qu'après l'instant 0, en décalant les temps de la quantité T vers la gauche, et en remplaçant le point de départ 0 par le point de départ B_T . Par exemple la loi de $B_{T+t} - B_T$ est celle de $B_t - B_0$ (gaussienne de paramètre \sqrt{t}). Si on décale le temps de T_n vers la gauche, L_n devient L_0 ,

$$(5.7) \quad E_{\mathcal{F}_n}(L_n) = E^{B_{T_n}}(L_0).$$

C'est la variable aléatoire $\omega \longmapsto E^{B(T_n(\omega), \omega)}(L_0)$. Si $T_n(\omega) < +\infty$, $(B(T_n(\omega), \omega))$ est un point $M(\omega)$ de la sphère D_1 ; soit E^M l'espérance de L_0 pour le brownien B^M de point de départ M (variable aléatoire) à l'instant 0, E^M est une variable aléatoire comme M . Si \mathcal{R} est une rotation autour de l'origine, elle ne change pas les lois gaussiennes centrées, donc la loi du brownien tourné, $\mathcal{R}(B^M)$, est celle de $B^{\mathcal{R}(M)}$. Mais, pour toute courbe, elle et sa transformée par une rotation \mathcal{R} de centre origine, ont les mêmes T_0 et T'_0 , donc le même L_0 ; donc $E^M(L_0)$ est indépendant de M , appelons le C , constante indépendante de n . Répétons : pour tous les ω pour lesquels $T_n(\omega) < +\infty$, $E^{B(T_n(\omega), \omega)}(L_0) = C$. Par contre, si $T_n(\omega) = +\infty$, $B(\infty, \omega)$ est le point à l'infini de R_N , la trajectoire qui part du point à l'infini y reste tout entière, alors $T_0(\omega) = T'_0(\omega) = +\infty$, $L_0(\omega) = 0$.

$$(5.7) \quad \text{En conclusion, } E_{\mathcal{F}_n}(L_n) = 1_{\{T_n < \infty\}} C.$$

(5.8) **La constante C est finie.**

Nous devons montrer que $E(T'_0)$ est fini. Nous allons même montrer que, pour un k convenable, $E(e^{kL_0}) \leq E(e^{kT'_0})$ est fini, E étant relatif à un point de départ quelconque de D_2 ; pour simplifier les notations, remplaçons T'_0 par T' .

Supposons en effet que $T' > n$. Cela entraîne que, pour les temps $0, 1, 2, \dots, n$, B soit toujours dans D_2 . Si d est le diamètre de D_2 , on aura $|B_1 - B_0| \leq d$, $|B_2 - B_1| \leq d, \dots, |B_n - B_{n-1}| \leq d$; à cause de la loi du brownien, ces événements sont indépendants, de même probabilité < 1 , soit e^{-s} , $s > 0$; alors $P\{T' > n\} \leq e^{-ns}$. Alors $E(e^{kT'}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{k(n+1)-ns} < +\infty$, dès que $k < s$. Donc la constante C est finie, et

$$(5.9) \quad E(L_n) = E(E_{\mathcal{G}_n}(L_n)) = P\{T_n < +\infty\} C.$$

(Quelle que soit la tribu \mathcal{F} , $E(E_{\mathcal{F}} \dots) = E \dots$).

Puisque $E(T'_0) < +\infty$, p.s. T'_0 est fini; donc p.s. la courbe ne reste pas confinée dans D_2 , donc ne reste pas bornée. Cela servira pour démontrer le théorème (5.4), mais aussi cela en résultera: pour $N \geq 3$, elle tend vers l'infini, et, pour $N=1$ ou 2 , elle passe dans n'importe quel ouvert, si loin soit-il.

(5.10) Calcul de $P\{T_n < +\infty\}$.

Ensuite, si T_n est fini, T'_n aussi p.s., puisque la courbe n'est pas confinée dans D_2 . Un déplacement de temps de T_{n-1} vers la gauche remplace T_n par T_1 , $n \geq 1$. Alors le principe de Markov dit que :

$$(5.11) \quad P_{\mathcal{G}_{n-1}}\{T_n < +\infty\} \text{ est la variable aléatoire}$$

$$\omega \longmapsto P^{B(T_{n-1}(\omega), \omega)}\{T_1 < +\infty\}.$$

On refait alors le raisonnement de (5.7). Si $T_{n-1}(\omega)$ est fini, c'est un PM , et il est invariant par rotation, donc c'est une constante α , $0 \leq \alpha \leq 1$. En fait, $\alpha > 0$; on le démontre encore par des méthodes de conditionnement, nous ne le ferons pas et ne nous en servirons pas. Si T_{n-1} est infini le résultat est nul.

Donc $P_{\mathcal{G}_{n-1}}\{T_n < +\infty\} = 1_{\{T_{n-1} < +\infty\}} \alpha$. Ensuite

$P_{\{T_{n-1} < +\infty\}}\{T_n < +\infty\} = E_{\{T_{n-1} < +\infty\}} P_{\mathcal{G}_{n-1}}\{T_n < +\infty\} = \alpha$, et finalement

$$P\{T_n < +\infty\} = P\{T_{n-1} < +\infty\} P_{\{T_{n-1} < +\infty\}}\{T_n < +\infty\} + P\{T_{n-1} = +\infty\} P_{\{T_{n-1} = +\infty\}}\{T_n < +\infty\} \\ = P\{T_{n-1} < +\infty\} \alpha.$$

$$(5.12) \quad P\{T_n < +\infty\} = P\{T_{n-1} < +\infty\} \alpha, \quad n \geq 1.$$

On a donc une relation de récurrence; mais T_0 est p.s. fini, puisque la courbe brownienne ne reste pas confinée dans D_1 , donc

$$(5.13) \quad P\{T_1 < +\infty\} = \alpha, \quad P\{T_n < +\infty\} = \alpha^n.$$

(5.14) Démonstration du théorème (5.4).

