LOÏC HERVE

Comportement asymptotique dans l'algorithme de transformée en ondelettes. Lien avec la régularité de l'ondelette

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993, fascicule 2 « Fascicule de probabilités », , p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993___2_A4_0>

Comportement asymptotique dans l'algorithme de transformée en ondelettes. Lien avec la régularité de l'ondelette.

HERVE Loïc

I.R.M.A.R.-Université de Rennes 1

Laboratoire de probabilités

Campus de Beaulieu. 35042 RENNES CEDEX

Novembre 1993

Résumé. Nous faisons l'étude du comportement asymptotique dans l'arbre de filtrage d'une transformée en ondelettes. en particulier en fonction de l'ordre de régularité de l'ondelette.
Abstract. We study the asymptotic performance for a Wavelets Transform. in particular as a function of the regularity order of the wavelet.

1. Introduction

Analyses multirésolutions. On note $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ l'espace de Lebesgue usuel des fonctions mesurables et de module carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Rappelons qu'une analyse multirésolution [8] [9] est par définition une famille $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ tels que
a) $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{\vec{0}\}$ et $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.
b) $V_j \subset V_{j+1}$.
c) $f \in V_j$ est équivalent à : $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$.
d) Il existe une fonction $\phi \in V_0$, appelée *fonction d'échelle*, telle que la famille $\{\phi(\cdot + k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz de V_0.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, le système $\{\phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j \cdot -k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz de V_j. Comme $V_0 \subset V_1$, il existe une suite $(h_n^0)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ telle que l'on ait *l'équation d'échelle*

$$\phi(\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n^0 \phi(2\cdot +n) \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Dans toute la suite, on considère une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ telle que $(h_n^0)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit à support fini. Pour fixer les idées, on supposera que $h_n^0 = 0$ pour tout $n \notin [0, N]$, où $N \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, on pose

$$H_0(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} h_k^0 e^{2i\pi k\lambda}, \quad \lambda \in [0,1].$$

On sait que $H_0(0) = 1$ et $H_0(\frac{1}{2}) = 0$ [9] [3]. Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme trigonométrique v, avec $v(\frac{1}{2}) \neq 0$, tels que

$$H_0(\lambda) = 2^{-r}(1 + e^{2i\pi\lambda})^r v(\lambda). \tag{2}$$

Afin de simplifier les rappels ci-dessous sur la construction de l'ondelette et la transformée en ondelettes, nous supposerons (uniquement dans l'introduction) que $\{\phi(\cdot + k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de V_0. Rappelons que, pour $m \in \mathbb{N}$ donné, il existe une analyse multirésolution telle que $(h_n^0)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit à support fini, et telle que la fonction d'échelle ϕ soit de classe C^m et engendre par translations entières une base orthonormée de V_0 [2].

Construction de l'ondelette [8] [9] [3]. Pour $j \in \mathbb{Z}$, on note W_j le sous-espace de V_{j+1} orthogonal à V_j. Soit

$$h_n^1 = (-1)^n \overline{h_{1-n}^0}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

L'ondelette ψ est définie par

$$\psi(\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n^1 \phi(2\cdot + n). \tag{3}$$

La fonction ψ est dans W_0 et $\{\psi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de W_0. Le système $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est alors une base orthonormée de W_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot - k),\ j,k \in \mathbb{Z}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Rappelons également que les fonctions ϕ et ψ sont à support compact et admettent la même régularité. On notera $g_{j,k}(\cdot) = 2^{\frac{j}{2}} g(2^j \cdot - k)$ pour $g = \phi$ et ψ.

Formules d'analyse et de synthèse [8] [3]. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit hilbertien usuel sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Pour $f \in V_0$, on considère les suites x, x_0, x_1 de $\ell^2(\mathbb{Z})$ définies par

$$\begin{aligned} x(n) &= \langle f, \phi(\cdot - n)\rangle,\ n \in \mathbb{Z} \\ x_0(n) &= \langle f, \phi_{-1,n}\rangle,\ n \in \mathbb{Z} \\ x_1(n) &= \langle f, \psi_{-1,n}\rangle,\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Grâce à (1) et (3), on obtient les formules (dites d'analyse) :

$$x_\ell(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^\ell x(2n-k), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ell = 0, 1.$$

En retour, l'égalité $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\phi_{0,n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_0(n)\phi_{-1,n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_1(n)\psi_{-1,n}$ fournit la formule de synthèse (qu'on notera parfois pour simplifier $x = \mathcal{S}(x_0, x_1)$) :

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\ell=0}^{1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{2n-k}^\ell x_\ell(n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Si on oublie l'aspect fonctionnel dans la description ci-dessus, on remarque que, partant d'une suite quelconque x de $\ell^2(\mathbb{Z})$, on a construit par un procédé de filtrage-décimation deux suites x_0, x_1 de $\ell^2(\mathbb{Z})$, qui grâce à la formule de synthèse, redonnent x. Cette propriété permet de définir

L'algorithme de transformée en ondelettes [8] [3]. On note T_0 et T_1 les opérateurs définis sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$(T_\ell x)(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^\ell x(2n-k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \ell = 0, 1.$$

Soient $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $j \in \mathbb{N}^*$. L'algorithme se décompose de la manière suivante :

- *Analyse.* On calcule les $(j+1)$ suites $x_1 = T_1 x, x_2 = T_1 T_0 x, \ldots, x_j = T_1 T_0^{j-1} x$ et $y_j = T_0^j x$.

- *Synthèse. Pour $m = j, j-1, \ldots, 1$, on itère la procédure $y_{m-1} := \mathcal{S}(y_m, x_m)$.*

- *On retrouve finalement $y_0 = x$.*

Dans la pratique, la suite x analysée admet un support fini de longueur L (en général L est nettement supérieur à N). Les supports des suites $x_1, x_2, \ldots, x_j$ et y_j sont alors respectivement de longueur $\frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \ldots, \frac{L}{2^j}$, et $\frac{L}{2^j}$ (noter que la somme est égale à L). On réduit ensuite la longueur de ces supports en effectuant une approximation $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_j, \tilde{y}_j$ de $x_1, x_2, \ldots, x_j, y_j$ (phase de compression des données). Enfin on applique l'algorithme de synthèse aux suites $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_j, \tilde{y}_j$, ce qui fournit une approximation de x.

