

MARIE-PASCALE AUBERT

**Autour de la capacité de résolution de problèmes : démonstrations
d'étudiants, de chercheurs et d'enseignants**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994-1995, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. n° 7, p. 1-23

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994-1995__3_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1994-1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AUTOUR DE LA CAPACITE DE RESOLUTION DE PROBLEMES : DEMONSTRATIONS D'ETUDIANTS, DE CHERCHEURS ET D'ENSEIGNANTS

Marie-Pascale AUBERT
Département de Mathématiques
Université de Rouen

PREMIÈRE PARTIE : RÉSUMÉ DE TRAVAUX

I CONSIDERATIONS GENERALES

En premier lieu, il n'est pas inutile de savoir que cette recherche prend racine dans un travail antérieur.

I.1 *Point de départ.*

Ce travail antérieur a consisté en une étude méthodologique d'activités de type mathématique, étude menée sur plusieurs années,
-pour repérer les principes méthodologiques d'étudiants de première année à l'université (corpus de méthodes de travail : appropriation, attaque et résolution d'un problème, stratégie de démonstration ...), ainsi que ceux d'enseignants, puis ceux d'élèves de niveaux différents (maternelle, primaire, collège, lycée), en situation de résolution de problèmes,
-pour comparer ces corpus, notamment quant à la pertinence et l'efficacité des méthodes entrant en jeu, dans les différentes phases de résolution d'un problème,
-pour essayer de mettre à jour ou de bâtir, à partir de cela, un savoir d'expert et voir comment le transmettre.

I.2 *Objet de la recherche.*

L'objet de cette dernière recherche (en date) fut de mettre en évidence l'existence et la nature de ce savoir expert quant à la capacité de construction de démonstration, pour des problèmes de Mathématiques, et de montrer qu'il est bien transmissible aux étudiants, voire, pour des contenus différents, à des élèves ...

La capacité de démonstration n'est pas sans lien avec des **connaissances méthodologiques**, le plus souvent implicites, sinon **inconscientes**, chez ceux qui les utilisent, et donc qu'il faut expliciter.

Il s'est agi, pour ce qui est du **coeur** de cette étude, de tester, auprès d'étudiants de niveaux différents, les acquis qui suivaient une **réflexion méthodologique** composée : premièrement, d'un bilan (individuel et collectif) de plusieurs mises en situation, deuxièmement, de l'étude de la corrélation entre procédures et réussite, blocage, erreur ... et troisièmement, d'une comparaison des procédures utilisées avec les procédures performantes d'experts.

I.3 *Cadre : la méthode.*

Avant de poursuivre, j'insisterai sur le fait que j'ai voulu inscrire ce travail dans le cadre des recherches concernant la méthode, car il existe une demande tant de la part des étudiants (SUP Juin 1990, Ministère Educ. Nat.) que des enseignants (enquête AUBERT 1989-1990), et une pléthore d'ouvrages s'en réclamant.

En effet, "**méthode**" est un **mot-clé** de nombreuses publications, tant pour des disciplines variées (4584 au C.R.D.P. de ROUEN), que pour ce qui est des **mathématiques**. Notons que 159163 ouvrages scientifiques sont répertoriés, à "**méthode**" ou un dérivé, par PASCAL, sur trois années. En croisant avec le terme "**mathématique(s)**", il reste 172 titres. Les recherches avec "**heuristique**" ou "**problem-solving**", outre qu'elles sont beaucoup moins fructueuses concernent des domaines très particuliers des mathématiques.

Ce qui découle d'une étude d'une centaine de publications parlant mathématiques et méthode, c'est que ce deuxième terme est utilisé dans des sens différents selon les auteurs (cf Etude de publications M.- P. AUBERT). Je préciserai plus loin.

I.4 *Problématique.*

Venons-en à la **problématique**. Le départ de mes travaux passés, dans lesquels ceux-ci ont leurs racines, peut se résumer aux **questions d'origine** :

- comment rendre efficace, au maximum, un temps d'enseignement restreint ?
- quelles sont les causes de l'inexistence de démonstrations correctes pour un pourcentage important des étudiants de 1^o année à l'université ?
- existe-t-il pour les démonstrations concernant les exercices proposés en DEUG des typologies de la réussite, des blocages, des procédures erronées ?

Ma **problématique**, sans se décentrer des questions premières s'est

enrichie ... du fait des expérimentations passées et de leurs résultats, dont certains points sont :

- Pour certains champs conceptuels il arrive de ne trouver, chez les étudiants ou élèves, aucune démonstration, ou pire, aucun embryon de démonstration. Ces champs sont en lien avec une nécessité de "raisonner", de trouver une méthode qui n'est pas directement fournie, ou qui est considérée comme inexistante, de mobiliser des acquis (à déterminer) ... Cela concerne autant les problèmes de "démonstration" (résultat fourni dans l'énoncé) que les problèmes de "recherche" (ignorance du résultat, de ce qu'il faut obtenir)
- Selon mon expérience, et pas seulement la mienne, le champ de l'Algèbre, à l'université, est plus affecté que celui de l'Analyse qui, pour ce qui concerne les contenus actuels, dispose davantage d'algorithmes ou de méthodes de résolution suggérées dans le cours (comme par exemple les techniques d'intégration selon les types de fonctions ...). J'ai, pour apporter, entre autres, un éclairage à ce sujet, procédé à l'examen des textes de manuels d'Algèbre et de manuels d'Analyse de première et seconde année de DEUG A (voir chapitre Thèse AUBERT correspondant)

Nos essais antérieurs de remédiation ont eu un impact positif, or ils incluaient des réflexions méthodologiques. D'où les nouvelles questions :

- sur l'existence et la nature d'un acquis méthodologique à l'arrivée à l'université, après une année, à la fin des études universitaires, quelques années après,
- sur la possibilité, l'époque, le lieu, la manière et le contenu d'un enseignement de méthodologie de la résolution de problèmes et de la construction de démonstrations.

Ma problématique a tourné en fait, autour de trois pôles :

- prise de conscience de la part des étudiants de leur méthodologie,
- enseignement à caractère méthodologique explicite concernant le raisonnement, les différentes procédures dans la résolution de problèmes et l'élaboration de démonstrations, donc destiné à des situations heuristiques.
- rentabilisation d'un temps limité à gérer au mieux

I.5 Référence aux travaux.

Ces questions ne sont pas originales en soi et elles renvoient aux travaux connus sur le sujet.

C'est le cas, pour le point méthode, de publications (pour le détail, cf cours Tome 1 Méthode M.-P. AUBERT ou bibliographie Thèse) émanant de J.-M.-C.

Duhamel, G. Polya, G. Glaeser et l'équipe de Strasbourg, J. Adda, A. Schoenfeld, G. Arsac, G. Brousseau, A. Robert, R. Samurçay, J. Rogalski, A. Antibi, M. Artigue, la Commission inter-IREM Université, I. Tenaud, M. Rogalski, E. Delozanne, M. Berrondo-Agrell et M.-B. Jacquemont ...