De (5.9) on tire :

$$(5.14) \quad E(L) = \sum_{n=0}^{+\infty} C \alpha^n = C/(1-\alpha).$$

Reprenons alors (5.2) et (5.5). Pour $N = 1$ ou 2 , $E(L) \geq E(\tau_{D_1}) = +\infty$, donc (5.14) exige $\alpha = 1$. Donc p.s. tous les T_n sont finis, la courbe repasse indéfiniment dans D_1 , qui peut être une boule ouverte quelconque, le processus est récurrent. Soit maintenant $N \geq 3$. Alors $E(L) \leq E(\tau_{D_2}) < +\infty$. Soit n entier ;

$$P(\forall m, T_m < +\infty) \leq P(\exists m \geq n, T_m < +\infty) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \alpha^m = \alpha^n/(1-\alpha) ; n \text{ est arbitraire,}$$

donc $= 0$. Donc p.s. T_m est infini pour m assez grand (le "assez" dépendant de ω), donc la courbe ne rentre plus dans D_1 ; celui-ci étant arbitraire, la courbe est transiente.

VI - LES MARTINGALES ET L'INTEGRALE STOCHASTIQUE (voir [2]).

Les lecteurs qui voudraient éviter les démonstrations peuvent passer directement au VII.

Un processus M à valeurs dans R_N est une martingale si, quels que soient s et t , $s \leq t$, M_t est intégrable et l'espérance conditionnelle de M_t par rapport à la tribu des évènements antérieurs à s est M_s . (Cela veut dire que, pour tout ensemble A de la tribu des évènements antérieurs à s , les intégrales sur A de M_t et M_s coïncident). Le mouvement brownien est une martingale ; en effet, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu des évènements antérieurs à s , donc son espérance conditionnelle par rapport à la tribu en question est son espérance tout court, qui est nulle. Les martingales jouent un rôle essentiel en probabilités.

Nous supposons toujours que les martingales considérées sont continues (chaque trajectoire $M(\omega)$ est continue). On démontre que les fonctions M_t , pour t borné, sont uniformément intégrables (i.e. si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables de Ω de mesures $P(A_n)$ tendant vers 0, les intégrales $\int_{A_n} |M_t(\omega)| P(d\omega)$

tendent vers 0 pour n infini, uniformément pour t borné), et alors $t \longmapsto M_t$ est continue p.s. et dans L^1 . On dit encore que M est uniformément intégrable pour des temps bornés. Les M_t n'ont pas forcément de limite pour $t \rightarrow +\infty$; elles ont une limite M_∞ , à la fois p.p. et dans L^1 , et les M_t , $0 \leq t \leq +\infty$ forment encore une martingale, ssi les M_t , $0 \leq t < +\infty$, sont uniformément intégrables ; on dit alors que la martingale est uniformément intégrable. On notera, par Hölder,

que des fonctions de normes L^p bornées, pour un $p > 1$, sont uniformément intégrables. Doob a démontré que, si M_t est dans L^p , $1 < p < +\infty$, pour tout t (on dit alors que la martingale est L^p), la fonction M_τ^* définie par $M_\tau^*(\omega) = \sup_{0 \leq t \leq \tau} |M_t(\omega)|$

est aussi dans L^p pour τ fini, et que

$$(6.1 \text{ bis}) \quad \|M_\tau^*\|_{L^p} \leq p' \|M_\tau\|_{L^p},$$

où p' est l'exposant conjugué $p/(p-1)$ de p . Donc, dans ce cas, $t \rightarrow M_t$ est continue dans L^p . Si T est un temps d'arrêt, la martingale arrêtée en T , M^T , est définie par $t \mapsto M_{T \wedge t}$. C'est encore une martingale. (Doob). Si M est uniformément intégrable, M^T aussi, et particulièrement M_T est intégrable ; dans ce cas, si S est un temps d'arrêt $\leq T$, l'espérance conditionnelle de M_T par rapport à la tribu des évènements antérieurs à S est M_S (égalité des martingales généralisée). C'est donc vrai sans condition sur M si T est borné. Si T n'est pas borné, les M_t ne sont plus en général uniformément intégrables, mais il suffit que les $M_{T \wedge t}$ le soient pour que les conclusions subsistent (mais il ne suffit pas que M_T soit intégrable). Rappelons que toutes ces propriétés sont vraies si tous les M_t sont bornés en norme L^p pour un $p > 1$.

(6.2) L'intégrale stochastique d'Itô.

Si M est un processus continu (en t pour tout ω), l'intégrale d'une fonction f sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ par rapport à M est le processus J :

$$(6.2) \quad (t, \omega) \mapsto \int_0^t f(s, \omega) dM(s, \omega). \text{ Comme presque toujours en probabilités,}$$

on omet les $\omega : J_t = \int_0^t f_s dM_s$. On écrit aussi $J = f \cdot M$. On a $(f \cdot M)^T = f \cdot M^T$.