Transformée en ondelettes et régularité de ϕ. Dans la pratique, on observe que la régularité de ϕ joue un rôle important dans la transformée en ondelettes, mais essentiellement quand l'ordre de régularité est ≤ 1 [10]. Au delà de la classe C^1, la régularité de ϕ ne semble pas fournir de gains substanciels en efficacité pour la transformée en ondelettes. L'objet de ce travail est de démontrer un résultat mathématique qui corrobore (en un certain sens) cette observation. A cet effet, nous nous intéresserons uniquement à la partie "analyse" de l'algorithme, qui est essentiellement basée sur l'itération de T_0.

L'objet de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $\{T_0^j,\ j \geq 1\}$, et en particuler de faire cette étude en fonction de la régularité de ϕ, plus précisément en fonction du coefficient

$$s_1 = s_1(\phi) = \sup\{s \in \mathbb{R}\ :\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^s |\hat{\phi}(\lambda)| d\lambda < +\infty\},$$

qui fournit une bonne estimation de la régularité de ϕ : si $s_1 > 0$, alors $\phi \in \mathcal{C}^\alpha$ pour tout α tel que $0 < \alpha < s_1$. On a noté $\mathcal{C}^\alpha$ l'ensemble des fonctions f telles que f est $[\alpha]$-fois dérivable et $f^{[\alpha]}$ est uniformément $(\alpha - [\alpha])$-hölderienne. En outre on peut calculer le coefficient s_1 de la manière suivante (voir [5] [6]) : soit, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} |v(\frac{k}{2^n}) \cdots v(\frac{k}{2})|$. Alors

$$s_1 = \lim_{n \to +\infty} (r - \log_2 \frac{S_{n+1}}{S_n}), \quad \text{la vitesse de convergence étant exponentielle.} \tag{4}$$

Comportement de $\{T_0^j,\ j \geq 1\}$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ (rappels) : on sait que, pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{j \to +\infty} \|\Pi_{-j} f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} = 0,$$

où on a noté Π_j la projection orthogonale sur V_j. Si en outre $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on peut montrer que $\|\Pi_{-j} f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} \leq C_\phi 2^{-\frac{j}{2}} \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R})}$.

Soient $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)\phi(t-n)$. Notons que

$$\langle f, \phi_{-j,k} \rangle = (T_0^j x)(k), \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

D'après ce qui précède, on obtient

$$\lim_{j \to +\infty} \|T_0^j x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = 0,$$

et si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\|2^{\frac{j}{2}} T_0^j x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq C_\phi \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R})}$.

A l'exception de la constante C_ϕ, ces dernières propriétés sont communes à toutes les analyses multirésolutions, et ne permettent donc pas de comparer véritablement les transformées en ondelettes. Par conséquent, nous limiterons notre étude à des sous-espaces propres de $\ell^2(\mathbb{Z})$, stable par T_0 (mais largement représentatifs en pratique). Nous utiliserons pour cela les notations suivantes :

Notations :

• Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $(\mathbb{L}^p(\mathbf{T}), \|\cdot\|_p)$ est l'espace de Lebesgue usuel pour les fonctions 1-périodiques, à valeurs dans $\mathbf{C}$.

• $(E^0, \|\cdot\|_\infty)$ est le sous-espace de $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$ des fonctions continues.

• $(E^1, \|\cdot\|_1)$ est le sous-espace E^0 des fonctions uniformément lipschitziennes, muni de la norme

$$\|X\|_1 = \|X\|_\infty + \sup_{\lambda \neq \lambda'} \left(\frac{|X(\lambda') - X(\lambda)|}{|\lambda' - \lambda|} \right).$$

• Pour $X \in \mathbb{L}^1(\mathbf{T})$, on note $J(X)$ la suite des coefficients de Fourier de X :

$$(J(X))(n) = \int_0^1 X(\lambda) e^{-2i\pi n\lambda} d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

• Pour tout espace de Banach $(B, \|\cdot\|)$ inclus dans $\mathbb{L}^1(\mathbf{T})$, on définit l'espace de Banach $J(B)$ des suites $x = J(X)$, où $X \in B$, et on munit $J(B)$ de la norme $\|x\|_{J(B)} = \|X\|_B$.

Plan : dans le paragraphe suivant, nous énonçons les résultats obtenus pour l'étude des itérées de T_0 sur les espaces

$$\mathcal{S} = J(\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) \quad , \quad \mathcal{S}^1 = J(E^1) \quad , \quad \mathcal{S}^0 = J(E^0),$$

et nous donnons un développement asymptotique de $T_0^j x$ pour $x \in \mathcal{S}^1$. Les preuves ont été regroupées à la fin de ce travail. Le choix des espaces de suites de la forme $J(B)$ s'explique de la manière suivante : nous prouverons dans le paragraphe 3 que $T_0 \circ J = J \circ P_0$, où P_0 est un opérateur de transfert défini sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$, E^0, et E^1. L'étude de T_0 sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^0$, $\mathcal{S}^1$ est ainsi ramenée à celle de P_0 respectivement sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$, E^0, et E^1. Or, l'opérateur P_0 étant quasi-compact sur E^1 [4], il admet des propriétés spectrales remarquables, qui généralisent celles obtenues pour les opérateurs de transfert positifs [1] [7].

2. Etude des itérées de T_0.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ telle que la suite $(h_n^0)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'équation d'échelle (1) vérifie $h_n^0 = 0$ pour tout $n \notin [0, N]$.

Etude sur $\mathcal{S}$: ce premier résultat met en évidence le lien entre le comportement des itérées de T_0 et le coefficient s_1.

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{S} = J(\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T}))$ muni de la norme $\|x\|_S = \|X\|_\infty$, pour $x = J(X) \in \mathcal{S}$. L'opérateur T_0 est borné sur $\mathcal{S}$, et les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) La suite $\{2^{\frac{j}{2}} T_0^j,\ j \geq 1\}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{S}$.
ii) $\hat{\phi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
iii) $s_1 > 0$.

Exemple : $H_0(\lambda) = 2^{-1}(1 + e^{2i\pi\lambda})$ (filtre de Haar). On a $\hat{\phi}(\lambda) = e^{i\pi\lambda}\frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Les itérées de T_0 ne sont donc pas uniformément bornées dans $\mathcal{S}$.

