PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

RABIOU OUSMAN

Les problèmes posés par l'apprentissage de l'algèbre linéaire

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques », , p. 141-159
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993___3_141_0>

LES PROBLEMES POSES PAR L'APPRENTISSAGE DE L'ALGEBRE LINEAIRE

Rabiou OUSMAN

IRMAR — Université de Rennes 1

Présentation :

Il est tout à fait banal de dire que pour les enseignants du supérieur la maîtrise de l'algèbre linéaire doit être acquise très tôt par les étudiants en mathématiques. Ces enseignants partagent l'idée de J. Dieudonné qui affirmait : "*il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline, à lui apprendre à "penser linéairement", ce qui est d'autant plus facile qu'il y a peu de notions, en mathématiques, qui soient plus simples à définir que celles d'espace vectoriel et d'application linéaire*". C'est une reconnaissance de l'importance de cette discipline pour les autres domaines mathématiques et scientifiques en général. Cet aspect est bien souligné dans beaucoup de travaux et ne fait l'objet d'aucun doute dans la communauté scientifique.

Mais, en même temps, ces enseignants se rendent compte de la difficulté de plus en plus grande de l'apprentissage de cette discipline. Ils trouvent que les étudiants ne contrôlent pas leurs actions et donc le sens leur échappant complètement dans la plupart de cas.

Des analyses de ces difficultés ont déjà été produites. Il s'agit pour nous, dans une première partie de les analyser à l'aide des outils didactiques et de rendre compte des travaux existants. Dans une seconde partie nous rapporterons les observations des cours et une étude de cas (analyse des résolutions d'un exercice). Dans une troisième partie nous indiquerons quelques pistes pour une amélioration possible.

I. Quelques travaux :

1. <u>Un aperçu</u>

La littérature existante dans le domaine d'algèbre linéaire fait en quelque sorte un état des lieux. On y trouve la genèse historique des concepts linéaires, un diagnostic des difficultés en rapport à certaines connaissances et des propositions d'approche dans un cadre global. M. Rogalski et ses collègues à Lille 1, en se basant sur les travaux de J.-L. Dorier et A. Robert, ont conçu et expérimenté une stratégie d'introduction des notions linéaires s'appuyant sur les équations linéaires. Cette étude nous permet de nous situer par rapport à ces différentes recherches analysées et de les classer suivant le schéma de G. Vergnaud (voir troisième partie).

ROBERT(A.), ROBINET(J.) ont essayé de "cerner les difficultés spécifiques de l'apprentissage des notions d'algèbre linéaire pour construire un enseignement qui permette une meilleure appropriation des concepts et une moins grande perte de sens ".

Pour ce travail elles présentent pour ce faire un questionnaire aux étudiants de $2^{\text{ième}}$ année, pour cerner leurs conceptions sur l'algèbre linéaire après une année d'enseignement. Exemple de questions posées : 1) quelles sont pour vous les difficultés de ce domaine des mathématiques. 2) si on vous demande d'expliquer en quoi consiste l'algèbre linéaire à un étudiant entrant en DEUG, que lui dites-vous ? 3) Vrai ou faux (justifier votre réponse) : v et u étant deux applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même :
$v \circ u = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u)=\mathrm{Ker}(v)$. 4) Quels exemples d'espaces vectoriels connaissez-vous ?

Elles remarquent que la manipulation des notions de noyau et d'image d' applications linéaires, la résolution des systèmes linéaires (4x4), le calcul de la matrice d'une application linéaire lorsque l'espace vectoriel n'est pas $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mais un espace isomorphe, citer $\mathbb{R}^n$ comme exemple d'espace vectoriel constituent des difficultés pour certains étudiants. L'algèbre linéaire est pour beaucoup d'entre eux très abstraite et un domaine où il y a beaucoup de nouveautés (définitions, théorèmes, symboles, ...).

Elles proposent alors de "*commencer l'enseignement d'algèbre linéaire par la géométrie analytique dans l'espace ($\mathbb{R}^3$, puis $\mathbb{R}^n$) et d'introduire le formalisme du langage des ensembles à propos de toutes les notions enseignées en DEUG*".

DORIER (J.-L.) s'est attaché à "*mieux baliser le contenu d'algèbre linéaire telle qu'elle est enseignée en 1è année de DEUG et dégager les types d'évolution des connaissances en algèbre linéaire chez un individu, en fonction de ses connaissances antérieures en logique élémentaire et en algèbre* ".

Son analyse porte sur une section standard de DEUG et avec un enseignement presque classique. Il étudie les productions d'une année des étudiants des tâches proposées en devoirs et examens en comparaison avec un prétest passé avant le début de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Il fait précéder ce travail d'une étude historique.

Il prétend, après son analyse qu'avoir un minimum de connaissances en logique et en techniques algébriques pour assurer un contrôle au moins des calculs pourrait être favorable à l'apprentissage des notions linéaires. Il dit "*ne pas avoir de "trous" dans les connaissances en logique et en algèbre peut favoriser une réussite en algèbre linéaire* ". Il lui semble que l'essentiel des difficultés a des causes épistémologiques (incohérences des réponses qui semblent provenir d'un manque de recul ou de vision globale par rapport au problème ou de l'enjeu). Il semble également indiquer que l'utilisation de "*levier" métamathématique* (par exemple un discours annonçant la tâche ou l'enjeu de celle-ci, explicitation des raisons du choix) pourrait aider à faire comprendre l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire. Il constate que les activités proposées sont calculatoires ou conceptuelles dans des cadres internes ou externes. Concernant l'évolution des étudiants, il peut "prévoir", sur des tâches précises (tâches calculatoires ou algorithmiques, tâches demandant des connaissances variées de l'étudiant), les procédures qui ont le plus de chance d'être mises en oeuvre, en fonction de leurs connaissances antérieures. De là, il pense que, *doublée d'une réflexion épistémologique et didactique, cette analyse peut permettre de contrôler les effets d'un enseignement*.

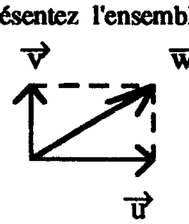
PAVLOPOULOU (K.) (Strasbourg) s'intéresse à "*savoir si une vision de type géométrique facilite les traitements proprement algébriques* ".

Le travail s'est appuyé sur un questionnaire comportant des exercices purement algébriques et d'autres faisant référence à un cadre géométrique (passé au terme d'un enseignement d'algèbre linéaire et de géométrie). Exemples d'exercices donnés :

1. Sur la figure ci-dessus, $\vec{w}$ est la somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan).

a) Représentez un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, dont la composante en $\vec{w}$ dans la base ($\vec{u}$, $\vec{w}$) est double de la composante en $\vec{w}$ dans la base ($\vec{v}$, $\vec{w}$).

b) Représentez l'ensemble de tous les vecteurs $\vec{x}$ qui ont la propriété précédente.



2. Soit une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à (1, 1) associe (-2, 0) et à (0, 1) associe (-1, 1). Déterminez l'application f.

Parmi les difficultés que rencontrent les étudiants, elle indique : la dépendance linéaire est mal traduite du graphique à l'algébrique, la faiblesse d'une perception vectorielle d'une figure, coordinations de différents éléments dans un même problème...

Elle prétend que "*la représentation géométrique est un outil précieux pour la bonne manipulation des notions algébriques, malgré quelques difficultés* ".

VANNES (groupe d'enseignants de l'IREM) : Il a été question de "*tester ce qui a été assimilé en algèbre linéaire après un mois d' interruption* ".

Il s'agit d'avoir des éléments de réponses à des questions que ces enseignants se posent quant aux représentations qu'ont les étudiants à propos de certaines notions linéaires abordées dans un contrôle passé avant l'interruption.

L' outil d'étude consiste en un questionnaire donné aux étudiants portant sur les notions de noyau et systèmes de générateurs, leur capacité de déduction et de construction d'énoncés vrais et la traduction des représentations graphiques en algèbre linéaire. Il comporte des questions de type "Vrai", "Faux" avec "justifier" dans certains cas. Le public concerné est celui des étudiants en complément de formation, donc en difficulté mais aussi des étudiants de PM1.

Il ressort que la notion du noyau est moyennement comprise ; par contre celles de système générateur ou libre ne le sont pas ; vocabulaire et symboles mathématiques utilisés approximativement ; difficultés avec les espaces de polynômes.