On supposera f continue (en s pour tout ω), bornée. Le dM doit être entendu comme un d par rapport à s pour tout ω . Autrement dit, c'est une intégrale de Stieltjes en s pour tout ω fixé. Le second membre dépend bien de t et de ω , c'est un processus, pourvu qu'il existe. Il existera si, pour tout ω , $s \mapsto M(s, \omega)$ est à variation localement finie. Mais ce n'est en général pas le cas pour une martingale M : on montre qu'une martingale continue, pour presque tout ω n'est à variation finie dans aucun intervalle de temps sans y être constante. Si $M = B$, le brownien, p.s. il n'est à variation finie dans aucun intervalle de temps. On peut cependant (Itô) donner un sens à cette intégrale, pour M martingale continue, si f est "optionnelle", c'est-à-dire appartient à la tribu

optionnelle sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (que nous ne définirons pas) ; alors l'intégrale est définie, pour presque tout ω , pour tout t , par un passage à la limite, un peu comme on définit l'intégrale de Fourier d'une fonction L^2 qui n'est pas L^1 ; on ne peut pas spécifier pour quelles valeurs de ω elle est définie, elle l'est seulement presque partout. L'intégrale stochastique est alors une martingale locale continue, notion plus générale que celle de martingale (M est une martingale locale s'il existe une suite croissante $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$, telle que les processus arrêtés M^{T_n} soient des martingales. M n'a plus aucune propriété d'espérances conditionnelles).

Elle est une martingale continue si par exemple on suppose en outre que M est L^p pour au moins un $p > 1$, et alors J est L^p si p est fini.

(6.3) **Le crochet $[\cdot, \cdot]$.** Si L est une martingale réelle continue, pour tout ω , la trajectoire $L(\omega)$ n'est pas à variation finie, mais elle a une variation quadratique finie (qui serait nulle pour une fonction à variation finie), qu'on note par un crochet (on omet tous les ω) :

$$[L, L]_t = L_0^2 + \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i (L_{t \wedge t_{i+1}} - L_{t \wedge t_i})^2.$$

Dans cette formule, les t_i forment une subdivision Δ de \mathbb{R}_+ , indépendante de ω , et $|\Delta|$ est son pas (Sup. des longueurs des intervalles). Le ω n'est pas marqué, mais c'est trompeur ; la limite n'a pas lieu pour presque tout ω , i.e. p.s., mais seulement en probabilité (uniformément en t pour t borné). Elle n'est donc définie (comme l'intégrale stochastique) que presque partout, sans qu'on puisse spécifier pour quels ω elle l'est. La fonction $[L, L](\omega) : t \longmapsto [L, L]_t(\omega)$ est continue croissante ≥ 0 pour presque tout ω . On dira simplement, comme toujours, que $[L, L]$ est continue croissante ; sa valeur au temps 0 est L_0^2 . Etant donné cette définition, il est légitime d'écrire, dans une intégrale de Stieltjes, $(dL_t)^2$ au lieu de $d[L, L]_t$. Si maintenant L, L' sont deux martingales continues réelles, on aura un crochet $[L, L']$ obtenu en remplaçant les $(L_{t \wedge t_{i+1}} - L_{t \wedge t_i})^2$ par $(L_{t \wedge t_{i+1}} - L_{t \wedge t_i})(L'_{t \wedge t_{i+1}} - L'_{t \wedge t_i})$, qui sera continue à variation localement finie en t pour presque tout ω , de valeur $L_0 L'_0$ au temps 0. Au lieu de $d[L, L']_t$, on peut mettre $dL_t dL'_t$. Ce type de notations est logique, mais, par sa forme même, il entraîne certaines conséquences ; avant d'adopter cette notation, on doit montrer que ses conséquences sont justes. Nous ne le ferons pas. Si T est un temps d'arrêt, $[L, L']^T = [L^T, L'^T]$.

On démontre alors le théorème fondamental suivant :

(6.4) Si L, L' sont des martingales continues réelles, leur produit $L L'$ en général ne l'est pas, et le crochet $[L, L']$ est l'unique (à un ensemble P -négligeable près) processus continu à variation localement finie, de valeur $L_0 L'_0$ au temps 0, tel que la différence $L L' - [L, L']$ soit une martingale locale ; c'est une martingale si L et L' sont de carré intégrable.

(6.5) **La formule d'Itô.**

Itô a démontré la célèbre formule suivante : si F est une fonction C^2 sur \mathbb{R}^N , à dérivées d'ordre ≤ 2 bornées, en omettant les ω :

$$(6.5) \quad F(M_t) - F(M_0) = \sum_{i=1}^N \int_0^t \partial_i F(M_s) dM_{i,s} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t \partial_i \partial_j F(M_s) d[M_i, M_j]_s.$$

Cette formule demande des explications. On est sur \mathbb{R}^N , les $\partial_i F, \partial_i \partial_j F$, sont les dérivées partielles de F , elles sont prises au point M_s . La deuxième intégrale n'est plus une intégrale stochastique par rapport à une martingale, mais, plus simplement, pour tout ω , une intégrale de Stieltjes par rapport au processus à variation localement finie $[M_i, M_j]$; on peut mettre, comme dit plus haut, $dM_{i,s}, dM_{j,s}$.

(6.6) **Le crochet du brownien.**

Le brownien est une martingale L^p pour tout p fini.

Si B est brownien à valeurs dans \mathbb{R}^N , on a :

$$[B_i, B_j]_t = \delta_{ij} t, \text{ ou } dB_{i,t} dB_{j,t} = \delta_{ij} dt.$$

Démonstration. L'appartenance de B_t à L^p résulte aussitôt de ce que la loi de B_t est une gaussienne centrée de paramètre \sqrt{t} .

Prenons $N = 1$.

On va montrer que $t \mapsto B_t^2 - t$ (ω toujours omis) est une martingale (forcément continue).

