Philippe Bernat

Un environnement visuel d'aide à la résolution de problèmes en géométrie

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994-1995, fascicule 3 « Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. nº 6, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994-1995___3_A5_0>

Un environnement visuel d'aide à la résolution de problèmes en géométrie*

Philippe Bernat

Centre de Recherche en Informatique de Nancy
Université de Nancy I
BP 239 - 54506 Vandoeuvre lès Nancy Cedex
e-mail : bernat@loria.fr

RESUME : L'enseignement de la résolution de problèmes en géométrie se focalise généralement sur la production écrite d'une démonstration. La phase de raisonnement, c'est-à-dire de recherche effective de la solution, est très négligée sans doute à cause des difficultés de formalisation. Cet article propose une approche de l'aide au processus de résolution basée non sur l'instanciation de théorèmes au problème mais sur la recherche de connexité cognitive entre concepts. Nous proposons un environnement informatique de type micromonde qui permet à un élève d'élaborer un graphe de visualisation de sa résolution.

MOTS CLES : EIAO, résolution de problèmes, raisonnement, démonstration, géométrie, graphe, micromonde

---

1. Introduction

L'enseignement de la géométrie au collège et au lycée passe par la résolution de problèmes. De nombreuses études didactiques ont été menées à ce propos, particulièrement dans les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) [Rep-93]. Le statut exact et le rôle de la démonstration et du raisonnement, sont encore très discutés.

Nous adopterons dans la suite le vocabulaire suivant tel que le précise Balacheff [Bal-82] :

- *explication* : discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat,
- *preuve* : explication acceptée par la communauté,
- *démonstration* : suite d'énoncés suivant des règles déterminées. Une démonstration est une preuve.
- *raisonnement* : activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.
- *résolution* : activité du sujet entre l'instant où le problème lui est formulé et celui où il prend la décision qu'il est résolu.

Le raisonnement fait donc partie de la résolution. C'est une activité qu'on peut difficilement enseigner car non explicite. La résolution se termine en principe par la rédaction de la

---

* Cet article a été publié dans les Actes du premier colloque des jeunes chercheurs en sciences cognitives, ARC et IN COGNITO, La Motte d'Aveillans, pp. 201-210, mars 94

solution. Cette dernière activité n'est pas une simple formalité, elle conduit à une analyse du problème et peut remettre le raisonnement en cause ou permettre de préciser des points obscurs. Balacheff estime "peu pertinent de considérer la rédaction de la solution d'un problème hors de la résolution".

2. Différentes approches actuelles de la résolution de problèmes de géométrie

2.1. La démonstration

Les activités destinées aux élèves dans le cadre de la résolution de problèmes concernent le plus souvent la démonstration. Elles supposent que les méthodes de raisonnement sont acquises. Les exercices des manuels de 4e (débuts de l'enseignement de la démonstration en géométrie) permettent, en principe, de produire des démonstrations rigoureuses, mais ne sont pas l'objet d'activités de raisonnement. A ce niveau l'enseignement de la résolution de problèmes se fait par l'exemple : l'enseignant ou le manuel proposent un exercice corrigé et on espère que les élèves sauront faire de même sur un exercice assez semblable. Il est vrai que les programmes officiels demandent de se limiter à un pas de preuve[1] et de n'aborder les preuves à deux pas ou davantage que très exceptionnellement. On pourrait croire que rigueur et raisonnement sont incompatibles.
Les approches proposées pour la "démonstration", tant dans un environnement informatique que dans un environnement papier-crayon, favorisent la compréhension des règles en jeu par la création d'un réseau déductif [Duv-93] [Py-92] [And-90]. L'élève doit choisir une règle et contrôler à chaque étape la substitution qu'il effectue en précisant les prémisses et la conclusion. L'intérêt de cette approche est surtout d'aider l'élève à comprendre la nature et le fonctionnement d'une déduction. Cet apprentissage est évidemment indispensable mais il n'est pas suffisant. Ainsi, un système informatique comme Geometry Tutor [And-85] contraint l'élève dans un raisonnement pas à pas. Wertheimer [Wer-90] l'a expérimenté sur une grande échelle et a pu constater qu'il est peu efficace pour les bons élèves ainsi que ceux en grande difficulté. Les meilleurs étudiants réfléchissent au problème indépendamment du logiciel, puis, la solution étant trouvée, effectuent rapidement les manipulations pour compléter la preuve. Par contre, les étudiants plus faibles appliquent des inférences sans développer une stratégie ou un plan.

2.2. Recherche de la solution

Pour dépasser un stade de simple compréhension des mécanismes de déduction et atteindre un niveau de capacités acceptable dans la résolution de problèmes non élémentaires, il est indispensable de savoir raisonner. Les activités sur le raisonnement portent, dans la plupart des quelques observations réalisées, sur des situations peu ciblées et difficilement formalisables. Les preuves obtenues sont rédigées en langage naturel et utilisent une verbalisation hors du champ mathématique, et qui a un caractère argumentaire : "*si tu aplatis le triangle, l'angle augmente et ce point va ici ...*". Pour bien raisonner, dans le cadre de la résolution de problèmes de géométrie, il ne suffit pas de connaître les théorèmes et définitions, il est indispensable de savoir les utiliser. Les connaissances nécessaires sont des méta-connaissances ou des heuristiques [Sch-87]. Il est assez difficile de les définir et on n'en obtiendra jamais un ensemble complet. D'autre part Joshua et Dupin [Jos-93], reprenant les travaux de psychologues, font remarquer que la supériorité des experts viendrait autant d'une

[1] On se demande ce qui reste d'ailleurs à démontrer dans ce cas, l'activité de l'élève se bornant à rechercher dans un lexique le bon théorème.

meilleure structuration de leur base de connaissances que de leur supériorité à mettre en oeuvre des méthodes générales. Ceci ne signifie pas qu'il faille prendre l'expert comme modèle à atteindre directement. Une question largement discutée depuis Polya [Pol-57] est celle de l'opportunité de l'enseignement de méthodes pour résoudre des problèmes. Faut-il enseigner les heuristiques ?
D. Guin [Gui-90], dans un projet d'EIAO, propose un module d'élaboration de plan utilisant un réseau de plan dont les noeuds ont un statut très diversifié (hypothèses, figure prototypes, propositions non démontrées, ...) ainsi que les arcs (définitions, théorèmes, heuristiques, ...). Nous retiendrons surtout l'idée d'une représentation de la résolution à un autre niveau d'abstraction que le simple réseau déductif.

