KATY PAROUX

Marches aléatoires sur le cercle Théorème central limite et irrationalité

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993___2_A8_0>

MARCHES ALEATOIRES SUR LE CERCLE THEOREME CENTRAL LIMITE ET IRRATIONNALITE

Katy PAROUX

STAGE DE DEUXIEME ANNEE DE MAGISTERE

1. INTRODUCTION.

Depuis fort longtemps, de très nombreuses études ont porté sur la question du théorème central limite pour des sommes du type $X_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j$ de variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots Z_n, \ldots$. Si celles-ci sont indépendantes, identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance σ^2 alors le théorème central limite affirme que la loi de $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$ converge vers une loi de Gauss de moyenne nulle et de variance σ^2. Ce résultat a été généralisé pour des situations où l'indépendance des variables aléatoires Z_j est remplacée par une indépendance asymptotique d'un type markovien, et une condition de stationnarité, par exemple.

Ici, on se propose d'exposer quelques résultats obtenus en se plaçant sur le cercle $\mathbb{T} = {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}$ muni de la mesure de Lebesgue π, dans le cas particulier où $Z_j = f(x_j)$ avec $f \in L^2(\mathbb{T})$ et (x_j) est une chaîne de Markov stationnaire de mesure initiale π, que l'on précise maintenant. On définit le noyau de la chaîne à partir de l'opérateur P sur $\mathbb{T}$ par :

$P\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \varphi(x + \alpha_i)$ où les α_i sont des angles et les p_i des poids ($p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$).

L'invariance par translation de π implique $\pi P = \pi$. Il semble que le degré de continuité de f minimal à satisfaire pour la validité du théorème central limite soit fortement lié à l'irrationnalité des angles α_i. On se propose d'étudier ce phénomène de manière plus approfondie et d'établir, dans chaque cas, le théorème central limite pour la classe la plus large de fonctions et les angles α_i les plus généraux possibles.

On fera appel d'une part, à des résultats d'approximations diophantiennes des irrationnels par les rationnels ; d'autre part, à un théorème de Gordin [1] suffisant pour établir le théorème central limite dans deux des quatre cas étudiés et enfin à un théorème plus fin de Kipnis [2] quand l'utilisation du premier théorème se révèle non satisfaisante.

Il semble que ce dernier résultat soit optimal par rapport à la classe de fonctions. Dans ce cadre, il paraît alors utile d'étudier un ensemble de contre-exemples portant sur la régularité de la fonction et l'irrationnalité des angles, conduisant à des situations variées où le théorème central limite ne serait pas valable.

2.1. ENONCE DU THEOREM DE GORDIN [1].

Soit x_k, $k = 1,2, \ldots$ un processus de Markov stationnaire et ergodique, sur $(X,\mathcal{A},\mu)$ de fonction de transition $Q(x,A)$ et de distribution initiale μ.
Supposons $E[f^2(x_k)] < \infty$ et $E\, f(x_k) = 0$; dans l'espace de Hilbert $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$, on considère l'opérateur de transition Q :

$$Q\, g(x) = \int_X g(y)\, Q(x, dy)\,.$$

L'hypothèse d'ergodicité du processus (x_k) réduit à un la dimension du noyau de $I - Q$.

Théorème. *Supposons $f \in Im(I - Q)$ alors*

1. $f = g - Q\,g$ *où* $g \in 1^{\perp} = \{h \in L^2(\mu)\,, \langle h, 1\rangle = 0\}$

2. $E(S_n^2) = \sigma^2\, n + 0(1)$ *avec* $\sigma^2 = \|g\|^2 - \|Q^* g\|^2 \geq 0$

3. $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)\,.$

(Pour $\sigma = 0$, la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ est une loi de Dirac en 0).

Preuve. L'idée principale est d'utiliser les résultats connus sur les sommes de différence de martingales.

Suivant [3], on décompose $f(x_k)$ selon : $f(x_k) = g(x_k) - g(x_{k+1}) + y_k$ où les variables aléatoires $y_k = g(x_{k+1}) - Q\, g(x_k)$ forment une suite stationnaire et ergodique de différences de martingales.