Si nous nous référons aux travaux parlant enseignement de méthodes, nous constatons que ce dernier a trait, dans la majorité des cas, à des contenus théoriques, correspondant à un champ précis et particulier des Mathématiques enseigné maintenant en cours (J.-M.-C. Duhamel, J. Hadamard, J. Dieudonné), ou encore à un résumé de cours présentant une liste de techniques comme par exemple pour l'intégration (A. Schoenfeld, M. Rogalski, E. Delozanne), ce qui ne correspond pas à mon choix. Il y a quelque chose de plus général dans la réflexion menée par M. Berrondo-Agrell et M.-B. Jacquemont, pour l'utilisation de diagrammes comme aide à l'enseignement des probabilités.

Nous nous trouvons à un niveau différent avec J. Adda qui a étudié la possibilité de transfert d'un problème à un autre, dans le but d'augmenter l'autonomie des étudiants, ou avec M.-L. Callejo qui a cherché à améliorer les performances d'étudiants dans la résolution de problèmes, par la création d'un club mathématique où il s'agissait de résoudre des problèmes n'appartenant pas à un champ unique et pouvant être résolus de plusieurs façons, selon le **cadre choisi** par l'étudiant. L'apprentissage visé concernait les stratégies de résolution en général, avec exercice de la pensée "latérale" (de Bono), et le détachement des conditionnements scolaires provoquant rigidité et découlant d'un exercice exclusif d'une forme de pensée : la pensée "verticale" (de Bono).

Ce que nous considérons, au niveau méthode, dans notre étude, est proche de ces travaux ainsi que de ceux de R. Gras et de son équipe, (alternance de proaction, rétroaction, "pas" de démonstration). Il ne s'agit donc pas d'utilisation de listes techniques ...

Pour les points autres que méthode, nous faisons référence à :

- pour ce qui concerne temps ou fonction de ce dernier, M.-L. Callejo de la Vega (Paris 1991), Ana de MESQUITA (Strasbourg 1988) et Jean-Luc DORIER (Grenoble 1990),
- pour ce qui touche au texte, voir cours de J.-F. RICHARD (1990), travaux D'Antoinette RASOLOFONIAINA (R.D.M. et thèse de didactique Strasbourg 1983) et ceux d'A. GAGATSIS (R.D.M. 84)
- pour la phase d'entrée dans le problème, voir R. Gras et équipe de Rennes (1988), F. Pluvinage (1990) et pour ce qui concerne, plus précisément, formulation ou reformulation, voir Slavskaya (1960), R. Borasi (1986) et

Callejo (1991)

- pour prise de conscience, H.Freudenthal (1983) et J. ADDA (1975), pour dialectique cognitif-affectif et aspect ludique, respectivement J.Adda et R. Thom

- pour rigidité et souplesse : H.Freudenthal, R. Hoz (1981), E. de Bono ("pensée latérale" ou pensée "en chapeau vert" 1971, 1987) ...

A ce sujet (rigidité et souplesse), je pense utile et même **indispensable** de donner les détails suivants :

- la plupart des étudiants, même s'ils réalisent que leur **procédure n'est pas adaptée** ou ne mène pas à une solution, y **restent accrochés** et ne cherchent pas à la modifier, à l'adapter ou à la remplacer par une autre susceptible de convenir (R.HOZ, 1981),

- cette rigidité comportementale est attribuée à un **transfert analogique défaillant** (conservation, pour un nouveau problème, d'une procédure déjà utilisée pour la résolution d'un autre, **sans analyse** du nouveau problème, Luchins 1942), par J.-F. RICHARD (1990). Il signale que ce phénomène est caractéristique du système scolaire (exercices d'imitation de problèmes résolus ou traités dans un même chapitre).

- la rigidité est renforcée par le **contexte scolaire** et laisse des traces dans un contexte autre. A. Krygovska et M. Ciosek (1973) ont constaté, lors d'une expérimentation, une **persistance des procédures scolaires à 80%**, chez un groupe d'étudiants et de mathématiciens, procédures qui ne conduisaient que le quart de ceux qui les ont utilisées à la réussite (comme partir de l'hypothèse pour aller vers la thèse, par transformations successives). Ceux qui n'ont pas appliqué de schéma scolaire, dans l'expérimentation citée, ont réussi de façon presque immédiate.

- pour un effet curatif de cette rigidité, repérée et imputée à la forme de l'enseignement, R. HOZ a montré, pour ce qui est de l'apprentissage en géométrie, l'effet positif d'un **entraînement à l'utilisation de stratégies différentes**, ce qui était préconisé par Polya de façon générale.

I.6 Hypothèse de recherche.

Nous avons mené des **expérimentations** du même genre pour des champs conceptuels variés, avec l'**hypothèse de recherche** suivante :

"Il existe un savoir expert, concernant la résolution de problèmes, mis en oeuvre par les enseignants. Ce savoir n'est pas toujours conscient chez ceux qui le possèdent, et donc non transmis, mais il existe réellement. Il est possible d'extraire ce savoir à partir des comportements et des productions

des enseignants en situation heuristique, puis de l'institutionnaliser et de le transmettre.

Cette transmission peut se faire par un enseignement explicite, à caractère méthodologique, basé :

- d'une part, sur une attention particulière au contenu du texte (d'exercice, de problème) donc aux contenus mathématiques et concepts visés et,
- d'autre part sur les possibilités variées de démonstration quant à la forme (directe, par contraposée, par l'absurde...), donc sur les stratégies utilisables (ou non) pour un même exercice.

Cet enseignement explicite aura pour conséquence d'améliorer les capacités des étudiants à produire des démonstrations dans les situations heuristiques qui leur sont habituelles"

II Expérimentations

II.1 Cadre

Cette nouvelle étude s'est déroulée principalement à l'université, mais, pas exclusivement, dans la mesure où la réponse à certaines questions nécessitait une vue sur les pratiques ou capacités avant l'arrivée à l'université.

Contrairement à certaines études antérieures correspondant exclusivement à des "observations" lors de déroulement de T.D., nous avons ici des **expérimentations créées spécialement** pour tester l'hypothèse citée page précédente. La conception de ces expérimentations est liée à mes travaux antérieurs et aux résultats acquis précédemment ainsi qu'aux références théoriques déjà évoquées ...

Ces expérimentations se sont déroulées de 1989 à 1994, avec des populations variées.

C'est ainsi que nous avons travaillé avec des élèves de primaire (une classe), de collège (quatre classes), de lycée (une classe), des étudiants en sciences de premier cycle, des étudiants en maîtrise de mathématiques, des professeurs de collège et de lycée, des universitaires et un échantillon de population constitué par des personnes de tous âges appartenant à l'entourage d'étudiants ...