La conclusion est que *"si les automatismes, les rouages fonctionnent mieux il y a des blocages et une incompréhension globale sauf pour un petit nombre d'étudiants qui semblent avoir assimilé les notions vues au 1è semestre"*.

Les entretiens avec les étudiants leur permettent de recenser des difficultés du genre : handicap des bacheliers D, manque de travail ou de motivation de bacheliers C ou E, problèmes d'installation à (Vannes), de santé, etc...., rupture avec le secondaire.

ROGALSKI (M.) :

En s'appuyant sur les travaux et réflexions effectués sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, notamment la thèse de J.-L. Dorier et la stratégie d'A. ROBERT pour une formation continuée, une équipe de Lille 1 a mis en place un enseignement à caractère expérimental. Conçu pour s'étaler sur une année entière, il vise à modifier les points de vue et les comportements des étudiants face aux mathématiques en général. L'élément métamathématique est explicitement pris en compte dans plusieurs activités faites en cours, en TD, ou en devoirs. On y fait un développement des activités en algèbre, géométrie, sur les polynômes, les suites, les équations différentielles.

Exemple : 1. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels de degré au plus égal à 3 vérifiant P(1) = 0, P(2) = 2, P(3) = 10, P(4) = 30.

2. On veut déterminer tous les polynômes P de degré au plus égal à 7 valant 3 en 0, 5 en 1, -1 en 2, 2 en 3, 0 en 4, 4 en 5, 0 en 6, 3 en 7. A priori, quel système d'équations êtes-vous amené à résoudre ?

Plutôt que de se lancer dans cette résolution (avec un grand risque d'erreurs!), on va faire un détour par l'algèbre linéaire, en utilisant, pour exprimer un polynôme, d'autres monômes que 1, X, X^2, ..., X^n, qui paraissent mal adaptés à notre problème. (...)

Aucune évaluation n'est donnée, pour l'instant tout au moins.

Un long travail sur les systèmes linéaires est fait à l'appui du pivot de GAUSS pour permettre l'entrée dans l'algèbre linéaire, qui par ailleurs a été déjà abordée dans $\mathbb{R}^n$. Les enseignants concernés ont donné priorité à une meilleure compréhension des concepts de base d'algèbre linéaire en n'abordant pas les notions de déterminant, de valeurs et vecteurs propres et de dualité formelle en première année. Une esquisse de méthodologie est faite et aussi une classification en connaissances techniques, concepts, méthodes et questionnements disponibles et mobilisables.

On peut noter une reconnaissance et une revalorisation explicites du traitement des problèmes d'algèbre linéaire par les systèmes linéaires d'une part, et de leur dimension didactique d'autre part.

2. QUELQUES DIFFICULTES REPEREES :

La lecture des travaux sur l'algèbre linéaire nous a permis de relever les difficultés suivantes pour les étudiants (et de mentionner également celles qui n'ont pas été signalées) :

1- manipulation formelle des signifiants, manque de contrôle ou de coordination :
On les remarque aussi bien dans les activités internes que dans les activités externes (exemple : écriture d'une matrice d'une application linéaire d'espaces de polynômes, mélange de bases pour l'écriture d'une matrice ; non recours aux résultats précédents pour la suite des questions ...).

2- problèmes de logique élémentaire :
par exemple : utilisation des implications, d'équivalence, des quantificateurs, la négation et même certaines expressions logiques.

3- problèmes de langage ensembliste :
par exemple : confusion entre inclusion et égalité des ensembles ou entre inégalité de dimensions et inclusion des sous-espaces ; preuve de l'égalité d'ensembles ; traduction de l'injectivité et de la surjectivité d'une application en termes de résolubilité des équations f(x) = y.

4- problèmes liés à la géométrie :
mélange entre affine et linéaire, euclidien et affine ; tendance, de façon vaine, à donner une explication géométrique à des situations algébriques ou à rechercher une illustration graphique pour avoir un autre aspect de la notion algébrique traitée.
5- certaines notions et le langage sont mal maîtrisés :
exemple : multiplication des matrices ; notion de vecteur déterminé par des bipoints du plan ou de l'espace ("déplacer" un vecteur) ; concevoir une dimension supérieure à 3.
6- utilisation spontanée de l'algèbre linéaire :
par exemple : dans des situations venant d'autre secteurs sans mention d'emploi de l'outil algébrique (par l'enseignant ou par l'énonciation) ; utilité de l'algèbre linéaire.
7- abstraction trop grande :
par exemple : représentation et intuition difficiles ; démarche axiomatique inhabituelle chez les nouveaux bacheliers (c'est un détour pour eux).
8- difficultés de calcul :
par exemple : "les difficultés ? calculer rapidement sans erreur... ; les erreurs de calcul sont fréquentes car le calcul matriciel est en général assez rébarbatif... ; ... les calculs peuvent être longs et difficiles ".
9- problèmes de rigueur :
par exemple : difficultés liées à la démonstration, à la rigueur et à la précision.
10- trop de définitions et de résultats nouveaux.
11- utilisation de dessin :
par exemple : sens du dessin dans une résolution ; informations pertinentes à garder sur le dessin ; spontanéité pour son utilisation ; décomposition d'un vecteur dans un repère non orthogonal.
12- articulation de plusieurs registres d'expression (passage d'un registre à un autre) :
par exemple : passage du graphique à l'algébrique (au numérique ou au symbolique) et vice-versa ; passage de l'écriture d'un vecteur en ligne à l'écriture en colonne ; écriture d'une matrice d'une application linéaire.

Les causes identifiées sont dues à des lacunes en logique, en algèbre élémentaire, en géométrie, à l'insuffisance de pratique de la traduction intra-mathématique et une absence totale de motivation pour la démarche axiomatique.

A l'issue de cette présentation schématique et en rapport avec le cadre de G. Vergnaud (voir troisième partie) on peut dire que les situations sont :
- géométriques pour Robert-Robinet, Vannes et Pavlopoulou (Strasbourg)
- toutes mais explicitées par un discours métamathématique pour Dorier, Rogalski .

Les invariants opératoires et les représentations symboliques sont pour Rogalski les équations (avec pivot de Gauss) et pour Pavlopoulou les notions vectorielles.
Les difficultés 6, 4 sont du domaine des situations.
Les difficultés 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 relèvent du domaine des invariants (signifiés).
Les difficultés 1, (5), 11, 12, sont du domaine des signifiants.

L'examen de ces travaux nous a donné un état des "lieux". Ceci conduit à une première typologie des erreurs, en algèbre linéaire, que font les étudiants de première année universitaire. Il nous semble, à notre avis, que l'aspect représentations des étudiants n' y est pas très bien pris en compte. Nous entendons par cela, les conceptions locales des étudiants, c'est-à-dire de chaque concept linéaire (au moins ceux de base). Par conséquent, une stratégie intégrant à la fois cet aspect et les difficultés didactiques reste encore à prévoir.

II. Observation des cours et une étude de cas :

II.1. Déroulement des cours :

Les horaires sont de une fois deux heures de cours et trois fois une heure et demi de TD par semaine. Les enseignements du premier semestre d'algèbre linéaire se sont déroulés du début Novembre au 14 Décembre 92. L'harmonisation, l'organisation et le déroulement des activités des différents groupes ont fait l'objet d'une réunion en Septembre, à la veille de la rentrée, entre les enseignants de maths de la section. Les enseignants se réunissent chaque année pour voir les modifications à apporter au programme. C'est ainsi que, motivés par leur expérience d'enseignants de la section, ils ont jugé nécessaire de remplacer le gros chapitre sur la théorie ensembliste, dans le programme de cours, par un paragraphe sur le vocabulaire ensembliste. Voici d'ailleurs un extrait du compte rendu de la dernière réunion : " *Après délibération sur le programme, les modifications suivantes ont été adoptées :*

1. Le programme de cours comportera un paragraphe sur le vocabulaire ensembliste, comportant les notions suivantes : ensemble, élément, appartenance; inclusion, ensemble vide; sous-ensemble, ensemble des parties; réunion, intersection, complémentaire; couple, produit cartésien; application d'un ensemble dans un autre; composition des applications; image directe et image réciproque; injection, surjection, bijection; bijection réciproque.

On utilisera en TD toutes les occasions d'illustrer ces notions.

(...)

