YVES GUIVARC'H

# Marches aléatoires sur les groupes et problèmes connexes

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1993, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-39
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993___2_A3_0>

# Marches aléatoires sur les groupes et problèmes connexes

GUIVARC'H Yves, I.R.M.A.R.
Université de Rennes I, Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX, France

On se propose ici de retracer l'évolution des principales idées qui sont apparues et des problèmes qui se sont posés dans le domaine des marches aléatoires sur les groupes et les sujets connexes depuis une trentaine d'années. Plutôt que d'établir un bilan exhaustif on a plutôt voulu dégager les principales idées et motivations, insister sur les relations entre les divers points de vue et donner des références dans différentes directions. Quelques directions particulières et significatives ont été développées à titre d'exemples dans le domaine d'intérêt actuel de l'auteur ; elles font l'objet des deux parties finales 5 et 6 tandis que les principales idées sont décrites dans les parties 1, 2, 3 et 4. Les références sont très incomplètes et on a choisi de préférence les articles de synthèse de même que les articles où une idée apparaît pour la première fois. Les derniers développements ne sont donc pas complètement explicités, sauf dans la mesure où ils apportent un point de vue nouveau ou un résultat définitif.

## 1. Introduction

### 1.1. Généralités

Soit $G$ un groupe localement compact métrisable. On suppose que $G$ est engendré par un compact, donc que l'on peut écrire $G = \cup_{n\geq 1} V^n$ où $V$ est un voisinage compact de l'élément neutre $e$. La donnée de $V$ permet de définir ce qui est parfois appelé "la distance du contrôle"

$$\delta(g) = \inf\{n; g \in V^n\}$$

On définit la convolution de deux mesures positives par la formule

$$\mu * \mu'(\phi) = \int \phi(xy) d\mu(x) d\mu'(y)$$

et l'on désigne par $\lambda$ une mesure de Haar de $G$ invariante à droite. La convolution d'une fonction $f$ et d'une mesure $\mu$ est donc définie par

$$(f * \mu)(x) = \int f(xy^{-1}) d\mu(y)$$

La symétrique d'une mesure $\mu$ sera notée $\check{\mu}$. Soit alors $p$ une mesure de probabilité sur $G$, $T_p$ le semi-groupe fermé engendré par le support de $p$. Pour fixer les idées on supposera, sauf mention du contraire, que $T_p = G$ ce qui correspond à une condition d'irréductibilité topologique. On considère l'opérateur de convolution associé à $p$ :

$$\phi * \check{p}(x) = \int \phi(xy) dp(y)$$

et ses itérés donnés par

$$\phi * \check{p}^n(x) = \int \phi(xy) dp^n(y)$$

dont l'étude est l'objet du domaine considéré. L'utilisation de l'espace produit infini $\Omega = G^N$ muni de la loi produit $p^\infty = \pi$ s'impose ici de même que le langage du calcul des probabilités. Les fonctions coordonnées sur $\Omega = G^N$ sont donc des variables aléatoires indépendantes $x_k(\omega)$ et $p^n$ apparaît comme la loi du produit

$$S_n(\omega) = x_1(\omega) \cdots x_n(\omega)$$

A $p$ se trouve associée une chaîne de Markov, invariante par translation à gauche, de noyau $P$ défini par

$$P\phi(x) = \int \phi(xy) dp(y)$$

et $xS_n(\omega)$ est la position à l'instant $n$ d'une trajectoire de cette chaîne partie de $x \in G$. La suite $S_n(\omega)$ sera appelée marche aléatoire de loi $p$ et son interpétation est bien claire dans l'exemple suivant mentionné par E.B. DYNKIN (Dy 1961). Soit $G$ le groupe libre à deux générateurs $a, b$ et $p = \frac{1}{4}(\delta_a + \delta_b + \delta_{a^{-1}} + \delta_{b^{-1}})$ ; le graphe de Cayley de $G$ est un arbre homogène à 4 branches et la probabilité $p$ permet de passer d'un point du graphe à l'un de ses quatre voisins avec probabilité $\frac{1}{4}$. Le problème central, qui sera précisé, est de décrire le comportement asymptotique de $p^n$ et de dire dans quelle mesure il reflète la structure de $G$ ; on verra que ce comportement présente une grande stabilité par rapport à une modification de $p$. Il s'agit d'une très vaste généralisation de la théorie des sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ où l'on sait que le noyau de la chaleur $p^t(x) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{1}{2t}\|x\|^2}$ joue un rôle essentiel. On souhaite établir une théorie aussi précise, au moins dans le cas d'un groupe de Lie connexe. Ici l'intérêt principal réside dans les phénomènes nouveaux apportés par la non commutativité et de nombreuses applications seront de nature géométrique.

## 1.2. Deux exemples

a - Fonctions harmoniques

On esquisse ici la généralisation de la formule de Poisson dans le disque due à H. FURSTENBERG [F.1963]. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ le disque unité qui s'identifie à l'espace homogène $S\ell(2, \mathbb{R})/SO(2)$ par $g \to g \cdot o$, l'action de $G$ sur $D$ se faisant par transformations homographiques préservant $D$. Considérons le noyau de Poisson $P(z,t) = \frac{1-|z|^2}{|t-z|^2}$ ($|t| = 1, t \in \mathbf{T}$ ) et les solutions de l'équation de Laplace $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$. On sait que les harmoniques bornées s'écrivent sous la forme $f(z) = \int_T P(z,t)\hat{f}(t)dm(t)$ où $\hat{f} \in \mathbb{L}^\infty(m)$ et $m$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}$ . La relation de $\hat{f}$ à $f$ et le fait que $f(gz)$ est aussi harmonique permet d'écrire

$$f(g \cdot z) = \int_T P(z,t)\hat{f}(g \cdot t)dm(t)$$

et en particulier $f(g \cdot o) = (g \cdot m)(\hat{f})$. En retour on voit que $P(z,t) = \frac{dgm}{dm}(t)$ si $z = g \cdot o$. La formule précédente met bien en évidence les actions de $G = S\ell(2, \mathbb{R})$ sur $D$ et $\mathbf{T}$ . L'opérateur $\Delta$ n'est pas $G$ invariant mais il annule les mêmes fonctions que l'opérateur $D$ de Laplace-Beltrami de la géométrie hyperbolique

$$D = (1 - |z|^2)^2\Delta$$

Introduisons alors le noyau de la chaleur $p^s(x,y)$ associé à $D$ qui est $G$-invariant $[p^s(g \cdot x, g \cdot y) = p^s(x,y)]$ Il définit donc une fonction sur $G$ qui est $SO(2)$-bi-invariante et que l'on notera encore $p^s(g)$ avec $p^s(o, g \cdot o) = p^s(g)$. Alors on peut voir que l'équation $Df = 0$ où $f$ est bornée équivaut à l'équation de convolution $f = f * p^s$. [$f$ définit une fonction sur $G$]. On a donc l'équivalence de l'équation $f = f * p^s$ et de la formule $f(g) = (g \cdot m)(\hat{f})$. Ce résultat apparaît comme un résultat concernant $G = S\ell(2, \mathbb{R})$ et on est conduit à poser la question générale suivante. Etant donnée une probabilité $p$ sur $G$, les solutions bornées de $f = f * p$ sont-elles données par une formule de Poisson généralisée : $f(g) = g \cdot \nu(\hat{f})$ où $\nu$ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{T}$ qui dépend de $p$. En fait il est clair que l'on doit avoir $p * \nu = \nu$. Un résultat essentiel de H. FURSTENBERG est que la réponse à cette question est affirmative si $p$ a une densité par rapport à la mesure de Haar $\lambda$ de $G$ [et si $e$ est dans le support de $p$]. Le cadre naturel de cette question est alors celui des groupes semi-simples et ceci fait l'objet du travail [F.1963]. La réponse est également affirmative si $p$ est concentrée sur un sous-groupe discret de $G$ et on dispose donc dans ce cas d'un outil permettant l'étude de propriétés de $\Gamma$. Dans le cas de $S\ell(2, \mathbb{R})$, la mesure $\nu$ est en général singulière [Le1985].

b - Milieu désordonné

Considérons sur $Z$ l'équation de Schroëdinger $(-\Delta + v)u = \lambda u (\lambda \in \mathbb{R})$ où $v$ est un potentiel aléatoire c'est-à-dire une suite $(q_n)_{n \in Z}$ de variables aléatoires indépendantes. L'équation s'écrit

$$-(u_{n+1}+u_{n-1})+q_n u_n=\lambda u_n$$

et sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si $g_k$ désigne la matrice aléatoire

$$\begin{pmatrix} q_k-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\sum_n = g_n \cdots g_1$ on obtient donc $u_{n+1}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \sum\nolimits_n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad \left(\sum\nolimits_n \in S\ell(2,\mathbb{R})\right)$$

L'existence de solutions $u \in \ell^2(Z)$ apparaît liée au comportement asymptotique de $\sum_n$. Un résultat essentiel de GOLDSHEID-MOLCANOV-PASTUR [G.M.P.1977] dit que si $q$ a une densité, le spectre de $-\Delta + v$ dans $\ell^2(Z)$ est discret. Ce théorème repose sur un résultat de H. FURSTENBERG donnant la croissance exponentielle du produit $\sum_n$ : $pp\lim_n \frac{1}{n}\log\|\sum_n(\omega)\| > 0$. Sous l'hypothèse de densité, ce dernier résultat est en fait très lié au résultat sur la formule de Poisson mentionné en a). Ce sujet, de théorie spectrale des opérateurs aléatoires, est bien develppé [C.L.1990] et motive aussi l'étude des produits de matrices aléatoires.

## 1.3. Eléments historiques

Dans son traité de calcul des probabilités H. Poincaré examine le problème du battage des cartes comme équivalent à l'étude d'une marche aléatoire sur le groupe de permutations ; il utilise la théorie des représentations des groupes finis. D'autre part dans son ouvrage sur l'addition des variables aléatoires indépendantes, P. Levy examine le cas de la géométrie non euclidienne dans le disque et il peut donner un sens à l'addition de deux variables aléatoires invariantes par rotation ; il est donc conduit à l'itération d'une probabilité sur $S\ell(2,\mathbb{R})$ bi-invariante par $SO(2)$.

Le cas du groupe $\mathbb{R}^d$ a évidemment fait l'objet d'une étude intensive en Calcul des Probabilités tandis que le cas des groupes compacts a été examiné vers 1940 par Kawada et Ito. Il semble que la période actuelle ait débuté avec le travail de H. KESTEN [Ke1959] sur le rayon spectral de la convolution définie par $p$ dans $\ell^2(G)$, $G$ étant discret. Dans les années soixante les travaux se multiplient en U.R.S.S. et aux U.S.A. En France le cas commutatif fait l'objet d'études de théorie du potentiel, en particulier par G. CHOQUET ET J. DENY. Par ailleurs les produits de matrices aléatoires sont étudiés par H. KESTEN ET H. FURSTENBERG tandis que la représentation des harmoniques pour les groupes semi-simples est étudiée par H. FURSTENBERG. Des études analogues sont menées par E.B. DYNKIN et F. KARPELEVIC pour les harmoniques tandis que les produits de matrices sont étudiés par V.I. TUTUBALIN en relation avec la propagation dans les guides d'ondes. Ces questions sont reprises en France en début des années soixante-dix par R. AZENCOTT et Y. GUIVARC'H notamment. Au cours de l'année 1977 est publié le résultat de localisation pour les solutions de l'équation de Schroëdinger avec potentiel aléatoire sur $\mathbb{R}$ ; il résout partiellement le problème posé par les physiciens MOTT et ANDERSON en 1958. Ce résultat ouvre une nouvelle période où l'étude des exposants de Liapunoff et les aspects géométriques jouent un rôle important. D'importantes contributions sont dues à A. RAUGI, Y. GUIVARC'H, I. GOLDSHEID et G.A. MARGULIS, N.T. VAROPOULOS, A. ANCONA.