2.3. Figures prototypes

L'intérêt de figure prototypes ou configurations de base est souvent mis en avant [Duv-93]. Lors de la recherche d'une solution, l'élève est invité à relever, sur la figure accompagnant le problème, les configurations de base.

Exemple : Pour résoudre l'exercice de la figure 1, l'élève peut rechercher quelles configurations lui permettraient de déduire l'égalité des vecteurs JA et AI. Le concept de vecteur et celui de parallélogramme étant très liés, on peut relever sur la figure les configurations de parallélogrammes (JACB) et (AICB). Bien que les relations entre ces configurations correspondent à des liens moins rigoureux que des règles logiques parfaitement définies comme les théorèmes, un minimum de connaissances permet de compléter le raisonnement et de terminer la résolution.

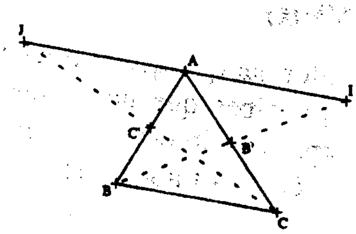

figure 1 : Soit un triangle ABC. C' le milieu de [AB] et B' le milieu de [AC]. J est le symétrique de C par rapport à C' et I est le symétrique de B par rapport à B'. Montrer que A est le milieu de [IJ].

Les connaissances mises en jeu dans un problème de géométrie sont des concepts (ou faits) et des théorèmes. Les figures prototypes ou configurations de base, comme le Parallélogramme, correspondent à des concepts. Habituellement, la relation entre deux concepts est une démonstration, c'est-à-dire une suite logique de théorèmes instanciés. Cette suite peut être relativement longue et donc incompréhensible dans une lecture pas à pas. Or l'esprit humain est capable d'entrevoir cette liaison dans sa globalité avant même de pouvoir en saisir tous les détails. Nous expliciterons plus loin le mécanisme cognitif mis en jeu.

3. Une approche informatique

La démarche de résolution de problèmes doit être essentiellement individuelle. L'utilisation de l'informatique en vue d'une individualisation peut être une solution raisonnable. Mon objectif est la réalisation d'un environnement d'aide à la résolution de problèmes en géométrie. Cette aide doit se focaliser surtout sur le raisonnement et non sur l'apprentissage du mécanisme de démonstration. Les points de vue que je vais présenter pourront donc paraître naïfs au regard de grands courants didactiques, mais l'approche informatique présente l'avantage de clarifier certaines situations.

Mon travail est basé sur les hypothèses suivantes :

- L'élève travaille dans un cadre géométrique précis. Les règles utilisées sont clairement définies et les raisonnements faisant appel à d'autres cadres ne sont pas admis. Un raisonnement par analogie avec des concepts de mécanique par exemple n'est pas autorisé.
- L'élève connaît parfaitement les définitions et propriétés des concepts géométriques manipulés. Il en a une bonne représentation mentale.
- L'élève connaît les théorèmes valides dans ce cadre. Cette connaissance ne suppose pas une énonciation parfaite du théorème, mais une connaissance de son champ d'application et l'intuition de son utilisation. Il s'agit davantage d'une connaissance des propriétés des relations entre concepts. Ainsi il suffit que l'élève sache qu'il existe un lien entre "parallélogramme" et "segments se coupant en leur milieu". La différenciation assez subtile entre le théorème et sa réciproque n'est pas nécessaire (on peut très bien confondre le théorème de Pythagore et sa réciproque et savoir parfaitement quand et comment l'utiliser).

Le domaine de géométrie considéré est celui de la géométrie de 4e comprenant les notions de base de la géométrie euclidienne.

3.1. L'environnement CHYPRE

CHYPRE[2] est un environnement informatique qui veut aider les élèves dans la résolution de problèmes en s'appuyant sur les principes que nous venons de décrire. CHYPRE est un micromonde : l'élève peut s'y exprimer librement en manipulant directement des objets géométriques ou conceptuels. Il diffère des tutoriels en ne prenant pas en charge l'apprenant dans le processus de résolution.
Il est composé principalement de deux modules : un module de construction géométrique et un module dédié au raisonnement. L'importance de l'interface d'un système à composante fortement visuelle a été soulignée dans [And-90] et [Bau-90]. Nous ne reviendrons pas sur ce point ainsi que sur les notions de micromonde et de manipulation directe. L'implantation a été réalisée sur PC sous Windows. Le langage utilisé est Turbo Pascal pour Windows.