4. En algèbre linéaire, on donnera des outils pour le calcul du rang d'une famille de vecteurs. Essentiellement, l'invariance du rang par les opérations suivantes : multiplication d'un vecteur par un nombre non nul, addition à un vecteur d'une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille".

On peut voir là la traduction d'une évolution, bien sûr ponctuelle et non profonde, du programme. Les changements semblent ainsi plus ponctuels, puisqu'en général non suivis d'effet (les enseignants retrouvant leurs habitudes). Signalons que le paragraphe 4 ci-dessus ajouté n'a pas été abordé en TD par manque de temps, semble-t-il.

Le cours d'algèbre linéaire a démarré dans la plupart des amphithéâtres directement et non par une séance de TD en vue d'en introduire les notions. C'est la démarche axiomatique, se contentant du formalisme, qui est suivie par certains enseignants, même si nous avons observé dans un amphi une tentative, au début, de faire prendre conscience de ces objets "nouveaux" aux étudiants en donnant des exemples (ensemble des vecteurs du plan, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$, ensemble des fonctions). Donc, ceci dit, l'enseignement a consisté à définir les espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, combinaison linéaire, générateur, indépendance et dépendance linéaires, base, dimension, supplémentaire, application linéaire, noyau, image... On note un suivi presque à la lettre dans la présentation du programme et aucun conditionnement spécial des étudiants pour l'algèbre linéaire. Presque aucune situation véritable n'a, d'ailleurs, été créée afin de donner du sens aux concepts définis et de permettre de saisir l'importance et l'utilité de la démarche linéaire. Quant aux exemples, ils semblent venir appuyer une définition ou un résultat énoncés. Ils ne précèdent jamais les résultats hormis le cas déjà signalé. Ces exemples vont du cadre géométrique aux fonctions en général (suites, polynômes, fonctions) en passant par le cadre général. Citons cet exemple d'application donné dans un des amphis : droite de $\mathbb{R}^2$ $y = mx$. On construit une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = mx-y$. On montre que le noyau de f est la droite.

Les séances de TD, ayant démarré plus tard, ont été l'occasion pour l'enseignant de présenter des méthodes de traitement des situations (purement internes d'abord) d'applications directes des notions introduites magistralement aux cours. En effet, par exemple, les exercices suivants ont été traités dans presque tous les groupes de TD, pas nécessairement dans le même ordre, pour vérifier la définition d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel.

Exercice 1: soit $E = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ *muni des lois :* $(x, y) + (z, t) = (x+z, y+t)$ *et* $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$. *E est-il un espace vectoriel pour ces lois?*

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^4$, *indiquer les sous-ensembles qui sont des sous-espaces vectoriels:*

$E_1 = \{(x, y, z, t) \ / x=0\}$ $E_2 = \{(x, y, z, t) \ / \ y+t=2\}$ $E_3 = \{(x, y, z, t) \ / \ 3x+2y+t=0\}$

$E_4 = \{(x, y, z, t) \ / \ x+y=y+z=z+t=t+x\}$ $E_5 = \{(x, y, z, t) \ / \ xy=0\}$ $E_6 = \{(x, y, z, t) \ / \ x^2+y^2+z^2+t^2=1\}$

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}^4$, *étudier les systèmes suivants:*

a) $a_1=(1,2,2,1)$, $a_2=(5,6,6,5)$, $a_3 = (-1,-3,4,0)$, $a_4 = (0,4,-3,-1)$

b) $b_1 = (1,2,5,-1)$, $b_2 = (3,6,5,-6)$, $b_3 = (2,4,0,-2)$

Donner, s'il existe, une relation linéaire non triviale entre les vecteurs.

La méthode employée est la vérification de la stabilité des lois et l'appartenance du vecteur nul pour les sous-espaces vectoriels et celle d'équations pour l'étude des systèmes de vecteurs. Ces situations sont tirées d'un fascicule d'exercices distribué à tous les étudiants en début d'année et comportant aussi des problèmes d'analyse. Il revient aux étudiants d'observer et de mettre en application les méthodes apprises sur des nouvelles situations semblables choisies par l'enseignant sur la feuille. La méthode d'équation est la plus, sinon la seule, développée. Cependant certains enseignants ont indiqué la méthode vectorielle sur des exemples sans qu'elle fasse l'objet d'un enseignement explicite.

L'analyse du fascicule d'exercices distribué nous montre la place privilégiée qu'occupent les polynômes, les suites, les fonctions et les équations fonctionnelles et différentielles comme cadres extérieurs pour la modélisation linéaire. Des 84 exercices d'algèbre linéaire que comporte le fascicule, seuls dix sont des situations modélisées. (exemple : *on note E_4 le sous-espace de $\mathbb{R}[x]$ formé du polynôme nul et des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à 4. Soit u l'application définie sur E_4 par $u(P) = Q$ où $Q(x) = x^2 P''(x) - 3xP'(x)$. a) Montrer que u est une application linéaire de E_4 dans E_4. Calculer les images par u des polynômes de la base canonique de E_4. b) déterminer Ker u et Im u. En donner des bases et des dimensions. Ker u et Im u sont-ils supplémentaires dans E_4 ? c) L'équation $u(P) = 1$ a-t-elle une solution dans E_4 ? Donner une solution de l'équation $u(P)=x^3$. Si P_1 et P_2 sont 2 solutions de cette équation, que peut-on en dire de P_1-P_2 ? Donner toutes les solutions de l'équation $u(P)=x^3$*). Seuls deux ont été abordés en TD et vite abandonnés à cause des difficultés liées aux connaissances spécifiques. On peut classer l'ensemble des exercices du fascicule comme suit :

- 42 exercices sur les notions d'espaces et sous-espaces vectoriels, dépendance et indépendance linéaires, bases dont 5 situations modélisées (1 sur les équations fonctionnelles et 4 sur les polynômes) ; les autres sont des activités internes à l'algèbre linéaire le plus souvent dans les cadres cités plus haut.
- 42 exercices sur les applications linéaires dont 5 seulement sont des situations concrètes portant sur les polynômes, déjà modélisées ou artificiels.

Le contexte général (cours et TD) est standard. Il semble que les étudiants de Rennes I ne reçoivent en général aucun enseignement complémentaire en logique, en géométrie, bien que ce dernier domaine soit un cadre privilégié d'application et d'où le vocabulaire est tiré. Les polynômes sont introduits beaucoup plus tard que l'algèbre linéaire. Ainsi la seule représentation que ces étudiants ont d'un polynôme, à cette période, est celle d'une somme de monômes, donc une expression. Ceci constitue une difficulté énorme dans la recherche des bases adaptées pour la résolution des problèmes à modéliser linéairement.

<u>Notre objectif</u> :

Nos objectifs dans cette étude sont triples : cerner les conceptions des étudiants (bonnes ou fausses), établir les situations qui les favorisent ou non et enfin avoir un aperçu critique sur le volume et la présentation des notions linéaires enseignées dans le premier cycle universitaire en rapport avec les performances et compétences acquises des apprenants. Notre travail se base sur les observations en situations - classes effectives d'une part et sur les productions des élèves d'autre part (méthode, erreurs, procédures).

Pour nous résumer, notre problématique vise à montrer que la démarche vectorielle à travers le mécanisme d'apprentissage par imitation-modélisation peut favoriser l'acquisition des concepts linéaires et les techniques de résolution de problèmes en début d'initiation. La manipulation des exercices bien choisis pour décourager les mauvaises conceptions et favoriser les bonnes que nous aurons mises en évidence à travers les productions des étudiants, permettrait d'approcher cet objectif. Nous utiliserons différentes méthodes statistiques permettant de mettre en évidence des relations symétriques ou non, des typologies, etc.

II.2. <u>Etude de cas</u>

<u>Introduction</u> :

On a vu dans le chapitre précédent des hypothèses d'obstacles et essayé de mettre en évidence des aspects observables (variables) de l'enseignement d'algèbre linéaire. Un certain nombre d'analyses ont été faites. Les observations et ce qu'a dit G. Vergnaud (voir troisième partie) permettent de cerner les représentations des étudiants à travers les méthodes, les erreurs et les procédures mises en oeuvre dans les copies des contrôles passés dans le cadre de suivi d'apprentissage des notions linéaires.

Dans ce qui suit nous donnons une analyse des productions d'étudiants sur une tâche donnée en interrogation écrite à deux groupes de TD de la section Deug A de Rennes I en 1992-1993.