Mais, ces expérimentations n'ont pas toutes le même statut dans cette étude. Celles qui en intéressent le coeur, destinées à tester notre hypothèse, se sont déroulées principalement avec des étudiants de Deug

deuxième année et des universitaires (enseignants ou/et chercheurs). Les autres ont seulement un rôle complémentaire, apportant un éclairage sur des questions annexes. Nous ne nous y arrêterons pas dans le cadre de cet article.

II.2 Contenu

Pour corroborer mes hypothèses, j'ai soumis les populations précitées à des activités variées, comme : répondre à des questionnaires d'enquête, prêter attention à la phase de lecture et d'appropriation de textes, résoudre des exercices et problèmes variés appartenant à des champs différents, réfléchir à l'existence et à la nature de sa méthodologie personnelle, en observant, lors de la résolution d'exercices variés, ses protocoles de recherche, mener une réflexion sur son comportement et voir s'il est corrélé avec la réussite ou non, comparer les procédures des personnes d'un même groupe entre elles, considérer les pourcentages des procédures choisies ...

Les textes d'enquête ont été écrits en fonction du désir de faire réfléchir les étudiants sur les méthodes de démonstration, en général, et sur celle(s) qu'ils utilisent ou privilégient, ainsi que sur le décalage existant entre ces dernières et celles qui sont performantes.

Pour sensibiliser les sujets au problème de la méthodologie de résolution de problèmes (entendre par là : la connaissance et l'utilisation de méthodes), des jeux et des problèmes de collège ont été sélectionnés en fonction de critères d'"ouverture", de possibilité d'"interprétations" différentes selon les lecteurs et/ou de procédures de résolution multiples ou ne consistant pas en l'application directe d'un algorithme.

Le choix des textes de Deug a été gouverné par un souci de grande simplicité quant au contenu et au champ d'appartenance, de façon à ce que dans le cas d'échec ce dernier ne puisse être attribué à la difficulté du niveau proposé ou à celle des concepts en jeu. Ce choix est tel qu'il permet localement d'envisager plusieurs cas de démonstration, à chaque fois, et globalement de faire le tour des possibles, pour le champ considéré, quant aux formes et types de démonstration.

II.3 Outils d'analyse.

Pour l'étude de certaines productions (écrites ou orales) et des commentaires, j'ai utilisé la méthode de E. de BONO, décrite dans son ouvrage "Six chapeaux pour penser" qui permet, comme le dit son auteur, de "cartographier" la pensée. Cette méthode s'est révélée très commode, dans un premier temps, pour dissocier les différents caractères de ce qui était émis

par les uns et les autres, et chercher des corrélations avec la réussite ou l'échec, à partir de la nature des commentaires et de leur appartenance aux classifications "Bonoïstes". Cependant, ces dernières sont très larges, et insuffisantes pour ce qui touche à la résolution de problèmes, il a fallu, en seconde analyse, un autre outil qui permette un classement à l'intérieur de ces classes, du genre des considérations de Polya et de Schoenfeld, mettant l'accent sur ce qui était du domaine des heuristiques, de l'appel à l'acquis aux "ressources", du "control" ou des "beliefs systems".

Pour ce qui est de l'analyse des procédures, j'ai utilisé ces mêmes outils et recherché s'il existait des corrélations entre les différentes formes de démonstration mises en oeuvre et réussite, blocage ou erreur. Je me suis aussi attachée à relever des traces d'exercice de la "pensée latérale" comme souplesse voire créativité.

II.4 Choix et raisons des choix.

Il me semble utile à ce point de l'exposé de préciser quels ont été mes choix et leurs raisons.

J'ai choisi de faire un état des lieux sur le plan méthodologique puis de mesurer les impacts d'une réflexion, à caractère méthodologique, précédée d'une mise en condition psychologique sur la nécessité ou le bien-fondé d'une telle réflexion, de façon à éliminer au maximum un éventuel phénomène de rejet ou de manque d'intérêt. J'ai pensé qu'il était important de préparer les étudiants à s'intéresser à un enseignement de méthodes, après expérience de l'indifférence de certains étudiants à cet égard. De ce fait l'expérimentation avec les étudiants était en partie destinée à les sensibiliser de façon à développer une attitude positive face à ce qui leur serait proposé. En effet, nous sommes plus réceptifs à un enseignement si nous en voyons la nécessité ou en éprouvons le besoin ...

Tant pour la sensibilisation, pour la réflexion méthodologique que pour la mesure de son impact, il a fallu utiliser un matériel. Le choix, pour cela, des jeux de labyrinthes, des textes extraits de manuels de mathématiques (collège), des textes de problèmes ouverts publiés par l'Irem de Lyon, est lié au fait que ces textes ont la caractéristique de ne pas comporter le résultat à démontrer ce qui n'était pas le cas des textes de Deug qui avaient servi jusque là pour l'enseignement méthodologique (travaux antérieurs). De ce fait, et en ce sens, les problèmes ouverts et ceux de collège (outre le fait qu'ils pouvaient être utilisés à des niveaux différents pour un repérage méthodologique) sont complémentaires des textes de Deug utilisés lors des expérimentations. D'autre part l'utilisation des problèmes ouverts peut

permettre de tester uniquement les capacités méthodologiques des étudiants, dans la mesure où les champs concernés (quant aux contenus) sont, en principe, bien maîtrisés à l'arrivée à l'université car correspondant à des niveaux de fin de collège ...

A la suite de la lecture de l'ouvrage de POLYA : "*La découverte des mathématiques*" j'avais réfléchi à la comparaison qu'il fait entre l'**heuristique** et le parcours d'un rat dans un **labyrinthe** (p.252-253), ce qui avait débouché sur une expérimentation de jeux de labyrinthes avec un petit échantillon de la population. J'avais pu alors repérer des comportements **différents et significatifs** selon le niveau de culture (cf "*les labyrinthes*" Thèse Aubert ou M.-P. Aubert 1990 IREM de ROUEN).

L'idée de Polya avec les notions de raisonnement régressif et progressif (Comment poser et résoudre un problème p.205-206) liées aux labyrinthes m'a fait considérer ces derniers comme des **précurseurs** possibles des **différentes méthodes** de démonstration.

C'est ainsi que, pour la **phase préalable de sensibilisation**, les étudiants ont dû chercher des chemins de labyrinthe, en notant leur procédure, puis faire de même pour des problèmes de mathématiques (extraits de Pythagore 6°) et ensuite pour des problèmes ouverts. Ils ont été amenés à faire le bilan de leurs capacités individuelles : repérage et comparaison avec toutes les possibilités procédurales mises en évidence.

Dans l'ensemble les étudiants n'ont pas été satisfaits de leurs **procédés** de recherche constatant que ces derniers n'étaient **pas performants** ou que la performance n'était pas optimale pour les jeux ... D'autre part l'échec au niveau des problèmes ouverts les a inquiétés (vu le niveau du contenu) ... Ils se sont trouvés **mûrs pour réfléchir** à leur **méthodologie** concernant la résolution de problèmes de mathématiques de niveau universitaire espérant réinvestir l'apprentissage espéré pour leurs unités de mathématiques en cours ...