Alors S_n devient : $S_n = g(x_1) - g(x_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} y_k$ avec $\operatorname{var} y_k = E(y_k^2) = \sigma^2$

puis $\operatorname{var} S_n = n\, \sigma^2 \left(1 + \dfrac{\operatorname{var}(g(x_1) - g(x_{n+1}))}{n\,\sigma^2}\right) = \sigma\,(n) + 0(1),$

et la troisième assertion découle du théorème de Billingsley-Ibragimov [4], [5] d'après lequel

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(y_1+\ldots+y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

2.2. ENONCE DES THEOREMES DE KIPNIS [2].

Il s'agit de prouver un théorème central limite pour les sommes partielles $X_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j$ d'une suite $Z_1, Z_2 \ldots Z_n \ldots$ de variables aléatoires. On considère un cas particulier de suite stationnaire qui permet d'obtenir l'analogue d'un théorème central limite sans hypothèses supplémentaires :

Théorème 1.1. *Soit $\{Z_j\,;\,-\infty < j < \infty\}$ un processus ergodique, stationnaire de carré intégrable tel que*

$$E(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0 \quad ps \quad \text{où} \quad \mathcal{F}_n = \sigma(Z_j\,;\, j \le n).$$

Alors, le processus stochastique $X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}[Z_1 + \ldots + Z_{[nt]}]$ converge en loi vers la distribution d'un mouvement brownien de variance σ^2, pourvu que $E\,Z_n^2 = \sigma^2 < \infty$.

On se propose ensuite d'utiliser ce théorème pour établir le théorème central limite pour $X_n = \sum_{i=1}^{n} V(y_i)$ où $\{y_j\,;\,-\infty < j < \infty\}$ est une chaîne de Markov stationnaire, ergodique et symétrique, et V est du type le plus général que l'on puisse espérer par cette méthode. Soit $\{y_j\,;\,-\infty < j < \infty\}$ une chaîne de Markov du type envisagé dans l'introduction stationnaire, ergodique et symétrique dans l'espace X ; soit $\pi(dx)$ la mesure invariante et $Q(x,dy)$ la probabilité de transition de la chaîne, on note aussi Q l'opérateur $(Qf)(x) = \int_X f(y)\, Q(x,dy)$.

Soit $V(y)$ une fonction sur X avec $\int V^2(x)\, d\pi(x) < +\infty$, supposons $\int V(x)\, d\pi(x) = 0$ et posons $Z_j = V(y_j)$. On peut alors voir [2] que la condition

$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E[V(y_1) + \ldots + V(y_n)]^2 < +\infty$ équivaut à $V \in Im(I-Q)^{1/2}$.

Notons $\Omega = \{\{y_j\}, -\infty < j < \infty\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(y_j\,, j \le n)$ et P la probabilité sur (Ω, F) où $\mathcal{F} = \bigvee_n \mathcal{F}_n$.

Théorème 1.2. *Soit $V \in L^2(X,\pi)$ vérifiant $V \in Im(I-Q)^{1/2}$.*
Alors on a $X_n = M_n + \xi_n$ où M_n est une martingale pour $(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$ et

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{1 \le j \le n} |\xi_j| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 .$$

De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} E|\xi_n|^2 = 0.$

2.3. RAPPELS SUR LES APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES DES IRRATIONNELS PAR LES RATIONNELS.

Il s'agit de répondre à la question suivante : dans quelle mesure un nombre irrationnel α peut-il être approché par des rationnels du type $\frac{p}{q}$ avec p, q entiers, $q > 0$. Pour q fixé, le minimum de $|\alpha - \frac{p}{q}| = q^{-1} |q\alpha - p|$ est $q^{-1}\|q\alpha\|$ où

$$\begin{aligned} \|\alpha\| &= \min (\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\}) \\ &= \min |\alpha - n| \text{ pour } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On s'intéresse donc à des résultats de majoration et minoration de $\|q\alpha\|$ ...

Citons un premier théorème prouvé dans "Continued fractions" de Khintchine :

Théorème. *Pour tout irrationnel α dont les éléments de la décomposition en fraction continue sont bornés, il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité suivante soit vraie pour tout entier $k > 0$:* $\|k\alpha\| \geq \frac{C}{k}$.

Il est satisfaisant du point de vue minoration mais ne concerne qu'un ensemble négligeable d'irrationnels ; il est complété par le théorème suivant :

Théorème. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour presque tout irrationnel α, il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité suivante soit vraie* $\forall k > 0 : \|k\alpha\| \geq \frac{C}{k^{1+\varepsilon}}$.

Définition. *On dira que α est ε–irrotationnel s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait :*

$$\forall k \geq 1 \qquad k^{1+\varepsilon} \|k\alpha\| \geq C.$$

Donc, le théorème dit que, pour ε fixé, presque tout α est ε–irrationnel.