1) Analyse de la tâche

Rappelons que la section DEUG A concernée est divisée en 6 amphis en cours et chaque amphi en 5 groupes de TD. Les contrôles sont communs et organisés aux mêmes dates pour tous les groupes de la section. Quant aux interrogations elles relèvent de l'organisation interne de chaque groupe de TD. Pour le déroulement des enseignements (cours et TD) voir ce que nous avons décrit dans la première partie.

Ce contrôle, le premier de l'année en algèbre linéaire, est passé par les étudiants de deux groupes que nous noterons G1 et G2 tenus par le même professeur en T.D après deux semaines d'enseignement. Deux modes d'expression (équations et vecteurs) ont été abordés en T.D dans ces groupes. Ce contrôle se passe dans le cadre de suivi des étudiants dans l'acquisition des notions : sous-espace vectoriel, intersection, réunion, somme, indépendance et dépendance linéaires, base, dimension, générateur. Il s'est déroulé le 16/11/92 en 30 mn avec un intervalle de deux heures entre les deux groupes en deux versions dont la différence est au niveau des composantes des vecteurs. Cet exercice a été proposé par l'enseignant seul sans notre participation sous quelque forme que ce soit.

Pour nous, il s'agit d'observer les procédures mises en oeuvre par les étudiants après un enseignement et d'en dégager leurs conceptions vis-à-vis des concepts en jeu d'une part, et les difficultés rencontrées aussi bien procédurales que conceptuelles ou techniques d'autre part. Comme situation exploratoire, elle peut nous servir de rampe de lancement dans notre étude à travers la littérature existante.

Nous avons analysé les copies de tous les 69 étudiants des deux groupes (36 pour G1 et 33 pour G2).

Nous utiliserons le codage Gij pour désigner les étudiants: par exemple la notation G103 désigne l'étudiant n°03 (ordre alphabétique) du groupe G1.

1.1. <u>Situation-problème:</u>

Nous donnons les deux versions du problème proposé dans les deux groupes. Signalons que seules les composantes des vecteurs diffèrent dans les deux versions.

ENONCES: version du groupe G1

On désigne par E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ engendrés par
$a_1=(1,1,1,1), a_2=(1,1,-1,-1), a_3=(1,-1,1,-1)$; $b_1=(1,1,-1,1), b_2=(2,-2,0,0), b_3=(3,-1,1,1)$.
Donner une base de E une base de F de $E\cap F$ et de $E+F$. Même question en prenant pour b_3 le vecteur $(3,-1,-\alpha,\alpha)$.

version du groupe G2

On désigne par E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ engendrés par
$a_1=(1,2,3,4), a_2=(1,2,1,0), a_3=(1,0,1,0)$; $b_1=(1,2,1,2), b_2=(2,0,-2,-2), b_3=(3,2,3,4)$.
Donner une base de E une base de F de $E\cap F$ et de $E+F$. Même question en prenant pour b_3 le vecteur $(3,2,2-\alpha,2)$.

consignes orales (données au moment du passage du contrôle):
- E est engendré par les vecteurs a_1, a_2, a_3 et F par b_1, b_2, b_3.
- pour la dernière question dites uniquement les changements sans détailler les bases.
- vous avez 30 mn pour répondre à toutes ces questions.

1.2. <u>Analyse a priori</u> :

C'est une tâche purement interne à l'algèbre linéaire. Nous ferons une analyse conjointe des deux versions étant donné que la différence ne tient qu'aux composantes et aux faibles effectifs des groupes. Toutefois nous signalerons, s'il y a lieu, les différences qui seraient liées aux valeurs numériques.

Etant le premier contrôle de l'année en algèbre linéaire cette situation-problème diffère peu, surtout dans sa première partie, des exercices donnés lors de l'apprentissage. Par conséquent les méthodes enseignées devraient fonctionner sans trop de difficulté tout au moins dans le cas de E et F car les vecteurs sont bien choisis. La méthode de GAUSS sur le système d'équations ou sur les vecteurs permet d'arriver aux résultats après un pas de traitement.
Pour déterminer une base de l'intersection et de la somme l'étudiant peut être amené à les traiter simultanément ou séparément. Une bonne perception globale de la somme et de l'intersection pourrait conduire à extraire une famille maximale libre de la réunion des bases de E et F, système générateur de E+F, et du coup obtenir des combinaisons linéaires candidates pour engendrer l'intersection. Sinon l'étudiant passerait par la caractérisation des vecteurs de l'intersection avant d'en donner une base et faire autant pour la somme ou user d'un argument de dimensions (par exemple relation de GRASSMANN).

Une troisième stratégie articulant un argument de dimension, la différence de E et F (non inclusion) et le cadre $\mathbb{R}^4$ peut permettre aussi de déterminer une base de l'intersection et de la somme.

Quant à la dernière partie de l'exercice l'étudiant serait amené à étudier le rang du nouveau système générateur de F par les mêmes procédures que dans la première partie. Signalons en passant que la dimension de F reste toujours 3 dans la version G2 alors que ce n'est pas le cas pour G1. Dans les deux cas une exploitation judicieuse de l'étape précédente ferait éviter une répétition longue et superfétatoire.
Pour toutes ces stratégies on peut utiliser la méthode de GAUSS pour la triangulation ou pour la résolution des systèmes linéaires.

Les difficultés éventuelles nous paraissent les suivantes :
- celles relatives à la résolution des systèmes d'équations : la résolution d'un système d'équations peut ne pas être atteinte par défaut de techniques ou d'organisation des calculs ou aussi à cause des erreurs de calculs ;
- celles relatives à l'interprétation des résultats obtenu : le passage d'un système d'écriture à un autre n'est pas toujours facile, notamment traduire en termes linéaires les résultats de la résolution de systèmes linéaires ;
- celles relatives à la discussion suivant le paramètre : la confusion entre paramètre et inconnues pourrait être possible ;
- celles relatives au manque de système générateur de l'intersection ou à la perception de la réunion des bases comme génératrice de la somme : la recherche d'un système générateur peut gêner certains étudiants étant donné le nombre des vecteurs en jeu et surtout celui de l'intersection qui est formé des combinaisons linéaires de ces vecteurs.
- inadéquation entre la formulation de l'indépendance linéaire et le traitement opératoire: la condition pourrait être inversée autrement dit la définition pourrait devenir à peu près : "un système de vecteurs est libre si en prenant des scalaires tous nuls on a une combinaison nulle". Le traitement, quant à lui, peut être mené correctement.

1.3. <u>Analyse a posteriori</u> :

Nous avons commencé par répartir les copies par procédures et puis nous avons défini les variables (voir annexe1 pour leurs définitions) au fur et à mesure du dépouillement.

a) Résultats généraux :

L'analyse des copies des étudiants nous révèle essentiellement deux procédures de représentation symbolique: méthode d'équations et méthode vectorielle. Dans les tâches élémentaires, base de E et de F, la réussite est quasi-totale. Par contre dans les autres cas l'investissement et le contrôle de sens semblent plus délicats dans l'ensemble et particulièrement dans le groupe G2. Nous avons repéré quelques comportements à travers le traitement : celui annonçant explicitement ce qu'on veut faire et un autre où tout est implicite. Ces attitudes sont traduites à travers des démarches plus ou moins attachées au formalisme. Nous avons remarqué aussi l'idée d'identifier une base à l'espace engendré. Les difficultés n'en manquent pas aussi. Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori la résolution des systèmes linéaires n'a pas manqué de constituer une gêne tout comme l'interprétation des résultats obtenus. Le nombre assez élevé des étudiants ayant traité simultanément ou ayant vu en la réunion des bases un système de générateurs de la somme nous semble relever de deux visions dont l'une est celle susmentionnée (plus ensembliste) et l'autre liée à une bonne perception linéaire. Nous étudierons tout ceci plus en détail à travers des extraits des copies, après avoir présenté les variables dégagées.

Dans la détermination d'une base de E et de F, l'automatisme acquis marche bien pour les deux méthodes. Le problème langagier ne semble pas handicapant à ce niveau de situations. L'incohérence logique (entre algorithme et définition de l'indépendance) ne trouble pas du tout les automatismes dans les actions. La notion de base est assez bien saisie dans de tel contexte théorique d'application directe.