## 2. Problèmes généraux

Pour un développement précisé sur certains aspects on renvoie à [Gu1.1980], [G.K.R.1977], [K.V.1983], [C.S.V.1991] et [B.L.1985].

Divers points de vue, envisagés ci-dessous, permettent de préciser les problèmes et d'aborder les solutions.

### 2.1. Théorie du potentiel

a - Noyau potentiel

Le noyau potentiel $G_z = \sum_0^\infty z^n p^n$ ($|z| < 1$) inverse l'opérateur de convolution par $\delta_e - zp$ : $G_z * (\delta_e - zp) = (\delta_e - zp) * G_z = \delta_e$ et fournit sa solution élémentaire. Il permet d'étudier l'équation de Poisson $f * (\delta_e - zp) = g$ analogue discret de l'équation aux dérivées partielles $(\lambda - \Delta)f = g$ où $\Delta = \sum_1^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien de $\mathbb{R}^d$. Une question importante est celle de la convergence de la série $\sum_0^\infty p^n$. Le cas de divergence conduit à la théorie du potentiel récurrent qui nécessite un noyau potentiel modifié résolvant encore l'équation de Poisson [B.R.1974]. Le rayon de convergence $R$ de la série $\sum_0^\infty z^n p^n$ est donné par

$$\frac{1}{R} = \rho_p = \overline{\lim}_n p^n(V)^{1/n}.$$

Sous de larges hypothèses on peut espérer un comportement simple du terme général de la série de la forme $p^n(V) \sim \mu(V)\frac{\rho_p^n}{n^c}$ où $\mu$ est une mesure positive et $c$ un réel positif (rationnel ?).

b - Fonctions harmoniques

Une fonction borélienne $f$ vérifiant $f * p = f$ $\lambda$-pp est dite $p$-harmonique par analogie avec l'équation $\Delta f = 0$. On s'intéresse en particulier aux fonctions positives et à leur représentation intégrale de Choquet à l'aide d'extrémales. Il est essentiel ici d'expliciter les extrémales. Plus généralement on considère l'équation de fonction propre $f * p = kf$ $(f \geq 0)$ dont les solutions existent pour $k \geq \rho_p$. Leur étude est liée à celle du noyau de Martin $y \to \frac{G_x * \delta_y}{G_x * \delta_y(V)}$ et à celle des mesures limites quand $y \to \infty$ ; celles-ci constituent la frontière de Martin et la forme explicite de celle-ci ainsi que la compactification correspondante de $G$ posent un problème intéressant et difficile. Un problème plus simple mais déjà tout à fait non trivial est celui de la représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées, c'est-à-dire de la recherche de formules du type de Poisson tenant compte de la structure du groupe $G$ et de la loi de probabilité $p$. On peut en particulier poser la question de caractériser les couples $(G, p)$ tels que les harmoniques bornées soient constantes. Une telle situation rappelle celle du théorème classique de Liouville concernant les fonctions holomorphes bornées.

### 2.2. Analyse réelle et géométrie

L'analyse harmonique non commutative à l'aide des représentations unitaires de $G$ est loin d'être aussi efficace que dans les cas $G$ abélien ou compact, dans les questions d'Analyse. Par ailleurs l'opérateur Laplacien joue un rôle important dans le cas euclidien en permettant de définir divers espaces fonctionnels, les espaces de Sobolev par exemple. Enfin, la théorie des fonctions sphériques repose sur les propriétés de l'algèbre commutative des opérateurs de convolution bi-invariants. Il paraît donc naturel de développer l'Analyse sur les groupes de Lie en partant d'un noyau de la chaleur $p^t(g)$ associé à un opérateur différentiel elliptique invariant à gauche $\Delta$ et en particulier de définir divers espaces fonctionnels en ces termes. Pour ce point de vue envisagé en [Hu1974] on se bornera ici à quelques indications en renvoyant à [V1983] et [C.S.V.1991] où ce sujet est bien développé. En fait les opérateurs de convolution apparaissent comme des modèles d'opérateurs plus généraux tout comme le Laplacien est un modèle d'opérateurs à coefficients variables. Un prolongement naturel de l'étude des convolutions sur les groupes de Lie, et en particulier des noyaux de la chaleur est donc celle du mouvement brownien sur les variétés. Parmi les questions qui se posent dans ce cadre on peut noter celle de l'existence d'inégalités du type de Sobolev

$$\|f\|_{q(p)} \leq \text{ cte } \|\Delta^{1/2} f\|_p \quad [f \in C_0^\infty(G)]$$

qui sont liées à la continuité des opérateurs potentiels $\Delta^{-\alpha}$ entre espaces $\mathbb{L}^p$ convenables. La continuité des transformées de Riesz sur $\mathbb{L}^p$ est une question plus difficile. Ces questions se révèlent liées à des majorations optimales de $p^t(g)$ en fonction de $t$ et $\delta(g)$, et plus généralement à l'étude de $\sup_g p^n(g)$ en fonction de $n$, si $p$ est une probabilité symétrique ayant une densité. L'utilisation de la théorie des espaces de Dirichlet, due à Beurling-Deny, ainsi que celle des semi-groupes sous-markoviens symétriques permet de relier ces questions d'Analyse à la dernière, de nature probabiliste. Vu la flexibilité de ces méthodes il paraît naturel de les utiliser également pour étudier la stabilité, par quasi-isométrie, de propriétés de théorie du potentiel comme la transience ou la constance des harmoniques bornées. Une telle idée apparaît déjà en [B.L.P.1977]. Par exemple, une telle quasi-isométrie a lieu entre le revêtement universel d'une variété compacte et son groupe fondamental. Il s'agit alors de relier des propriétés du Laplacien sur la variété à des propriétés des marches aléatoires sur le groupe fondamental. On verra plus loin l'importance de ce point de vue pour des questions de 1.

## 2.3. Calcul des probabilités

On pourra se reporter à [Gu2.1980], [G.R.1986] et [B.L.1985]. On s'intéresse ici au comportement asymptotique de $S_n(\omega)$ au point de vue presque sûr ou en loi (par rapport à $\pi$). D'abord $S_n(\omega)$ est la position au temps $n$ d'une chaîne de Markov partie de $e$. La marche aléatoire sera dite récurrente si $S_n(\omega) \in V$ (pp) infiniment souvent, transiente si $S_n(\omega) \to \infty$ (p.p). C'est une dichotomie qui correspond à la divergence ou à la convergence de la série $\sum_0^\infty p^n$ mentionnée en 1. Le groupe $G$ est dit récurrent s'il porte une marche aléatoire récurrente et sinon il est dit transient. Un problème posé en [Ke1967] est de relier la récurrence de $G$ à sa croissance [voir plus loin]. En particulier la conjecture suivante a été formulée en [G.K.R. 1977] : $G$ est récurrent si et seulement si sa croissance est polynomiale de degré 2 au plus. Essentiellement, les seuls cas de récurrence seraient donc $G = \mathbb{R}$ ou $G = \mathbb{R}^2$. Cette formulation doit être entendue "à un compact près" de façon à contenir le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$ qui est récurrent [Cr.1973]. Cette conjecture a été étudiée sous de larges hypothèses de structure pour $G$ en [G.K.R.1977]. On voit aussi que les méthodes esquissées en 2 fournissent une attaque de ce problème dans le cas général.

Le groupe $G$ étant supposé non compact, l'étude de théorèmes limites pour $S_n(\omega)$ suppose une normalisation. Dans le cas de $\mathbb{R}^d$, normaliser la somme $\sum_1^n x_k(\omega)$ revient à normaliser chaque terme par une homothétie. Dans le cas général on ne dispose pas d'homothéties. C'est pourquoi certains auteurs ont d'emblée considéré le problème du comportement des produits de variables $x_k(\omega)$ "petites" au sens où leur loi $p_n$ est concentrée dans un petit voisinage de $e$ ; cela revient à considérer la convolution $p_n^n$ mais la relation avec $p^n$ est en principe perdue. Cependant ce problème est lié à celui de la détermination des semi-groupes $p^t$ (à temps continu $t > 0$), des lois indéfiniment divisibles, et une relation avec le point de vue développé ici peut être espérée dans le cas où $G$ est un groupe de Lie à croissance polynomiale [cf Infra]. De telles questions font l'objet de l'ouvrage [Hey1981].

Cette difficulté de la normalisation peut se résoudre si la structure de $G$ est précisée. Un cas typique est celui du groupe linéaire $G\ell(d, \mathbb{R})$ qui se réduit à $\mathbb{R}^*$ donc au cas classique si $d = 1$. On verra en détail plus loin comment les problèmes peuvent être posés dans ce cas. Contentons-nous pour l'instant d'indiquer que le choix d'une norme sur $\mathbb{R}^d$ conduit à la considération de quantités du type $\log \|S_n(\omega)\|$ pour lesquelles on peut poser la question des théorèmes limites et qu'une formulation plus complète passe par la notion d'exposants de Liapunoff. Pour un groupe général $G$, et en première approximation, on peut poser la question analogue du comportement de $\delta[S_n(\omega)]$. Sous des hypothèses naturelles pour $p$, le théorème ergodique sous-additif donne la convergence ($pp$) de $\frac{1}{n}\delta[S_n(\omega)]$ vers une constante $\gamma_p$. Un problème est de savoir pour quels couples $(G, p)$ on a $\gamma_p > 0$ ou $\gamma_p = 0$. Dans le cas $\gamma_p > 0$, la marche aléatoire est transiente et la fuite de $S_n(\omega)$ vers l'infini a lieu avec une vitesse $\gamma_p > 0$. Au même degré de généralité le problème du théorème central limite consiste à prouver la convergence en loi de $\frac{1}{\sqrt{n}}[\delta[S_n(\omega)] - n\gamma_p]$ vers une loi non dégénérée. Ces formulations sont loi d'être définitives et une forme précisée est envisagée en [Kai1987]. Par exemple, pour la loi des grands nombres on peut chercher à calculer $g_\omega \in G$ tel que $\lim_n \frac{\delta[S_n(\omega)g_\omega^{-n}]}{n} = 0$. Ici la variable aléatoire $g_\omega$ satisfait une équation fonctionnelle qui permet de rattacher le problème à celui de l'étude des fonctions harmoniques bornées. En fonction des applications, d'autres théorèmes limites comme le théorème de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires prennent une signification importante [voir plus loin].