Enfin, on souhaite étendre cette étude au cas d'un ensemble de nombres $(\alpha_1, \dots \alpha_n)$, ce qui est beaucoup plus difficile. Cassels prouve le théorème essentiel de la théorie métrique des approximations dans "An introduction to diophantine approximation" :

Théorème. *Soient α_j des réels de* $[0,1]$ $(1 \le j \le n)$, *ψ une fonction monotone décroissante telle que* $0 \le \psi(k) \le \frac{1}{2}$. *Alors l'ensemble des solutions entières de l'inégalité $\|k\alpha_j\| < \psi(k)$ pour $1 \le j \le n$ est infini dans les conditions suivantes :*

$$* \text{pour presque aucun } (\alpha_1, \dots \alpha_n) \text{ si } \sum_{1}^{+\infty} (\psi(k))^n < +\infty$$

$$* \text{pour presque tout } (\alpha_1, \dots \alpha_n) \text{ si } \sum_{1}^{+\infty} (\psi(k))^n = +\infty .$$

3. CAS DES POLYNOMES TRIGONOMETRIQUES.

On considère le cercle $\mathbb{T} = {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}$, des angles $\alpha_1, \dots \alpha_N$ rationnellement indépendants, des poids p_j $[(1 \le j \le N)\, p_j > 0$ et $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1]$ et l'opérateur P sur $\mathbb{T}$:

$$P\,\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} p_j\, \varphi(x + \alpha_j) .$$

Soit f le polynôme trigonométrique $f(x) = \sum_{k=-K}^{K} c_k\, e^{2i\pi kx}$ avec $c_0 = 0$. (Car on suppose $\int f\, d\pi = 0$) et S_n les sommes de Birkhoff le long des trajectoires associées à la chaîne de Markov de noyau P :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) .$$

Puisque $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont rationnellement indépendants, la chaîne de Markov est ergodique et on s'intéresse aux lois limites pour S_n en particulier au théorème central limite car d'après le théorème ergodique, $\frac{S_n}{n}$ tend vers zéro (presque partout).

On se propose de montrer la proposition suivante :

Proposition 1. *La loi de* $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ *converge vers une loi de Gauss de moyenne nulle et de variance* σ^2 *avec*

$$\sigma^2 = \sum_{-K}^{K} |c_k|^2 \frac{1 - |\sum_{j=0}^{N} p_j e^{2i\pi k\alpha_j}|^2}{|1 - \sum_{j=0}^{N} p_j e^{2i\pi k\alpha_j}|^2} .$$

Preuve. On cherche à résoudre l'équation $(I - P)\, g = f$, ce qui permettra d'appliquer le théorème de Gordin [1] pour lequel toutes les autres conditions sont vérifiées.

Supposons donc que le polynôme trigonométrique $g(x) = \sum_{-K}^{K} d_k\, e^{2i\pi kx}$ soit solution de l'équation $(I - P)\, g = f$,

alors $\sum_{-K}^{K} d_k \,(1 - \sum_{j=1}^{N} p_j\, e^{2i\pi k\alpha_j})\, e^{2i\pi kx} = \sum_{-K}^{K} c_k\, e^{2i\pi kx}$

donc $\quad d_k = \dfrac{c_k}{1 - \sum_{j=1}^{N} p_j e^{2i\pi k\alpha_j}}$ car les α_j sont rationnellement indépendants.

L'équation $(I - P)\, g = f$ possède donc l'unique solution :

$$g(x) = \sum_{-K}^{K} \frac{c_k e^{2i\pi k\alpha}}{1 - \sum_{j=1}^{N} p_j e^{2i\pi k\alpha_j}} \,.$$

Il est alors possible d'appliquer le théorème de Gordin [1], ce qui donne le théorème central limite pour S_n :

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \quad \text{avec} \quad \sigma^2 = \|g\|^2 - \|Pg\|^2 \,.$$

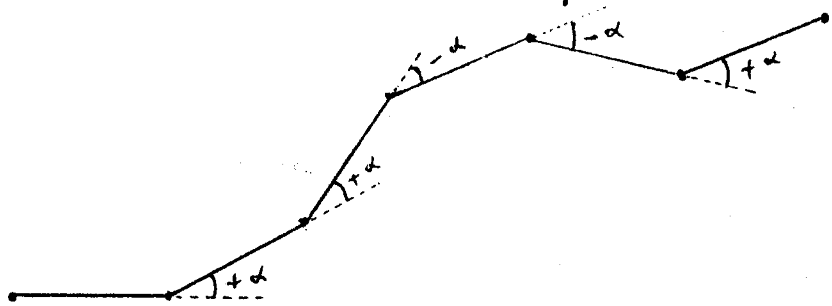
De l'expression de g, on déduit que $\sigma^2 = \sum_{-K}^{K} |c_k|^2 \dfrac{1 - |\sum_{j=1}^{N} p_j e^{2i\pi k\alpha_j}|^2}{|1 - \sum_{j=1}^{N} p_j e^{2i\pi k\alpha_j}|^2}$, ce qui prouve la proposition 1.

On va désormais considérer, d'une façon plus générale, des fonctions $f \in L^2(\mathbb{T},\pi)$ et utiliser des résultats sur le lien entre le degré de continuité de f et la vitesse de décroissance de ses coefficients de Fourier dans le développement en série de Fourier.

Mais auparavant, considérons le modèle de Kac pour les chaînes de polymères dans le plan qui illustre bien le cas des polynômes trigonométriques.