La question relative à la somme et à l'intersection est médiocrement réussie. Malgré l'entraînement qu'a constitué la première partie, le transfert dans le cadre de la somme et de l'intersection n'est pas réussi. La méthode vectorielle n'a servi qu'à un nombre minime d'étudiants à contourner le problème de générateur de l'intersection. La méthode d'équations reprend le dessus bien souvent. On note un emploi également massif de la relation de Grassmann souvent avec aberration eu égard au cadre.

On peut dire que la dernière question n'a pas eu beaucoup de candidats à cause de sa position, du manque de temps ou peut-être du paramètre et du cadre. C'est en partie le condensé des deux premières. Il n'est pas surprenant d'avoir un si grand échec à partir du moment où la réussite à la deuxième a été très faible. Le paramètre et les sous-espaces somme et intersection interviennent en général très peu dans les problèmes d'entraînement.

b) **Récapitulation** :

* Procédure: - méthode d'équation
- méthode vectorielle

* Conceptions : - base perçue en tant que famille maximale libre
- base identifiée à l'espace vectoriel ou au sous-espace vectoriel
- détermination de sous-espace vectoriel par ses équations ou représentations paramétriques
- la réunion des bases est une base de la somme

* Difficultés : - techniques de résolution de systèmes
- interprétation des résultats et contrôle de sens
- perception des vecteurs de la base de l'intersection comme des combinaisons linéaires des éléments des bases des sous-espaces vectoriels donnés
- vision de la taille d'un sous-espace vectoriel inférieure à celle de l'espace de référence
- discussion suivant un paramètre

* Maîtrise des notions :
- notion de base globalement perçue à partir d'un système générateur minimal
- la relation de Grassmann est disponible mais le cadre n'étant pas souvent pris en compte
- la somme est mieux perçue que l'intersection (s'agissant des bases)

2) Analyses statistiques :

Nous donnons ici les résultats des différentes analyses statistiques utilisées (hiérarchiques et factorielle) sur les deux populations regroupées en nous appuyant quelquefois sur les études séparées de façon comparative. En fait, comme nous l'avons signalé plus haut, cette fusion est due à la faiblesse des effectifs d'une part et à l'identité des tâches d'autre part. Nous pensons aussi que des résultats d'analyse statistique sur une population plus importante sont plus significatifs (cf. les travaux sur l'analyse implicative et hiérarchique).

L'analyse de correspondances multiples nous a donné les résultats suivants : la méthode d'équations, pour le problème proposé ici, semble conduire à l'échec compte tenu de la taille des systèmes qui, en plus, sont non carrés. La perception du nombre d'équations nécessaires, de façon plus générale la notion de dimension, et la discussion selon un paramètre constituent de sérieux handicaps.

Quant à la méthode vectorielle, elle n'apparaît pas favorable à l'apprentissage quand on a une approche "ensembliste" des notions en jeu. La perception de l'intersection, en termes de base, est plus difficile que celle de la somme.

Les analyses hiérarchiques nous ont permis de retenir que seule la nouvelle méthode enseignée discrimine les deux groupes pourtant tenus par le même enseignant. La réussite par cette méthode semble dépendre du sens qu'on donne aux notions en jeu. Il apparaît que la technique n'est pas difficile à maîtriser, à en croire les copies qui l'ont employée. Ainsi tout semble se jouer au niveau des représentations que se font les étudiants de ces objets algébriques. La tâche analysée ici nous montre qu'il y a plus de difficulté à percevoir une base de l'intersection que celle d'une somme. Il apparaît que déterminer une base dont les vecteurs sont des combinaisons linéaires des éléments de bases déjà données constitue une gêne, au moins pour l'intersection. De façon un peu large, il est plus facile de trouver, dans un système donné, une famille maximale libre (les vecteurs étant les mêmes) que d'en trouver une dont les vecteurs sont des combinaisons, ce qui rejoint une idée psychologique selon laquelle le convergent est plus accessible que le divergent. Ainsi notre idée de prendre la méthode vectorielle comme variable didactique se trouve réconfortée. Pour illustrer cela nous présentons l'étude faite par l'analyse implicative.

Le graphe implicatif (voir dessin ci-dessous) donne en gros quatre classes. La classe où le groupe G1 (variable 33) est un puits et celle avec la variable triangulation sur E (n°11) comme extrémité des chemins constituent, à quelques variables près, des sous-classes de la classe 2 de l'analyse de la similarité. On note une confirmation des observations faites dans le cas de la similarité. Les deux autres classes regroupent les variables non discriminantes pour les groupes avec les non-réponses dans une de ces classes et les variables relatives au système d'équations dans l'autre. Le graphe implicatif confirme l'utilisation massive de la méthode vectorielle par le groupe G2 avec échec. Ce groupe opère sur les bases avec l'idée d'avoir des bases, dans le cas de l'intersection, constituées des vecteurs en jeu mais non de leurs combinaisons linéaires. C'est une démarche que nous trouvons proche de celle sur l'intersection ou la somme (concernant leurs éléments). Pour le groupe G1 (variable 33) la détermination d'une base de la somme (variable 10 sur le dessin) apparaît comme une condition nécessaire pour l'obtention d'une base de l'intersection (variable 9) par le biais de la relation de Grassmann (variable 18). Apparemment, pour ce même groupe, le concept de famille maximale libre ne marche que dans un sens. Notons la place occupée par la variable 8 : c'est le résultat minimal, condition nécessaire à la réussite aux autres items.

- sous-graphe en haut à droite (deux sous-classes)-

. Le chemin (9⇒14⇒18⇒10) traduit la complexité de la détermination d'une base de l'intersection par rapport à celle de la somme, donc la procédure somme-Grassmann-intersection mobilisée par le groupe G1.

Ainsi, la détermination de la base de $E\cap F$ est la tâche perçue comme la plus complexe et nécessite l'exploitation de relations vectorielles dont celle relative à l'indépendance des vecteurs. C'est alors la combinaison des tâches d'explicitation des dimensions de E et de F et de la formule de Grassmann qui fournit la procédure la plus opératoire pour déterminer la dimension de E+F. La liaison 2 ⇒33 semble, en effet, montrer que les étudiants qui ont résolu $E\cap F$ ne cherchent pas à déterminer une base de E+F autrement que par Grassmann.

Le chemin 25 ⇒17 ⇒24 ⇒33 est significatif de la complexité liée au paramètre α. Notons qu'il est lié au chemin précédent seulement par 33, ce qui semble prouver la spécificité d'un traitement du paramètre.

. Le chemin (30⇒10⇒33) signale la compréhension de la propriété "une famille maximale libre est une base" dans le groupe G1. L'implication 30 ⇒10 explique la subtilité d'extraire une famille maximale libre pour donner une base de la somme.

. Le chemin (7⇒10⇒33) précise que ceux qui reconnaissent en la réunion des bases un système générateur de la somme réussissent à la détermination d'une base. On note une certaine reconnaissance de la différence entre système générateur et base car nous savons qu'une base est toujours un système générateur alors qu'un système générateur n'est pas toujours une base.

. Les chemins ($17 \Rightarrow 24 \Rightarrow 33$) et ($31 \Rightarrow 24 \Rightarrow 33$) caractérisent les approximations langagière et logique dans le groupe G1. Cela a pour conséquence un traitement approximatif du paramètre. Mais l'implication $25 \Rightarrow 17$ montre que le traitement opératoire peut être réussi sans que l'expression soit correcte.

- sous-graphe en haut à gauche -

. Le chemin ($13 \Rightarrow 16 \Rightarrow 3 \Rightarrow 32 \Rightarrow 11$) traduit un certain suivisme linéaire de l'énoncé et du commentaire du professeur par rapport aux méthodes. C'est l'effet, probablement, de l'interprétation du discours de l'enseignant selon laquelle si un vecteur n'est pas dans l'intersection alors il est dans la somme. Le traitement par sous-famille de 4 vecteurs entraîne une mauvaise perception de la dimension de la somme, donc le chemin $13 \Rightarrow 16 \Rightarrow 3 \Rightarrow 32 \Rightarrow 11$ est significatif de l'ambiguïté du rapport entre la théorie ensembliste et l'algèbre linéaire.

. La liaison $12 \Rightarrow 11$ montre la complexité et la rareté de la triangulation dans le cas de la détermination d'une base de la somme et de l'intersection par rapport à celle de E et de F. C'est un transfert à faire avec des notions ensemblistes pas assez maîtrisées.