## 2.4. Théorie ergodique

On pourra se reporter à [F.1973]. La recherche des fonctions harmoniques bornées mentionnée en 1 équivaut à la recherche de fonctions invariantes pour certains produits croisés. En effet, si $f$ est $p$-harmonique bornée la suite de fonctions sur $\Omega$ $F_n(g, \omega) = f[gS_n(\omega)]$ constitue une martingale convergente vers $F(g, \omega)$ et inversement : $f(g) = \int F(g, \omega)d\pi(\omega)$. Si $\theta$ est le décalage sur $\Omega = G^N$, on a la relation :

$$F[gx_1(\omega), \theta\omega] = F(g, \omega)$$

ce qui signifie l'invariance de $F$ sous la transformation $\tilde{\theta}$ de $G \times \Omega$ définie par

$$\tilde{\theta}(g, \omega) = [gx_1(\omega), \theta\omega].$$

L'espace $G \times \Omega$ apparaît comme un produit croisé muni de la mesure invariante infinie $\lambda \times \pi$. Dans ce cadre on est conduit plus généralement à s'affranchir de l'indépendance des $x_n(\omega)$ en la remplaçant par la stationnarité, généralisant ainsi les produits croisés $[\Omega \times G, \tilde{\theta}, \pi \times \lambda]$. On part alors d'un système dynamique $(\Omega, \theta, \pi)$, d'une fonction $x(\omega)$ de $\Omega$ dans $G$ et l'on considère la transformation $\tilde{\theta}$ de $\Omega \times G$

définie par : $\tilde{\theta}(\omega, g) = [\theta\omega, gx(\omega)$. La composante sur $G$ de $\tilde{\theta}(\omega, e)$ est alors égale à : $S_n(\omega) = x_1(\omega) \cdots x_n(\omega)$ où $x_k(\omega) = x \circ \theta^{k-1}(\omega)$.

Ce cadre très général est celui de la cohomologie des systèmes dynamiques ; pour les très nombreuses questions qui se posent on pourra consulter [Zi.1977]. De manière beaucoup plus spécifique, dans le cadre des systèmes dynamiques hyperboliques une dépendance Markovienne d'ordre infini s'introduit et le comportement asymptotique de $S_n(\omega)$ peut s'étudier par des méthodes proches de celles du calcul des probabilités [Gu.1983]. Il prend alors aussi un sens géométrique si, par exemple, le système dynamique de base est le flot géodésique sur une variété compacte. Pour une situation de ce type concernant le comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle dans le domaine complexe et les problèmes correspondants, on pourra consulter [A.K.1963].

### 2.5. Analyse harmonique non commutative

Ce domaine fournit des méthode permettant d'aborder et de résoudre des problèmes déjà posés. Inversement l'utilisation des opérateurs de convolution associés à une marche aléatoire permet d'aborder certaines questions concernant les représentations des groupes. On a mentionné en 1 le problème de la recherche d'un équivalent de $p^n(V)$ qui correspond au théorème limite local en calcul des probabilités. Ce problème est proche de celui de l'étude du comportement du produit scalaire dans $\mathbb{L}^2(\lambda)\langle f * p^n, f\rangle$ $[f \in \mathbb{L}^2(\lambda)]$. Cette quantité peut en principe être analysée à l'aide de la formule de Plancherel et cette approche a été introduite en [Gu1973] dans le cas des groupes de déplacements et de leurs espaces homogènes. Cette approche est également valable dans les problèmes d'équirépartition. Un deuxième problème déjà mentionné est celui de l'étude des solutions bornées de l'équation de convolution $f * p = f$. Dans le cas $G$ abélien ou $G$ compact cette étude découle de l'utilisation de la transformée de Fourier. Dans le cas général, on dispose lorsque $p$ a une densité de méthodes puissantes, liées aux martingales, dans le cadre du calcul des probabilités. Les méthodes de l'analyse harmonique non commutative fournissent une approche dans le cas où $p$ n'a pas de densité.

L'analogie entre opérateur de Laplace et opérateur de convolution conduit à considérer les fonctions sphériques comme des fonctions propres. L'analyse harmonique sur des objets combinatoires comme les arbres homogènes et les immeubles peut être abordée ainsi comme il a été indiqué en [Ca.1973]. Ce point de vue est particulièrement adapté à l'Analyse et à la Géométrie dans les groupes algébriques sur des corps locaux autres que $\mathbb{R}$ ou $\mathbf{C}$ , en raison de l'absence d'opérateurs différentiels. Il s'étend aussi à l'étude des représentations des groupes libres et produits amalgamés [F.P.1983] où l'analogie avec $S\ell(2, \mathbb{R})$ peut être développée ; on dispose en effet dans ce cas d'une frontière naturelle permettant de définir les séries principales et complémentaire par exemple.

# 3. Quelques notions fondamentales

Elles concernent les itérées $p^n$, le produit $S_n(\omega)$ et la structure de $G$

## 3.1. Entropie, rayon spectral, vitesse de fuite

On pourra se reporter à [Gu1,2.1980]. Ce sont des caractéristiques de la "dispersion" des $p^n$ puisque $G$ est supposé non compact. La première mesure "l'écart avec l'uniformité" et la deuxième "l'effet de bord". De manière générale, l'étude des $p^n$ est notablement simplifiée si l'on suppose que $p$ a une densité par rapport à $\lambda$, notée encore $p(g)$. Dans ce cas l'entropie est définie par :

$$h_p = -\lim_n \frac{1}{n} \int p^n(g) \log p^n(g) d\lambda(g) = -\lim_n \frac{1}{n} \log p^n[S_n(\omega)] \quad (pp)$$

[cf Av.1974, Gu1.1980, Der.1986, K.V.1983]. La nullité de $h_p$ équivaut à la constance des harmoniques bornées (propriété dite de Liouville). La convolution à droite par $p$, sur $\mathbb{L}^2(\lambda)$ permet de définit le rayon spectral de cet opérateur

$$r_p = \lim_n \|p^n\|_2^{1/n}.$$

Le rayon spectral de $p$ proprement dit est défini par $\rho_p = \lim_n [p^n(V)]^{1/n}$. Il est facile de voir que $\rho_p \leq r_p \leq 1$ et que si $h_p = 0$ on a $r_p = 1$. Une autre quantité qui a un sens probabiliste évident est la valeur $\gamma_p$ de la limite (pp) de $\frac{1}{n}\delta[S_n(\omega)]$. Sa positivité donne une vitesse de fuite vers l'infini et n'est pas affectée par modification de $\delta$. De manière générale on a les implications suivantes

$$\gamma_p = 0 \quad \Rightarrow \quad h_p = 0$$
$$\gamma_p = 0 \ \Rightarrow \rho_p = 1$$

## 3.2. Groupes compacts, groupes abéliens

L'étude des marches aléatoires dans ces deux cas est très développée et l'analyse harmonique y joue un rôle très important. Donnons quelques éléments avant d'aborder le cas des groupes non compacts et non abéliens qui nous intéressera davantage. Si $G$ est compact [exemples $\mathbb{T}^d, SO(d),$] on a sous des hypothèses peu restrictives la convergence de $p^n$ vers la mesure de Haar normalisée $\lambda$, analogue du classique phénomène d'équi-répartition analysé par H. Weyl [cf Gre1963]. Une question intéressante, de nature arithmétique est celle des cas où il y a convergence exponentielle si $p$ est atomique, $G = SO(d)$ $(d \geq 3)$. Ce problème est lié à l'unicité de la moyenne invariante sur $S^{d-1}$ [forme linéaire positive sur $\mathbb{L}^\infty(S^{d-1})$] invariante sous l'action du groupe des rotations $SO(d)$ [L.P.S.1987], [Co.1988]. Dans le cas $G$ abélien (exemples $\mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d$) la littérature est énorme. Du point de vue calcul des probabilités il s'agit de l'étude des sommes de variables aléatoires indépendantes de même loi. Il y a dans ce cas une forte interaction entre analyse harmonique, calcul des probabilités et théorie du potentiel comme cela est bien mis en évidence dans [Sp1964]. Par exemple un théorème de Choquet Deny [C.D.1960] donne la nature des extrémales de l'équation $f * p = kf$ : ce sont les exponentielles $e^{\langle\lambda,x\rangle}$ solutions. En particulier on a la propriété de Liouville, les harmoniques bornées sont constantes. Dans ce cas la frontière de Martin a été précisée [N.S.1964] : ses points correspondent aux exponentielles précédentes.

La théorie du potentiel récurrent et de l'équation de Poisson peut être considérée comme complète, dans le cas où $p$ a une densité par rapport à $\lambda$ [cf B.R.1974]. Par contre, dans le cas général on connaît seulement, sous des hypothèses restrictives, l'existence d'une solution élémentaire $E$ satisfaisant l'équation : $(\delta_e - p) * E = \delta_e$, solution qui est une distribution tempérée.

### 3.3. Croissance d'un groupe

Elle est parfois appelée entropie et est définie par $\gamma = \lim_n \frac{1}{n} \log \lambda(V^n) \geq 0$. Dans le cas des groupes de Lie connexes, la condition $\gamma = 0$ implique en fait la croissance polynomiale de degré $r$, c'est-à-dire l'existence de deux constantes $a, b > 0$ et d'un entier $r$ tel que

$$an^r \leq \lambda(V^n) \leq bn^r.$$

Le calcul de $r$ et la structure des groupes correspondants sont décrits en [Gu1973]. La croissance polynomiale est bien sûr réalisée pour les groupes abéliens et plus généralement pour les groupes nilpotents comme celui des matrices triangulaires inférieures. Un résultat fondamental obtenu en [Gro1981] dit que les groupes de type fini à croissance polynomiale possèdent un sous-groupe nilpotent d'indice fini. La structure des groupes localement compacts, à génération compacte et à croissance polynomiale en découle suivant les techniques de [Gu1973]. Cette notion de croissance est bien reliée aux problèmes envisagés ici comme le montrent les indications suivantes. La condition $\gamma = 0$ implique $h_p = 0$ pour tout $p$ à support compact. Par ailleurs, dans le cas des groupes nilpotents, et sans hypothèse de densité sur $p$, les harmoniques bornées sont constantes dès que $\int \delta^\epsilon(g)dp(g) < +\infty$ pour un $\epsilon > 0$ [Gu1973]. Si $p$ a une densité symétrique on verra que la suite $n^{r/2}p^n(V)\lambda(V)^{-1}$ est comprise entre deux constantes positives [C.S.V.1991]. Le cas $\gamma > 0$ est par exemple réalisé pour $G = G\ell(d, \mathbb{R})$.

### 3.4. Norme de Dirichlet

On pourra se reporter ici à [C.S.V.1991]. Les normes $\mathbb{L}^p$ et produits scalaires seront pris par rapport à $\lambda$. Pour une probabilité symétrique $p$ on peut définir la norme de Dirichlet $[f \in C_0^\infty(G)]$

$$D_p(f) = \langle f * (\delta_e - p), f \rangle$$

et on peut voir que, sous de larges hypothèses incluant l'existence d'une densité pour $p$, le changement de $p$ remplace cette norme par une norme équivalente. On peut voir aussi dans ces conditions que l'inégalité de Dirichlet

$$\|f\|_{2A/A-2} \leq \text{cte } D_p(f)$$

équivaut à la condition $\sup_g p^n(g) = 0(n^{-A/2})$. Pour atteindre de telles conditions, indépendamment de $p$, il suffit donc d'obtenir la seconde relation pour un $p$ bien choisi, ce qui est possible dès qu'une information de croissance du type $\lambda(V^n) \geq$ cte $n^A$ est disponible. On voit donc tout l'intérêt de ces considérations pour le problème de transience, le comportement de $p^n(V)$, et les inégalités de Sobolev.