Etude sur $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^0$: on supposera désormais que $s_1 > 0$. On considère la matrice carrée suivante :

$$A_0 = (\alpha_0(k,l))_{k,l=0,\ldots,N}, \quad \text{où } \alpha_0(k,l) = h^0_{2k-\ell}, \quad k,l = 0,\ldots,N.$$

Les conditions $H_0(0) = 1$ et $H_0(\frac{1}{2}) = 0$, équivalentes à $\sum_n h^0_{2n} = \sum_n h^0_{2n+1} = 1$, assurent que la somme des coefficients sur chaque colonne de A_0 est égale à 1. D'où ${}^t A\vec{e} = \vec{e}$, avec $\vec{e} = {}^t [1,\ldots,1]$. On en déduit que 1 est valeur propre de A_0.

Théorème 2.2. *Soit $\mu_0 = \sup\{|\mu|\ ,\ \mu \in spect(A_0),\ \mu \neq 1\}$. On a $\mu_0 < 1$, et il existe un unique vecteur $\gamma_0 = (\gamma_0(n))_{n=0}^N$ invariant par A_0 tel que $\sum_{n=0}^N \gamma_0(n) = 1$.*

Soit $\mathcal{S}^1 = J(E^1)$ muni de la norme $\|x\|_{S^1} = \|X\|_1$, pour $x = J(X) \in \mathcal{S}^1$. Alors T_0 est un opérateur borné sur $\mathcal{S}^1$. Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_0, \frac{1}{2}\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que

$$\|2^{\frac{j}{2}} T_0^j x - X(0)\gamma_0\|_{S^1} \leq C_\delta \delta^j \|x\|_{S^1}, \quad \forall x = J(X) \in \mathcal{S}^1, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*. \tag{6}$$

Dans (6), le vecteur γ_0 a été identifié à un élément de $\ell^2(\mathbb{Z})$. En outre, du fait que E^1 est dense dans E^0, on obtient le

Corollaire 2.3. *Soit $\mathcal{S}^0 = J(E^0)$ muni de la norme $\|x\|_{S^0} = \|X\|_\infty$, pour $x = J(X) \in \mathcal{S}^0$. Alors T_0 est un opérateur borné sur $\mathcal{S}^0$, et si $x = J(X) \in \mathcal{S}^0$, alors la suite $\{2^{\frac{j}{2}} T_0^j x,\ j \geq 1\}$ converge dans $\mathcal{S}^0$ vers $X(0)\gamma_0$.*

Soit $x \in \mathcal{S}^1$. A partir d'un certain rang $j_0 = j_0(x) \in \mathbb{N}^*$, appliquer T_0 à $T_0^j x$ revient en substance à diviser $T_0^j x$ par $\sqrt{2}$. L'analyse est donc d'autant plus efficace que le réel δ dans (6) peut être choisi petit. Cette dernière propriété est reliée aux nombres μ_0 et s_1 de la manière suivante :

Proposition 2.4. *Soit δ_0 la borne inférieure des réels δ tels que (6) soit satisfaite. On a $\delta_0 \leq \max\{\mu_0, \frac{1}{2}\}$. Si en outre l'entier r dans (2) est tel que $r \geq 2$, alors $\delta_0 = \max\{\mu_0, \frac{1}{2}\}$, et*

$$\frac{1}{2} \leq \delta_0 \leq \max\{2^{-s_1}, \frac{1}{2}\}. \tag{7}$$

Remarques :

a) La formule (7) assure que δ_0 décroit jusqu'à $\frac{1}{2}$ quand s_1 croît dans $]0,1]$. En revanche, si $s_1 > 1$, on a $\delta_0 = \frac{1}{2}$. Ceci est bien en accord avec les observations pratiques mentionnées dans l'introduction. Cependant, si $s_1 > 1$, il est possible de préciser l'estimation donnée par (6) (voir le développement asymptotique ci-dessous).

b) Pour $x = J(X)$, avec X suffisamment régulière. on obtient

$$\begin{aligned}\left(\sum_n |x(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\pi\left(\sum_n |nx(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \|X\|_\infty + \|X'\|_\infty = \|X\|_1 = \|x\|_{S^1} \\ &\leq \sum_n |x(n)| + 2\pi \sum_n |nx(n)|.\end{aligned}$$

c) La vitesse de convergence dans (6) dépend aussi de $\|x\|_{S^1}$. En pratique, x est une suite à support fini (éventuellement assez grand). On obtient. pour tout $j \geq 1$.

$$\left\| T_0^j x - 2^{-\frac{j}{2}}\left(\sum_n x(n)\right)\gamma_0 \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq C_\delta 2^{-\frac{j}{2}}\delta^j \left(\sum_n |x(n)| + 2\pi\sum_n |nx(n)|\right),$$

et

$$\left(2\pi \sum_{n \notin \{0,\ldots,N\}} |n(T_0^j x)(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_\delta 2^{-\frac{j}{2}}\delta^j \left(\sum_n |x(n)| + 2\pi\sum_n |nx(n)|\right).$$

d) Le théorème 2.2 se traduit également de la manière suivante : on suppose ici pour simplifier que $\{\phi(\cdot + k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de V_0. Soit $f \in V_0$. Sa transformée de Fourier $\hat{f}$ vérifie $\hat{f}(\lambda) = X(\lambda)\hat{\phi}(\lambda)$. où $X \in \mathbb{L}^2(\mathbf{T})$. Supposons que $X \in E^1$. Rappelons qu'on a noté Π_j la projection orthogonale sur V_j. On obtient, grâce à (5), pour tout δ tel que $\delta > \max\{\mu_0, \frac{1}{2}\}$,

$$\|2^{\frac{j}{2}}\Pi_{-j}(f) - X(0)\sum_{n=0}^{N}\gamma_0(n)\phi_{-j,n}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} \leq C_\delta \delta^j \|X\|_1, \quad \forall j \geq 1.$$

Développement asymptotique de $T_0^j x$.