$E_s(B_t - B_s)^2 = E(B_t - B_s)^2$ (où E_s , par abréviation, veut dire l'espérance conditionnelle par rapport aux évènements antérieurs au temps s ; l'égalité provient de ce que, par définition du brownien, $B_t - B_s$ est indépendant des évènements antérieurs du temps s) $= t - s$, parce que la loi de $B_t - B_s$, d'après (1./3), est une gaussienne de paramètre (ou écart type) $\sqrt{t-s}$. Donc $E_s(B_t^2 - 2B_t B_s + B_s^2) = t - s$. Mais le premier membre est

$E_s(B_t^2 - 2B_s^2 + B_s^2) = E_s B_t^2 - B_s^2$, qui vaut donc $t - s$. Ce qui, signifie que

$E_s(B_t^2 - t) = B_s^2 - s$, ce qui est bien la propriété des martingales (6.1).

Cela donne bien la formule (6.6) pour $i = j$. Pour $i \neq j$, B_i et B_j sont deux martingales indépendantes, donc leur produit est une martingale, donc leur crochet est nul.

(6.9) Formule d'Itô pour le brownien.

En combinant (6.5) et (6.6), on trouve :

$$(6.9) \quad F(B_t^a) - F(B_0^a) = \sum_{i=1}^N \int_0^t \partial_i F(B_s^a) dB_{i,s}^a + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(B_s^a) ds.$$

Pour le brownien issu du point a de \mathbb{R}^N , $B_0^a = a$. La deuxième intégrale, comme déjà signalé, n'est plus une intégrale stochastique, mais une intégrale de Lebesgue ordinaire, calculée pour chaque ω . Prenons l'espérance des deux membres, pour la probabilité P^a du brownien issu de a ; la première intégrale est une martingale, (6.2), donc son espérance pour le temps t est la même que pour le temps 0, c'est-à-dire 0, et il reste :

$$(6.10) \quad E^a F(B_t^a) - F(a) = \frac{1}{2} E^a \int_0^t \Delta F(B_s^a) ds.$$

On peut ici remplacer \mathbb{R}^N par R_N , espace euclidien de dimension N , le laplacien Δ ne dépendant que de la structure euclidienne et non de la base choisie. La formule n'a plus rien de probabiliste, l'intégrale se calcule pour tout ω , elle est donc une fonction de ω , et E^a est simplement $\int P^a(d\omega) \dots$. On peut remplacer le second membre par l'intégrale double

$\int_{[0,t] \times \Omega} \Delta F(B^a(s, \omega)) P^a(d\omega) ds$. Cette intégrale a un sens puisque F est supposée à dérivées d'ordre 2 bornées.

(6.11) La formule (6.10) pour \int_0^T ?

Peut-on appliquer la formule (6.10) à \int_0^T au lieu de \int_0^t si T est un temps d'arrêt ?

Ce n'est pas évident ; il n'y a pas de difficulté pour (6.9), on calcule pour les

$T(\omega)$ au lieu de t ; mais pour (6.10), c'est une autre affaire. Il faut d'abord que l'intégrale ait un sens. On a supposé que F avait ses dérivées d'ordre 2 bornées, on a donc une inégalité $|\Delta F(B_s^a)| \leq M$, donc $\int_0^T |\Delta F(B_s^a)| ds \leq MT$, et l'espérance

est majorée par $E^a(MT)$. Donc

(6.12) On exigera $E^a T < +\infty$.

Mais il faut en plus que l'on puisse appliquer l'égalité des martingales entre les deux temps 0 et T à l'intégrale simple stochastique de (6.9) ; son espérance doit avoir un sens, et être égale à sa valeur au temps 0, c'est-à-dire à 0. Voyons cela de plus près, pour $N = 1$. $[B^T, B^T] = [B, B]^T$ est le processus (toujours ω omis) $t \longmapsto T \wedge t$. B^T est une martingale de carré intégrable, donc $(B^T)^2 - [B^T, B^T]$ est une martingale, nulle au temps 0 ; donc

$$(6.13) \quad E(B_{T \wedge t})^2 = E(T \wedge t) \leq E(T).$$

En prenant $t = n$ entier tendant vers $+\infty$, Fatou donne

$$(6.14) \quad E(B_T)^2 \leq E(T).$$

Si donc on suppose toujours $E(T) < +\infty$, les $B_{T \wedge t}$ ont des normes L^2 bornées pour tous les t , donc B^T est uniformément intégrable, et si on lui donne la valeur B_T au temps $+\infty$, B^T est une martingale sur $[0, +\infty]$ compact, de carré intégrable donc uniformément intégrable ; par suite $t \longmapsto M_{T \wedge t}$ est continue dans L^2 donc, dans (6.14), on peut remplacer \leq par $=$. Si donc f est bornée, $f \cdot B^T$ est aussi une martingale de carré intégrable et uniformément intégrable sur $[0, +\infty]$. On peut alors considérer la première intégrale stochastique de (6.9) pour \int_0^T au lieu de \int_0^t dès lors que $E^a(T) < +\infty$, et la propriété de martingale lui donne encore l'espérance 0, donc on a encore (6.10) pour T au lieu de t , T non nécessairement borné mais $E^a(T)$ fini.

VII - LE PROBLEME DE DIRICHLET (voir [1] ou [4]).