### 3.5. Moyennabilité

On pourra se reporter à [Gu1,2.1980]. On dit que $G$ est moyennable s'il existe sur $\mathbb{L}^\infty(G)$ une forme linéaire positive $m$ $[m(1) = 1]$ invariante par translations. Les groupes à croissance non exponentielle ($\gamma = 0$) sont moyennables et certains groupes à croissance exponentielle également. On s'éloigne donc davantage du cas abélien en remplaçant la croissance polynomiale par la moyennabilité. La structure des groues de Lie connexes moyennables est connue : le quotient de $G$ par son radical est compact [F.1963]. Un exemple typique est fourni par le groupe résoluble des matrices triangulaires inférieures. La moyennabilité se traduit immédiatement dans le langage des marches aléatoires : elle équivaut à $r_p = 1$ ce qui a d'abord été observé dans le cas $G$ discret [Ke1959]. Pour les harmoniques bornées ou l'entropie diverses situations sont ici possibles : $h_p = 0$ ou $h_p > 0$ [cf. Gu1,2.1980]. La moyennabilité de $G$ équivaut en général à l'existence d'un $p$ tel que les harmoniques bornées soient constantes [Ros1981]. Dans le cas contraire $r_p < 1$ et $\rho_p \leq r_p < 1$ impliquent la convergence de la série $\sum_0^\infty p^n$. On en déduit aussi que $\lim_n \frac{\delta(S_n)}{n} > 0$, la limite p.p existant d'après le théorème ergodique sous-additif. Dans le cas $G = S\ell(d, \mathbb{R})$, ceci implique immédiatement la croissance exponentielle des normes de produits de matrices aléatoires indépendantes, ce qui est un des résultats remarquables de la théorie et présente d'intéressantes conséquences [G.M.P.1977].

### 3.6. Frontières

On pourra se reporter à [F.1972] et [Gu1.1980]. L'existence de frontières non triviales permet de construire des harmoniques non constantes suivant la procédure esquissée en 2.4. Supposons que $G$ opère continûment sur un espace métrique localement compact et que la convolution par $p$ laisse invariante une probabilité $\nu(p * \nu = \nu)$. On dit alors que $(E, \nu)$ est une $p$-frontière si l'on a (pp) la convergence de $S_n \cdot \nu$ vers une mesure ponctuelle $\delta_{z(\omega)}$. On notera que l'équation $p * \nu = \nu$ implique que $f(g) = g \cdot \nu(\phi)$ est une harmonique bornée pour tout $\phi \in C_b(E)$ et que la suite de mesures $S_n \cdot \nu$ est donc une martingale convergente. Dans le cas d'une frontière, la variable aléatoire $z(\omega)$ est invariante au sens suivant :

$$z(\omega) = x_1(\omega) \cdot z(\theta\omega).$$

En un sens vague $z(\omega)$ peut être considéré comme un "point fixe aléatoire" et le concept de frontière formalise cette notion. Observons enfin que si $G$ n'agit pas trivialement sur le support de $\nu$, $z(\omega)$ est non constante et il y a donc des fonctions $p$-harmoniques non constantes obtenues par la formule de Poisson généralisée

$$f(g) = \int \phi[g \cdot z(\omega)] d\pi(\omega) = g \cdot \nu(\phi)$$

La formule $F(g, \omega) = \phi[g \cdot z(\omega)]$ fournit des fonctions invariantes au sens de 1.4.

L'exemple typique de frontière est l'espace projectif $P^{d-1}$ pour $G = S\ell(d, \mathbb{R})$ et $p$ ayant une densité. L'action de $G$ sur $P^{d-1}$ est proximale c'est-à-dire que pour $x, y \in P^{d-1}$ il existe une suite $g_n \in G$ avec $\lim_n g_n \cdot x = \lim_n g_n \cdot y$ : il suffit de prendre $g_n = a^n$ avec $a = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d), |\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d|$. Si $\nu$ est une probabilité sur $P^{d-1}$ vérifiant $p * \nu = \nu$, elle a une densité et donc ne charge pas les sous-espaces projectifs. On peut voir que par proximalité, la martingale $S_n \cdot \nu$ converge alors vers une mesure de Dirac. Plus généralement, la propriété de proximalité implique que les espaces de drapeaux sont des $p$-frontières. Ils permettent donc de construire des harmoniques non constantes au moyen de la formule $f(g) = g \cdot \nu(\phi)$. Un exemple simple de $p$-frontière pour un groupe moyennable est le suivant. Le groupe $G$ est le groupe des transformations affines de $E = \mathbb{R}$ définies par la formule $g(x) = ax + b$. Supposons $p$ fixée de façon que $\int \log |a(g)| dp(g) < 0, \quad |\int \log |b(g)| dp(g)| < +\infty$, et considérons les variables aléatoires indépendantes $g_i = (a_i, b_i)$. On a la formule

$$g_1 \cdots g_n(x) = b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_i \cdots a_{n-1} b_n + a_1 \cdots a_n x$$

et donc : $\lim_n g_1 \cdots g_n(x) = \sum_0^\infty a_1 \cdots a_k b_{k+1}$, la convergence de la série étant assurée par la loi des grands nombres. La variable $z(\omega) = \sum_0^\infty a_1 \cdots a_k b_{k+1}$ vérifie clairement : $z(\omega) = g_1(\omega) z(\theta\omega)$ et la loi de $z$ est donc une mesure $p$-invariante $\nu$. Clairement on a : $\lim_n g_1 \cdots g_n \nu = \delta_z(\omega)$ et $E$ est bien une $p$-frontière. Il y a donc aussi dans ce cas des harmoniques non constantes. Une autre situation où l'on dispose d'une frontière naturelle est celle du groupe libre $\Gamma_d$ à $d$ générateurs $a_i (1 \leq i \leq d)$. Si $B_d$ désigne l'ensemble des mots infinis unilatères en les $a_i^{\pm 1}$ avec succession interdite de $a_i^{\pm 1}$ et de son inverse, il est clair que $\Gamma_d$ opère sur $B_d$ par juxtaposition à gauche. Il est facile de voir que si $B_d$ est muni de la topologie produit, alors $B_d$ est compact et $\Gamma_d$ opère de manière proximale et minimale sur $B_d$. Par ailleurs $B_d$ est un sous-décalage de type fini de $\{\pm 1, \ldots, \pm d\}^N$ et on dispose donc ici de la notion de mesure de Gibbs. On voir aisément que si $p$ est une probabilité sur $\Gamma_d$ et $\nu$ l'unique mesure invariante sur $B_d$, alors $(B_d, \nu)$ est une $p$-frontière. Cette situation a été envisagée en [Dy, 1961] et a conduit à la notion générale de frontière [F.1963]. Elle se généralise naturellement dans le cas des groupes semi-simples $p$-adiques et des arbres [Ca.1973]. Enfin les représentations des séries principales et complémentaires se construisent à l'aide de l'action d'un groupe semi-simple $G$ sur sa frontière "maximale" qui se trouve donc à la base de l'analyse harmonique sur $G$ [F.P.1983].

### 3.7. Exposants de Liapunoff

Il est intéressant de présenter cette notion dans un cadre plus général se rattachant à 2.4. Soit $(\Omega, \theta, \pi)$ un système dynamique où $\pi$ est une probabilité $\theta$-invariante ergodique, $X(\omega)$ une fonction mesurable à valeurs dans $G\ell(d, \mathbb{R})$ telle que $\int |\log \|X(\omega)\|| d\pi < +\infty$. Alors le théorème ergodique sous additif permet de définir "le plus grand exposant"

$$\lambda_1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| \sum\nolimits_n(\omega) \|$$

où $\sum_n(\omega) = X_n(\omega) \cdots X_1(\omega)$. Plus généralement si $\sum_n^t(\omega)$ désigne la matrice correspondant à $\sum_n(\omega)$ dans le produit extérieur $\wedge^t \mathbb{R}^d$, la fonction de $t \in \{1, \ldots, d\}$ définie par $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| \sum_n^t(\omega) \|$ est linéaire par morceaux et ses pentes sont par définition les exposants de Liapunoff de $\sum_n(\omega)$ pour $t > 1$. Les longueurs des intervalles ainsi définis sont les multiplicités $m_i (1 \leq i \leq r)$ des exposants $\lambda_i$. Le théorème ergodique sous-additif [cf Le.1984] fournit alors un drapeau aléatoire $\Delta(\omega)$ défini par la suite de sous-espaces emboîtés $V_r(\omega) \subset \cdots \subset V_1(\omega)$ tel que sur $V_j | V_{j-1}$ on ait

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \| \sum\nolimits_n(\omega) x \| = \lambda_j \quad (1 \leq j \leq r).$$

L'ensemble des drapeaux du type précédent est un $G$-espace compact et l'image $\pi$ par $\Delta(\omega)$ est une mesure de probabilité $\nu$ sur cet espace dont on note $B_\pi$ le support. Par définition la variable $\Delta(\omega)$ satisfait la relation d'invariance

$$\Delta(\omega) = X_1(\omega) \cdot \Delta(\theta \omega)$$

et il est facile de voir que dans le cas où $\Omega = G^N, \pi = p^N, X_1(\omega)$ est la première projection, $\theta$ le décalage, alors l'espace $B_\pi$ est une $p$-frontière. On dispose donc ici d'un moyen de construction de $p$-frontières pour les sous-groupes de $G\ell(d,\mathbb{R})$ dès que l'on a une connaissance des exposants de Liapunoff de $p$. Ce point de vue est détaillé en [Gu1.1980]. Par ailleurs on peut voir que la connaissance des exposants résout de manière satisfaisante le problème de la loi des grands nombres pour $p$.