- sous-graphe du bas à droite-

. Le chemin ($1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4$) précise la difficulté et la rareté de résolution du système pour l'intersection que pour E ou F, la taille du système et les techniques de résolution faisant obstacle. Résoudre le système d'équations dans le cas de l'intersection est plus difficile que le poser à cause de la taille (4x6) et la maîtrise des techniques. En effet l'obtention du système d'équations de l'intersection fait intervenir la base de E et celle de F et ce système a 4 équations à 6 inconnues.

. Le chemin ($15 \Rightarrow 21 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4$) caractérise une mauvaise perception de la notion de dimension. Il explique que la mauvaise perception de la dimension de l'intersection conduit à une mauvaise résolution du système posé de taille (4x6) même si on sait le faire dans le cas élémentaire du système de E ou de F.

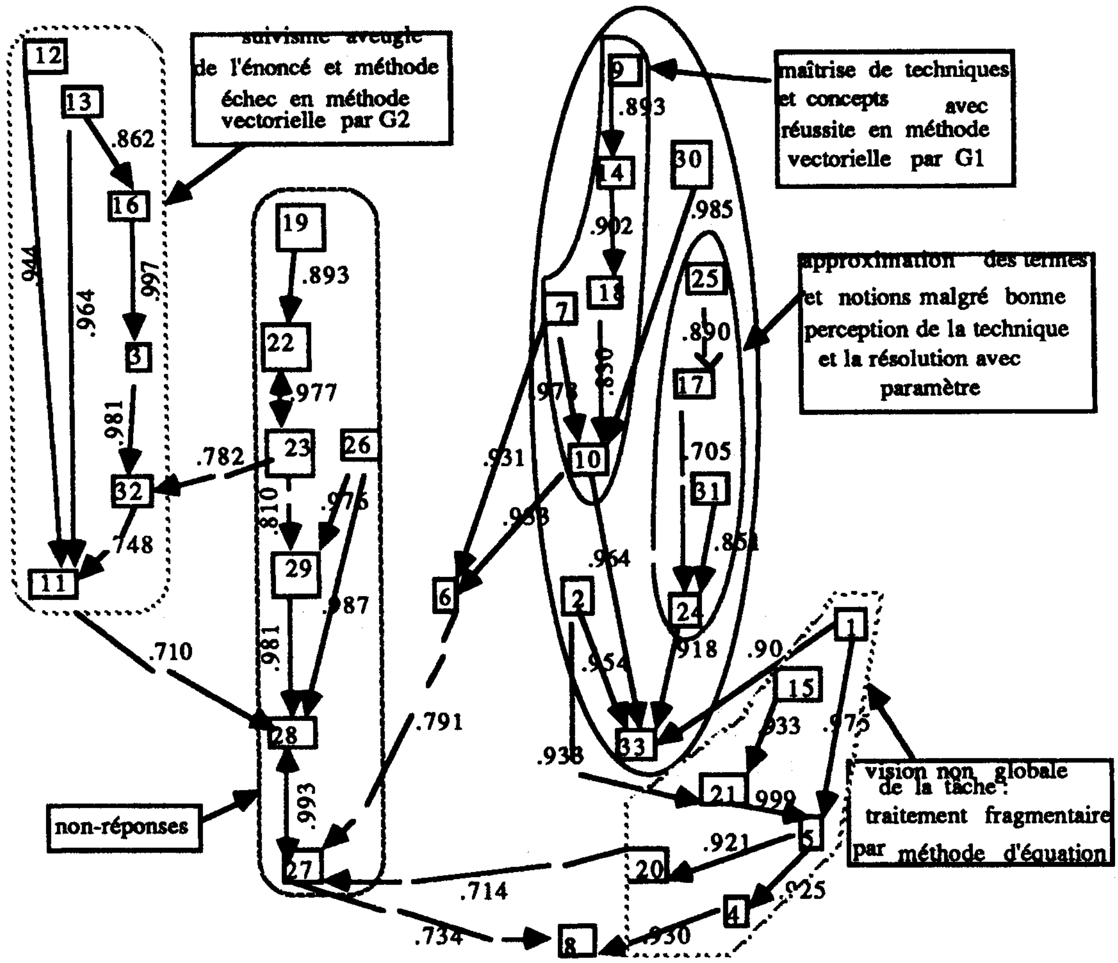
. les chemins ($1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 20$) et ($15 \Rightarrow 21 \Rightarrow 5 \Rightarrow 20$) indiquent un suivi linéaire (item 20) de l'énoncé par la méthode d'équations. Traiter l'intersection (détermination de base) par le système d'équations peut conduire à suivre linéairement la tâche parce qu'on a les moyens (item 1) de le faire ou parce qu'on n'a pas d'autres possibilités (item 21).

- sous-graphe du centre à gauche -

. Le chemin ($19 \Rightarrow 22 \Leftrightarrow 23 \Rightarrow 29 \Rightarrow 28 \Leftrightarrow 27$) relie toutes les non-réponses caractéristiques du non transfert des techniques vues en TD. Il apparaît que le paramètre aggrave les difficultés outre le manque de temps. Ce chemin implicatif est significatif de la spécificité de la tâche avec paramètre par rapport à la détermination de la base de la somme et de l'intersection. L'utilisation de Grassmann suppose la détermination des éléments nécessaires (dimension de E+F ou de $E \cap F$) sinon elle reste inopérationnelle. Le paramètre ajoute une difficulté de plus dans la détermination d'une base de E+F et de $E \cap F$ déjà fort complexe à cause de système générateur à dégager par l'étudiant ou de la taille (4x6) du système d'équation.

Les chemins $26 \Rightarrow 29 \Rightarrow 28 \Leftrightarrow 27$ et $26 \Rightarrow 28 \Leftrightarrow 27$, en considérant les contraposées, montrent la complexité de la détermination de E+F et $E \cap F$ par rapport à E et F avec paramètre.

. La position de la variable 6 dénote l'importance de la reconnaissance du système générateur de E et de F pour la détermination d'une base de E+F et de $E \cap F$.



1. résout le système posé pour E∩F
2. pose le système pour E+F
3. nombre d'éléments de la base supérieur à la dimension de l'espace
4. pose le système pour E
5. pose le système pour E∩F
6. rappelle que c'est un générateur de E
7. donne un générateur de E+F
8. donne une base de E
9. donne une base de E∩F
10. donne une base de E+F
11. utilise la triangulation pour E
12. utilise la triangulation pour E+F
13. traite avec une famille de 4 vecteurs
14. donne la dimension de E et de F
15. donne dim(E∩F)>3
16. donne dim(E+F)>4
17. mauvais emploi du vocabulaire
18. utilise la relation de Grassmann
19. la relation de Grassmann citée seulement
20. traite E∩F avant E+F
21. ne résout pas le système posé pour E∩F
22. E+F sans réponse
23. E∩F sans réponse
24. dit que base liée au paramètre α
25. donne une base de Fα
26. Fα sans réponse
27. E+F$_{\alpha}$ sans réponse
28. E∩F$_{\alpha}$ sans réponse
29. Eα sans réponse
30. extrait une famille maximale libre
31. définition de l'indépendance mal formulée
32. appartenance au groupe G2
33. appartenance au groupe G1 (A50)

3) Conclusion au contrôle:

Le groupe G1 a réussi et maîtriserait mieux que G2 cette tâche et les concepts en jeu avec une démarche plus formaliste. Des deux modes de représentations engagés par ces étudiants, seule la méthode vectorielle semblerait les discriminer. La différence se caractérise par un emploi massif de celle-ci par G2 et une meilleure performance par G1. Ainsi on peut interpréter l'attitude de G2 comme attachement au contexte (utiliser ce qu'on est en train de voir) et celle de G1 comme choix pertinent d'un outil de résolution d'un problème. On peut se demander effectivement quelle serait la résistance de ces attitudes chez ces étudiants dans le temps et dans d'autres contextes. Le groupe G2 est plus scolaire quant aux méthodes.