3.2. EXEMPLE : LES POLYMERES.

Dans le plan, on considère une chaîne de polymères dont chaque segment de longueur 1 fait un angle $\pm\, \alpha$ avec le précédent. On s'intéresse à la longueur de la chaîne constituée par n segments.



D'après Kac, le problème se modélise de la façon suivante :
soit α un angle irrationnel et ε_k des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribués selon la loi $P\{\varepsilon_k = 1\} = P\{\varepsilon_k = -1\} = \frac{1}{2}$;
la chaîne de polymères s'obtient alors en appliquant à l'origine 0 les déplacements successifs $g_1 \dots g_n$ où $g_k = [v_k\,,\,\theta_k]$ est distribué selon la loi μ définie ainsi : $v_k = \vec{i}$, $\theta_k = \varepsilon_k\,\alpha$. En posant $z_n = g_1 \dots g_n\, 0$ et en désignant par ρ_k la rotation de centre O et d'angle $e^{2i\pi\theta_k}$

$$z_n = v_1 + \rho_1\, v_2 + \dots + \rho_1\, \rho_2 \dots \rho_{n-1}\, v_n\,.$$

Donc z_n s'identifie au nombre complexe $1 + e^{2i\pi\theta_1} + \dots + e^{2i\pi(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})}$

La longueur de la chaîne est donc : $S_n = \|1 + e^{2i\pi\varepsilon_1\alpha} + \dots + e^{2i\pi(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1})\alpha}\|$.

Kac montre que $E\, S_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} cn\ (c>0)$ et $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ ce qui est un résultat voisin mais plus fort que celui obtenu en appliquant la proposition précédente avec $f(x) = e^{2i\pi x}$ car on considère ici une mesure initiale invariante alors que Kac fixe la direction du premier pas.

4.1. CAS NON SYMETRIQUE AVEC UN SEUL ANGLE, PAR LA PREMIERE METHODE.

On considère encore le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, mais un seul angle α irrationnel et l'opérateur P sur $\mathbb{T}$:

$$P\varphi(x) = p\ \varphi(x+\alpha) + q\ \varphi(x-\alpha) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p,q>0\ , p+q=1 \\ p \neq \frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

Soit $f \in L^2(\pi)$ avec $\int f\, d\pi = 0$ et S_n les sommes de Birkhoff le long des trajectoires de la chaîne de Markov de noyau P : $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

On suppose la chaîne de Markov ergodique et on se propose de prouver le théorème suivant :

Théorème 1. *Dans chacune des deux situations suivantes :*
* α *est irrationnel dont les éléments de sa décomposition en fraction continue sont bornés et* f *est de classe* C^1
* α *est* ε*–irrationnel et* f *est de classe* $C^{1+\varepsilon}$ *avec* $\varepsilon > 0$.

On a : $$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \text{ avec } \sigma^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \, \frac{1-|p\,e^{2ik\pi\alpha}+q\,e^{-2ik\pi\alpha}|^2}{|1-p\,e^{2ik\pi\alpha}+q\,e^{-2ik\pi\alpha}|^2} .$$

Remarque.
On a $0 < \sigma^2 \leq +\infty$ car α est irrationnel, $p + q = 1$ $p\,q \neq 0$ donc $\forall k,\ |p\, e^{2ik\pi\alpha} + q\, e^{-2ik\pi\alpha}| < 1.$

Preuve. Comme dans le cas précédent, on cherche à résoudre l'équation $(I-P)g = f$ dans $L^2(\mathbb{T})$, en vue d'appliquer le théorème de Gordin [1].

Posons $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{2i\pi kx}$ avec $c_0 = 0$ et $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\, e^{2i\pi kx}$ avec $d_0 = 0$

$$\begin{aligned}[(I-P)g]\,(x) &= g(x) - p\,g(x+\alpha) - q\,g(x-\alpha)\\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\,(1 - p\,e^{2i\pi k\alpha} - q\,e^{-2i\pi k\alpha})\,e^{2i\pi kx}\\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\,(1 - e^{2i\pi k\alpha} - 2p\,i\,\sin 2\pi k\alpha)\,e^{2i\pi kx}\end{aligned}$$

donc si g est solution de l'équation $(I-P)\,g = f$, $d_k = \dfrac{c_k}{1-\cos 2\pi k\alpha + i(1-2p)\sin 2\pi k\alpha}$ avec $p \neq \frac{1}{2}$.

L'équation $(I - P)\,g = f$ admet donc une solution (qui est alors unique) dans $L^2(\mathbb{T})$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{|1-\cos 2\pi k\alpha + i(1-2p)\sin 2\pi k\alpha|^2} < +\infty$.