La deuxième phase fut consacrée à une réflexion méthodologique, partant du vécu de la sensibilisation, incluant le bilan des activités (corrélation entre les procédures et réussite, blocage ou erreur), la comparaison des procédures avec celles d'experts et une certaine institutionnalisation de ce qui découlait du tout.

II.5 Particularité quant à méthode

Avant de considérer ce qu'est la conduite "expert" qui se dégage des procédures d'experts, il me semble important de mettre l'accent sur un point

de méthode qui diffère de la communication de listes de techniques calculatoires comme par exemple en intégration (Schoenfeld, Rogalski, Delozanne ...)

Pour la majorité des exercices et problèmes d'Algèbre générale, à l'université, nous ne pouvons construire de telles listes (de techniques calculatoires ...); il suffit de considérer un exercice du style "*montrer que $(A, *)$ est un groupe*" ou " *$(A, *)$ est-il un groupe ?*" ou "*Quelle est la structure de A pour la loi interne $*$?*" (selon que la propriété à démontrer est précisée ou non) où nous avons à vérifier, en principe, la vérité d'une suite de propositions, si nous utilisons la définition. Au cas où nous aurions la possibilité plus subtile d'établir que nous avons affaire à un sous-groupe d'un groupe connu ou celle de mettre en évidence un isomorphisme, nous aurons encore à vérifier la véracité d'une proposition. Ce qui nous renvoie à autre chose au niveau de la méthode qu'à l'établissement d'une liste d'outils mathématiques accompagné ou non d'un guidage pour un choix parmi plusieurs techniques...

Nous sommes confrontés à la façon ou aux façons de démontrer des propositions, des implications, des équivalences ... si nous ne disposons pas de théorèmes pratiques directement applicables. Ceci nous renvoie à la façon de démontrer $P \Rightarrow R$ et à l'analyse de ce que contiennent P et R respectivement. Dans ce cas de problème, une liste appropriée comportera, en premier lieu, les différentes façons de montrer que $P \Rightarrow R$ est vraie, où P est une proposition, ainsi que R . Il nous faut des connaissances de logique élémentaire (cf expérimentations de J. Adda 1972).

Il n'était pas possible d'aller aussi loin que J. Adda, dans le cadre du temps dont nous disposons. Nous avons mené une réflexion de type logique, à partir d'un vécu préalable, avec des considérations simples (extraites de comportements d'experts) compatibles avec nos contraintes, portant sur la phase de lecture donc d'appropriation de texte et les capacités à utiliser des procédures différentes pour la phase de résolution de problèmes. Car, comme le souligne J.-F. Richard (Activités mentales p. 178), la connaissance procédurale a été considérée comme empirique et, dans une certaine perspective épistémologique, déconseillée voire interdite, alors que c'est une étape essentielle à la construction du relationnel, étape qui ne peut être court-circuitée.

Cette réflexion est axée, non seulement, sur la possibilité de construire des démonstrations différentes pour un même problème (directe, indirecte, avec introduction d'éléments auxiliaires ...), afin de créer ou d'augmenter les capacités de souplesse chez les étudiants et de ce fait éliminer les blocages

dus à certaines formes de démonstration (M.-L. Callejo, R. Gras), mais aussi sur une attention particulière portée au texte de problème, dans une analyse de ses parties. Cette analyse, qui n'est pas un luxe, consiste en un repérage, à partir des données, de ce qui est hypothèse et de ce qui est conclusion (expérience Rennes 98% de réussite), de l'importance de cette dernière, ce qui permet d'effectuer des traductions propositionnelles indispensables pour le contrôle de la logique de construction d'une démonstration (R. Gras 1987), ainsi qu'un choix de premier pas de démonstration (M.-P. Aubert 1987), selon la forme choisie (directe, indirecte), facilitant pour la suite de la construction de l'enchaînement de la démonstration (conduite extraite de l'"expert" constitué à partir d'expérimentations avec les enseignants et chercheurs).

Notons, ici, que W. Quine fait remarquer que la forme , *reductio ad absurdum* ou preuve indirecte a un avantage sur les preuves de validité directes consistant en une commodité technique et il ajoute que pour toutes les preuves de ce type : "*elles demeurent plus rapides et plus faciles*".

A cette comparaison entre preuves directes et preuves par l'absurde, j'en ajouterai une entre démonstrations indirectes, respectivement "par l'absurde" et "par contraposée" qui m'est propre (j'ignore si elle a déjà été faite par ailleurs, cela n'est pas à ma connaissance malgré une recherche sur ce point). Cette comparaison a son utilité au niveau coût de la démonstration, à partir du nombre de "pas" ; elle devrait intéresser des informaticiens qui cherchent à minimiser le coût en opérations et donc en temps, pour l'optimisation du calcul machine, comme en témoigne la comparaison de plusieurs techniques d'addition (de l'échiquier, de Gerbert, de la jalousie, de la croix, égyptienne, éthiopienne) par J. Brette (Palais de la Découverte Paris) ...

Dans le cas d'une démonstration par contraposée de $P \Rightarrow R$, il s'agit de montrer que $\neg R \Rightarrow \neg P$. Dans le cas d'une démonstration par l'absurde, nous supposons $\neg R$ et P vraies, et comme $\neg R \Rightarrow \neg P$, alors nous obtenons $\neg P$ et P ce qui nous permet de conclure à une contradiction, et donc $\neg R$ ne peut être vraie ... Force nous est de constater que la forme de cette seconde démonstration est plus longue que la forme de la précédente. La démonstration par contraposée est préférable (quand elle est possible) à la démonstration par l'absurde, quant au nombre de pas. Par cette remarque nous exprimons notre désaccord avec A. Antibì qui écrit que la démonstration par contraposée n'a pas d'intérêt. La démonstration par l'absurde ne prévaudra donc, de ce point de vue, que s'il n'y a pas de proposition explicite au niveau des données permettant de construire une démonstration par contraposée (M.-P. AUBERT

1987).

De toutes façons démonstration par contraposée ou démonstration par l'absurde sont deux formes voisines de démonstrations donnant le primat à la négation. Or Piaget a mis en évidence le primat de l'affirmation sur la négation, thèse qui est reprise par J.-F. Richard qui met en évidence l'utilisation de biais cognitifs pour ceux qui ont des difficultés avec la **logique de la réfutation**. Ainsi, dans une expérience avec des étudiants, J.-F. Richard constate que ceux qui utilisent la **stratégie pertinente** pour la situation qui consiste à infirmer la règle proposée sont **moins de 10%**. Il est donc important de faire prendre conscience aux étudiants de cette **résistance** et de **s'entraîner à la vaincre**, de façon à ne pas se trouver dans des situations de blocage ou de perte de signification courante dans les démarches proactives (R. GRAS 1987).