Quant aux procédures, compte tenu des prestations des étudiants, on peut se poser la question de transfert et maintien d'une méthode autre que celle d'équations dans la détermination d'une base d'un sous-espace vectoriel dans des contextes nouveaux. Comment manipuler les équations pour permettre un apprentissage des notions linéaires ? C'est à quoi s'est attaché M. Rogalski à Lille 1. La méthode vectorielle n'est pas sans poser des difficultés dans les traitements, mais si elle est appliquée avec contrôle de sens et une vision globale de la tâche on pourrait limiter les écueils. Sous quelles conditions peut-on l'aborder afin qu'elle soit profitable ? En tout cas, les performances presque opposées des deux groupes, tout au moins leur façon de réagir face aux deux méthodes, nous amènent à nous demander ce que serait la réaction des étudiants privés des équations dans de telles activités. Quel genre de situations peut-on traiter à l'entraînement (en TD) pour espérer un transfert et une stabilité des notions apprises ?

Quel va être l'effet d'un enseignement dont la stratégie est le mécanisme d'imitation explicite dans une articulation des situations internes et externes ?

III. Quelques suggestions issues de la didactique

Il ne s'agit pas de donner des panacées mais de fournir quelques suggestions issues de la didactique, qui devraient améliorer notre enseignement. Bien entendu on leur opposera des arguments relatifs au temps, au programme, etc.

Toutes les écoles didactiques, qu'elles soient piagétiennes ou non, considèrent qu'il est indispensable que l'élève construise lui-même ses connaissances. Tant que les situations proposées n'iront pas dans ce sens il ne sera pas possible d'atteindre quelque progrès.

Dans le cadre des mathématiques des techniques plus précises ont été élaborées. Signalons, en particulier, la dialectique outil-objet de R. Douady et le champ conceptuel de G. Vergnaud.

Pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, en particulier mathématiques, G. Vergnaud a élaboré un cadre théorique, dénommé "champ conceptuel". Il désigne par champ conceptuel "*l'ensemble de situations dont la maîtrise demande un certain système de concept, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion* ". Selon lui la notion de champ conceptuel doit permettre le découpage dans les compétences et les conceptions du sujet pour une analyse significative d'apprentissage et du développement cognitif. Il définit un concept comme étant le triplet : ensemble des situations donnant du sens au concept (difficiles en algèbre linéaire), ensemble des invariants opératoires (méthode d'équations, triangulation..), ensemble des représentations symboliques et langagières (matrice, théorème de rang, équation, etc.). En effet, il insiste sur le fait que "*Etudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois*".

Au regard de cet outil théorique, il nous semble qu'il faille prendre en compte les deux aspects (outil et objet) de l'algèbre linéaire en articulant des situations internes et externes donnant du sens aux concepts linéaires. La connaissance de ces notions en tant qu'objet est, certes, nécessaire, mais, leur donner de sens et s'en servir en tant qu'outil nous paraît souhaitable. Nous n'ignorons pas les différentes positions par rapport à ces aspects. L'appui sur les connaissances antérieures des étudiants en équations semble être économique mais est-ce que suffisant pour ne pas aborder d'autres représentations symboliques (calculables) ? Les équations peuvent apparaître, pour les étudiants, comme la poursuite des activités numériques fréquentes au secondaire. Cela ne risquerait-il pas de les faire se concentrer sur des algorithmes souvent lourds et trop longs pour le résultat obtenu ? On peut essayer d'étendre la technique de la méthode de Gauss.

Le programme ne semble pas laisser beaucoup de choix aux enseignants. En effet les évolutions, souvent ponctuelles, qu'il connaît imposent des limites. Nous disions au début que ce sont des classes d'exercices (en concepts et en technique) qu'on fait étudier aux étudiants. C'est à travers ces problèmes, après reproduction des techniques rencontrées, qu'ils sont censés apprendre les notions linéaires. On leur demande là à notre avis un travail d'imitation. On leur fait imiter les méthodes sur un certain type de problèmes.

C'est ainsi que nous pensons qu'en jouant sur les exercices avec l'autorité reconnue de l'enseignant en fonction de ce que nous avons souligné ci-dessus, que le choix de cette procédure pourrait être bénéfique pour un apprentissage des concepts linéaires. L'explicitation des justifications et des différentes étapes de la réponse du modèle (ici l'enseignant) pourrait, tout en attirant l'attention des apprenants, favoriser l'apprentissage, au cas où ils accepteraient de le reproduire. Pour cela il faut un choix pertinent de problème se prêtant à l'observation et motivant une activité chez l'étudiant. Il est important que les différentes phases d'une réponse soient nettement observables et indiquées explicitement.

Bibliographie :

AG ALMOULOUD S. : *Thèse de l'Université de Rennes 1*, Novembre 1992.

BARDY P., LE BELLAC X., MEMIN J., SALLY D., LE ROUX R. : *compte rendu d'une étude faite auprès des étudiants de Vannes* (IREM, Rennes, 1992).

DIEUDONNE J. : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, col. enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1964.

DORIER J.-L. : *Thèse de l'Université de Grenoble 1*, Juin 1990.

DOUADY R. : *Rapport enseignement apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de cadres*. Cahier de didactique des mathématiques, n°3, université Paris 7.

GRAS R. : *Thèse de l'Université de Rennes 1*, Octobre 1979.

de LAGARDE J. : *initiation à l'analyse des données*, Dunod 1983.

LARHER A. : *Thèse de l'Université de Rennes 1*, Février 1991.

PAVLOPOULOU K. : *mémoire de DEA de didactique de l'université Louis Pasteur de Strasbourg*, Novembre 1990.

RATSIMBA-RAJOHN H. : *Thèse de l'Université de Rennes 1*, Décembre 1992.

ROBERT A. : *un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie-licence en formation continuée)*. Cahier de DIDIREM n° 9,1991.

ROBERT A. et ROBINET J. : *quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG*. Cahier de didactique des mathématiques n°53, 1989, IREM, université Paris 7.

ROBERT A., ROBINET J. et TENAUD I. : *de la géométrie à l'algèbre linéaire*, Brochure de l'IREM n°72, 1987, université Paris 7.

ROBINET J. : *esquisse d'une genèse des notions d'algèbre linéaire en DEUG*, Cahier de didactique des mathématiques n°29.

ROGALSKI M. : *pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire ?* Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, publication inter-IREM, 1990.

ROGALSKI M. : *un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année*, cahier DIDIREM n° 11, IREM de Paris 7.

TOTOHASINA A. : *Thèse de l'Université de Rennes 1*, Novembre 1992.

VERGNAUD G. : *la théorie des champs conceptuels*, Recherches en didactiques des mathématiques, vol. 10 n°2.3 pp. 133-170, 1990.

VERGNAUD G. : *morphismes fondamentaux dans les processus de conceptualisation*, Les sciences cognitives en débat, éditions du CNRS, Paris, 1991.

WINNYKAMEN F. : *apprendre en imitant ?* , Paris, P.U.F, 1990.

Définition des variables avec leurs numéros d'utilisation dans les analyses implicatives et les codes correspondant à ces variables utilisés dans l'analyse factorielle :

1. Résout le système posé pour E∩F (SYIR)

C'est le cas où on résout correctement le système d'équations posé dans le cas de E∩F. Cette variable caractérise la maîtrise de techniques de résolution des systèmes d'équations linéaires. Cette variable est indépendante de la technique de résolution employée et de l'interprétation des résultats en termes linéaires. Il est d'ailleurs difficile de distinguer les techniques puisqu'elles ne sont pas pures.

2. pose le système pour E+F (SYSN)

Ici on désigne le traitement de E+F par système d'équations. On rencontre ce cas sous deux formes : utilisation de la définition de l'indépendance linéaire sur la réunion des générateurs de E et de F ou utilisation de l'écriture d'un vecteur de E+F comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F. Il importe peu que le système soit posé avant ou après le traitement de l'intersection.

3. nombre d'éléments de la base supérieur à la dimension de l'espace (BERR)

C'est le cas où une base donnée comporte des éléments qui ne sont pas des vecteurs de l'espace vectoriel (cadre) ou dont le rang est supérieur à la dimension de cet espace.
Exemple : la réunion des bases est une base de la somme ; une base d'un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension 4 comportant des vecteurs d'un espace de dimension 6.

4. pose et résout le système pour E (SYSE)

Ce cas se caractérise par l'utilisation de la définition de l'indépendance linéaire lorsqu'un système générateur minimal, de rang peu élevé, est donné. Les composantes des vecteurs du système étant bien choisies, cette variable recouvre le fait de poser le système d'équations et sa résolution.