On note $M = [s_1]$, si $s_1 \notin \mathbb{N}$, et $M = [s_1] - 1$ sinon (on a $M < r \leq N$). Pour $m = 0, \ldots, r$. on définit

$$\begin{aligned} H_m(\lambda) &= 2^{r-m}(1 + e^{2i\pi\lambda})^{r-m} v(\lambda) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-m} h_{m,k} e^{2i\pi k\lambda}. \end{aligned}$$

et on note $A_m = (\alpha_m(k,l))_{k,l=0,\dots,N-m}$ la matrice carrée définie par :

$$\alpha_m(k,l) = h_{m,2k-\ell}, \quad k,l = 0,\dots,N-m.$$

Lemme 2.5. *Soit $\mu_M = \sup\{|\mu| \ , \ \mu \in spect(A_M), \ \mu \neq 1\}$. On a $\mu_M < 1$. En outre, pour $m = 0,\dots,M$, il existe un unique vecteur $\gamma_m = (\gamma_m(n))_{n=0}^{N-m}$ invariant par A_m tel que $\sum_{n=0}^{N-m} \gamma_m(n) = 1$.*

On notera $\Gamma_m(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-m} \gamma_m(n)e^{2i\pi n\lambda}$. Pour simplifier (voir remarque 1) ci-dessous), on considère dans l'énoncé du théorème suivant une suite $x = (x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ à support fini, et et on définit $X(\lambda) = \sum_n x(n)e^{2i\pi n\lambda}$. La fonction $X - X(0)\Gamma_0$ s'annule en 0, et est donc divisible par

$$S(\lambda) = \frac{e^{2i\pi\lambda} - 1}{2i} = e^{i\pi\lambda} \sin \pi\lambda.$$

On note α_m la suite des coefficients de Fourier de la fonction $(S(\cdot))^m$:

$$\alpha_m(n) = (2i)^{-m}(-1)^{m-n}C_m^n, \quad \forall n = 0,\dots,m, \quad \text{et} \quad \alpha_m(n) = 0 \text{ sinon.}$$

Itérant le raisonnement précédent, on définit pour $m = 1,\dots,M-1$ le polynôme trigonométrique X_m par la formule de récurrence (où par convention $X_0 = X$) :

$$S(\lambda)X_{m+1}(\lambda) = X_m(\lambda) - X_m(0)\Gamma_m(\lambda). \tag{8}$$

Théorème 2.6. *Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_M, \frac{1}{2}\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$, indépendante de x, telle que*

$$\|2^{\frac{j}{2}} T_0^j x - \sum_{m=0}^{M} 2^{-mj} X_m(0)(\alpha_m * \gamma_m)\|_{S^1} \leq C_\delta 2^{-Mj}\delta^j \|X_M\|_1. \tag{9}$$

En particulier, si x est de la forme $x = \alpha_M * y$ (ie. $X(\lambda) = S(\lambda)^M Y(\lambda)$), alors

$$\|T_0^j(x)\|_{S^1} \leq C_\delta 2^{-j(M+\frac{1}{2})}\delta^j \|y\|_{S^1}.$$

Remarques :

1) Si x est une suite de $\mathcal{S}^1$ telle que les formules (8) ci-dessus permettent de définir les fonctions X_m, avec $X_m \in E^1$, alors l'inégalité (9) est encore vérifiée. La preuve du théorème 2.6 sera d'ailleurs donnée sous ces hypothèses.

2) Soit δ_M la borne inférieure des réels δ tels que l'inégalité (9) soit satisfaite pour tout $j \geq 0$, et tout $x \in \mathcal{S}^1$ satisfaisant à l'hypothèse de la remarque 1). On a $\delta_M \leq \max\{\mu_M, \frac{1}{2}\}$. La démonstration du théorème 2.6 montrera que. si $M \leq r-2$, alors $\delta_M = \max\{\mu_M, \frac{1}{2}\}$ et $\frac{1}{2} \leq \delta_M \leq 2^{-s_1+M}$ (voir remarque b) à la fin du paragraphe 3). Dans la plupart des exemples classiques d'analyses multirésolutions. les réels μ_M et 2^{-s_1+M} sont très peu différents.

3) La propriété (9) permet de préciser les inégalités des remarques c) et d) ci-dessus.

3. Démonstrations

3.1. Passage à un opérateur quasi-compact

Les espaces fonctionnels utilisés ci-dessous, et l'application J, ont été définis dans l'introduction. Pour $w \in E^1$, on notera P_w l'opérateur defini sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$ par

$$P_w f(\lambda) = w(\frac{\lambda}{2})f(\frac{\lambda}{2}) + w(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})f(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}).$$

Il est clair que P_w est un opérateur linéaire borné sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$. E^0. et E^1. On note $u = |H_0|$, et

$$P_0 = P_{H_0} \quad , \quad P_u = P_{|H_0|}.$$

Lemme 3.1. *Soit $x \in \mathcal{S}$ ($x = J(X)$ avec $X \in \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$). Alors*

$$\sqrt{2}(T_0 x) = J(P_0 X).$$

En particulier T_0 est un opérateur borné sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^0$, $\mathcal{S}^1$. En outre P_0 laisse invariant l'espace

$$\mathcal{T}_N = \ vect\{1, e^{2i\pi\lambda}, \ldots, e^{2i\pi N\lambda}\},$$

et A_0 est exactement la matrice de P_0 restreint à $\mathcal{T}_N$.

Preuve du lemme 3.1 : toutes les propriétés du lemme découlent de la formule

$$\begin{aligned}\int_0^1 (P_0 X)(\lambda)e^{-2i\pi n\lambda}d\lambda &= 2\int_0^1 X(\lambda)H_0(\lambda)e^{-2i\pi 2n\lambda}d\lambda \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^0 \int_0^1 X(\lambda)e^{-2i\pi(2n-k)\lambda}d\lambda \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^0 x(2n-k) = \sqrt{2}(T_0 x)(n).\end{aligned}$$

$\square$

Dans la suite, l'étude de $\sqrt{2}T_0$ sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^0$, et $\mathcal{S}^1$ sera systématiquement remplacée par celle de P_0 respectivement sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$, E^0, et E^1.
Par commodité, pour chaque résultat du paragraphe précédent, nous donnerons la version fonctionnelle correspondante.