III Résultats

Venons-en aux résultats des expérimentations. Nous commencerons par ceux obtenus avec enseignants et chercheurs d'université, puisque ces résultats ont été communiqués aux étudiants dans la phase de réflexion méthodologique, avec ce qui précède.

III.1 *Le savoir d'expert.*

Il existe bien un savoir d'expert construit inconsciemment au fil des jours en fonction de l'expérience (quasi-unanimité de procédures engendrant la réussite)

Ce qui apparaît de façon claire dans tous les comportements, en général, c'est :

- la pratique d'une lecture très attentive de tout texte de problème, avec répétition ou arrêt de lecture pour les points importants, et surtout pour ce qu'est la demande, d'où :
- le repérage et la distinction entre hypothèses et conclusion
- l'émission de commentaires portant sur le texte, témoignant d'une recherche de précisions ou d'un esprit critique suggérant des améliorations de formulation
- la capacité de souplesse, de changement de procédures (81%) et même d'hyper-souplesse, avec plusieurs changements de cadre, surtout chez les chercheurs (14%), dans la phase de résolution
- quand il y a rigidité, sauf cas particulier, c'est pour application d'une

méthode reconnue comme performante

- l'exercice d'un "control", dans la phase de recherche, permettant de s'assurer que le cap est maintenu et que la procédure est appropriée ou alors d'en changer
- le fait de vérifier que les résultats correspondent à la demande (pour ce qui ne semble pas trop simple)
- la capacité de dégager des règles procédurales à partir des résultats de recherche
- la connaissance de ce que doit être un premier pas de démonstration, en fonction de la nature de cette dernière : de type universel ou existentiel, de façon à faire le lien entre objet de la conclusion et hypothèses.

Au delà de ces considérations générales, on constate que la proportion des commentaires du domaine de la pensée latérale (créatrice) est importante (44%). Les autres commentaires sont essentiellement liés à la résolution de problème. On constate aussi la persistance d'un conditionnement scolaire (Krygovska et Ciosek), avec une résolution qui part des hypothèses, pour un exercice de 4° (la mesure d'un angle). Il est surprenant, vues toutes les qualités repérées et énumérées plus haut, que toutes les procédures soient de ce style. Seulement deux personnes, soit 11% du groupe, font la remarque, en fin de course, qu'elles auraient dû partir de la considération de l'objet de la conclusion, et s'étonnent de n'avoir pas utilisé cette procédure !

Reste à expliciter le point, mis à jour, qui me semble capital dans la conduite "expert". Il s'agit du fait qu'il existe, en dehors de la résolution consistant en l'application de théorèmes, une technique du "bon" départ (certains disent "meilleur"), qui s'est créée, par expérience, à savoir : de l'objet de la conclusion pour les démonstrations directes d'une proposition de type universel (ce qui permet de ne mobiliser que ce qu'il faut des hypothèses), de l'hypothèse pour une démonstration directe de type existentiel. La grande majorité peut fournir une démonstration d'existence, mais ne le fait qu'à la demande, car il y a manoeuvre d'évitement systématique, justifiée par le fait d'une expérience de difficulté pour ce type de démonstration, consistant à se ramener à une démonstration de type existentiel. Il n'est pas étonnant, de ce fait, qu'il n'y ait pas de transmission aux étudiants d'une capacité qui est rarement utilisée.

Les démonstrations sont effectuées sans aucun tâtonnement par 81% de l'effectif, à cause du choix d'un bon "départ" qui évite blocage et travail inutile, dans un but avoué de simplicité et de rapidité.

III.2 Résultats avec les étudiants

Les expérimentations avec les étudiants de deug 2° année ont eu lieu avec deux groupes distincts. Pour le premier, la phase de sensibilisation ne contenait que des "problèmes ouverts" de l'Irem de Lyon, il n'y a pas eu de mesure de l'impact de la réflexion engagée au niveau méthodologique et on ne peut que conclure à un "état des lieux". Les résultats obtenus au sujet des labyrinthes, des problèmes de collègue et de la mesure de l'impact de la réflexion méthodologique (comprenant la communication des pratiques d'experts) ne concerne donc que le second groupe.

3.2.1 Etat des lieux.

Pour les deux groupes, nous avons des résultats similaires pour l'"état des lieux" qui :

- nous apporte des éléments à un niveau qualitatif pour la phase d'appropriation de textes
- nous renseigne sur les capacités de résolution de problèmes, en situation de décontextualisation.

(Exemples de résultats du premier groupe :

- * 77 % de réussite pour un exercice de CM2
- * 31 % de réussite pour un texte de collègue
- * 17 % " DEUG A)

- met en évidence un **manque de méthode** dans la résolution de problèmes et surtout une **différence** entre ce qui est dit être fait de façon habituelle et ce qui est réellement fait en pratique pour la résolution de problèmes (toujours au niveau méthode ...)

- nous renseigne sur les "belief systems" (d'après SCHOENFELD), puisque, à l'aide des enquêtes, les étudiants expriment ce qu'ils croient utile dans le domaine de la résolution de problèmes, et ce qu'ils pensent recevoir (ou non) par rapport à l'enseignement (ainsi moins de 25 % des étudiants pensent avoir reçu un enseignement de méthodes ...).

Nous pouvons de plus affirmer qu'il y a **corrélation** entre les **réussites** et les **commentaires** concernant le **texte** et témoignant d'une **analyse** de ce dernier. Par contre l'échec se trouve dans les cas d'absence de commentaire ou de commentaires concernant le problème de méthode, mais pour déplorer un manque. Il y a beaucoup de tâtonnements qui n'aboutissent à rien, et, contrairement à ce qui est dit, pas de traduction propositionnelle. Les deux-tiers des étudiants ne démarrent pas correctement, et 9% ne démarrent pas du tout.

Il y a **rigidité** consistant :

- à démarrer des hypothèses,
- à ne pas changer de cadre (2 cas de changement sur 380 productions)
- à ne pas remettre en cause la procédure en cours.

3.2.2 Spécificités du second groupe.

Ainsi, grâce aux jeux de labyrinthes, nous constatons que pour ces activités, les étudiants, pour la plupart, mettent en oeuvre une **méthodologie** variée et **adaptée**, constituée par l'expérience et que certains changent de procédure en cas d'échec (10%).

Si la réussite est toujours faible, pour un problème extrait de manuel de 6° (les palindromes), avec moins de 26% de succès, la **souplesse** est mise en oeuvre, toujours dans le cas d'échec, à 21%. D'autre part, le tiers des étudiants a proposé une **méthode** de résolution **construite** après la recherche de l'exercice et à partir de cette dernière. Les propositions sont intéressantes. Une **technique performante**, consistant à partir de l'**objet de la conclusion**, est mise en oeuvre par 10% de l'effectif.