### 3.8. Chaînes de Markov fibrées

Cette notion correspond à celle de produit croisé dans la théorie ergodique. Elle intervient dans le contexte des chaînes semi-Markoviennes en Calcul des probabilités. On considère un espace localement compact $E$ sur lequel opère un groupe $\Gamma$ de façon que l'espace quotient $X \doteq E/\Gamma$ soit lui-même localement compact. On considère un noyau Markovien $Q$ sur $E$ respectant les fonctions continues et commutant avec l'action de $\Gamma$. Dans ces conditions un noyau Markovien $P$ se trouve défini sur $E/\Gamma = X$ et on dit que $Q$ est une chaîne fibrée au-dessus de $P$. On se place ici dans l'hypothèse où $P$ laisse invariante une mesure de probabilité $\eta$ sur $X$ et possède des propriétés spectrales du type quasi-compacité sur des espaces fonctionnels convenables sur $X$. Dans ces conditions une étude précise du noyau $Q$ à l'aide du groupe $\Gamma$ et du noyau $P$ peut être espérée. Ce point de vue a été introduit dans cette généralité en [Gu. 1983] afin d'étudier des situations précises comme celle des revêtements [Gu2.1981]. Les exemples intéressants sont forts nombreux, le cas $X$ réduit à un point correspondant à celui des marches aléatoires. Les décompositions des groupes à l'aide de certains sous-groupes conduisent, à partir d'une marche aléatoire, à de telles situations permettant ainsi l'étude de la marche aléatoire initiale. On pourra aboutir à une étude complète si l'analyse harmonique de $\Gamma$ est suffisamment précise. En effet si $\rho$ est une représentation de $\Gamma$ d'espace $V$ et si la fonction $f$ de $E$ dans $V$ satisfait $f(\gamma x) = \rho(\gamma)f(x)$ il est est de même de la fonction $Qf(x)$ et ceci permet de définir des opérateurs $P_\rho$ sur des espaces fonctionnels sur $X$ (à valeurs vectorielles). Par exemple si $\Gamma$ est abélien, à chaque caractère $\xi$ de $\Gamma$ sera associé un opérateur $P_\xi$ dépendant régulièrement de $\xi$ et possédant, dans les bons cas, des propriétés spectrales analogues à celles de $P$. Les marches aléatoires sur les groupes de déplacements $G = C \cdot \mathbb{R}^d$ produits semi-directs d'un groupe compact $C$ par $\mathbb{R}^d$ rentrent dans ce cadre. La situation se simplifie ici car l'opérateur sur $C = G/\mathbb{R}^d$ correspondant à $p$ est lui-même un opérateur de convolution sur $C$. Si ce dernier est bien étudié on est donc essentiellement ramené à $\mathbb{R}^d$. Les opérateurs définis à partir d'un caractère sont cependant plus complexes mais si leur étude est possible, l'analyse harmonique sur $\mathbb{R}^d$ fournit les résultats souhaités [Ba.1988]. Une autre situation est celle du mouvement brownien sur le revêtement universel $E$ d'une variété compacte $X$ la fibre étant ici le groupe fondamental $\Gamma$ [Gu2.1981], [Br1981]. La condition de commutation du noyau avec $\Gamma$ est satisfaite car $\Gamma$ opère par isométries et commute donc avec le Laplacien. On passe alors de propriétés du mouvement brownien à des propriétés des marches aléatoires sur $\Gamma$, point de vue qui a été repris et développé en [L.S., 1984]. Si $p$ est une probabilité sur $G\ell(d,\mathbb{R})$, elle définit un noyau Markovien sur $\mathbb{R}^d - \{0\} = E$ : $Q(v, \cdot) = p * \delta_v$ et ce noyau commute avec l'action des homothéties, le quotient $E/\mathbb{R}^*$ étant l'espace projectif $P^{d-1}$. La position à l'instant $n$ de la chaîne de noyau $Q$ étant donnée par $\sum_n(\omega) \cdot v$ on voit que l'étude de $\log \| \sum_n(\omega) \cdot v \|$ se ramène à celle du noyau sur $P^{d-1}$ défini par $p$ ; on verra que cette étude est possible sous des conditions très générales [G.R.1986]. C'est le point adopté par Furstenberg, Kesten et Tutubalin [S.T.1966] dans l'étude des produits de matrices aléatoires. Cette étude est en fait voisine de l'étude des théorèmes limites pour des transformations $T$ de type hyperbolique sur une variété $X$, c'est-à-dire l'étude de sommes du type $\sum_0^n f(T^k x)$ où $f$ est une fonction régulière. Au moyen des partitions Markoviennes on est ramené à un sous-décalage unilatère de type fini $(\Omega^+, \theta)$, à une mesure de Gibbs et à une fonction holdérienne $f$. L'étude des sommes de Birkhoff $\sum_0^n f \circ \theta^k(\omega)$ peut alors être envisagée à l'aide de l'opérateur $P$ adjoint de $\theta$ par rapport à $\pi$. Cet opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius se présente comme un barycentre de contractions de $\Omega^+$ et en ce sens est proche des opérateurs de convolution sur l'espace projectif considérés plus haut. En particulier des propriétés spectrales de type quasi-compacité ont lieu sur des espaces de fonctions holdériennes. Si l'on considère un caractère de $\mathbb{R}$ donné par l'exponentielle $e^{i\langle \xi, t \rangle}$, l'opérateur $P_\xi$ introduit plus haut s'écrit ici sous la forme : $P_\xi \phi(\omega) = P[e^{i\langle \xi, f \rangle} \phi]$ et une étude spectrale approfondie est possible [Gu.1983], [G.H.1988]. Ce point de vue a de nombreuses applications géométriques concernant par exemple le flot géodésique en courbure négative [Gu.1989], [G.L.1990].

## 4. Résultats principaux

Dans les cinq directions indiquées en 3, les résultats obtenus sont très nombreux et seules les grandes lignes seront esquissées ici. On détaillera plus loin quelques résultats typiques.

### 4.1. Théorie du potentiel

Le problème de trouver les groupes discrets récurrents est actuellement complètement résolu par des méthodes d'analyse réelle [cf C.S.V.1991] : il s'agit essentiellement de $Z$ et $Z^2$. La solution du problème plus général concernant les groupes de Lie à génération compacte doit découler de ces méthodes ainsi que du travail [G.K.R.1977]. Ce dernier travail, où le problème est posé dans sa généralité, résout le cas des groupes admettant une injection continue dans un groupe de Lie connexe. Dans cette question le théorème de [Gro.1981] donnant la structure des groupes à croissance polynomiale discrets joue un rôle essentiel. Ces méthodes d'analyse réelle donnent aussi des informations précises sur $p^n(V)$, dans le cas où $p$ est symétrique et à une densité : dans le cas d'un groupe nilpotent de degré de croissance $d$, on a un encadrement de la forme $0 < a \leq n^{d/2} p^n(V) \lambda(V)^{-1} \leq b$. Ce type d'estimation s'obtient dans d'autres cas par des méthodes d'analyse harmonique non commutative. C'est le cas par exemple des groupes semi-simples [Bou.1981] où est obtenue une estimation du type $p^n(V) \sim$ cte $\frac{r_p^n}{n^c}$ $c$ étant un rationnel dépendant du groupe seul. Ces méthodes s'étendent aussi aux arbres et groupes semi-simples $p$-adiques dans une certaine mesure [Sa.1978], [Pi.1983]. Par exemple, dans le cas d'un groupe libre à deux générateurs et d'une probabilité portée par ces générateurs on a $p^n(e) \sim$ cte $\frac{r_p^n}{n^{3/2}}$ [Ge 1980]. La nature de l'exposant $c$ et sa dépendance vis-à-vis de $p$ restent très mal comprises. Le problème de la récurrence se pose aussi pour l'action de $p$ sur un espace homogène de $G$ et est peu compris dans ce cas. Une réponse complète, analogue à celle des groupes est cependant connue pour les groupes nilpotents [Hen1976].

La représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées si $G$ est semi-simple et si $p$ a une densité a été obtenue par H. Furstenberg [F. 1963], sous la forme d'une formule de Poisson généralisée. Le cas des groupes de Lie connexes de type rigide a été traité par R. Azencott [Az. 1970] : les fonctions harmoniques bornées sont constantes. Ce résultat a été placé dans le cadre de la croissance polynomiale par Y. Guivarc'h [Gu.1973] et a donné lieu ensuite à des preuves simples basées sur l'entropie [Av.1974]. Cependant cette dernière méthode ne permet pas, pour le moment, d'obtenir les meilleurs résultats. Par exemple, sans hypothèse de densité sur $p$, mais vérifiant $\int \delta^\epsilon(g) dp(g)$ on peut prouver, par les méthodes de la théorie des représentations, que si $G$ est nilpotent les harmoniques bornées sont constantes [Gu.1973] ce qui paraît actuellement inaccessible, par les méthodes basées sur l'entropie. Le cas général d'un groupe de Lie connexe et d'une probabilité ayant une densité vérifiant $\int \delta(g) dp(g) < +\infty$ a été complétement traité par A. Raugi [Ra. 1977] : une $p$-frontière de $G$, qui est un espace homogène, est calculée de façon que toutes les harmoniques bornées s'obtiennent par la formule de Poisson correspondante. Les méthodes utilisées dans ce travail sont basées sur le calcul ou l'estimation des exposants de Liapunoff. Enfin le cas d'un sous-groupe discret de $G\ell(d, \mathbb{R})$ a été traité en [Le.] en utilisant l'entropie et les exposants de Liapunoff. Dans ce domaine les questions non résolues sont nombreuses.

Il y a relativement peu de résultats disponibles sur les harmoniques positives extrémales. Ici on suppose que $p$ admet une densité régulière. Le cas d'un groupe semi-simple a été traité par H. Furstenberg [F.1965], celui d'un groupe nilpotent par G.A. Margulis [Ma1966]. Ces derniers travaux ont introduit l'idée d'utiliser dans ce cadre le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff. Le cas du Laplacien sur un espace symétrique a été traité en [Kar1965] et repris sous forme très simplifiée en [Gu.1984]. Le travail de G.A. Margulis a été étendu à certains groupes à croissance polynomiale en [C.G.1974]. Enfin le cas de certains groupes de Lie résolubles a été traité en [E.1982]. Le problème de la frontière de Martin a été abordé pour les groupes libres en [D.M.1961]. une réponse générale dans ce cadre a été obtenue en [Der1965]. Ce dernier travail a été étendu aux groupes Fuchsiens en [Se1983] en utilisant la notion de mesure de Gibbs. Enfin un résultat général pour une famille de graphes comprenant les groupes hyperboliques au sens de Gromov a été obtenu par A. Ancona [An.1988] en utilisant les méthodes de la théorie du potentiel. Pour le cas des espaces symétriques de rang deux au moins on pourra consulter [G.T.1992], [Ta.1991] et [Bou1983]. Dans ce cas la frontière de Martin ne se réduit pas aux extrémales.

### 4.2. Analyse réelle et géométrie

L'ouvrage [C.S.V.1991] contient de très nombreux résultats dont nous extrayons simplement quelques exemples.

Les inégalités de Sobolev sont établies pour les groupes de Lie connexes dans la plus grande généralité. En particulier, dans le cas des groupes à croissance polynomiale de degré $d$ on obtient que pour les probabilités symétriques ayant une densité régulière la suite $n^{d/2}p^n(e)$ est encadrée entre deux constantes, ce qui fournit l'inégalité de Sobolev $\mathbb{L}^2$ au noyau de la théorie des semi-groupes sous-Markoviens symétriques et, grâce à la théorie des espaces de Dirichlet, fournit l'inégalité de Sobolev $\mathbb{L}^p$. On en déduit une estimation optimale du noyau de la chaleur $p^t(g)$ en fonction de $t$ et $\delta(g)$. Dans le cas de la croissance polynomiale des méthodes plus élaborées conduisent au fait que les transformées de Riesz sur $\mathbb{L}^p$ sont bornées [Al.1989]. Les conséquences géométriques sont nombreuses. Un résultat typique est l'équivalence de la transience du mouvement brownien sur le revêtement universel d'une variété compacte et de la transience des marches aléatoires sur le groupe fondamental, ce qui donne la forme des variétés transientes considérées, généralisant ainsi largement des résultats préliminaires [Gu.1981] et [L.S. 1984]. Comme indiqué en 1 ces méthodes permettent de résoudre complétement le problème de la récurrence des groupes. Elles permettent bien plus mais on voit que ce problème de type probabiliste a joué un rôle important dans l'obtention des résultats d'Analyse mentionnés.