Soient U un ouvert borné de R_N , et F une fonction C^2 au voisinage de son adhérence \bar{U} . On appliquera la formule (6.10) à F , et au temps d'arrêt T , temps d'entrée du brownien issu de $a \in U$ dans U^* frontière de U . Ce temps d'entrée est presque sûrement fini, car le brownien ne reste pas enfermé dans U borné (voir fin de (5.9)), mais il n'est pas borné ; par contre $E^a(T) < +\infty$ (voir (5.8)), donc la formule (6.10) reste applicable à F (nous avons toujours supposé F

définie partout, mais ici seules interviennent les valeurs de F dans l'adhérence \bar{U} de U , donc on peut remplacer F par un prolongement C^2 à R_N de sa restriction à \bar{U} . Cela donne, si ϕ est la restriction de F à U^* ,

$$(7.1) \quad F(\alpha) = E^\alpha(\phi(B_T^\alpha)) - \int_0^T \Delta F(B_s^\alpha) ds .$$

Si F est supposée harmonique, $\Delta F = 0$, et il reste

$$(7.2) \quad F(\alpha) = E^\alpha(\phi(B_T^\alpha)) .$$

Cela donne $F(\alpha)$ en fonction des valeurs ϕ de F sur le contour U^* . On peut poser

$$(7.3) \quad \mu_\alpha(\phi) = E^\alpha(\phi(B_T)) ,$$

pour toute fonction continue ϕ sur U^* ; μ_α est une forme linéaire continue sur $C(U^*)$, donc une mesure de Radon sur U^* , ≥ 0 et de masse 1 (on prend $F \equiv 1$ donc $\phi \equiv 1$), c'est-à-dire une probabilité ; et $F(\alpha)$ est la moyenne de la valeur au contour ϕ suivant la mesure μ_α :

$$(7.4) \quad F(\alpha) = \mu_\alpha(\phi) .$$

D'après sa définition, μ_α est la mesure image de la probabilité P^α sur Ω par l'application $B_T^\alpha : \omega \longmapsto B^\alpha(T(\omega), \omega)$ de Ω dans U^* :

$$(7.4 \text{ bis}) \quad \mu_\alpha = B_T^\alpha(P^\alpha) .$$

(Cela paraît bien innocent, mais il faut le profond théorème de Choquet sur les capacités pour montrer que T est universellement mesurable, donc que B_T est P -mesurable). On peut donner une image complètement fautive mais "intuitive" de cette mesure image ; chaque trajectoire ω , partant de α , arrive sur U^* , pour la première fois au temps $T(\omega)$; elle transporte avec elle sa mesure pour la probabilité P^α , sur U^* ; la somme de toutes ces mesures transportées est μ_α . C'est absurde, parce que toute trajectoire individuelle a une mesure nulle pour P^α . La traduction rigoureuse de cette idée est celle de mesure image ! On appelle μ_α la mesure harmonique sur U^* , relative au point α . Si donc ϕ est une fonction continue sur U^* , la solution du problème de

Dirichlet pour U de frontière U^* , pour la donnée au contour ϕ , est la fonction sur $U : a \longmapsto \mu_a(\phi) = E^a(\phi(B^a_T))$. Il est remarquable que la théorie du mouvement brownien intervienne dans la résolution du problème de Dirichlet. Mais cela résulte des considérations fort simples antérieures ; par ailleurs, l'équation (1.1) fait intervenir le laplacien. Ces résultats ont été connus il y a longtemps ; mais c'est Hunt qui, dans les années 60, a montré comment tous les problèmes de la théorie du potentiel généralisée étaient intimement liés aux processus de Markov. Considérons le cas particulier où U est une boule de centre origine ; à cause de l'invariance brownienne par rotation (voir fin de (5.6) et de l'invariance de la sphère U^* , la mesure harmonique relative au centre est la mesure équirépartie, et on retrouve le fait très classique que la moyenne des valeurs d'une fonction harmonique sur une sphère est égale à sa valeur au centre.

Il faut bien se rendre compte qu'ici nous n'avons pas vraiment résolu le problème de Dirichlet. Nous avons seulement montré que, si F est harmonique dans un voisinage de \bar{U} , de valeur au bord ϕ , F est connue dans U à partir de ϕ par (7.4). Nous n'avons pas montré que, si ϕ est une fonction continue sur U^* , il existe une et une seule fonction F , continue sur \bar{U} , de valeur ϕ sur U^* . L'unicité est évidente, par le théorème du maximum pour les fonctions harmoniques. Pour l'existence, c'est une autre affaire ; on sait que le problème de Dirichlet n'a pas de solution pour n'importe quel contour et n'importe quelle fonction ϕ . S'il en a une, et si elle est restriction d'une fonction C^2 dans un voisinage de \bar{U} , c'est nécessairement celle qui est donnée par (7.4). Plus généralement, on montre que, si le problème a une solution, sans condition supplémentaire, c'est celle de (7.4). Le problème a toujours une solution, si par exemple, U^* est une hypersurface C^1 . Il existe une méthode, inventée par Wiener, pour trouver une "solution généralisée" F ; elle est harmonique dans U , et, si b est un point dit "régulier" du complémentaire U^c de U (nous en reparlerons), $F(a)$ tend vers $\phi(b)$, lorsque $a \in U$ tend vers b . En d'autres termes, la mesure harmonique μ_a tend, pour la topologie étroite sur U^* , vers la mesure de Dirac δ_b si b est régulier, et n'a en général pas de limite si b est irrégulier. La mesure μ_a est toujours portée par l'ensemble des points réguliers. Si b est le sommet d'un cône d'angle strictement positif contenu dans U^c au voisinage de b , il est régulier, mais c'est là une condition beaucoup trop forte de régularité. Si U est une "pomme" de complémentaire très mince au voisinage du sommet,