On va utiliser des conditions dites de "petits dénominateurs" pour trouver une condition suffisante de convergence :

$|1 - \cos 2\pi k\alpha + i(1-2p)\sin 2\pi k\alpha|^2 = (1-\cos 2\pi k\alpha)^2 + (1-2p)^2 \sin^2(2\pi k\alpha)$ est petit si $\cos 2\pi k\alpha$ est proche de 1 et $\sin 2\pi k\alpha$ proche de 0, c'est-à-dire $\|k\alpha\|$ suffisamment petit et dans ce cas ,

$$\begin{aligned}|1-\cos 2\pi k\alpha + i(1-2p)\sin 2\pi k\alpha|^2 &= (1-\cos 2\pi\,\|k\alpha\|)^2 + (1-2p)^2 \sin^2(2\pi\,\|k\alpha\|)\\ &\sim 4\pi^2\,(1-2p)^2\,\|k\alpha\|^2 .\end{aligned}$$

Il suffit donc d'imposer la convergence de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{\|k\alpha\|^2}$ pour obtenir une solution g.

* Soit α un irrationnel dont les éléments de la décomposition en fractions continues sont bornés, et f de classe C^1.

D'une part, il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité suivante soit vraie pour tout entier $k >$

$$k \, \|k \, \alpha\| \geq C$$

d'autre part, f étant de classe C^1, $\sum_{-\infty}^{+\infty} k^2 \, |c_k|^2 < +\infty$

or $$\frac{|c_k|^2}{\|k\alpha\|^2} = \frac{k^2 \, |c_k|^2}{k^2 \|k\alpha\|^2} \leq C \, k^2 \, |c_k|^2 \quad \text{donc} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{\|k\alpha\|^2} < +\infty .$$

* Si f est de classe $C^{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{-\infty}^{+\infty} k^{2(1+\varepsilon)} \, |c_k|^2 < +\infty$. Si α est ε-irrationnel, il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité suivante soit vraie pour tout entier $k > 0$: $k^{1+\varepsilon} \, \|k \, \alpha\| \geq C$.

Or $$\frac{|c_k|^2}{\|k\alpha\|^2} = \frac{k^{2(1+\varepsilon)} \, |c_k|^2}{k^{2(1+\varepsilon)} \, \|k\alpha\|^2} \leq C^{-2} \, k^{2(1+\varepsilon)} \, |c_k|^2 \quad \text{donc} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{\|k\alpha\|^2} < +\infty$$

d'où le théorème 1 en appliquant le théorème de Gordin [1].

4.2. CAS SYMETRIQUE AVEC UN SEUL ANGLE, PAR LA PREMIERE METHODE.

On considère toujours le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, mais un seul angle α irrationnel et l'opérateur P défini par :

$$P \, \varphi(x) = \frac{1}{2} \, \varphi(x + \alpha) + \frac{1}{2} \, \varphi(x - \alpha) .$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ avec $\int f \, d\pi = 0$ et S_n les sommes de Birkhoff le long des trajectoires de la chaîne. La chaîne de Markov est ergodique et on se propose de prouver la proposition suivante :

Proposition 2. *Soit f de classe C^3. Alors pour presque tout irrationel α, on a la convergence:*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \text{ avec } \sigma^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \frac{\cos^2(\pi k\alpha)}{\sin^2(\pi k\alpha)} \ .$$

Preuve. Posons $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{2i\pi kx}$ avec $c_0 = 0$ et $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\, e^{2i\pi kx}$ avec $d_0 = 0$

$$[(I-P)g]\,(x) = g(x) - \frac{1}{2}g(x+\alpha) - \frac{1}{2}g(x-\alpha)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\,(1-\cos 2\pi k\alpha)\, e^{2i\pi kx}$$

donc si g est solution de l'équation $(I-P)\,g = f$, $d_k = \dfrac{c_k}{2\sin^2(\pi k\alpha)}$

soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, pour presque tout irrationnel α, il existe $C > 0$ tel que $\forall k > 0$, $\| k\,\alpha \| \geq \frac{C}{k^{1+\varepsilon}}$ f étant de classe C^3, il existe $c > 0$ tel que $\forall k > 0$, $|c_k| \leq \frac{c}{k^3}$

donc pour tout entier $k > 0$, $\dfrac{|c_k|^2}{\| k\,\alpha \|^4} \leq \dfrac{C^{-4}}{k^{6-4(1+\varepsilon)}}$ avec $6 - 4(1+\varepsilon) > 1$

donc $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{\| k\,\alpha \|^4} < +\infty$.

Or si $\| k\alpha \|$ est petit : $\sin^4(\pi k\alpha) = \sin^4(\pi\, \| k\,\alpha \|) \sim \pi^4\, \| k\,\alpha \|^4$ et $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{\sin^4(\pi k\alpha)} < +\infty$.

L'équation $(I-P)\,g = f$ admet donc une solution dans $L^2(\mathbb{T})$ et en appliquant le théorème de Gordin [1], on prouve la proposition 2.