3.2. Construction d'une figure

A partir d'un énoncé fourni dans un langage descriptif proche du langage courant (voir figure 1), l'élève doit construire une figure respectant les spécifications de l'énoncé en utilisant des commandes accessibles par menu déroulant qui constituent une transposition de l'environnement papier-crayon. Il doit *traduire* l'énoncé afin de l'adapter à la syntaxe de CHYPRE. Ainsi la définition de *K symétrique de C par rapport à C'* doit, dans CHYPRE, être traduit en *Translater CC' en C'. Nommer K le point obtenu.* Cette exigence nouvelle pour l'élève peut être ressentie comme une contrainte, mais l'obligation de spécifier rigoureusement une construction peut le conduire à une meilleure compréhension du problème.
La figure obtenue peut être déformée par déplacement de certains points, les relations entre objets géométriques définies lors de la construction sont conservées. En ce sens la géométrie de CHYPRE s'apparente à celle de CABRI-GEOMETRE [Bau-90]. On en trouvera une étude plus détaillée dans [Ber-91].
L'interprétation mot à mot de certains énoncés ne permet pas une construction exacte de la figure correspondante. Une figure peut être construite approximativement en ajustant certains points.

---

[2] Conjecture, HYpothèse, PREuve

Exemple :

On donne 4 points A, B, C, D tels que (AC)//(BD), le milieu I de [A,B] est sur la droite (CD). Montrer que (ACBD) est un parallélogramme.

En suivant pas à pas les données de l'énoncé, on construira les points A, B et C quelconques. Sur la droite parallèle à (AC) passant par B on place un point D (qui aura donc un seul degré de liberté. On construit le milieu I de [AB]. Il n'appartient pas à la droite (CD) (figure 2).

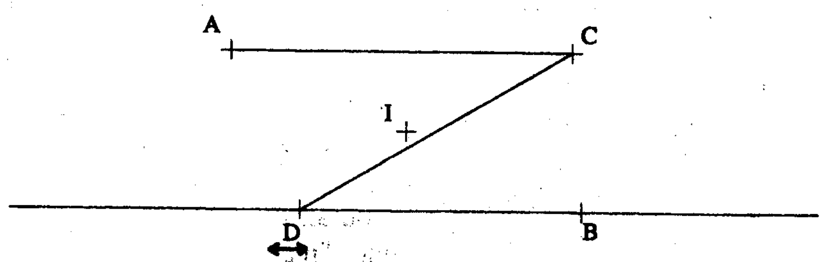

figure 2 : ajustage d'une figure par déplacement du point D sur la parallèle à (AC).

Un déplacement de D est nécessaire pour "ajuster" la figure conformément à l'énoncé. Bien sûr, la contrainte d'alignement de C, I et D n'est pas précisément satisfaite dans ce cas. L'objectif n'est pas l'étude d'un problème de construction, mais la réalisation d'un dessin pouvant servir de repère à la résolution du problème, aussi une figure approximative peut suffire.

La figure obtenue peut être "décomposée" en sous-figures et former ainsi l'ébauche d'une démonstration (fig. 3).

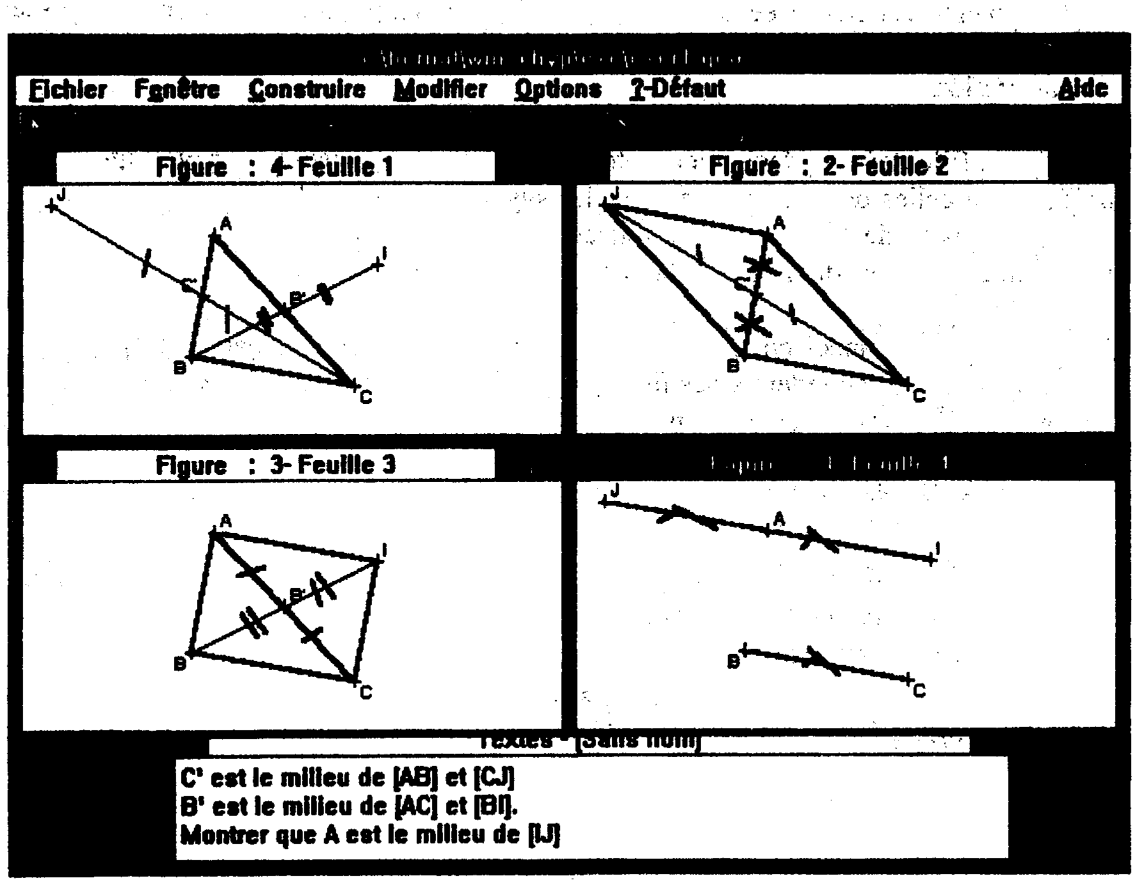

figure 3

3.3. Transposition de l'énoncé

La figure réalisée sert de référence pour la transposition de l'énoncé en propositions logiques. Les paramètres d'une proposition sont des points que l'utilisateur désigne sur la figure. Ainsi, pour déclarer que "*(ABCD) est un parallélogramme*", l'utilisateur choisit l'item *Parallélogramme* dans une liste, puis désigne sur la figure les 4 sommets A, B, C et D. Les faits ainsi créés peuvent avoir deux valeurs initiales fixées par l'utilisateur : *hypothèse* ou *conjecture*.