Rappels sur la quasi-compacité : on désigne par $|\cdot|_\infty$ et $|\cdot|_1$ les normes d'opérateurs vis-à-vis respectivement de $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$ et E^1. Pour un opérateur S borné sur un espace de Banach B, on note $\rho(S, B)$ son rayon spectral.
On montre aisément par récurrence que

$$P_w^j f(\lambda) = \sum_{k=0}^{2^n-1} w(\frac{\lambda+k}{2})\cdots w(\frac{\lambda+k}{2^n})f(\frac{\lambda+k}{2^n}),\ \ \forall j \geq 1.$$

Soit α une fonction réelle, mesurable, et 1-périodique, telle que $w(\lambda) = |w(\lambda)|e^{2i\pi\alpha(\lambda)}$, et soit $A(\lambda) = e^{-2i\pi[\alpha(2^{n-1}\lambda)+\alpha(2^{n-2}\lambda)+\cdots\alpha(\lambda)]}$. Il est clair que $P_{|w|}^j(1) = P_w^j(A)$. On en déduit les propriétés suivantes

$$\|P_{|w|}^j 1\|_\infty = |P_{|w|}^j|_\infty = |P_w^j|_\infty,\quad \text{et}\quad \rho(P_w, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = \rho(P_{|w|}, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})).$$

De plus on montre, à partir de l'égalité ci-dessus, que

$$\|P_w^j f\|_1 \leq 2^{-j}\|P_{|w|}^j 1\|_\infty \|f\|_1 + R_j\|f\|_\infty,\quad \forall f \in E^1,\ \forall j \geq 1,$$

où R_j est une constante > 0. Cette dernière propriété est démontrée pour $w \geq 0$ dans [4] [7] ; la preuve pour w de signe quelconque est identique. D'autre part, on établit dans [4] que, si

$$\rho_e = \frac{1}{2}\rho(P_w, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) < \rho(P_w, E^1), \tag{10}$$

P_w est quasi-compact sur E^1, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes :

(A) *L'ensemble I des valeurs spectrales μ de P_w sur E^1, telles que $\rho_e \leq |\mu| \leq \rho(P_w, E^1)$ est fini, et tout élément $\mu \in I$ est en fait une valeur propre d'indice fini $\nu(\mu)$, telle que* $\dim \mathrm{Ker}(P_w - \mu Id)^{\nu(\mu)} < +\infty$. *En outre on a*

$$E^1 = \left(\oplus_{\mu\in I} \mathrm{Ker}(P_w - \mu Id)^{\nu(\mu)}\right) \oplus \mathcal{F}, \tag{11}$$

où $\mathcal{F}$ est un sous-espace fermé de E^1, stable par P_w, tel que $\rho(P_{w|\mathcal{F}}, \mathcal{F}) < \rho_e$.

On rappelle que l'indice $\nu(\mu)$ d'une valeur propre μ est fini s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathrm{Ker}(P_w - \mu Id)^n = \mathrm{Ker}(P_w - \mu Id)^{n+1}$, $\nu(\mu)$ étant le plus petit entier vérifiant cette dernière condition. Les propriétés de quasi-compacité pour P_0 ne suffiront pas pour prouver les résultats du paragraphes 2. Nous utiliserons également la positivité de l'opérateur P_u (si $f \geq 0$, alors $P_u f \geq 0$). A cet effet, nous aurons besoin de la propriété suivante démontrée dans [4] [7] :

(B) *Si w est à valeurs positives ou nulles, on a $\rho(P_w, E^1) = \rho(P_w, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T}))$. Donc P_w est quasi-compact sur E^1. En outre, $\rho(P_w, E^1)$ est une valeur propre, d'indice maximal parmi les valeurs propres de module $\rho(P_w, E^1)$, et enfin il lui est associé une fonction propre à valeurs positives ou nulles.*

Le fait que la fonction d'échelle ϕ engendre par translations entières une base de Riesz de V_0 implique des conditions très précises sur les zéros de H_0. Sans entrer dans les détails, rappelons que ces conditions s'expriment par exemple en terme de compacts invariants (ou cycles périodiques) vis à vis de la transformation $\Delta(x) = 2x \pmod 1$ [1] [6]. D'autre part, sous ces dernières hypothèses, on démontre, dans [6] que, si $s_1 > 0$, alors $\rho(P_u, E^1) = 1$, et dans [7] que

(C) *l'espace des fonctions 1-périodiques continues P_u-invariantes est engendré par une fonction à valeurs strictement positives.*

3.2. Démonstration du théorème 2.1

En vertu du lemme 3.1, l'énoncé du théorème 2.1 est équivalent au suivant :
i) La suite $\{P_0^j,\ j \geq 1\}$ est uniformément bornée dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$.
ii) $\hat{\phi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
iii) $s_1 > 0$.

L'équivalence entre ii) et iii) est démontrée dans [6]. En outre on sait que $\rho(P_u, E^1)$ est une valeur propre pour P_u, d'indice fini qu'on notera ν (voir (B)), et on montre dans [6] que la condition ii) est équivalente à :

$$iv) \qquad \rho(P_u, E^1) = 1 \ \text{ et } \ \nu = 1.$$

Prouvons que i) est équivalent à iv).
i) $\rightarrow$ *iv)* : comme 1 est valeur propre de A_0 (voir §2), on a $1 \leq \rho(A_0) \leq \rho(P_0, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) \leq 1$, la dernière inégalité résultant de i). Donc $\rho(P_0, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = 1$. Finalement on a $\rho(P_u, E^1) = \rho(P_u, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = \rho(P_0, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = 1$ (la première égalité découlant de (B)). En outre, du fait que $|P_0^j|_\infty = |P_u^j|_\infty$, la suite $\{P_u^j,\ j \geq 1\}$ est uniformément bornée dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$. Comme $\rho(P_u, E^1)$ est une valeur propre de P_u sur E^1, son indice ν (qui est fini d'après (A)) est nécessairement égal à 1.
iv) $\rightarrow$ *i)* : si $\rho(P_u, E^1) = 1$ et $\nu = 1$, l'indice de chaque valeur propre de module 1 pour P_u sur E^1 est égal à 1 d'après (B), d'où $\sup_{j\geq 1} |P_u^j|_1 < +\infty$. On conclut en remarquant que $|P_0^j|_\infty = |P_u^j|_\infty = \|P_u^j 1\|_\infty \leq \|P_u^j 1\|_1 \leq |P_u^j|_1$.