### 4.3. Calcul des probabilités

Pour les théorèmes limites on peut distinguer de manière générale la partie "radiale" de $S_n(\omega)$ et la partie "directionnelle". Pour la partie radiale la positivité de $\gamma_p = \lim_n \frac{\delta(S_n)}{n}$ a été étudiée de manière assez complète en [Gu2.1980]. Dans le cas non moyennable on a $\gamma_p > 0$. Dans le cas moyennable une étude complète est possible pour les groupes de Lie connexes : la nullité de $\gamma_p$ équivaut à une condition simple correspondant si $G = \mathbb{R}^d$ à $\int x dp(x) = 0$. La partie directionnelle doit être reliée à la $p$-frontière maximale et on n'envisagera ici que le cas $G = S\ell(d, \mathbb{R})$. Dans ce cas les exposants de Liapunoff décrivent complétement la situation du point de vue loi des grands nombres. Faute de calcul explicite des exposants on dispose de formules intégrales mais par exemple le calcul du nombre $r$ d'exposants n'est cependant pas une trivialité.

Si l'on fait pas l'hypothèse que le support de $p$ engendre $G$ toplogiquement, désignons par $T_p$ le semi-groupe engendré par le support de $p$ et supposons son action suffisamment irréductible. Alors la proximalité de $T_p$ sur l'espace des drapeaux implique qu'il y a $d$ exposants distincts [Gul.1981] et [G.R.1986]. La condition de proximalité naturelle a été dégagée par I. Goldsheid et G.A. Margulis [G.M.1989] donnant ainsi une forme tout à fait efficace à ce résultat : il suffit que $T_p$ soit algébriquement dense dans $S\ell(d, \mathbb{R})$. Une forme pratiquement définitive a été donnée à ce type de résultat en [G.R.1989]. Le nombre d'exposants dépend relativement peu de $p$ : seule intervient l'adhérence de Zariski de $T_p$. On verra plus loin la formulation précise de ces résultats. Le théorème central limite pour les produits de matrices ont été envisagé par H. Furstenberg et H. Kesten [F.K.1960]. Il a été développé par V.I. Tutubalin [S.T.1966] dans le cas où $p$ a une densité. Grâce aux méthodes développées plus haut concernant les exposants et aux propriétés spectrales des opérateurs associés aux marches aléatoires sur les frontières il est possible d'aboutir à une solution presque définitive de ce problème. On donnera plus loin la formulation précise des résultats [Go,Gu.1991]. Ces résultats s'étendent aux groupes semi-simples. Une autre classe de groupes pour laquelle l'étude du théorème central limite est bien développée est la classe des groupes à croissance polynomiale. Les premiers résultats en ce sens ont été obtenus en [Go.] et ont été utilisés pour l'étude de la transience et de la récurrence des groupes de déplacements [Roy1974]. Dans le cas des groupes nilpotents gradués on peut donner un sens à l'expression $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ et la convergence en loi correspondante vers la loi au temps un d'un semi-groupe de diffusion a été obtenue en [Ra.1978] dans ce cadre. Les mêmes méthodes devraient rester valables pour les groupes de Lie connexes à croissance polynomiale. Enfin, une étude de certains groupes résolubles a été commencée en [Gri.1974]. Pour d'autres théorèmes limites concernant les produits de matrices aléatoires et les méthodes spectrales correspondantes on pourra consulter [G.R.1986] et [L.P.1982]. Le théorème de renouvellement présente des applications intéressantes aux relations de récurrence à coefficients aléatoires et aux milieux désordonné comme on le verra plus loin. Une telle étude a été menée en [Ke1973].

## 4.4. Théorie ergodique

Les méthodes de la théorie ergodique sont pleinement utilisées dans l'étude des frontières et des exposants. L'étude des produits croisés $\Omega \times G$ sous une forme plus générale que celle résultant de l'indépendance des accroissements est un sujet vaste aux nombreuses applications. Une situation proche de l'indépendance est réalisée si $(\Omega, \theta, \pi)$ est un difféomorphisme d'Asonov et si la fonction $x(\omega)$ à valeurs dans $G$ est holdérienne. Son étude est peu avancée sauf pour $G = \mathbb{R}^d$ [G.H.1988], [Gu.1989]. Le cas $G = G\ell(d, \mathbb{R})$ pose le problème des exposants de Liapunoff dont l'estimation est essentielle pour l'étude des milieux désordonnés. Dans un cadre différent ce problème est aussi abordé en [Her1983]. Revenant au cas indépendant, les exposants sont donnés par des formules intégrales faisant intervenir la mesure $\nu$ sur l'espace des drapeaux qui est $p$-invariante ($p * \nu = \nu$). On dispose de peu d'informations sur ces mesures et sur les exposants (cf. cependant [Key1987]). Par exemple la dépendance des exposants par rapports aux paramètres est physiquement importante et peu connue. Signalons cependant [L.P.1989] et [Pel1991] où l'on trouvera d'autres références. On pourra se reporter à [Le1984] pour des informations, notamment de dimension sur les mesures $\nu$. Dans le cas de $S\ell(2, \mathbb{R})$ et d'une probabilité portée par un sous-groupe discret, de telles mesures sont à rapprocher des mesures de Gibbs sur un espace produit [Se1983]. Par ailleurs, divers cas particuliers ont été rencontrés en Analyse [Kah1969], [Den1957] et la dimension de l'intersection de certains ensembles de Cantor peut s'exprimer en termes d'exposants de Lyapunoff [K.P. 1991].

### 4.5. Analyse harmonique non commutative

Dans le problème du comportement asymptotique de $p^n(V)$, qui correspond au théorème limite local en Calcul des Probabilités, l'analyse harmonique non commutative n'a été utilisée que dans le cas des groupes de déplacements et des groupes semi-simples. En dehors du cas du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$ [Gu1973] on fait l'hypothèse que $p$ a une densité par rapport à $\lambda$. Pour les groupes de déplacements de $\mathbb{R}^d$ on obtient alors $p^n(V| \sim$ cte $\frac{\lambda(V)}{n^{d/2}}$. Pour les groupes semi-simples réels on obtient à l'aide de la formule de Plancherel $p^n(V) \sim r_p^n \frac{\mu_p(V)}{n^c}$ où $\mu_p(V)$ est une certaine mesure associée à $p$ (différente de $\lambda$) et $c$ un rationnel dépendant de $G$ seul. Pour $G = S\ell(2, \mathbb{R})$ on a par exemple $c = \frac{3}{2}$ [Bou1981].

La relation entre certains groupes résolubles et les espaces symétriques fait que ce type de résultat vaut encore sur ces groupes résolubles, pour certaines probabilités [Bou1981]. Les calculs correspondants dans le cas d'un corps local autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ , et par conséquent des arbres homogènes, ont été développés en [Sa1978] et [Pi1983], pour certaines probabilités. L'équation de convolution $f = f * p$ a été étudiée par ces méthodes en [Gu1973] dans le cas de certains groupes à croissance polynomiale, dont les groupes nilpotents, sans faire d'hypothèse de densité sur $p$ mais en supposant $\int \delta^\epsilon(g|dp(g) < +\infty$ pour un $\epsilon > 0$. La méthode utilise les représentations induites à partir de certains sous-groupes et est basée sur l'étude du rayon spectral de l'opérateur associé à $p$ dans ces représentations. Alors on obtient la constance des harmoniques bornées.

Dans l'étude de certaines représentations du groupe libre la connaissance du spectre de l'opérateur associé à $p$ est essentielle ; ici le noyau de Green de $p$ est relativement explicite pour des raisons combinatoires et on dispose là d'un outil important [F.P.1983]. On peut, par exemple, en s'inspirant de l'analogie avec $S\ell(2,\mathbb{R})$, construire une famille analytique uniformément bornée de représentations généralisant ainsi la construction de Kunze et Stein [P.S.1986]. Une autre direction, liée aussi à la théorie ergodique, peut être envisagée ici. Il s'agit, lorsque $\Gamma$ est un sous-groupe discret de $G$, de l'étude du spectre de $p$ sur $\mathbb{L}^2(G/\Gamma)$ ou d'autres espaces fonctionnels. On sait que, lorsque $G$ est semi-simple, par exemple du type $SO(n,1)$, la décomposition de $\mathbb{L}^2(G/\Gamma)$ en représentations irréductibles est liée au spectre du Laplacien et du noyau de la chaleur $p^t$ sur $\mathbb{L}^2(G/\Gamma)$ si $G/\Gamma$ est de volume fini. Les évaluations du nombre de géodésiques périodiques en fonction de la longueur en découlent ; il en est de même de la vitesse de mélange du flot géodésique sur $G/\Gamma$ [Mo1987]. Si $G/\Gamma$ n'est pas de volume fini mais est géométriquement fini on peut dans certains cas construire des mesures invariantes naturelles pour $p^t$ ou pour le flot géodésique [Pa1984]. Il serait intéressant de poursuivre ici la connection avec l'analyse harmonique dans $\mathbb{L}^2(G/\Gamma)$.

### 4.6. Quelques thèmes connexes et applications

Ce sont des directions de recherches qui utilisent les idées développées plus haut et motivent à leur tour des questions dans le cadre précédent. L'étude de l'équation de Schroëdinger $(-\Delta+v)f=\lambda f$ en milieu désordonné sur la droite [cf. I] ou la bande s'appuie de manière essentielle sur les propriétés des produits de matrices aléatoires et en particulier des exposants [C.L.1990]. Elle a d'ailleurs fortement motivé leur étude approfondie [G.R.1986]. La preuve de la localisation des fonctions propres [G.M.P.1977] les utilise pleinement et il en sera sans doute de même pour d'autres propriétés. Dans le cas de la droite c'est le groupe $S\ell(2,\mathbb{R})$ qui intervient tandis que dans le cas important de la bande, c'est le groupe symplectique qui s'introduit et il est nécessaire de connaître tous les exposants de Liapunoff. De plus, diverses quantités ayant un sens physique doivent être évaluées et reliées à la théorie spectrale et en fin de compte aux produits de matrices aléatoires. Il en est ainsi par exemple de la densité d'états dont l'étude [L.P.1983] permet finalement de prouver la localisation pour des potentiels du type de Bernouilli [C.K.M.1987].

Dans le même esprit, les propriétés de la diffusion en milieu désordonné sur $Z$, en particulier le phénomène de diffusion lente [K.K.S.1975] reposent sur les propriétés à l'infini de certaines lois limites $\nu$ sur $\mathbb{R}^d$ associées au groupe affine et à l'équation $p*\nu=\nu$. Les produits de matrices aléatoires s'introduisent immédiatement dans l'étude des processus de branchement environnement aléatoire, étude qui conditionne d'ailleurs celle des marches aléatoires en milieu désordonné. Dans ce cadre, il y a de plus un cas récurrent étudié en [Si1980] qui donne lieu à un intéressant phénomène proche de la localisation. En dehors de la dimension 1 de très nombreuses questions se posent sur $\mathbb{Z}^d$, par analogie avec le cas des marches aléatoires invariantes par translation ; l'aspect intéressant réside en particulier dans les différences avec le cas classique. Dans le cas non commutatif, le cas des arbres et des groupes non moyennables discrets est peut être moins complexe, comme semble l'indiquer le résultat de [Sun1986] montrant la transience dans le cas non moyennable.

Par ailleurs les propriétés des lois limites $\nu$ mentionnées reposent sur un théorème de renouvellement pour les produits de matrices établi en [Ke 1973] dans le cas des matrices positives. Elles conduisent de manière naturelle à une convergence vers des lois stables au sens de P. Levy [G.L.P., 1991], convergence qui est aussi la clé de la diffusion lente [K.K.S.1975].