Le premier rôle de la figure consiste à vérifier la justesse de cette affirmation. Cette vérification est analytique et admet un léger taux d'erreur afin de tenir compte des dessins approximatifs. CHYPRE rejette alors les propositions qui ne peuvent être interprétées graphiquement. Les pratiques pédagogiques courantes considèrent en effet qu'un problème de géométrie doit correspondre à une certaine "réalité", c'est-à-dire avoir au moins une interprétation graphique approximative. CHYPRE ne peut décider si les hypothèses déclarées forment un système équivalent à l'énoncé. Or il est très fréquent d'oublier de déclarer certains alignements de points, tant est forte l'habitude de considérer implicitement des éléments de la figure comme hypothèse. Le problème de la comparaison de l'énoncé donné par le professeur et de l'interprétation faite par l'élève dans un langage d'interface est étudié dans le projet Mentoniezh [Des-93] et fait l'objet d'une recherche à part entière.

3.4. Représentation graphique de la résolution

Anderson [And-85] et Wertheimer [Wer-90] soulignent que la compréhension de la résolution d'un problème est favorisée par une représentation graphique sous forme de réseau. Cette représentation permet de mieux faire comprendre la structure non linéaire d'une démonstration.

Dans CHYPRE, la représentation graphique doit permettre à l'élève de visualiser sa résolution. Elle doit être facilement interprétable. Les connaissances représentées doivent être uniquement celles définies par l'élève. Le système informatique complète automatiquement le raisonnement de l'élève en introduisant des données implicites nécessaires à son propre fonctionnement. Ces données implicites resteront cachées à l'interface sauf si l'élève demande des explications.

L'état des connaissances courantes sur le problème est représenté par un graphe de résolution où les noeuds correspondent à des faits géométriques ("*ABCD est un parallélogramme*") et les arcs à des déductions. Les arcs ont une origine multiple correspondant à une conjonction de faits.

> *Un graphe de résolution est un couple* G = (N,A) *où* N *est un ensemble de noeuds et* A *un sous-ensemble de* $\mathcal{P}(N)\times N$.
>
> *Un élément de* A *est un multi-arc* $(\{x_1,x_2,x_3,x_4,...\},y)$. *Les* x_i *sont les prémisses et* y *la conclusion du multi-arc.*
>
> *Le multi-arc est noté :*
>
> $$\{x_1,x_2,x_3,x_4,...\}\rightarrow y$$
>
> *et signifie que* y *peut se déduire des* x_i

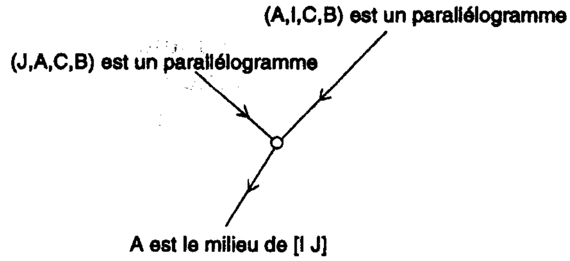

figure 4 : représentation graphique d'une déduction par l'arc {(JACB) est un parallélogramme, (AICB) est un parallélogramme}→ A est le milieu de [IJ]

Un graphe de résolution n'est pas un réseau déductif comme dans Geometry Tutor [And-85], ses arcs n'étant pas limités à des théorèmes.
Les arcs doivent représenter des déductions *facilement compréhensibles*. Un théorème correspond au niveau le plus bas de déduction. Il est facilement compréhensible. La déduction représentée dans la figure 4 est apparemment plus complexe. Elle peut se comprendre en recherchant quelles sont les propriétés des prémisses qui, combinées, permettent de déduire la conclusion. Nous pouvons considérer qu'une déduction qu'un élève est capable de recouvrer mentalement si nécessaire est un lien implicite entre concepts. Ce lien est visualisé automatiquement dans CHYPRE. Une modélisation informatique du processus de création ou de non création d'un lien entre concepts peut donner un éclairage plus précis à cette approche cognitive.

Concept :	ABCD est un parallélogramme
Implicites :	1) les vecteurs AD et BC sont égaux 2) les vecteurs AB et DC sont égaux 3) AB // CD 4) AD // BC 5) AB = CD 6) AD = BC 7) ABCD est convexe
Définitions :	{1} , {2} , {3,4}, {5,6,7}, {3,5,7}, {4,6,7}

figure 5 : exemple de concept

Donnons un aperçu du calcul d'une déduction tel qu'il est implanté dans CHYPRE.
De manière analogue à Koedinger [Koe-90], nous associons les concepts de géométrie à des schémas décrivant leurs propriétés. Par exemple le concept "*ABCD est un parallélogramme*" correspond au schéma de la figure 5.