3.3. Démonstration du théorème 2.2

On a supposé pour le théorème 2.2 que $s_1 > 0$. Rappelons que A_0, définie dans le paragraphe 2, est la matrice de P_0 restreint à $\mathcal{T}_N$, et qu'on a noté μ_0 la plus grande valeur parmi les modules des valeurs propres de A_0 différentes de 1. En vertu du lemme 3.1, le théorème 2.2 est un corolaire du résultat suivant :

Théorème 3.2. *On a $\mu_0 < 1$. L'espace des fonctions de E^1 P_0-invariantes est engendré par un polynôme trigonométrique $\Gamma_0 \in \mathcal{T}_N$ tel que $\Gamma_0(0) = 1$.*
Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_0, \frac{1}{2}\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que l'on ait, pour tout $X \in E^1$ et tout entier $j \geq 1$,

$$\|P_0^j X - X(0)\Gamma_0\|_1 \leq C_\delta \delta^j \|X\|_1. \tag{12}$$

Démonstration du théorème 3.2 : d'après ce qui précède (cf. condition iv)), on a $\rho(P_u, E^1) = 1$. D'autre part, on sait que $\rho(P_0, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = \rho(P_u, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T}))$ et $\rho(P_u, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = \rho(P_u, E^1)$ (cf. (B)). Donc $\rho(P_0, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = 1$. Comme $\rho(P_0, E^1) \geq \rho(A_0) \geq 1$, P_0 est quasi-compact sur E^1 en vertu de (10). Donc P_0 admet au moins une valeur propre μ de module $\rho(P_0, E^1)$. On a $|\mu| \leq \rho(P_0, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = 1$, d'où $\rho(P_0, E^1) = 1$, et $\rho(A_0) = 1$. La suite de la preuve repose sur le

Lemme 3.3. *a) Soit μ une valeur propre de P_0 sur E^1 telle que $\frac{1}{2} < |\mu| \leq 1$, et soit f une fonction propre associée à μ. Alors $f \in \mathcal{T}_N$. En particulier, toutes les valeurs propres μ de P_0 sur E^1 telles que $\frac{1}{2} < |\mu| \leq 1$ sont valeurs propres de A_0.*

b) 1 est l'unique valeur propre de module 1 de P_0 sur E^1. En outre l'espace des fonctions de E^1 P_0-invariantes est engendré par un polynôme trigonométrique $\Gamma_0 \in \mathcal{T}_N$ tel que $\Gamma_0(0) = 1$.

Ce lemme (que nous admettons pour le moment) prouve que $\mu_0 < 1$. Soit $X \in E^1$. Du fait que $H_0(0) = 1$ et $H_0(\frac{1}{2}) = 0$, on a $(P_0^j X)(0) = X(0)$ pour tout $j \geq 0$. D'autre part, d'après le lemme 3.3 et (11), X s'écrit sous la forme : $X = a\Gamma_0 + g$, avec $a \in \mathbf{C}$, $g \in E^1$ telle que $\lim_{j\to+\infty} \|P_0^j g\|_1 = 0$. D'où $a = X(0)$. Plus précisément, toujours d'après le lemme 3.3 et (11), pour tout $\delta > \max\{\mu_0, \frac{1}{2}\}$, il existe une constante $D_\delta > 0$ telle que $\|P_0^j g\|_1 \leq D_\delta \delta^j \|g\|_1 \leq D_\delta(1 + \|\Gamma_0\|_1)\delta^j \|X\|_1$, ce qui prouve (12). Il reste à donner la

Démonstration du lemme 3.3 :

a) la preuve du a) se décompose en deux étapes : $f \in C^\infty$ et $f \in \mathcal{T}_N$.

- *f est de classe C^∞ :* nous reprenons ici un raisonnement présenté dans [1]. La fonction f étant lipschitzienne, elle est dérivable presque partout. Plus précisément f est la primitive d'une fonction mesurable bornée, qu'on notera f' pour simplifier. Dérivant l'équation $P_0 f = \mu f$, il vient que $f'(\lambda) = (2\mu)^{-1} P_0 f'(\lambda) + \xi_0(\lambda)$ pour presque tout λ, où $\xi_0(\lambda) = (2\mu)^{-1} P_{H'_0} f$. Appliquant maintenant P_0, puis $P_0^2, \ldots$ aux deux membres de l'égalité ci-dessus, on obtient (dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$),

$$f' = \sum_{k=0}^{j} (2\mu)^{-k} P_0^k \xi_0 + (2\mu)^{-(j+1)} P_0^{j+1} f', \quad \forall j \geq 1.$$

On a $|2\mu| > 1$, $\rho(P_0, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = 1$, et on sait que les itérées de P_0 sont uniformément bornées dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$ (cf. condition i) du §3.2). On en déduit que $f' = \sum_{k=0}^{+\infty} (2\mu)^{-k} P_0^k \xi_0$ dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$. Mais comme $\xi_0 \in E^1$ et $\rho(P_0, E^1) = 1$, cette dernière série converge également dans E^1 vers une fonction $g \in E^1$, égale à f' presque partout. Il en résulte que f est la primitive d'une fonction lipschitzienne. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$, et sa dérivée (au sens classique) g est lipschitzienne.

On note désormais $f' = g$. Pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^p$, pour tout $p \geq 1$, on itère la démonstration précédente. Par exemple, si $p = 2$, on part de l'équation $f' = \frac{1}{2\mu} P_0 f' + \xi_0$: les fonctions f' et ξ_0 étant lipsctitziennes, elles s'écrivent comme primitives de fonctions mesurables bornées, qu'on notera respectivement f'' et ξ_0'. Par dérivation, on obtient, dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})$, $f'' = (4\mu)^{-1} P_0 f'' + \xi_1$, avec $\xi_1 \in E^1$. On conclut comme précédemment en considérant la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (4\mu)^{-k} P_0^k \xi_1$.

• $f \in \mathcal{T}_N$: soit $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de f. En vertu du lemme 3.1, l'équation $P_0 f = \mu f$ est équivalente à $\sqrt{2} T_0 x = \mu x$, c'est-à-dire à :

$$\mu x(n) = \sum_{k=2n-N}^{2n} h_{2n-k}^0 x(k), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ quelconque, et $S_\ell = \sup_{n<0} |n^\ell x(n)|$ (on a $S_\ell < +\infty$ car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$). Pour tout $n < 0$, on a

$$|\mu x(n)| \leq \frac{C S_\ell}{2^\ell |n|^\ell},$$

avec $C = \sum_{k=0}^{N} |h_k^0|$. Donc $S_\ell \leq \frac{C}{|\mu|} 2^{-\ell} S_\ell$. Pour ℓ assez grand, cette dernière inégalité n'est possible que si $S_\ell = 0$, c'est-à-dire $x(n) = 0$ pour tout $n < 0$.