Néanmoins, ce résultat n'est pas satisfaisant car il n'est valable que pour des fonctions de classe C^3. On va donc utiiser une méthode plus fine pour améliorer la classe des f convenables.

5. CAS SYMETRIQUE AVEC UN SEUL ANGLE, PAR LA DEUXIEME METHODE.

On se place sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on considère un seul angle α irrationnel et l'opérateur P sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$:

$$P\,\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\varphi(x+\alpha) + \frac{1}{2}\,\varphi(x-\alpha).$$

Soit $f \in L^2(\pi)$ avec $\int f \, d\pi = 0$ et S_n les sommes de Birkhoff le long des trajectoires de la chaîne. Notons $\sigma^2 = \lim\limits_{n\to\infty} E \dfrac{S_n^2}{n}$ et supposons la chaîne de Markov ergodique.

Théorème 2. *Dans chacune des deux situations suivantes,*

* *α est irrationnel, les éléments de sa décomposition en fractions continues sont bornés et f est de classe C^1*

* *α est ε–irrationnel et f est de classe $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ on a la convergence :*

$$S_n : \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) .$$

Preuve. En vue d'utiliser le deuxième théorème de Kipnis [2], on cherche à résoudre $(I - P)^{1/2} g = f$ supposons $f(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{2i\pi kx}$

avec $c_0 = 0$ et $g(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} d_k \, e^{2i\pi kx}$ avec $d_0 = 0$.

P est une contraction donc $(I-P)^{1/2}$ est bien défini et $(I-P)^{1/2} g = g - \sum\limits_{n-1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} P^n g$

avec $\alpha_n = \frac{1}{2}\, (1-\frac{1}{2})...(n-1-\frac{1}{2})$.

On a $P^n g\,(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} d_k \,(\cos 2\pi k\alpha)^n \, e^{2i\pi kx}$

donc
$$[(I-P)^{1/2} g]\,(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k \,(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}\, (\cos 2\pi k\alpha)^n)\, e^{2i\pi kx}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k \,(1 - \cos 2\pi k\alpha)^{1/2}\, e^{2i\pi kx} .$$

Si g est solution de $(I-P)^{1/2} g = f$, alors $d_k = \dfrac{c_k}{\sqrt{2}\,|\sin \pi k\alpha|}$

l'équation $(I-P)^{1/2} g = f$ admet donc une solution dans $L^2(\pi)$ si et seulement si $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{|c_k|^2}{\sin^2(\pi k\alpha)} < +\infty$.

Comme il a été vu en 4.1, cette condition est réalisée dans chacune des situations envisagées. Les hypothèses formulées permettent donc d'obtenir une solution de l'équation $(I-P)^{1/2} g = f$. Avec les notations déjà introduites on peut utiliser le théorème 1.3 de Kipnis [2] pour écrire S_n sous la forme :

$$S_n = M_n + \xi_n$$

où M_n est une martingale pour $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{1\leq j\leq n} |\xi_n| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

de plus, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E|\xi_n|^2 = 0$.

Posons $Z_n = M_n - M_{n-1}$ avec $M_0 \equiv 0$ alors S_n devient : $S_n = \sum_{j=1}^{n} Z_n + \xi_n$

on a $E(Z_{n+1} \mid F_n) = E(M_{n+1} \mid F_n) - M_n = 0$

et $\frac{1}{n} E(Z_1 + \dots + Z_n)^2 = \frac{1}{n} E\, S_n^2 - \frac{1}{n} E|\xi_n|^2$

donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E(Z_1 + \dots + Z_n)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\, S_n^2 = \sigma^2 < +\infty$ car $f \in Im(I-P)^{1/2}$.

D'après le théorème 1.1 de Kipnis [2], la loi de $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Z_j$ converge donc vers une loi de Gauss de moyenne nulle et de variance σ^2 .

Et puisque la loi de $\frac{1}{\sqrt{n}} \xi_n$ devient négligeable quand $n \to \infty$, on en déduit le théorème central limite pour S_n : $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

d'où le théorème.

Dans ce cas particulier, il semble que le meilleur résultat possible soit obtenu... mais cela reste à prouver !