Un concept possède des propriétés *implicites*. La conjonction de certaines de ces propriétés est caractéristique du concept (ce sont les *définitions* du concept). Nous partons de l'hypothèse que l'élève "connaît" ce schéma. La représentation des connaissances est fondée sur la théorie du "chunking" telle que l'ont reprise Mayers et Lefebvre [May-92]. Un chunk est un groupement d'éléments qui permet une meilleure mémorisation, la capacité de la mémoire de travail étant limitée [Mil-56].
Une déduction, telle que celle indiquée dans la figure 6, consiste en une connexion entre les implicites des prémisses et une des définitions de la conclusion. Cette connexion utilise un

seul théorème (transitivité de l'égalité des vecteurs). CHYPRE recherche donc dans l'ensemble des définitions de la conclusion la définition qui peut se déduire de l'ensemble des implicites des prémisses de l'arc potentiel. Si cette recherche aboutit, l'arc est créé. Les liens ainsi créés ont donc une complexité qui ne dépend que de la complexité des concepts en jeu, et non d'un nombre de pas de déduction.

3.5. Résolution

La tâche principale de l'élève consiste à noter les configurations de base qu'il remarque sur la figure. Dans le cas de l'exercice de la figure 1, il saisit le fait "*JACB est un parallélogramme*", en désignant directement sur la figure les sommets du parallélogramme. Ce fait est alors *évalué* : CHYPRE recherche toutes les déductions permettant de relier ce fait aux faits précédents. Si le fait peut se déduire des hypothèses, sa valeur est calculée à *prouvé*, sinon elle reste à *conjecture*.

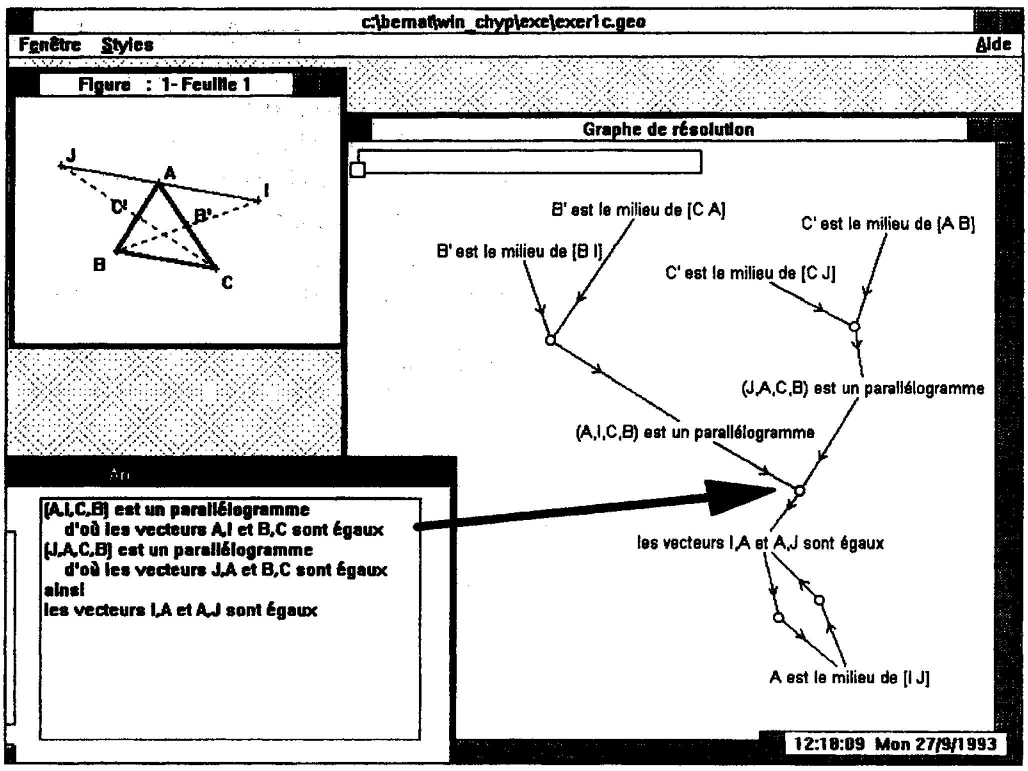

figure 6 : démonstration associée à un arc

Le graphe de résolution est calculé et l'ensemble ainsi obtenu est affiché. L'utilisateur peut manipuler les différents objets de cette représentation pour les disposer de manière satisfaisante. Un code de couleurs permet de distinguer les valeurs des faits (hypothèses en bleu, conjectures en rouge, faits prouvés en noir). L'ordre d'introduction des assertions est indifférent. L'utilisateur peut définir des faits non connectés aux hypothèses ou même à tout autre fait. La résolution peut être considérée comme pratiquement achevée lorsque le but du problème prend la valeur *prouvé*.

Les arcs sont représentés symboliquement par un petit cercle. Un double-clic sur ceux-ci permet de recouvrer la démonstration sous-jacente. Le texte ainsi obtenu n'est pas un modèle de la rédaction de la solution (figure 6). Il peut aider l'élève à comprendre et éventuellement à remettre en cause son raisonnement. Une aide disponible sous forme d'un hypertexte permet à l'élève de consulter la base de connaissances.

4. Fonctionnalités supplémentaires

La recherche de la solution peut aboutir sans une démarche consciente de l'élève. Une recherche par essais aléatoires peut amener à la découverte de l'indice manquant. Un résultat ainsi obtenu doit être analysé. Pour cela, il sera sans doute nécessaire d'épurer le graphe de résolution afin de pouvoir en extraire la démonstration finale. D'autre part, il convient de prévenir des situations pouvant conduire à des incohérences ou des contradictions.

4.1. Réorganisation et simplification du graphe de résolution

La disposition spatiale du graphe de résolution peut en faciliter la lecture. Tout comme pour une figure de géométrie, l'utilisateur a la possibilité de déplacer des éléments, de masquer les arcs qu'il estime inutiles, mettre en évidence d'autres en les épaississant. Les faits inutiles doivent pouvoir être supprimés. La suppression d'un implicite d'un fait visible entraînerait des incohérences graves, aussi les implicites ne peuvent qu'être cachés. Cette fonctionnalité gérée par CHYPRE permet ainsi de cacher le fait "*les vecteurs I,A et A,J sont égaux*" de la figure 6 et d'obtenir le graphe de la figure 7. Seuls restent visibles les faits que l'on peut estimer essentiels au raisonnement.