Par rapport au groupe précédent, nous constatons qu'il y a **moins de blocages** et de **non-réponses** pour les problèmes ouverts, que les **commentaires** sont beaucoup plus **riches** et plus **variés**, et qu'il y en a davantage qui témoignent d'une réflexion sur le texte. Il y a un changement de procédure dans 3% des cas. Nous attribuons cela à la recherche **préalable** des **labyrinthes**.

Nous notons un **retour** à la **méthode progressive** (62%) pour un labyrinthe (du facteur) qui présente, par rapport aux précédents, une difficulté liée à l'introduction d'une règle de construction dépendant de trois conditions, et une manifestation de **souplesse**, en cas d'échec, avec **changement de procédure** (régressive) pour un peu moins de 25% de l'effectif. Ceux qui pensent à considérer la **conclusion** dans son entier sont moins de 10%.

Mais l'étude nous renseigne sur d'autres points encore, à savoir que :

- ce sont les étudiants titulaires d'un Bac C chez lesquels on trouve des **procédés d'analyse** pour la résolution de labyrinthes ou l'**utilisation de l'exhaustivité** comme procédure, alors que la méthode "progressive" est utilisée par une très large majorité des étudiants pour le même labyrinthe (facteur)
- les départs choisis, pour les textes de DEug A, sont presque exclusivement ceux qui correspondent à des **démonstrations directes** avec **départ des hypothèses**.
- pour les choix de démarrage d'une démonstration, la **considération des objets**

mathématiques sur lesquels porte la propriété de la conclusion (forme directe) reçoit le plus faible pourcentage d'adhésion et est déclaré impossible par le quart des étudiants, de même pour les départs de démonstration par l'absurde ou par contraposée.

- l'écriture de la contraposée d'une proposition est incorrecte pour 45 % des étudiants, alors que 14 % ne donnent pas de réponse ...
- la démonstration de la contraposée d'une proposition (déjà démontrée de façon directe) n'est réussie que par 12 % de l'effectif.
- la moyenne de non-réponse pour des démonstrations de textes de DEUG A est de 61 %.

Il est à remarquer que les démonstrations correctes par contraposée sont le fait d'étudiants qui ont émis des commentaires témoignant d'une analyse de texte. Certains (7%) font preuve de grande souplesse en proposant trois démonstrations correctes d'un même exercice. Notons aussi qu'il n'y a que 15% de réussite pour une démonstration d'existence, et qu'il y a manoeuvre d'évitement (43%) par passage à la contraposée.

Autre point, contrairement aux "dires", les repérages des hypothèses sont rares et ceux de la conclusion inexistent. Les démonstrations sont préférentiellement directes, pour ne pas dire exclusivement, sauf en cas de manoeuvre d'évitement d'une démonstration d'existence.

L'utilisation d'un diagramme de Venn est systématiquement lié à l'échec.

3.2.3 Mesure de l'impact de la réflexion méthodologique avec communication de la conduite "expert".

Dans ce même groupe, après enseignement ou réflexion méthodologique, consistant en la présentation du bilan de toutes les activités et la mise en évidence des décalages par rapport à la conduite d'experts confrontés aux mêmes situations,

- les réussites ont triplé
- nous obtenons la réussite pour 56 % des étudiants qui, soit ne donnaient pas de réponse, soit donnaient des démonstrations fausses
- 68 % des étudiants ont amélioré leur performance entre l'avant et l'après de la réflexion méthodologique.
- nous trouvons des traces visibles, dans la phase d'appropriation, du repérage des hypothèses et de la conclusion (60%) ou que des hypothèses seules (6%)
- des traductions propositionnelles sont effectuées par 42% de l'effectif (de façon très explicite par 27%)
- tous ceux qui ont effectué les traductions propositionnelles réussissent.

- il n'y a plus d'abstention, tout le monde donne une démonstration.
- toutes les démonstrations correctes correspondent à un bon départ d'emblée ou corrigé après blocage (cas rare)

Nous ne remarquons qu'un cas de "bon" départ modifié pour un retour au départ habituel. Les cas particuliers, qui nous intéressent, concernent l'introduction d'éléments auxiliaires, l'utilisation d'une méthode analytique, la pratique de l'exhaustivité, le fait de vérifier ses résultats, la recherche d'une meilleure solution quand il y en a déjà une.

Ces résultats sont donc **significatifs**, en eux-mêmes. Mais ils le deviennent encore plus, si on les compare (pour ce qui est comparable) à l'étude d'un corpus de copies d'examen pour lequel nous trouvons, une réussite de 17 % et 30 %, respectivement pour deux questions du même genre que celles proposées lors des expérimentations et une non-réponse de 25 % et 35 % à ces mêmes questions.

L'analyse de ce corpus d'examen nous fournit d'autres renseignements. Le départ de démonstration à partir des hypothèses est très majoritaire. Pour les cas de réussites de démonstration, pour la première question, nous relevons 37 % de démarches par l'absurde, 26 % de démonstrations par contraposée et 16 % de départs des objets "de la conclusion", ce qui prouve que la connaissance de ces procédures est un atout pour la réussite beaucoup plus que celle de la pratique de démonstration directe avec départ des hypothèses.

CONCLUSION

Il est possible d'affirmer les points suivants :

- les enseignants et chercheurs universitaires présentent des caractéristiques communes, dans leurs comportements de résolution de problèmes, qui permettent de mettre en évidence l'existence d'un savoir d'"expert"

- pour ce qui est des labyrinthes, les étapes d'évolution sont le passage de la méthode progressive (naturelle, élémentaire) à la méthode régressive, puis à la méthode mixte, dans des cas rares à la méthode analytique (plus particulièrement pour les étudiants titulaires d'un Bac C ..., enseignants et chercheurs universitaires), de plus, il y a retour à la méthode progressive, quand la difficulté augmente, principalement avec l'ajout de règles de conduite

- chez certains, c'est l'échec qui suscite l'exercice de la pensée latérale, les changements de procédure

- les tenants d'une méthodologie variée et adaptée invoquent la variable

"gain de temps", comme raison de leur choix

-les démarches de résolution de problèmes sont, en général exclusivement progressives (excepté les cas où le procédé est extrêmement coûteux en temps)

-la démarche progressive est la démarche naturelle de recherche, et, par conséquent, c'est, en principe, la seule utilisable pour un problème ouvert (ex : la suite est-elle convergente ou non, calculer la limite de la suite ...), sauf à conjecturer.

-les démarches régressives, mixtes, analytiques sont plus performantes, en général, qu'une démarche progressive, pour les problèmes dont le but est connu (résultat, conclusion), car minimisant et rentabilisant le temps de recherche par repérage et mobilisation des nécessaires, en même temps que non-considération des inutiles.

-les expérimentations révèlent, chez les étudiants, des pertes de temps considérables en recherches inutiles, par manque de méthode et de logique dans la recherche (aucun lien entre conclusion recherchée, lorsqu'elle est connue, et données du texte ou acquis). Des expérimentations menées avec des enseignants de collège, dans un cadre différent de cette étude, viennent confirmer ce résultat.