Afin d'apporter quelques arguments en faveur de cette affirmation, on se propose d'étudier en 7 la variance de S_n. En effet, il suffit de prouver que $\lim_{n\to\infty} E \frac{S_n^2}{\sqrt{n}} = +\infty$ pour pouvoir affirmer que le théorème central limite est faux pour $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

6. CAS SYMETRIQUE AVEC PLUSIEURS ANGLES.

On considère le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, des angles $\alpha_1, \dots , a_{2N}$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_N$ rationnellement indépendants et $\alpha_{j+N} = -\alpha_j$; les poids p_j $(1 \leq j \leq 2N)$ $p_j > 0$,

$\sum_{j=1}^{2N} p_j = 1$ et $p_{j+N} = p_j$ $(1 \leq j \leq N)$ avec $N \geq 2$. Soit P l'opérateur sur $\mathbb{T}$: $P\,\varphi(x) = \sum_{j=1}^{2N} p_j\,\varphi(x+\alpha_j)$, $f \in L^2(\mathbb{T})$ avec $\int f\,d\pi = 0$ et S_n les sommes de Birkhoff le long des trajectoires de la chaîne de Markov de noyau P. On suppose la chaîne de Markov ergodique et on se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 3. *Pour presque tout ensemble* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ d'angles rationnellement indépendants et pour f de classe $C^{\frac{1}{2}+\frac{1}{N}}$ au moins

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\sigma^2) \text{ avec } \sigma^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \; \frac{1-(\sum_{j=1}^{N} p_j \cos 2\pi k\alpha_j)^2}{16(\sum_{j=1}^{N} p_j \sin^2(2\pi k\alpha_j))^2}\,.$$

Remarques.

a) f de classe C^α signifie que la dérivée de f d'ordre $[\alpha]$ est höldérienne d'exposant $\alpha - [\alpha]$.

b) Pour $N \neq 1$, on devrait ici supposer f de classe $C^{3/2}$ au moins, alors que l'énoncé du théorème 2 montre que $C^{1+\varepsilon}$ suffit. Dans le cas $N > 1$, une étude plus précise permettrait sans doute d'obtenir un meilleur résultat.

Preuve. On cherche encore à résoudre l'équation $(I-P)^{1/2} g = f$ dans $L^2(\mathbb{T})$.

Posons $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{2i\pi kx}$ avec $c_0 = 0$ et $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\, e^{2i\pi kx}$ avec $d_0 = 0$.

$$[(I-P)^{1/2} g](x) = g(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\,(1 - \sum_{j=1}^{2N} p_j\, e^{2i\pi k\alpha_j})^n\, e^{2i\pi kx}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\,(1 - \sum_{j=1}^{2N} p_j\, e^{2i\pi k\alpha_j})^{1/2}\, e^{2i\pi kx}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k\,(1 - \sum_{j=1}^{N} p_j \cos 2\pi k\alpha_j)^{1/2}\, e^{2i\pi kx} \quad \text{car } \alpha_{j+N} = -\alpha_j \text{ et } p_{j+N} = p_j$$

donc si g est solution de l'équation $(I-P)^{1/2} g = f$, $d_k = \dfrac{c_k}{(2\sum_{j=1}^{N} p_j \sin^2(\pi k\alpha_j))^{1/2}}$.

L'équation $(I-P)\,g = f$ admet donc une solution dans $L^2(\mathbb{T})$ si et seulement si

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{\sum_{j=1}^{2N} p_j \sin^2(\pi k\alpha_j)} < +\infty\,.$$

Or $\sum_{j=1}^{N} p_j \sin^2(\pi k\alpha_j) = \sum_{j=1}^{N} p_j \sin^2(\pi \,\|k\alpha_j\|)$ est petit si tous les termes de la somme sont petits, en particulier si tous les $\|k\alpha_j\|$ sont suffisamment proches de 0. Et alors $\sum_{j=1}^{N} p_j \sin^2(\pi k\alpha_j) \sim \pi^2 \sum_{j=1}^{N} p_j \,\|k\alpha_j\|^2$, il suffit donc d'imposer la convergence de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{\sum_{j=1}^{N} p_j \,\|k\alpha_j\|^2}$ pour obtenir une solution g.

Cette condition est réalisée pour presque tout ensemble $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ d'angles rationnellement indépendants, si f est de classe $C^{\frac{1}{2}+\frac{1}{N}+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$.

En effet, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $k > 0$, $|c_k| \le \frac{c}{k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{N}+\varepsilon}}$ et d'après Khintchine pour presque tout ensemble $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité suivante soit vraie pour tout entier $k > 0$ et pour tout j :

$$\|k\alpha_j\| \ge \frac{C}{k^{(1+\varepsilon)\frac{1}{n}}}$$

ainsi, $$\frac{|c_k|^2}{\sum_{j=1}^{N} p_j \,\|k\alpha_j\|^2} \le \frac{c\,C^{-2}}{k^{1+\frac{2}{N}+2\varepsilon-\frac{2}{N}(1+\varepsilon)}} = \frac{c}{k^{1+2\varepsilon-\frac{2\varepsilon}{N}}}$$

comme $N \ge 2$, $2\varepsilon - \frac{2\varepsilon}{N} \ge \varepsilon > 0$ donc $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+2\varepsilon-\frac{2\varepsilon}{N}}} < +\infty$

d'où $$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|^2}{\sum_{j=1}^{N} p_j \,\|k\alpha_j\|^2} < +\infty\,.$$

Enfin, on déduit le théorème 3 des théorèmes de Kipnis [2] comme précédemment.