le sommet est irrégulier pour U^c . Précisément, U^c est dit effilé en b si b est irrégulier pour lui. Les points irréguliers sont donc "rares", ils forment un ensemble de "capacité" nulle de U^* ; un ensemble de capacité nulle est de mesure de Lebesgue nulle, la réciproque est fautive ; ainsi une sous-variété différentielle de dimension au plus $N-1$ est de mesure nulle, alors qu'elle n'est de capacité nulle que si sa dimension est au plus $N-2$. Un ensemble de capacité nulle est dit polaire ; un ensemble est polaire ssi il est effilé en chacun de ses points. On dit aussi que F tend vers ϕ "quasi-partout" sur U^* , et c'est une caractérisation de la solution de Wiener : F est l'unique fonction harmonique dans U , bornée, de limite ϕ quasi-partout sur U^* . Ce qui est très intéressant, c'est que cette solution généralisée de Wiener est encore celle qui est donnée par (7.4). Si U est, par exemple, le complémentaire, dans un ouvert V bordé par une variété C^1 , d'un compact K sans intérieur, U^* est la réunion disjointe de V^* et de K . Supposons K polaire, les valeurs de ϕ sur K n'auront aucune influence sur la valeur de F , puisque μ_a est portée par l'ensemble des points réguliers ; le problème de Dirichlet pour U et V sont les mêmes ; une fonction F harmonique définie sur U , bornée au voisinage de K , peut être prolongée en une fonction harmonique sur V si K est polaire (Ce n'est plus vrai si l'on ne suppose pas F bornée ; par exemple la fonction $x \mapsto 1/|x|^{N-2}$ (pour $N \neq 2$) est harmonique dans le complémentaire de l'origine, mais pas prolongeable en fonction harmonique sur R_N).

VIII - LE POTENTIEL D'EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE ET LA CAPACITE NEWTONIENNE D'UN COMPACT EN DIMENSION $N \geq 3$.

Ce qui va être dit n'a pas de sens ou est faux en dimension 1 ou 2, nous supposons donc $N \geq 3$, le brownien est alors transient (5.4). Reprenons la situation de la fin du précédent paragraphe : \mathcal{V} sera une boule ouverte centrée à l'origine, dont le rayon R va croître indéfiniment, K sera un compact fixe et nous raisonnerons à partir du moment où K est dans \mathcal{V} : U sera $\mathcal{V} \setminus K$.

Résolvons le problème de Dirichlet relatif à $\phi = 1_K$, égale à 1 sur K et à 0 sur la sphère \mathcal{V}^* . Alors $\phi(B_T(\omega))$ vaut 1 si $B(\omega)$ rencontre K avant \mathcal{V}^* , 0 dans le cas contraire. Donc, pour $a \in U$,

$$(8.1) \quad \mu_a(\phi) = \mu_a(1_K) = P^a \{B \text{ rencontre } K \text{ avant } \mathcal{V}^*\}.$$

Lorsque R croît, cette quantité augmente. Pour R tendant vers l'infini, elle tend vers la P^a -probabilité que B rencontre K :

$$(8.2) \quad \lim_{|a| \rightarrow +\infty} \mu_a(\phi) = P^a \{B \text{ rencontre } K\} = V(a).$$

Examinons les principales propriétés de la fonction V . La fonction $a \mapsto \mu_a(\phi)$ est harmonique dans U , elle croît quand le rayon R de \mathcal{V} augmente et tend vers V pour R infini, donc V est harmonique dans K^c , et $0 \leq V \leq 1$. Certaines composantes connexes de K^c sont relativement compactes ; si a s'y trouve, la trajectoire, qui ne saurait rester confinée dans un compact, sort nécessairement de K , donc rencontre la frontière K^* donc K , et donc V y vaut 1. Etudions V dans la seule composante connexe non bornée de K^c . Si elle valait 1 en un point, étant partout ≤ 1 , elle serait identique à 1 par le théorème du maximum ; donc, partant de n'importe quel point assez éloigné, la courbe serait presque sûre de rencontrer K , donc aussi presque sûre de rencontrer n'importe quelle sphère dont la boule contient K . On pourrait utiliser les méthodes du § V ; en prenant les deux boules D_1 et D_2 de centre origine, assez grandes, on trouverait que le temps d'arrêt noté alors T_1 pour un départ de l'origine serait p.s. fini, que donc la trajectoire brownienne serait récurrente, ce qui n'est pas le cas pour $N \geq 3$. Donc $V < 1$ dans cette composante.

On peut prolonger V sur K lui-même. Il serait naturel de dire que, si $a \in K$, la probabilité pour qu'une trajectoire issue de a rencontre K est 1. Mais il se trouve que ce n'est pas là le bon prolongement. Pour a dans $U = \mathcal{V} \setminus K$, $V(a)$ est aussi la probabilité pour que la trajectoire issue de a rencontre K en des temps > 0 . Mais la fonction qui la prolonge naturellement n'est plus du tout la même, et on montre que c'est celle-ci qui est la bonne. Si a est dans l'intérieur de K , c'est la même, elle vaut 1 ; mais il n'en est plus forcément ainsi pour a sur la frontière K^* de K . Si a est un point régulier de K (ce qui comprend les points intérieurs de K) on montre que P^a -p.s. la trajectoire rencontre K dans tout intervalle de temps $]0, \epsilon]$, donc $V(a)$ est encore 1. Mais, si a est un point irrégulier de K , on démontre que P^a -p.s. la trajectoire commence par sortir de K , et qu'elle aura donc une probabilité > 0 de ne plus jamais y rentrer parce que la trajectoire est transiente, donc ne jamais rencontrer K en des temps > 0 ; alors $V(a) < 1$. Donc V , ainsi prolongée sur K , est partout ≤ 1 sur K , mais égale à 1 seulement aux points réguliers de K , donc quasi-partout sur K (et partout sur l'intérieur de K) ; elle est harmonique sur K^c et sur l'intérieur de K . On peut d'ailleurs la caractériser de cette manière sur K^c :

V est l'unique fonction sur K^c , égale à 1 sur les composantes connexes relativement compactes de K^c , harmonique sur la composante connexe non bornée de K^c , tendant quasi-partout vers 1 sur K et vers 0 à l'infini.