5. pose le système pour E∩F

Ici on désigne le traitement de E∩F par système d'équations. On rencontre ce cas sous deux formes : utilisation de la définition de l'indépendance linéaire sur des sous-familles (base de E et un vecteur de la base de F) ou utilisation des deux écritures d'un vecteur de E∩F (étant vecteur de E et de F).

6. rappelle générateur de E ou de F (GENF)

Dans le traitement l'étudiant, après avoir montré que le système générateur donné était libre, rappelle toutes ces propriétés pour conclure que c'est une base.
exemple : (a_1, a_2, a_3) est libre or il est générateur de E donc il forme une base de E.

7. donne un générateur de E+F (GENS)

Pour traiter la somme l'étudiant considère la réunion des générateurs de E et de F comme générateur de E+F. Cette variable se manifeste dès lors qu'on raisonne sur cette réunion quelle que soit la méthode.

exemple : la réunion de la base de E et de celle de F est un système générateur de E+F ;
$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ est générateur de E+F

8. donne une base de E et de F (BSED)

Une base est donnée à l'issue du traitement sur E et F. L'étudiant répond à cette variable si, quelle que soit la méthode suivie, il donne une base correcte de E et de F. Elle est liée à la conclusion tirée après traitement.

9. donne une base de E∩F (BBSI)

Comme la variable 8 cette variable est présente quand une base correcte de E∩F est donnée.

10. donne une base de E+F (BBSS)

Comme les variables 8 et 9 cette variable est présente quand une base correcte de E+F est donnée.

11. utilise la triangulation pour E ou F (TRIE)

Dans sa production l'étudiant peut utiliser la méthode de triangulation pour montrer que le système générateur de E ou de F est libre. Cette variable désigne la procédure sans le résultat.

12. utilise la triangulation pour E+F (NSYS)

Comme dans l'item 11 elle caractérise la triangulation dans le traitement de la somme mais sans réussite ici. C'est le cas d'étudiants qui interprètent mal les résultats à l'issue de la triangulation.

13. traite avec une sous-famille de 4 vecteurs (NSYI)

Cette variable se caractérise par les productions d'étudiants qui considèrent une ou des familles de 4 vecteurs (générateurs de E et un vecteur de F) pour trouver une base quelle que soit la procédure utilisée.

exemple : *(a_1, a_2, a_3, b_1) libre* $\quad b_1 \notin E \cap F$
(a_1, a_2, a_3, b_2) lié $\quad b_2 \in E \cap F$
(a_1, a_2, a_3, b_3) lié $\quad b_3 \in E \cap F$

14. donne la dimension de E ou de F (DIMD)

Dans leur production, certains étudiants donnent les dimensions des sous-espaces E et F dont ils déterminent une base à partir des générateurs alors qu'elles ne sont pas demandées. La dimension est donnée si on l'indique avant ou après détermination de la base.

15. donne dimE∩F>3 (DIS3)

L'étudiant est amené à interpréter les résultats obtenus, suivant la stratégie adaptée. Un lien avec le cadre est nécessaire. La résolution des systèmes d'équations peut échouer à cause de la technique ou de la gestion des calculs. Cette variable se caractérise par tout résultat donnant une base de l'intersection de rang, ou la dimension, plus grand que 3.

16. donne dim(E+F) >4 (DSS4)

C'est le cas où la dimension de E+F donnée est supérieure à 4. Cette variable peut se manifester dans le passage du traitement de l'intersection à celui de la somme à l'aide de la relation de dimension ou dans la vision de la réunion des bases comme base.

17. mauvais emploi du vocabulaire (VOCA)

Cette variable ne concerne que l'emploi des termes qui est déplacé. Elle désigne une approximation du vocabulaire à côté des techniques automatisées.

Exemple : une base de E est le sous-espace vectoriel engendré par a_1, a_2, a_3 ; E forme une base si (a_1, a_2, a_3) sont linéairement indépendants, etc.

18. utilisation de la relation de Grassmann (GRA1)

Cette variable désigne l'utilisation de la formule de dimension (relation de Grassmann). Elle est possédée par les étudiants qui l'utilisent pour se rassurer des résultats obtenus ou dans leur raisonnement notamment après détermination d'une base de la somme ou de l'intersection pour s'en servir pour avoir la dimension de l'autre.

19. la relation de Grassmann est citée seulement (GRA2)

Ici, c'est le cas où aucun usage adéquat du type de la variable 18 n'est fait. Cette variable est liée à la perception de l'outil relation de Grassmann mais avec une carence en traitement ou même un manque de temps.

20. traite E∩F avant E+F (IAVS)

C'est la procédure conduisant à déterminer une base de l'intersection avant celle de la somme. Ce cas se rencontre aussi bien avec la méthode d'équations qu'avec la triangulation.

21. Non résolution du système E∩F (SYIN)

Poser un système d'équations amène à avoir de techniques doublées éventuellement d'organisation pour le résoudre. Si cela manque le système n'est pas résolu. La taille du système ou une confusion entre vecteur et inconnue donnent aussi cet item.

22.E+F sans réponse (NREP)

C'est tous les cas où la recherche de la base de E+F n'est pas entamée ou juste débutée.

23. E∩F sans réponse (NREP)

idem qu'en 22 mais pour E∩F.

24. dit que base liée au paramètre (LIEP)

C'est le cas des étudiants qui indiquent, dans leur traitement, le changement de dimension des sous-espaces en disant que les bases dépendent du paramètre tout simplement. La discussion suivant le paramètre peut être engagée ou non.

25. donne une base de F_α (BSFα)

On a cette variable si on donne une base correcte de F_α suivant les valeurs du paramètre mais indépendamment de la méthode de traitement.

26. F_α sans réponse

27. $E+F_\alpha$ sans réponse

28. $E \cap F_\alpha$ sans réponse

29. E_α sans réponse

(NREα) non-réponses (non abordé ou juste entamé)

30. extrait une Famille maximale libre (NSYS)

Cette variable désigne la démarche consistant à extraire une famille maximale libre du système de 6 vecteurs. On la rencontre avec la stratégie de triangulation (achevée) ou en remarquant les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres.

31. Définition de l'indépendance linéaire mal formulée (DEFM)

C'est la mauvaise formulation, le défaut de la définition de l'indépendance linéaire ou l'incohérence logique ; par exemple : $\alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3=0$ *si* $\beta=\alpha=\gamma=0$; démontrer $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3=0$ pour $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ revient à montrer $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

32. appartenance au groupe G2

33. appartenance au groupe G1

annexe 2

Algèbre linéaire

Le corps de base K est l'un des corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Espace vectoriel sur K.

a) Définition et propriétés des lois.

b) Application linéaire ; isomorphisme, endomorphisme, automorphisme.

c) Sous-espace vectoriel ; intersection de 2 sous-espaces.
Somme d'un nombre fini de s.e.v. ; somme directe ; sous-espaces supplémentaires.

d) Image et noyau d'une application linéaire. Projecteurs.

e) Combinaison linéaire. Famille libre, famille génératrice, base.
Dépendance et indépendance linéaire. Sous-espace engendré par une famille.

2) Espace vectoriel de dimension finie.

a) Existence d'une base. Deux bases ont le même nombre d'éléments.
Toute famille génératrice contient une base ; tout système libre est contenu dans une base.
Dimension d'un espace vectoriel. Droite, plan.

b) Dimension d'un sous-espace. Rang d'une famille de vecteurs.
Existence de supplémentaires pour un sous-espace.
Dimension d'une somme directe.
Relation : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

c) Rang d'une application linéaire ; théorème du rang.

Théorème

Soit $f : E \to F$ linéaire.

(i) Alors f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
f est injective si et seulement si l'image d'une base de E est une famille libre de F
Si f est injective, $\dim E \leq \dim F$.

(ii) f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = E$.
f est surjective si et seulement si l'image d'une base de E est une famille génératrice de F
Si f est surjective, $\dim E \geq \dim F$.

(iii) f est bijective si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.
Si f est bijective, $\dim E = \dim F$.

(iv) Si $\dim E = \dim F$, il y a équivalence des 3 propriétés :
f injective , f surjective , f bijective

d) Noyau d'une forme linéaire ; hyperplan, équation d'un hyperplan.

3) Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$.
Composition des applications linéaires.
Application linéaire réciproque.