Soit maintenant $R_\ell = \sup_{n \geq N+1} |n^\ell x(n)|$. Pour tout $n \geq N + 1$, on a

$$|\mu x(n)| \leq \frac{C R_\ell}{|2n - N|^\ell} \leq \frac{C R_\ell}{2^\ell |n|^\ell |1 - \frac{N}{2N+2}|^\ell}.$$

D'où $R_\ell \leq \frac{C}{|\mu|} 2^{-\ell} (\frac{2N+2}{N+2})^\ell R_\ell$. Pour ℓ assez grand, il vient que $R_\ell = 0$, c'est-à-dire $x(n) = 0$ pour tout $n \geq N + 1$. Le a) du lemme est démontré.

b) Soit $f \in E^1$ telle que $P_0 f = \mu f$, avec $|\mu| = 1, \mu \neq 1$. Démontrons que $f \equiv 0$: l'équation $P_0 f(\lambda) = \mu f(\lambda)$ appliquée avec $\lambda = 0$ donne $\mu f(0) = f(0)$, d'où $f(0) = 0$ (on a utilisé le fait que $H_0(0) = 1$ et $H_0(\frac{1}{2}) = 0$). En outre on a $|f| = |\mu f| = |P_0 f| \leq P_u(|f|)$. L'opérateur P_u étant positif, la suite $\{P_u^j(|f|),\ j \geq 1\}$ est croissante. De la condition iv) et de la propriété sur l'indice des valeurs propres de module $\rho(P_u, E^1)$ pour P_u (cf. (B)), il vient que $\sup_{j\geq 1} |P_u^j|_1 < +\infty$. Ainsi la suite de fonctions $\{P_u^j(|f|),\ j \geq 1\}$ est relativement compacte (th. d'Ascoli) : finalement elle converge vers une fonction $h \in E^1$ majorant $|f|$ et telle que $P_u h = h$. On a $(P_u^j(|f|))(0) = 0$ pout tout $j \geq 1$, d'où $h(0) = 0$. On déduit de la propriété (C) que h (et donc f) sont identiquement nulles, ce qui prouve la propriété annoncée, soit la première assertion du b).

On sait que 1 est valeur propre de A_0, donc de P_0. Démontrons que deux fonctions quelconques f_1 et f_2 de E^1 P_0-invariantes sont nécessairement proportionnelles. On peut toujours trouver a et $b \in \mathbf{C}$ tels que la fonction $g = af_1 + bf_2$ soit nulle en 0. On raisonne alors comme précédemment (remplacer $|f|$ par $|g|$) pour prouver que $g \equiv 0$, ce qui montre bien que f_1 et f_2 sont colinéaires. Par conséquent, l'espace des fonctions de E^1 P_0-invariantes est engendré par une fonction Γ de E^1 qui, d'après ce qui précède, appartient en fait à $\mathcal{T}_N$. Il reste à prouver que $\Gamma(0) \neq 0$. Or, si on avait $\Gamma(0) = 0$, le raisonnement ci-dessus (remplacer $|f|$ par $|\Gamma|$) montrerait que $\Gamma \equiv 0$, ce qui est absurde. □

Démonstration de la proposition 2.4 : comme par hypothèse $r \geq 2$, $\frac{1}{2}$ est valeur propre de A_0 (cette propriété est bien connue [3] ; nous y reviendrons à la fin de l'article). Donc $\mu_0 \geq \frac{1}{2}$. On déduit de (11) (ici $\rho_e = \frac{1}{2}$) et du lemme 3.3 que $\delta_0 = \mu_0$. Il reste à démontrer (7) :
Si $\mu_0 = \frac{1}{2}$, (7) est évident. Supposons que $\mu_0 > \frac{1}{2}$. Soit f une fonction propre associée à une valeur propre μ de A_0 telle que $|\mu| = \mu_0$. On a nécessairement $f \in \mathcal{T}_N$ et $f(0) = 0$. Plus exactement, utilisant un développement limité dans l'équation $P_0 f = \mu f$, on prouve que f est de la forme : $f(\lambda) = 2^{-r}(1 - e^{2i\pi\lambda})^r g(\lambda)$, et un calcul simple montre que $P_v g = 2^r \mu g$, où v est le polynôme trigonométrique de la formule (2). On en déduit que $2^r \mu_0 \leq \rho(P_v, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = \rho(P_{|v|}, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T}))$. Or on a $\rho(P_{|v|}, \mathbb{L}^\infty(\mathbf{T})) = 2^{r-s_1}$ (voir [6]), d'où $\mu_0 < 2^{-s_1}$. □

3.4. Démonstration du théorème 2.6.

Pour simplifier les notations, donnons la preuve pour $M = 1$ (la généralisation pour $M \geq 2$ étant immédiate). Rappelons que

$$\begin{aligned} H_1(\lambda) &= 2^{r-1}(1 + e^{2i\pi\lambda})^{r-1} v(\lambda) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} h_{1,k} e^{2i\pi k\lambda}. \end{aligned}$$

On a noté $A_1 = (\alpha_1(k,l))_{k,l=0,\dots,N-1}$ la matrice carrée définie par :

$$\alpha_1(k,l) = h_{1,2k-\ell}, \quad k,l = 0,\dots,N-1,$$

et $\mu_1 = \sup\{|\mu| \;,\; \mu \in \text{spect}(A_1),\; \mu \neq 1\}$. Soient

$$\hat{\phi}_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} H_1(\frac{\lambda}{2^k}), \quad \lambda \in I\!R,$$

et

$$\tilde{s}_1 = s_1(\phi_1) = \sup\{s \in I\!R \;:\; \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^s |\hat{\phi}_1(\lambda)| d\lambda < +\infty\}.$$

En vertu de la propriété (4) appliquée à ϕ_1, et par définition de M, on a $\tilde{s}_1 = s_1 - 1 > 0$ (plus exactement on a a priori $\tilde{s}_1 \geq s_1 - 1$. mais la propriété de base de Riesz ci-dessous assure l'égalité, voir [6]). Par conséquent, la transformée de Fourier inverse ϕ_1 de $\hat{\phi}_1$ est continue, à support compact, et satisfait à l'équation d'échelle

$$\phi_1(\cdot) = \sum_{n \in Z\!\!Z} h_{1,n} \phi(2 \cdot + n).$$

En outre, $\{\phi_1(\cdot + k), k \in Z\!\!Z\}$ est un système de Riesz : en effet les translatées entières d'une fonction $g \in I\!L^2(I\!R)$ forment un système de Riesz s'il existe deux constantes a, b. avec $0 < a \leq b < +\infty$. telles que $a \leq \sum_{k \in Z\!\!Z} |\hat{g}(\lambda + k)|^2 \leq b$ pour presque tout $\lambda \in [0,1]$ [9] [3]. Cette dernière condition étant satisfaite par hypothèse pour ϕ, l'est évidemment pour ϕ_1. Pour $j \in Z\!\!Z$, on définit l'espace V_j^1 engendré par $\{2^{\frac{j}{2}} \phi_1(2^j \cdot - k).\; k \in Z\!\!Z\}$. Alors la famille $(V_j^1)_{j \in Z\!\!Z}$ est une analyse mutirésolution. Ainsi la suite $(h_{1,k})_{k \in Z\!\!Z}$ satisfait aux mêmes hypothèses que $(h_k^0)_{k \in Z\!\!Z}$, et le théorème 2.2 s'applique à l'opérateur $\tilde{T}_0$ défini sur $\ell^2(Z\!\!Z)$ par

$$(\tilde{T}_0 x)(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in Z\!\!Z} h_{1,k} x(2n - k), \quad n \in Z\!\!Z, \quad x \in \ell^2(Z\!\!Z).$$