Mais elle n'est pas globalement harmonique sur R_N . On montre qu'elle est surharmonique sur R_N : ceci veut dire qu'elle est sci (semi-continue inférieurement), localement intégrable, et que, au sens des distributions, son laplacien ΔV est ≤ 0 . Elle est la plus petite fonction surharmonique ≥ 0 sur R_N , ≥ 1 quasi-partout sur K .

Disons quelques mots sur les cas $N = 1$ ou 2 . Pour $N = 1$, le brownien est récurrent, donc il rencontre tous les points ; $V \equiv 1$; seul l'ensemble vide est polaire. Pour $N = 2$, si K est polaire (ce qui nécessite qu'il soit vraiment très fin), $V \equiv 0$ comme pour $N \geq 3$; ou bien il ne l'est pas, mais le brownien étant récurrent, $V \equiv 1$.

(8.3) Potentiel d'une boule ou d'une sphère.

Calculons V lorsque K est la boule fermée de centre 0 et de rayon R . Par suite de l'invariance du brownien par rotation, V est nécessairement aussi invariante par rotation, donc $V(a)$ ne dépend que de $|a|$; harmonique dans l'extérieur de la boule et dans son intérieur, elle est, dans chacun d'eux, combinaison linéaire de 1 et de $a \mapsto 1/|a|^{N-2}$. On a vu qu'elle vaut 1 dans l'intérieur de K , donc dans la boule ouverte, mais aussi sur la sphère dont tous les points sont réguliers pour la boule. Parmi les fonctions surharmoniques sur R_N , ≥ 1 sur K , figure $(R/|a|)^{N-2}$; V doit lui être inférieure, donc lui est nécessairement proportionnelle, mais encore égale à 1 sur la sphère, donc c'est

$$(8.4) \quad V(a) = 1 \wedge (R/|a|)^{N-2} .$$

On en déduit que V tend vers 0 à l'infini, majorée par $(1/|a|)^{N-2}$. Mais, si K est un compact contenu dans une boule, la probabilité du brownien de rencontrer K en partant de loin est plus petite que sa probabilité de rencontrer la boule, donc V est partout < 1 dans la composante connexe non bornée de K^c , et tend vers 0 à l'infini, en étant bornée par $\text{const.} (1/|a|)^{N-2}$.

Il reste à voir quand V prend la valeur 0 . Il est connu que, si une fonction surharmonique ≥ 0 prend la valeur 0 en un point, elle est $\equiv 0$. Cela ne peut se produire que si, partant de n'importe quel point, la trajectoire brownienne ne rencontre jamais K en des temps > 0 . On dit alors que K est polaire. Ou bien K est polaire, alors $V \equiv 0$; ou bien K n'est pas polaire, alors V ne s'annule jamais.

(8.4) Résumé des propriétés de V , potentiel d'équilibre électrostatique d'un compact K de R_N , $N \geq 3$:

- a) V est surharmonique ; c'est la plus petite fonction surharmonique ≥ 0 sur R_N , ≥ 1 quasi-partout sur K ;
- b) elle est harmonique dans K^c et dans l'intérieur de K ;
- c) elle vaut 1 dans l'intérieur de K et en tous ses points réguliers, donc quasi-partout sur K , et est < 1 aux points irréguliers de K ;
- d) elle vaut 1 dans les composantes connexes relativement compacts de K^c , et, dans la composante connexe non compacte, elle est partout < 1 , et tend vers 0 à l'infini, majorée par $\text{const.} (1/|a|)^{N-2}$.
- e) on peut dire que V est la solution du problème de Dirichlet extérieur, relative à l'ouvert K^c , pour la valeur 1 sur K et 0 à l'infini ;
- f) ou bien K est polaire (en dehors peut-être de son point de départ, la trajectoire ne rencontre jamais K), alors $V \equiv 0$; ou bien K n'est pas polaire, alors V ne s'annule jamais, et, partant de n'importe quel point, la trajectoire a une probabilité > 0 de rencontrer K en des temps > 0 .

Pourquoi V s'appelle-t-il le potentiel d'équilibre électrostatique ? Supposons que K soit un volume conducteur de forme régulière, sans points irréguliers, bordé par une hypersurface K^* . Plaçons sur K une charge électrique Q . Puisque K est conducteur, les masses électriques de Q se déplaceront jusqu'à prendre des positions donnant lieu à un équilibre électrostatique. Le champ sera alors nul dans l'intérieur, et normal extérieur à la surface. Donc le potentiel V sera constant sur K . Il sera harmonique à l'extérieur où il n'y a pas de charges. Il tendra vers 0 à l'infini. La relation entre la charge Q et le potentiel de K est connue : $Q = CV$, où C est la capacité de K . Si donc $Q = 1/C$, V sera égale à 1 sur K , ce sera exactement la fonction V trouvée précédemment. Bien qu'il n'y ait aucun rapport direct entre l'électricité et le mouvement brownien, ce dernier intervient directement pour donner des résultats relatifs à l'autre ; c'est un peu un miracle.

(8.5) Capacité d'une boule fermée ou d'une sphère.