Si l'on fixe une mesure de probabilité $p$ sur un groupe discret $\Gamma$, divers objets se trouvent attachés au couple $(\Gamma, p)$ et en fait à $\Gamma$. Il en est ainsi de la $p$-frontière maximale qui dépend relativement peu de $p$ si $\Gamma$ est "fortement non abélien". Cette idée a été utilisée par H. Furstenberg [F.1971] pour aborder l'étude de la rigidité des réseaux de $S\ell(d, \mathbb{R})$ si $d > 2$. En effet, un homomorphisme d'un réseau dans un groupe linéaire se prolonge alors naturellement à la frontière de manière mesurable mais "controlée". Cette idée éclaire la solution complète de ce problème par G.A. Margulis [Ma.1991] basée sur des arguments de théorie ergodique et de géométrie algébrique et conduit à des questions du type suivant : pour un couple $(\Gamma, p)$ du type précédent a-t-on l'absolue continuité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'espace des drapeaux, de la mesure $p$-invariante $[p * \nu = \nu]$. Les exposants de Liapunoff jouent un rôle essentiel dans ces travaux et leur utilisation éclaire également certaines propriétés algébriques comme le théorème de J. Tits [Ti1972] relatif à l'existence de sous-groupes libres à deux générateurs dans les sous-groupes du groupe linéaire [Gu.1990].

Les méthodes et concepts développés plus haut jouent aussi un rôle important dans l'étude des relations entre les propriétés du revêtement universel d'une variété compacte et celles de son groupe fondamental. De ce point de vue, abordé en [Gu1981], [Br1981] il s'agit de relier le mouvement brownien sur la variété et les marches aléatoires sur le groupe fondamental et on pourra se reporter à [C.S.V.1991] pour des références et des énoncés précis. La comparaison des propriétés du flot géodésique et du mouvement brownien sur des revêtements de variétés compactes est une autre idée directrice développée en [Su1979]. La récurrence, l'ergodicité et les théorèmes limites en sont des exemples [Gu1989], [G.L.1991]. Certains de ces théorèmes limites sont proches des évaluations du nombre d'orbites fermées du flot géodésique en fonction de la longueur [La1989], [K.S.1987].

Dans ces dernières questions l'étude spectrale d'opérateurs de Ruelle-Perron-Frobenius convenables est un outil important. Cette classe d'opérateurs intervient plus généralement dans divers domaines. Leur utilisation permet par exemple de préciser la régularité de certaines ondelettes [CR.1990].

# 5. Exposants de Liapunoff des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications

## 5.1. Généralités

Considérons un système dynamique ergodique $(\Omega, \theta, \pi)$ où $\pi$ est une mesure invariante finie. Soit $X(\omega)$ une fonction mesurable sur $\Omega$ à valeurs dans le groupe linéaire $G\ell(d, I\!R)$ et supposons que $\sup(\log \|X(\omega)\|, \log \|X^{-1}(\omega)\|)$ soit $\pi$-intégrable. Posons $X_n(\omega) = X(\theta^n\omega)$ et considérons le produit de matrices $\sum_n(\omega) = X_{n-1}X_{n-2}\cdots X_0(\omega)$ $(n > 0)$. Alors la théorie générale montre qu'il existe $\Omega_1 \subset \Omega$ un ensemble de $\pi$-mesure 1 tel que pour tout $x \in I\!R^d$ et tout $\omega \in \Omega_1$ les suites $\frac{1}{n}\log \| \sum_n(\omega)x\|$ convergent vers des nombres dépendants de $x$ seul. Les valeurs possibles de la limite sont en nombre fini, au plus égal à $d$ ; elles seront rangées ici en ordre croissant et notées $\gamma_i$ : $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r$. Un drapeau aléatoire formé d'une suite croissante de sous-espaces $\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_{r-1} \subset I\!R = V_r$ se trouve défini par la condition

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \| \textstyle\sum_n(\omega)x\| = \gamma_i$$

pour $x \in V_i/V_{i-1}$. L'entier $m_i = \dim V_i - \dim V_{i-1}$ est appelé multiplicité de l'exposant $\gamma_i$. Les $\gamma_i$ et les multiplicités $m_i$ forment le spectre de Liapunoff de $X$. Ces définitions contiennent évidemment le cas où $\Omega$ est réduit à un point et $X(\omega)$ à une seule matrice $X$. Les exposants sont alors les modules des valeurs propres (complexes) de $X$ et les $m_i$ sont les multiplicités de ces modules. En général ils sont donnés par des formules intégrales. Le plus grand exposant $\gamma_r$ s'obtient à l'aide du théorème ergodique sous-additif sous la forme

$$\gamma_r = \lim_n \frac{1}{n} \log \| \textstyle\sum_n(\omega)\| \quad (p.p)$$

et les autres s'obtiennent à l'aide des produits extérieurs $\wedge^k I\!R^d$. Par exemple, notant $\sum_n^2$, l'extension de $\sum_n$ à $\wedge^2 I\!R^d$ on a lorsque $\gamma_r$ est simple :

$$\gamma_r + \gamma_{r-1} = \lim_n \frac{1}{n} \log \| \textstyle\sum_n^2(\omega)\|$$

et

$$\gamma_{r-1} - \gamma_r = \lim_n \frac{1}{n} \log \frac{\|\sum_n^2\|}{\|\sum_n\|} = \lim_n \frac{1}{n} \log \frac{\|\sum_n x \wedge \sum_n y\|}{\|\sum_n x\| \, \|\sum_n y\|}$$

sur un ensemble de $\pi$ mesure 1 dépendant de $x$ et $y \in I\!R^d$.

L'interprétation de $\gamma_{r-1} - \gamma_r$ est donc celle du taux de décroissance de l'angle de $\sum_n x$ et $\sum_n y$. Le problème d'estimer les $\gamma_i$ dépend évidemment du système $(\Omega, \theta, \pi)$ mais dans le cas indépendant $(\Omega = G^N, \pi = p^\infty)$ on peut espérer obtenir une conclusion dépendant seulement du semi-groupe $T_p$ engendré par le support de

$p$, au moins si $T_p$ opère de manière suffisamment irréductible sur les $\wedge^k \mathbb{R}^d$. En fait on va voir que dans ce cas, les multiplicités du spectre de Liapunoff ne dépendent que de l'adhérence de Zariski de $T_p$ qui est un groupe réductif souvent calculable.

### 5.2. Quelques résultats

Etudions, dans le cas indépendant, sous quelles conditions l'exposant dominant $\gamma_r$ est simple, en supposant que $T_p$ ne laisse invariante aucune réunion finie de sous-espaces de $\mathbb{R}^d$ (totale irréductibilité). Il est clair qu'une condition nécessaire est alors la proximalité de l'action de $T_p$ sur l'espace projectif $P^{d-1}$ c'es-à-dire l'existence, pour $x, y$ fixés, de suites $g_n \in T_p$ telles que l'angle de $g_n x$ et $g_n y$ tende vers zéro. Cette condition est, par exemple, réalisée si $T_p$ contient une matrice dont les valeurs propres sont réelles et distinctes en module. Inversement on a le théorème [Gul.1981] [G.R.1986].

**Théorème 1.** *Supposons $T_p$ totalement irréductible et proximal sur $P^{d-1}$. Alors l'exposant de Liapunoff dominant du produit de matrices aléatoires $\sum_n(\omega)$ est simple.*

**Corollaire.** *Supposons $T_p$ totalement irréductible sur les puissances extérieures $\wedge^k \mathbb{R}^d$ $(1 \leq k \leq d)$ et proximal sur l'espace $B$ des drapeaux complets. Alors le spectre de Liapunoff du produit $\sum_n(\omega)$ est simple.*

Ces résultats possèdent des conséquences purement algébriques. Par exemple [Gu1990] on a le

**Théorème 2.** *Soit $T$ un semi-groupe totalement irréductible sur les puissances extérieures $\wedge^k \mathbb{R}^d$ $(1 \leq k \leq d)$ et proximal sur l'espace des drapeaux complets. Alors $T$ contient des matrices diagonalisables à valeurs propres réelles distinctes en module.*

En fait le résultat "aléatoire" est plus précis puisqu'il dit que le produit $\sum_n(\omega)$ devient pour $n$ grand diagonalisable à valeurs propres réelles distinctes d'ordre de grandeur donnés par les différents exposants de Liapunoff.

En utilisant alors des résultats analogues sur le corps $\mathbf{C}$ et les corps $p$-adiques on obtient une nouvelle preuve d'un résultat de J. Tits [Ti.1972].

**Théorème 3.** *(J. Tits) Soit $k$ un corps de caractéristique zéro et $\Gamma$ un sous-groupe de $G\ell(d, k)$ qui ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini. Alors $\Gamma$ contient un groupe libre à deux générateurs.*

Dans les situations concrètes la question se pose d'établir la proximalité de l'action de $T_p$, notamment dans le cas des matrices obtenues dans le cadre de l'équation de Schröedinger à potentiel aléatoire dans une bande. La condition suffisante naturelle (et souvent effective) a été obtenue par I. Goldsheid et G.A. Margulis [G.M.1989].

**Théorème 4.** *Avec les notations précédentes, supposons $T_p$ dense au sens de Zariski dans $G\ell(d, \mathbb{R})$. Alors $T_p$ est proximal sur l'espace des drapeaux et par conséquent le spectre de Liapunoff est simple.*

En fait, plus généralement la propriété de proximalité de $T_p$ sur un espace de drapeaux donné est une propriété de son adhérence de Zariski et on peut donc généraliser et préciser le dernier énoncé comme suit. Soit $H_p$ le groupe algébrique qui est l'adhérence de Zariski du semi-groupe $T_p$ ; on montre que c'est un groupe réductif admettant des décompositions de Cartan : $H_p = K_1 A_1^+ K_1$ où $K_1$ est compact et $A_1$ est un groupe de matrices diagonales réelles. Un élément de $A_1^+$ est une matrice diagonale à valeurs propres réelles positives $\lambda_i (1 \leq i \leq s) : \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_s$ et de multiplicités $n_i$. On obtient alors le théorème [G.R.1989].

**Théorème 5.** *Avec les notations précédentes, l'entier $s$ est égal au nombre d'exposants et la multiplicité de l'exposant $\gamma_i$ est égale à celle de la valeur propre $\lambda_i$.*

## 6. Méthodes

On renvoie à [G.R.1986]. La preuve du théorème 1 utilise le théorème de convergence des martingales pour construire la direction "contractante" de $\sum_n(\omega)$ et le lemme ergodique suivant pour obtenir un taux de croissance pour $\| \sum_n(\omega) \|$,

**Lemme.** *Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\theta}, \tilde{\pi})$ un système dynamique ergodique $f$ une fonction réelle $\tilde{\pi}$-intégrable. Si $\sum_0^{n-1} f \circ \tilde{\theta}^k(\omega)$ converge presque sûrement vers $+\infty$ alors, la limite de $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f \circ \tilde{\theta}^k(\omega)$ est strictement positive.*

Ce lemme s'applique à l'espace $\tilde{\Omega} = \Omega \times P^{d-1}$ muni de la mesure $\tilde{\pi} = \pi \times \nu$ où $\nu$ est une probabilité sur $P^{d-1}$ satisfaisant $p * \nu = \nu$. La transformation $\tilde{\theta}$ est définie par $\tilde{\theta}(\omega, b) = (\theta\omega, X(\omega) \cdot b)$ et la fonction $f(\omega, b)$ s'écrit $\log \|X(\omega)b\|$ où $b \in P^{d-1}$ est ici identifié à un vecteur unitaire. Dès lors la quantité $\log \| \sum_n(\omega)b\|$ s'exprime comme une somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} f \circ \tilde{\theta}(\omega, b)$. La convergence vers l'infini de cette somme s'obtient par l'étude de la matrice transposée $\sum_n^t$ qui donne lieu à une martingale à valeurs mesures $\sum_n^t \cdot \nu^t$, $\nu^t$ étant une certaine mesure invariante sur $P^{d-1}$. Par proximalité de $T_p$ et $T_p^t$ sur $P^{d-1}$, cette martingale converge vers une mesure de Dirac et on peut voir que, par conséquent, $\| \sum_n(\omega)b\|$ converge $\pi \times \nu$ presque partout vers $+\infty$.