-un enseignement de méthodologie a un impact très positif sur les capacités de résolution des bénéficiaires de cet enseignement. On constate un gain de temps dans la recherche qui devient, de plus, opérationnelle lorsque ce n'était pas le cas.

-la variation de la méthodologie est repérée chez ceux qui trouvent toujours une solution à un problème

-il est extrait de la méthode d'expert et des procédures d'étudiants performants qu'il est salutaire dans une démonstration directe de partir de la considération des éléments de la conclusion pour leur appliquer ce qui doit l'être (il ne s'agit pas d'une méthode régressive, mais d'une méthode de lien entre conclusion et hypothèses) ce qui évite les blocages

-l'enseignement méthodologique a pour conséquence de faire disparaître totalement les "non-réponses" et d'augmenter de façon spectaculaire les résultats corrects pour les problèmes dont la conclusion est donnée, mais pas seulement pour eux.

-l'étude de plusieurs manuels de Deug A révèle que cette réflexion méthodologique a davantage d'intérêt en algèbre qu'en analyse, car plus de chances d'efficacité et de conditions d'application. L'utilité croît de 45% à 75% entre la 1^o et la 2^o année pour l'algèbre, elle décroît de 23% à 16% entre la 1^o et la 2^o année pour l'analyse.

En résumé, mon hypothèse de recherche est vérifiée.

DEUXIÈME PARTIE : COMPLÉMENTS POUR LA MISE EN SITUATION

La mise en situation lors du séminaire (26 Avril 1995) était une approche (à défaut d'une réplique possible) de la phase de sensibilisation proposée aux étudiants dans les expérimentations. Il n'est pas possible, ici, de donner, in extenso, l'étude a priori des labyrinthes et des problèmes de collège extraits de manuels (cf "Raisonnement et méthodes de démonstration" Aubert 1990 ou Thèse Aubert). A défaut, il me semble possible d'éclaircir certains points.

Commençons par les jeux.

A l'aide d'une préexpérimentation nous avons constaté que les chemins de labyrinthe étaient tracés soit du point de départ (qu'il y ait une ou plusieurs entrées) vers l'arrivée (le but), soit de façon inverse ou encore alternativement "par les deux bouts" (ce que nous avons qualifié de procédure mixte). Dans certains cas, les méthodes précédentes demandant trop de temps, ce sont des procédures "analytiques" qui ont fait leur preuve (recherche de tronçons obligatoires, suppression d'impasses, codage de tous les possibles et de tous les impossibles).

Les labyrinthes choisis, excepté deux cas, l'ont été en fonction de leur simplicité, de façon à être présentés non seulement à des étudiants mais à des populations scolaires depuis la maternelle, dans un but comparatif sur les procédures. Nous ne voulions pas être confrontés à des non-réponses, dans cette phase de nos expérimentations, de ce fait, nous n'avons pas proposé de labyrinthe style casse-tête ou présentant une difficulté demandant, peut-être pour certains, beaucoup de temps pour la résolution, comme celui des ponts de la Pregel, à Königsberg, résolu par Euler en 1736, ou celui du mathématicien allemand Listing (repris sous le nom "labyrinthe fabuleux" dans la feuille à problèmes n° 30 de Lyon).

Je n'ai pas choisi de faire une étude sur les labyrinthes de toutes sortes, tant au plan historique qu'à celui du mode de construction des graphismes (unicursal, pluricursal, en arbres imbriqués...). J'ai seulement utilisé quelques labyrinthes extraits de revues ou livres de jeux, présentant des caractéristiques différentes, les uns des autres, au moins sur un point, et répondant à mes critères de sélection, au besoin de mettre en évidence la possibilité de résolution à l'aide de procédures variées et à celui de faire constater les cas de performance selon les procédures différentes.

Cette orientation, consistant en l'utilisation de jeux de labyrinthes, fut prise après le résultat d'une pré-expérimentation effectuée à la suite de

la lecture de plusieurs articles et ouvrages.

Il n'est pas possible de tester, "de 7 à 77ans", l'approche méthodologique de la résolution de problèmes et de l'élaboration de démonstrations pour des textes mathématiques. Même si nous essayons de restreindre la fourchette d'échantillonnage de textes, nous nous trouvons confrontés à des choix très limités, et l'observation ne correspond pas à des observables identiques selon les niveaux. D'où les questions : quelle **situation** **approchante** (de la résolution de problème de mathématiques) trouver, à supposer qu'il en existe ? Peut-on trouver et proposer des **précurseurs** à la constitution d'une méthodologie de la résolution de certains problèmes mathématiques ? La question n'est pas neuve, nous en avons la preuve avec nombre de travaux menés en psychologie expérimentale, ne serait-ce que pour des animaux : des rats aux grands singes (Koehler) ...

Après avoir lu les ouvrages de Georges POLYA, je me suis demandé si une **similitude** existait entre l'approche méthodologique utilisée pour la découverte d'un chemin convenant dans un jeu de labyrinthe et pour celle (ou celles) de la résolution d'un problème de mathématiques ? Nous verrons plus loin que cette problématique a intéressé G. Glaeser (Strasbourg).

La recherche des chemins de labyrinthes, pour des **graphismes** donnés présente une **analogie** (quoique légère) avec celle des problèmes dits "de démonstration", où il faut établir un lien entre les hypothèses et la conclusion fournie dans l'énoncé. Il est évident que l'analogie serait plus grande s'il y avait un choix à effectuer entre plusieurs parcours suggérés (style Q.C.M.), car pour les problèmes en question, il n'y a, en poursuivant l'analogie, que départ et arrivée connus, il nous faut construire les démonstrations, alors que pour les labyrinthes, bien souvent, il s'agit d'effectuer un choix parmi d'autres, cependant certains jeux nécessitent une construction (comme pour une démonstration) et non un choix (comme dans un Q.C.M.) ... Nous en avons un exemple avec les labyrinthes¹ "facteur", "contact" et "minotaure" ...

La situation concrète du rat dans le labyrinthe, ou le modèle de résolution pour le graphisme consistant à partir du point de départ et à tester chaque possibilité l'une après l'autre jusqu'au succès peut être rapprochée de la recherche du problème ouvert ou de tout problème dont le résultat (la conclusion) n'est pas donné ; cependant, comme dans le cas précédent, pour les labyrinthes, il y a un matériau fourni : les couloirs à tester ...

On ne trouve pas l'évocation de labyrinthes seulement chez Polya, ou chez

¹Je peux envoyer les textes, sur demande, aux absents ...

d'autres mathématiciens.