Nous avons vu en (8.4) la valeur du potentiel d'équilibre (si la boule a pour centre l'origine) ; la charge qui crée ce potentiel est évidemment équirépartie sur la sphère, on sait alors (théorème de Gauss !) que son potentiel est constant à l'intérieur de la boule, et que le champ à l'extérieur est le même que si toute la charge Q était au centre, c'est-à-dire, en dimension 3, $a \longmapsto \frac{Q}{4\pi|a|^2}$ dans le sens du rayon-vecteur ; le potentiel, nul à l'infini, est nécessairement

$a \longmapsto \frac{Q}{4\pi|a|}$; en dimension N , c'est $a \longmapsto \frac{Q}{(N-2)S_N|a|^{N-2}}$, où S_N est l'aire de la sphère unité, c'est-à-dire $2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$. Sur la sphère, on doit faire $a = R$, et le potentiel est $\frac{Q}{(N-2)S_N R^{N-2}}$. Comme ce doit être Q/C , pour que V soit 1 sur la boule, on voit que la capacité de la boule (qui est aussi celle de la sphère) est

$$(8.6) \quad C = (N-2) S_N R^{N-2} \text{ et } Q = C.$$

(8.7) Le pouvoir des pointes, la foudre et le paratonnerre.

Le lecteur qui aurait peur de la foudre pourra passer ce paragraphe.

Nous venons de traiter le cas où K est sans point singulier. Mais supposons que K ait un point singulier isolé, a , par exemple une poire très effilée en son sommet. Le potentiel d'équilibre V vaut partout 1 sur K , sauf en a où il est < 1 . Il est donc discontinu en a . Le champ, opposé du gradient du potentiel, a des termes δ de type Dirac, il prend de très grandes valeurs au voisinage de a ; il produit donc une ionisation de l'atmosphère au voisinage de a , qui peut se prolonger assez loin. C'est le "pouvoir des pointes", phénomène visible à l'oeil nu : si le conducteur est chargé positivement, la pointe s'entoure d'une aigrette, s'il est chargé négativement d'une petite étoile.

La foudre est un phénomène de percolation. Un nuage sensiblement horizontal est chargé d'électrons, la terre sous lui est chargée d'ions positifs, les électrons ayant été repoussés par des électrons du nuage. L'air non ionisé ne conduit pas l'électricité, donc un champ s'établit entre le nuage et la terre, sans qu'aucune décharge soit possible. Mais de petites décharges ont lieu, des microfoudres, profitant de courts chemins ionisés ; chacune d'elles s'arrête après un petit parcours, la quantité d'électricité transportée est faible. Certaines microfoudres deviennent plus fortes, l'air devient de plus en plus ionisé. A un moment donné, il y a un chemin ionisé presque jusqu'au bout, et la décharge complète a lieu entre ciel et terre, c'est la foudre, une énorme décharge, avec un bruit également énorme, le tonnerre. Si au sol on a disposé une pointe, le paratonnerre (qui devrait être appelé parafoudre), celle-ci est un point irrégulier de la terre, et l'air est fortement ionisé au voisinage. Il suffit qu'une décharge partielle, qui autrement serait invisible et inaudible, arrive relativement près de cette pointe, pour que l'éclair puisse avoir lieu. Un bon paratonnerre, de plusieurs mètres de haut, ionise l'atmosphère assez loin. La foudre ira au paratonnerre, ou sur tout objet pointu (un arbre, un piolet au sommet d'une montagne), de préférence à tout autre point d'impact. Naturellement, au toit d'une maison, le paratonnerre doit être rejoint au sol

par un câble conducteur, isolé du reste de la maison par une protection isolante. Le paratonnerre a été inventé par Benjamin Franklin en 1752.

Tous les problèmes traités ici auraient pu n'utiliser que la théorie des fonctions harmoniques et surharmoniques, ou que les propriétés du mouvement brownien, j'ai préféré mélanger les deux. Mais je tiens à signaler de nouveau qu'à part la possible utilisation des propriétés du brownien en électrostatique, il n'y a aucun rapport perceptible entre les deux catégories d'objets physiques ; le mouvement des électrons n'a rien de brownien. C'est quand même étrange.

QUELQUES LIVRES

Presque tous les énoncés donnés ici figurent dans des livres, où ils sont faciles à trouver. Nous donnons quelques-uns de ces livres, et ne donnerons pas de référence dans le texte, sauf pour des énoncés très particuliers.

- [1] R.M. BLUMENTHAL and R.K. GETTOOR, *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, New-York and London, 1968.
- [2] Claude DELLACHERIE - Paul-André MEYER, *Probabilités et Potentiels*, Paris, Hermann, chap. V-VIII, Tomes 1 (1979) et 2 (1980), (théorie des martingales).
- [3] Paul LEVY, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, Paris, Gauthiers-Villars, 1992 (Toutes propriétés du mouvement brownien).
- [4] Sydney C. PORT - Charles J. STONE, *Brownian Motion and Classical Potential Theory*, Academic Press, New-York - San Francisco - London, 1978.

TABLE DES MATIERES

I	LA DECOUVERTE DU MOUVEMENT BROWNIEN	1
II	LES PROPRIETES HOLDERIENNES	3
III	LES POINTS MULTIPLES	6
IV	L'AIRE DE LA COURBE BROWNIENNE PLANE	7
V	TRAJECTOIRES TRANSIENTES OU RECURRENTES	8
VI	LES MARTINGALES ET L'INTEGRALE STOCHASTIQUE	12
VII	LE PROBLEME DE DIRICHLET	17
VIII	LE POTENTIEL D'EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE ET LA CAPACITE NEWTONIENNE D'UN COMPACT EN DIMENSION $N \geq 3$	20