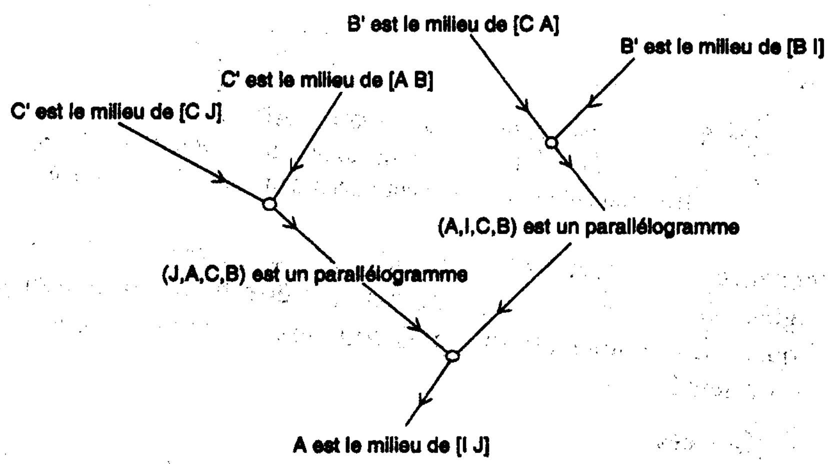

figure 7 : simplification du graphe de résolution

4.2. Règles incomplètes

Certains théorèmes mathématiques peuvent s'énoncer à deux niveaux : un niveau général rigoureux ou un niveau simplifié qui ne fait pas référence à des cas d'exception afin de ne pas alourdir la charge cognitive. Suivant le degré de rigueur exigé, les enseignants font référence à l'un ou l'autre des niveaux. Dans le cas d'un système informatisé, les contraintes de logiques formelles nous obligeraient à utiliser le théorèmes sous leur forme complète et rigoureuse. Une telle exigence nous conduirait, soit à la non application de certains théorèmes pour cause de données insuffisantes, soit à une complexité inutile due à un traitement par cas.

4.2.1. Données dépendant de la figure

Certaines situations sont souvent éludées par les enseignants car gênantes relativement aux discours sur la rigueur et l'indépendance de la démonstration par rapport à la figure : "Une démonstration ne doit pas dépendre de la figure". Or un théorème essentiel en classe de 4e contredit fortement ce discours : "*un parallélogramme est un quadrilatère non croisé dont les côtés opposés ont même longueur*". L'hypothèse de convexité nécessaire à ce théorème ne peut être prouvée. L'attitude généralement adoptée consiste à ne pas en tenir compte. Le statut de la démonstration en milieu scolaire étant un statut purement social, l'élève sait qu'il ne sera pas sanctionné s'il ne s'attarde pas sur ce "détail". Les tutoriels de géométrie [Gio-90] [Py-92] semblent également avoir adopté ce principe. L'énoncé étant supervisé par un expert, les risques de dérapage sont effectivement pratiquement inexistants. Dans le cas d'un démonstrateur [Baz-93] ou d'un système ouvert, ce risque est plus grand.

L'interdépendance du raisonnement et de la figure se traduit, dans CHYPRE, par la création d'un fait de type "contexte" dont la valeur n'est pas fixée par sa relation avec les hypothèses logiques du problème mais par l'état de la figure. Ce fait est créé, affiché et recalculé chaque fois que nécessaire. Ainsi, lors de la création d'un fait "*ABCD est un parallélogramme*", le système crée et affiche le fait "*ABCD est convexe*". La valeur *hypothèse* ou *conjecture* de ce dernier dépend de la figure. L'évaluation conduit à l'arc *{AB=CD, AD=BC, ABCD est convexe}→ ABCD est un parallélogramme*. Après le déplacement d'un point de base, le fait "*ABCD est convexe*" est recalculé d'après les données analytiques de la figure et par conséquent la valeur de "*ABCD est un parallélogramme*" peut changer.

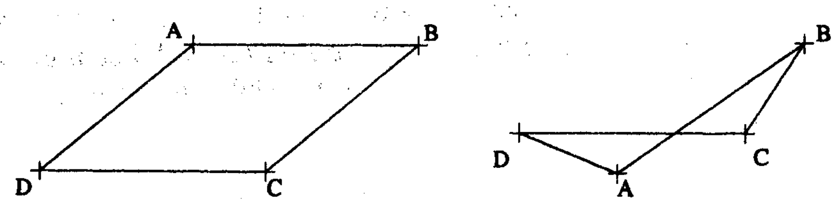

figure 8 : la construction du quadrilatère ABCD a été faite en imposant des contraintes d'égalité de longueurs (AB=CD et AD= BC). Le déplacement du point A peut mener à un quadrilatère croisé.

Ce type de dépendance du contexte apparaît pour tous les problèmes de convexité (addition de longueurs, angles géométriques, ...) qui ne peuvent être traités formellement qu'avec des outils mathématiques plus évolués et donc plus complexes à comprendre (vecteurs, mesures algébriques, angles orientés, ...).