D'autre part, on démontre (comme pour le lemme 3.1) que $\tilde{T}_0 \circ J = J \circ P_1$, où $P_1 = P_{H_1}$. Le théorème 3.2, appliqué à $\tilde{T}_0$, s'énonce de la manière suivante :

On a $\mu_1 < 1$. L'espace des fonctions de E^1 P_1-invariantes est engendré par un polynôme trigonométrique $\Gamma_1 \in T_{N-1}$ tel que $\Gamma_1(0) = 1$.
Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_1, \frac{1}{2}\}$. il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que l'on ait, pour tout $X \in E^1$ et tout entier $j \geq 1$,

$$\|P_1^j X - X(0)\Gamma_1\|_1 \leq C_\delta \delta^j \|X\|_1. \tag{13}$$

Soit $X \in E^1$. On sait d'après le théorème 3.2 que $\lim_{j \to +\infty} P_0^j X = X(0)\Gamma_0$ dans E^1. Notons que $X - X(0)\Gamma_0$ est nulle en 0. Supposons qu'il existe $X_1 \in E^1$ tel que

$$X(\lambda) - X(0)\Gamma_0(\lambda) = S(\lambda) X_1(\lambda),$$

où $S(\lambda) = e^{i\pi\lambda} \sin \pi\lambda$ (la décomposition ci-dessus est presque toujours satisfaite, par exemple si X est un polynôme trigonométrique). L'énoncé du théorème 2.6 (pour $M = 1$) est équivalent au suivant :

Théorème 3.4. *Pour tout réel δ tel que $\delta > \max\{\mu_1, \frac{1}{2}\}$, il existe une constante $C_\delta > 0$, indépendante de X, telle que*

$$\|P_0^j X - X(0)\Gamma_0 - 2^{-j} X_1(0) S \cdot \Gamma_1\|_1 \leq C_\delta 2^{-j} \delta^j \|X_1\|_1. \tag{14}$$

Preuve du théorème 3.4 : On a $P_0^j X - X(0)\Gamma_0 = P_0^j (X - X(0)\Gamma_0) = P_0^j(SX_1)$. Or, grâce à la formule classique $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$, on établit facilement, par récurence sur j, l'égalité : $P_0^j(SX_1)(\lambda) = 2^{-j} S(\lambda)(P_1^j X_1)(\lambda)$, d'où

$$\begin{aligned} \|P_0^j X - X(0)\Gamma_0 - 2^{-j} X_1(0) S \cdot \Gamma_1\|_1 &= 2^{-j} \|S \cdot \left(P_1^j X_1 - X_1(0)\Gamma_1\right)\|_1 \\ &\leq C 2^{-j} \|P_1^j X_1 - X_1(0)\Gamma_1\|_1. \end{aligned}$$

On déduit (14) en appliquant (13) à X_1.

Remarques : a) Pour prouver que $\frac{1}{2}$ est valeur propre de A_0 quand $r \geq 2$, on peut procéder de la manière suivante : rappelons que $P_1\Gamma_1 = \Gamma_1$. Soit $Z(\lambda) = S(\lambda)\Gamma_1(\lambda)$. Utilisant la formule $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$, il vient que $P_0 Z = \frac{1}{2} Z$.
b) On suppose toujous $M = 1$. La proposition 2.4 s'applique à μ_1, à savoir : soit δ_1 la borne inférieure des réels δ tels que (13), et donc (14), soient satisfaites. On a $\delta_1 \leq \max\{\mu_1, \frac{1}{2}\}$. Si en outre l'entier r dans (2) est tel que $r \geq 3$, alors $\delta_1 = \max\{\mu_1, \frac{1}{2}\}$, et $\frac{1}{2} \leq \delta_1 \leq \max\{2^{-\hat{s}_1}, \frac{1}{2}\} = \max\{2^{-s_1+1}, \frac{1}{2}\}$.

References

[1] CONZE J.-P., RAUGI A. *Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications.*
Bull. Soc. Math. France. 118, 1990, p. 273-310.

[2] DAUBECHIES I. *Orthonormal basis of compactly supported wavelets.*
Communications in pures and applied mathematics, t. XLI, n° 7, 1988, p. 909-996.

[3] DAUBECHIES I. *Ten Lectures on wavelets.*
CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics, SIAM 1992.

[4] HENNION H. *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens*
Proceeding of the A.M.S. Vol. 118 (1993) No 2, pp. 627.634.

[5] HERVÉ L. *Régularité et conditions de bases de Riesz pour les fonctions d'échelle.*
C.R. Acad. Sci.. Paris, t. 315, Série I, pp. 1029-1032, 1992.

[6] HERVÉ L. *Construction et régularité des fonctions d'échelle*
Preprint 1992, Laboratoire de Probabilités, Université de Rennes I. A paraître dans SIAM J. Math. Anal.

[7] HERVÉ L. *Etude d'opérateurs quasi-compacts et positifs. Applications aux opérateurs de transfert.*
Preprint 1992, Laboratoire de Probabilités, Université de Rennes I. A paraître dans les Annales de l'I.H.P., Série Proba. et Stat., Vol. 30, N 4, 1994.

[8] MALLAT S. *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$
Trans. Amer. Math. Soc., t. 315, n° 1, 1989, p. 69-88.

[9] MEYER Y. *Ondelettes et opérateurs I*
Hermann, 1990.

[10] RIOUL O. *Ondelettes régulières : Application à la compression d'images fixes*
Thèse (1993). Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 38-40. rue du Général Leclerc. 92131 Issy-les-Moulineaux.