Les labyrinthes sont utilisés en psychologie, notamment dans le test de W.I.S.C. (au nombre de 9, de difficulté croissante liée à la complexité du graphisme). Ils constituent un champ non négligeable dans l'élaboration et la mise en oeuvre d'une méthodologie personnelle. Ils sont utilisés en milieu scolaire, dès les classes maternelles. Il en existe une bonne présentation, pour ce niveau, dans Jeux mathématiques de Mitsumasa ANNO, qui va jusqu'à faire comprendre les mécanismes de construction. On en trouve pour le Concours de Recrutement des Elèves Instituteurs (cf Annales 1989 p.21 p.24, ou cf annexe)

L'expérimentation des labyrinthes m'a permis une comparaison, des différentes procédures mises en oeuvre, sur une échelle d'âge très grande, à partir de 4 ou 5 ans, ce qui n'est pas le cas pour des textes de problèmes de mathématiques.

Nous avons pu mettre en évidence l'existence de méthodes différentes que nous avons baptisées : "progressive", "régressive", "mixte", "linéaire", "en arbre", "d'analyse totale"...

Il est possible, également, de distinguer la quantité de connaissance de la situation, résultant de chaque méthode. Ainsi, l'obtention rapide d'un bon trajet n'implique pas la connaissance de toutes les possibilités, ni la configuration de ce qui ne convient pas.

Les résultats d'un pré-test sur l'intérêt des labyrinthes se sont révélés positifs.

A ce sujet, il est bon de noter que des étudiants, en cours de thèse de mathématiques, appartenant à des ethnies pour lesquelles ces jeux ont été inexistants dans leur enfance (noirs en provenance de brousse), rencontrent, tous, des problèmes de sens, et, après compréhension de la demande, travaillent de manière exclusivement progressive, comme ils le feraient en situation réelle.

De façon générale, il n'est pas question de porter un jugement comparatif discriminatoire sur les personnes en fonction de leur(s) méthode(s), mais de leur faire prendre conscience des différentes possibilités et de la nature optimale du choix à effectuer, en fonction du but recherché.

Depuis ces expérimentations, J. Chastenet de Gery m'a informée de l'existence d'un logiciel (concernant des labyrinthes) produit à Moscou par un chercheur du laboratoire WNISI de l'académie des sciences de Russie ... Peut-être cela est-il en lien avec la publication, à Moscou justement, aux

éditions MIR, de "Expériences et problèmes récréatifs" par Jacques Perelman.

Ce dernier est cité par Georges Glaeser, à propos d'un labyrinthe, alors qu'il veut illustrer l'un des différents sens que peut prendre le mot analyse, à savoir celui de démontage, dans sa publication de l'APMEP : "Analyse et synthèse". Dans la deuxième partie de ce même ouvrage, un chapitre est intitulé labyrinthes. En voici un court extrait :

"...Contentons-nous d'utiliser une métaphore (cf exemple 10).

Le domaine d'un long raisonnement sera comparé à un LABYRINTHE; Celui-ci aura ses entrées (prémisses, données, axiomes, théorèmes invoqués...), ses sorties (conclusions, réponses...), ses carrefours (résultats de calculs ou de raisonnements intermédiaires).

Ce sont là les sommets d'un graphe dont les arêtes sont des connecteurs ou des opérateurs. Ce graphe est partiellement ordonné ...

Une démonstration est essentiellement un itinéraire joignant l'hypothèse à la conclusion. Cependant, il peut comporter des affluents, prenant leurs sources aux différents théorèmes ou axiomes invoqués. De même un calcul joint essentiellement les données à la réponse."

Il faut aussi mentionner le "Pop maths Roadshow" (organisé par le Professor David CRIGHTON de l'université de Cambridge), parti de Leeds en septembre 1989 et qui a sillonné la Grande-Bretagne, en stationnant dans les villes universitaires, durant 18 mois, avec un labyrinthe géant. Dans le programme d'inauguration de cette manifestation, à Leeds, une rubrique était consacrée aux labyrinthes. Alors pourquoi des labyrinthes et des jeux ? Nous en trouvons une explication dans un article de présentation de ce Roadshow par Howson (Southampton) Kahane (Orsay) et Pollak (USA), membres de la CIEM : "Aucun sujet ne peut être exclu a priori. Chaque avancée réelle de la science doit être connue en dehors du petit cercle des spécialistes qui y ont participé sinon elle risque d'être perdue. Tout effort pour la faire connaître, pour expliquer sa signification à une large audience, fait partie du processus de popularisation qui peut se faire à plusieurs niveaux".

Eux aussi parlent "Méthode" : "Quand un problème est résolu, il perd aussitôt de son intérêt. Le nouveau centre d'intérêt réside dans la méthode utilisée.

Théorèmes et problèmes ont, en général, pour un bref laps de temps les feux de l'actualité. Ce sont les lemmes et les méthodes qui donnent la matière pour de nouvelles théories, de nouveaux concepts, de nouvelles définitions."

Puis : "Comment est-il possible de présenter la dynamique réelle des mathématiques comme une science vivante ?...

"Comment résoudre ce problème ?" est une introduction naturelle et puissante

aux résultats et aux méthodes. La popularisation... inclut aussi l'implication des publics dans l'activité mathématique."

Ils se posent aussi la question de savoir si l'on peut analyser la relation "entre les savoir-faire dans les jeux et les casse-têtes et les modes de pensée mathématiques" ?

Cela nous renvoie au problème du transfert entre méthodologie pour les labyrinthes et résolution de problèmes ... que j'ai seulement effleuré jusque là mais qui fait partie de mes préoccupations actuelles.

Pour ce qui est des problèmes extraits de manuels de collège, nous en considérerons trois.

Le "clayrinthe" est en fait un mélange de labyrinthe et de mathématiques conçu pour tester la capacité des élèves à comparer les décimaux. L'intérêt est de constater que la faculté de souplesse pour la résolution des labyrinthes permet de gagner du temps, par l'utilisation de la méthode régressive ou mieux par une méthode analytique, pour la résolution de l'exercice.

Pour l'exercice des "palindromes" (Pythagore 6° 1990), il y a d'une part une possibilité d'interprétation du texte, liée à l'utilisation du langage courant, débouchant sur la résolution de problèmes différents (addition-soustraction ou concaténation) et d'autre part pour la seule interprétation classique (celle de l'auteur, en vertu du contexte) des possibilités procédurales variées au niveau méthodologique. L'une des procédures consistant (selon le langage des étudiants) à utiliser un effet "miroir" doit être abandonnée ou modifiée en cours d'exercice, on doit donc s'interroger en cours d'exercice sur la méthode utilisée ...

Le problème de l'angle a été évoqué en première partie. Il permet de mettre en évidence la persistance des procédures scolaires qui consistent, surtout en géométrie, à commencer par un inventaire des hypothèses, des propriétés des figures et à obtenir un maximum de renseignements pour les éléments des figures. Seulement deux universitaires se font la réflexion, en fin d'exercice, qu'ils n'ont pas procédé au mieux et donnent alors un nouveau déroulement procédural, plus satisfaisant à leurs yeux, car éliminant l'inutile. Ce choix était censé engager une réflexion sur les conditionnements scolaires et leur persistance.