4.2.2. Figures dégénérées

Certains théorèmes sont invalides dans le cas de figures dégénérées ou limites. Ainsi le théorème : "*un point situé sur chacune des diagonales d'un parallélogramme est le milieu de chaque diagonale*" sous-entend que le dit parallélogramme ne soit pas aplati.. Nous introduisons là une dimension non monotone au raisonnement : la valeur *prouvé* d'un fait peut être remise en cause. Se pose alors le problème de maintien de vérité tel qu'il est traité dans un système TMS [Doy-79]. Un raisonnement non monotone peut produire un état instable, très délicat à traiter. De plus, la complexité d'un tel raisonnement le rend pratiquement incompréhensible pour un élève. Nous avons donc traité ce problème en observant que si un théorème risque d'être invalidé par une exception, on ne cherche pas à appliquer le théorème, que l'exception soit prouvée ou non. Cette démarche est assez conforme aux pratiques courantes où l'on demande de traiter, dans une première partie, le problème dans le cas général puis de considérer le cas limite dans une deuxième partie et de le traiter d'une manière souvent indépendante du cas général.

4.3. Raisonnement par l'absurde

L'introduction d'un fait étiqueté *CONTRADICTION* qui se déduit de deux faits contradictoires (comme *I est le milieu de [A,B]* et *J est le milieu de [A,B]*) peut permettre une première approche du raisonnement par l'absurde.

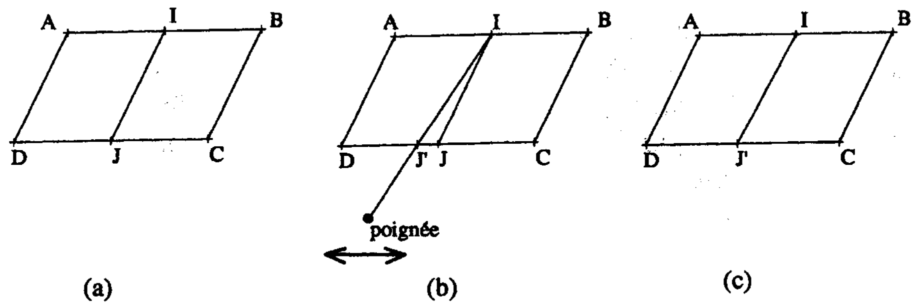

figure 9 : I et J sont les milieux de deux côtés du parallélogramme (ABCD). On veut démontrer que (IJ) // (AD). On construit une droite passant par I que l'on déclarera parallèle à (AD). Si cette droite n'est pas (IJ), alors son intersection J' avec (CD) est différente de J. En raisonnant sur la figure (c), on montrera que J' est le milieu de [CD] ce qui est contradictoire avec l'hypothèse J milieu de [CD].

Le raisonnement par l'absurde n'est pas naturel. Beaucoup lui préféreront un raisonnement plus "classique". L'exemple de la figure 9 peut être résolu en introduisant un point supplémentaire (figure 10).
Des précautions importantes doivent être prises pour mener à bien un raisonnement par l'absurde. En effet, il est nécessaire de construire une figure "fausse" et les hypothèses contradictoires peuvent conduire à des conflits avec les garde-fous décrits page 9. Ainsi, dans l'exemple de la figure 9, on peut conclure à l'alignement de I, J et J', ce qui nous amène au fait que le parallélogramme est aplati. Cette première approche de l'implantation d'un tel raisonnement dans un environnement informatique doit être prolongée par une étude didactique afin d'en préciser les limites et les améliorations possibles.

4.4. Acquisition de nouvelles connaissances

La définition de nouveaux concepts est possible en sélectionnant un ensemble de faits sur le graphe de résolution et en proposant une étiquette pour cet ensemble. CHYPRE considérera ces faits comme des implicites du nouveau concept ainsi étiqueté et calculera ses définitions.

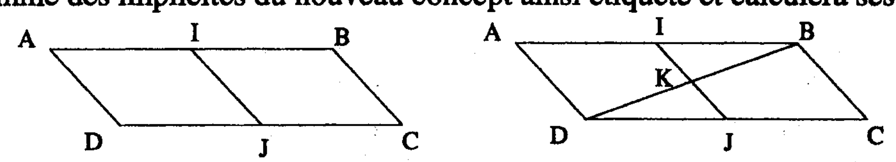

figure 10 : I et J sont les milieux de deux côtés d'un parallélogramme. Pour prouver que (IJ) // (AD), on introduit le segment [BD] et son milieu K.

Pour définir une nouvelle règle, l'élève désigne les prémisses puis la conclusion. CHYPRE vérifie la preuve de cette règle et effectue éventuellement les simplifications nécessaires. Certaines prémisses peuvent en effet être inutiles car de nombreuses preuves nécessitent la création d'objets auxiliaires. Une règle de conclusion "*(IJ) // (AD)*" (figure 10) contient alors dans ses prémisses le fait "*K est le milieu de [BD]*". CHYPRE détecte ce fait inutile et rend une règle conforme aux attentes de l'utilisateur.

Les concepts et règles ainsi créés peuvent être ajoutées à la base de connaissances. Celle-ci risque alors d'atteindre assez rapidement une taille trop importante qui nuira à son fonctionnement (explosion combinatoire). D'autre part, les règles sont instanciées automatiquement car nous faisons l'hypothèse qu'elles sont parfaitement connues par l'élève. Une base de connaissances trop importante et mal gérée serait contraire à ce principe. Il nous faut donc gérer ces nouvelles données en les classant pour les adapter aux connaissances supposées de l'élève. Ce point a été abordé dans ma thèse [Ber-94]. Les faits et les théorèmes sont affectés d'un coefficient, baptisé *prégnance*, qui évolue en fonction de leur utilisation effective par l'individu et par la communauté (classe, enseignants). Ce coefficient prend également en compte l'*intérêt* d'un nouveau concept ou d'un nouveau théorème. Les objets fortement prégnants sont directement accessibles et à l'opposé, un objet trop peu utilisé, sans intérêt, est retiré de la base de connaissances.