7.1. CALCUL EXPLICITE DE LA VARIANCE.

On considère le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, les angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ et les poids p_i $(1 \leq i \leq N)$, $p_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, l'opérateur P : $\quad P\,\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i\, \varphi(x + \alpha_i)$.

Soit $f \in L^2(\pi)$ avec $\int f = 0$ et $S_n(x)$ les sommes de Birkhoff le long des trajectoires de la chaîne de noyau P : $\quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

On se propose de calculer explicitement la variance de S_n afin d'évaluer son comportement limite par rapport à n :

$$\operatorname{var} S_n = \int E_x(S_n^2(x))\, d\pi(x)$$

$$E_x(S_n^2(x)) = E_x\Big(\sum_{k=1}^{n} f^2(x_k) + 2 \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} f(x_k)\, f(x_\ell)\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E_x\, f^2(x_k) + 2 \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} E_x\, f(x_k)\, f(x_\ell))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P^k f^2(x) + 2 \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} P^k(f\, P^{\ell-k} f)(x) \text{ du fait du caractère markovien.}$$

Puis $\displaystyle\int E_x(S_n^2(x))\, d\pi(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle P^k f^2, 1\rangle + 2 \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} \langle P^k(f\, P^{\ell-k} f), 1\rangle$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle f^2, 1\rangle + 2 \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} \langle f, P^{\ell-k} f\rangle \text{ car } \pi \text{ est invariante}$$

$$= n \int f^2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\ell-k=p} \langle f, P^{\ell-k} f\rangle$$

$$= n \int f^2 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (n-p) \langle f, P^p f\rangle$$

d'où

$$\boxed{\operatorname{var} S_n = n \int f^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \langle f, P^k f\rangle}\ .$$

7.2. COMPORTEMENT LIMITE DE LA VARIANCE DANS UN CAS SIMPLE.

Supposons que la fonction f et les angles $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ ($N = 1$ ou $N \geq 2$) soient tels qu'il existe une fonction $g \in L^2(\pi)$ telle que $(I - P)\, g = f$. (voir paragraphes 3 et 4). La variance devient alors :

$$\operatorname{var} S_n = n \int f^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\,(<f,P^k g> - <f,P^{k+1} g>$$

$$= n \int f^2 - 2 \sum_{k=2}^{n} (<f,P^k g> + 2(n-1) <f,Pg>$$

$$= n \int f^2 + 2n <f,Pg> - 2 \sum_{k=1}^{n} (<f,P^k g>$$

donc $$\operatorname{var} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \int f^2 + <f,Pg> - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} <f,P^k g>.$$

D'après l'ergodicité et le théorème de Von Neumann

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} <f,P^k g> \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \int f^2 + 2 <f,Pg>$$

or $$\int f^2 + 2 <f,Pg> = <f,f + 2Pg> = <g-Pg, g+Pg> = <g,g> - <Pg,Pg>$$

donc $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \operatorname{var} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \|g\|^2 - \|Pg\|^2}\ .$$

Remarque. On retrouve bien dans ce cas spécial le résultat énoncé par Gordin [1].

8. QUESTIONS ENCORE OUVERTES.

Il semble que les deux derniers théorèmes obtenus soient optimaux par rapport à la classe de fonctions. Il paraît alors utile d'étudier un ensemble de contre-exemples portant sur la régularité de la fonction et l'irrationnalité des angles, conduisant à des situations variées où le théorème central limite ne serait pas valable.

D'où l'intérêt en particulier de l'étude du comportement limite de la variance de S_n car si $\lim\limits_{n\to\infty} E\dfrac{S_n^2}{n} = +\infty$, le théorème central limite n'est alors pas valable pour $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$; la formule de 7.1 est alors utile.

Dans ce cadre, le cas des fonctions en escalier, pour lesquelles les coefficients de Fourier sont d'ordre $\frac{1}{k}$, semble particulièrement intéressant.

Mais il se pose alors la question du théorème central limite pour $\dfrac{S_n}{(E(S_n^2)^{1/2})}$ ...

BIBLIOGRAPHIE

1. **M.I. GORDIN and B.A. LIFSIC** : *"The central limit theorem for stationary Markov processes"*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 239 (1978) English Transl. in Soviet Math. Dokl. 19 (1978).

2. **C. KIPNIS and S.R.S. VARADHAN** : *"Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov process and applications to simple exclusions"*. Commun. Math. Phys. 104, 1-19 (1986).

3. **M.I. GORDIN** : Dokl. Akad. Nauk SSSR 188 (1969).

4. **P. BILLINGSLEY** : Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961).

5. **I.A. IBRAGIMOV** : Teor. Versjanost à Primenenen 8 (1963).