5. Conclusion

La modélisation du processus de résolution esquissée dans cet article est assez originale car elle ne correspond pas aux approches courantes qui sont davantage orientées vers la recherche des théorèmes qui peuvent s'appliquer. Les expérimentations avec les élèves sont encore trop peu nombreuses pour permettre de conclure valablement sur l'intérêt d'une telle approche. Les utilisateurs actuels (enseignants de mathématiques ou stagiaires en formation à l'IUFM) apprécient généralement la possibilité de ne pas recourir immédiatement à la rédaction formelle de la démonstration. Une collaboration avec des didacticiens et des enseignants devrait permettre, au vu des résultats de l'expérimentation dans une classe, d'affiner certains choix tant au niveau de l'interface que du fonctionnement interne. L'analyse épistémologique nécessaire à la conception d'un tel système informatique nous a permis de relever certaines connaissances nécessaires à son fonctionnement et leur relation parfois ambiguë avec le raisonnement d'un individu.

Nous étudions également la possibilité d'appliquer les principes de CHYPRE à d'autres domaines, comme la résolution de problèmes en chimie [Blo-91]. Il s'agit dans ce cas d'obtenir une visualisation graphique de la rédaction de la trace de résolution du problème afin de détecter certaines incohérences ou incomplétudes.

6. Bibliographie

[And-85] **ANDERSON, J.R. - BOYLE, C.F. - YOST, G.** : *The Geometry Tutor.* Proceedings of IJCAI 85, Los Angeles,pp. 1-7, 1985

[And-90] **ANDERSON, J.R. - BOYLE, C.F. - CORBETT A.T. - LEWIS, M.W.** : *Cognitive modeling and intelligent tutoring.* Artificial Intelligence n°42, pp. 7-49, 1990

[Bal-82] **BALACHEFF, N.** : *Preuve et démonstration en Mathématiques au collège,* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.3, n°3, pp. 261-304, 1982

[Bau-89] **BAULAC, Y. LABORDE, J.M.** : *Sur l'interface d'un Cahier de brouillon informatique pour la géométrie,* Rapport de Recherche n° 7401, Grenoble : LSD2 IMAG, 1989

[Bau-90] **BAULAC, Y.** : *Un micromonde de géométrie : Cabri-Géomètre,* Thèse de l'Université Joseph Fournier Grenoble I - 1990

[Baz-93] **BAZIN, J.M.** : *Un modèle d'expert en résolution de problème de géométrie.* Environnements Interactifs d'Apprentissage avec l'Ordinateur, Actes des III° Journées EIAO de Cachan, Eyrolles, pages 27-38, 1993

[Ber-91] **BERNAT, P.** : *Calques Géométriques, un logiciel pour expérimenter, démontrer, conjecturer,* Actes de l'Université d'été Informatique et Enseignement de la Géométrie , IREM de Toulouse 1990

[Ber-94] **BERNAT, P.** : *Conception et réalisation d'un environnement interactif d'aide à la résolution de problèmes. CHYPRE : un exemple pour l'enseignement de la géométrie,* Thèse de l'Université Henri Poincaré, Nancy, 1994

[Blo-91] **BLONDEL, F.M. - SCHWOB, - M. TARIZZO, M.** : *La communication dans un environnement de résolution de problèmes de chimie,* Deuxièmes Journées EIAO de Cachan, ENS de Cachan Ed., pp.165-180, 1991

[Des-93] **DESMOULINS, C.** : *Problèmes de mise en oeuvre pour un tuteur de construction de figure,* Environnements Interactifs d'Apprentissage avec l'Ordinateur, Actes des III° Journées EIAO de Cachan, Eyrolles, pages 135-146, 1993

[Doy-79] **DOYLE, J.** : *A Truth Maintenance System.* Artificial Intelligence n°12, pp. 231-272, 1979

[Duv-93] **DUVAL, R. - EGRET, M.A.** : *Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif.* Repères-Irem n°12, Topiques Editions, pp. 114-140, 1993

[Gio-90] **GIORGIUTTI,I - GRAS, R.** : *Le micro-ordinateur outil interactif de révélation, d'analyse et d'apprentissage en géométrie,* Université d'été, IREM de Toulouse pp.151-168, 1990

[Gui-90] **GUIN, D.** : *Modélisation des connaissances pour un système d'aide à la démonstration géométrique,* Université d'Ete Informatique et Enseignement de la Géométrie, IREM de Toulouse, pp. 61-72, 1990

[Jos-93] **JOSHUA, S. - DUPIN, J.J.** : *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques,* PUF, 1993

[Koe-90] **KOEDINGER,K.R. - ANDERSON,J.R.** : *Abstract Planning and Perceptual Chunks: Elements of Expertise in Geometry.* In Cognitive Science 14, pp. 511-550, 1990

[May-92] **MAYERS, A.- LEFEBVRE, B.** : *Une modélisation de l'architecture cognitive de l'étudiant pour un système tutoriel intelligent.* In Proceedings of ITS'92 pp 277-285. Springer Verlag, 1992.

[Mil-56] **MILLER, G.A.** : *The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information,* Psychological Review 63, pp. 81-97, 1956

[Pol-57] **POLYA,G.** : *How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Methods,* Princeton University Press, 1957

[Py-92] **PY, D.** : *Expérimentation du tutoriel Mentoniezh en classe de quatrième.* Petit x n°30, pp.63-72, 1991-1992

[Rep-93] **Repères-IREM** n°12, numéro spécial "Démonstration", juillet 1993

[Sch-87] **SCHOENFELD, A.-H.** : What's All the Fuss About Metacognition, Cognitive Science and Mathematic Education, Schoenfeld Ed., pp. 189-215, 1987

[Wer-90] **WERTHEIMER, R.** : *The Geometry Proof Tutor : An Intelligent Computer-based Tutor in the Classroom,* Mathematics Teacher, pp. 308-317, April 1990