### 6.1. Application aux théorèmes limites

La loi des grands nombres pour $\sum_n$ étant ainsi établie on peut poser la question de la validité des divers théorèmes limites du calcul des probabilités pour $\sum_n$. Ces théorèmes se révèlent utiles dans diverses applications.

C'est par ailleurs une généralisation naturelle de la dimension 1, le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ étant remplacé par $G\ell(d,\mathbb{R})$. L'élément nouveau est ici la présence de la frontière $B$, et en particulier de l'espace projectif, dont les propriétés permettent une étude des variables aléatoires naturelles par l'analyse harmonique. Pour fixer les idées, bornons-nous pour l'instant à la quantité $\log \| \sum_n(\omega)b\|$ qui s'exprime à l'aide de l'espace projectif ($b \in P^{d-1}$). Si l'on observe que la quantité $\sigma(g,b) = \log \|gb\|$ satisfait la relation de cocycle $\sigma(gh,b) = \sigma(g,h\cdot b) + \sigma(h,b)$ on voit que l'on peut exprimer la fonction caractéristique $\phi_n(\xi)$ de $\log \| \sum_n(\omega)b\|$, soit $\phi_n(\xi) = \int \| \sum_n(\omega)b\|^{i\xi} d\pi(\omega)$, à l'aide de l'itération d'un opérateur sur $C(P^{d-1})$. Cet opérateur $Q_\xi$ est défini par

$$Q_\xi\phi(b) = \int \|gb\|^{i\xi}\phi(g\cdot b)dp(g)$$

et l'on a $\phi_n(\xi) = Q_\xi^n 1(b)$. La simplicité de l'exposant dominant pour $\sum_n(\omega)$ a pour conséquence que $Q_\xi$, opérant sur un espace de fonctions holdériennes, possède une théorie spectrale du type quasi compacité. En particulier $Q_\xi^n$ possède une valeur propre dominante (isolée) $k^n(\xi)$ (pour $\xi$ petit) qui joue le rôle de transformée de Fourier de $\log \| \sum_n(\omega)b\|$. On peut donc transposer ici les méthodes classiques du Calcul des probabilités ; l'élément nouveau est l'étude d'équations fonctionnelles permettant de résoudre les problèmes non triviaux de non dégénérescence et d'apériodicité. On pourra se reporter à [L.P.1982] et [G.R.1986].

Observons cependant que l'étude des $Q_\xi$ pour $\xi$ complexe, c'est-à-dire des transformées de Laplace, pose des problèmes nouveaux non résolus. Enfin à titre d'exemple donnons un résultat concernant le théorème central limite, en supposant bien sûr l'existence de moments convenables pour $p$. Décomposons, comme en 3,l'adhérence de Zariski $H_p$ de $T_p$ sous la forme $H_p = K_1A_1^+K_1$ et écrivons $\sum_n = k_n a_n k'_n$, ($k_n, k'_n \in K_1$, $a_n \in A_1^+$). La loi des grands nombres donne que $\frac{1}{n}\log a_n$ converge vers la matrice diagonale $\gamma$ des exposants $\gamma_i$ comptés avec leurs multiplicités. Le théorème suivant est un cas particulier d'un théorème de [Go, Gu.1991].

**Théorème 6.** *Supposons que le déterminant soit non constant sur le support de $p$, le semi-groupe $T_p$ totalement irréductible et soit $r$ le nombre d'exposants de Liapunoff. Alors la matrice diagonale aléatoire*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}[\log a_n - n\gamma]$$

*converge en loi et la loi limite est gaussienne de support égal à $\log A_1 \simeq \mathbb{R}^r$.*

Ce type de théorème a été établi par V.I. Tutubalin dans le cas où $p$ a une densité (et alors $A_1$ est l'ensemble des matrices diagonales). Ici la difficulté réside dans le fait que $p$ n'a pas en général de densité et on dispose simplement d'une information concernant l'adhérence de Zariski de $T_p$. Cette adhérence est "grande" en général bien que le support de $p$ soit "petit". On doit donc prouver que certaines équations fonctionnelles de type cohomologique traduisant la non dégénérescence de la loi limite n'ont que des solutions rationnelles alors qu'elles pourraient avoir, a priori, des solutions continues. Des éléments algébriques généralisant le théorème 2 jouent alors un rôle essentiel.

# 7. Théorèmes limites pour des systèmes hyperboliques et applications

## 7.1. Introduction

Les méthodes décrites ici s'appliquent à des situations qui revêtent des aspects géométriques divers. Pour fixer les idées, soit $(X, T, \pi)$ un système dynamique d'Anosov. $X$ est donc une variété riemannienne compacte, $T$ est un difféomorphisme de $X$ et le fibré tangent $TX$ se décompose continûment en une somme directe $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ qui est $T$-invariante ; il existe de plus des constantes $C > 0$ et $\rho \in [0, 1[$ telles que,

$$\|T^n v\| \leq C\rho^n \|v\| \quad (n > 0 \quad v \in \mathcal{V}) \quad \|T^{-m} w\| \leq C\rho^m \|w\| \quad (m > 0 \quad w \in \mathcal{W})$$

De plus $\pi$ est une probabilité $T$-invariante "de Gibbs" (terme expliqué plus loin) qui pourra être par exemple équivalente à la mesure de Lebesgue avec une densité Höldérienne. On se donne de plus une fonction $f$ de $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ que l'on suppose höldérienne et l'on considère les sommes de Birkhoff

$$S_n(x) = \sum_0^{n-1} f \circ T^k(x) \quad (x \in X)$$

On s'intéresse au comportement asymptotique de ces sommes lorsque $x$ est distribué suivant la probabilité $\pi$. Il s'agit donc ici d'un analogue différentiable des marches aléatoires (à sauts indépendants) sur $\mathbb{R}^d$. On peut penser que les propriétés typiques des marches aléatoires vont se transposer à ce cadre en raison de la propriété "d'oubli" de la condition initiale impliquée par l'hyperbolicité.

Un système dynamique produit croisé se trouve défini sur $X \times \mathbb{R}^d$ par $\tilde{T}(x, t) = [Tx, t + f(x)]$ et la mesure infinie $\pi \times \lambda$ est $\tilde{T}$-invariante ($\lambda$ mesure de Lebesgue). Les propriétés des sommes $S_n(x)$ sont alors liées à celles de ce système. Par exemple la densité dans $\mathbb{C}$ des sommes $S_n(x)$ se traduira par l'ergodicité de $X \times \mathbb{R}^d$. Ce sont les propriétés de ces produits croisés ou de systèmes analogues qui pourront s'interpréter géométriquement. Une situation analogue très simple faisant intervenir l'application dilatante $z \to z^2$ de $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ dans $\mathbb{T}$ est celle de l'étude des sommes lacunaires $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k}$ et l'on obtient dans ce cas l'ergodicité du produit croisé correspondant, donc la densité dans $\mathbb{C}$ des sommes $S_n(z)$ pour presque tout $z$. Des questions analogues se posent pour les séries de Fourier lacunaires [Ha.1980].

Une autre situation analogue est celle du flot géodésique sur une variété compacte $V$ à courbure sectionnelle négative. La méthode des sections de Poincaré permet en principe de se ramener à une transformation et de décrire le flot comme un "flot spécial". L'analogue de la fonction $f$ est fourni ici par un revêtement abélien de fibre $Z^d$. Dans ce cas les méthodes décrites montrent en particulier que l'ergodicité du flot sur ce revêtement équivaut à $d \leq 2$ ; ce résultat est analogue à la condition de récurrence des marches aléatoires dans $Z^d$.

Le passage des situations différentiables aux situations de type probabiliste s'effectue au moyen de la notion de "partition de Markov" introduite dans un cas particulier par R. Adler et B.J. Weiss et développée par Ya Sinaï, D. Ruelle, R. Bowen [Bow1975].

Si $A$ est un ensemble fini (alphabet) et $M$ une matrice à coefficients 0 ou 1 on peut définir un sous-ensemble fermé $\Omega \subset A^Z$ par la condition que la succession de deux lettres $a, b \in A$ dans le "mot" $\omega \in \Omega$ est permise si $m_{ab} = 1$, et interdite si $m_{ab} = 0$. On supposera l'existence d'un entier $n$ tel que $M^n$ soit strictement positive. Alors $\Omega$ est invariant par le décalage $\theta$ ; c'est un "sous décalage de type fini". Une partition de Markov permet de remplacer un système d'Anosov $(X, T, \pi)$ par un sous-décalage de type fini $(\Omega, \theta, \pi)$ grâce à une application höldérienne $\sigma : \Omega \to X$, les images réciproques des points de $X$ par $\sigma$ étant en nombre borné et la relation de commutation $T \circ \sigma = \sigma \circ \theta$ étant satisfaite. La mesure $\pi$ sur $X$ se relève naturellement sur $\Omega$ et est encore notée $\pi$. La condition de Gibbs se traduit alors au niveau de $(\Omega, \theta)$ par l'existence d'une fonction höldérienne $g$ sur $\Omega$ telle pour tout $\alpha \in \Omega$, la suite $\pi\{\omega \in \Omega; \omega_k = \alpha_k \ |k| \leq n\}$ soit dans un rapport borné (inférieurement et supérieurement) avec la suite $e^{nP(g)} e^{\sum_{|k| \leq n} f \circ \theta^k(\alpha)}$ où $P(g)$ est un réel associé à $g$ (pression de $g$). Afin de se ramener à une situation de type probabiliste, il est important d'observer qu'une fonction $f$ höldérienne sur $\Omega$ se ramène, par cohomologie, à une fonction $f'$ höldérienne ne dépendant que des coordonnées d'indice positif, donc définie sur $\Omega^+ \subset A^N$ :

$$f = f' + h \circ \theta - h$$

Les propriétés asymptotiques des sommes de Birkhoff associées à $f$ ne diffèrent pas de celles associées à $f'$, comme on peut le voir dans chaque cas particulier. Le décalage sur $\Omega^+$ est maintenant unilatère mais on peut l'inverser localement. Par exemple si $\Omega^+ = A^N$, chaque lettre $a \in A$ fournit un "inverse" de $\omega$ par juxtaposition de $a$ ; cette transformation sera notée $a : \omega \to a\omega$. Il est clair que le semi-groupe de transformation de $A^N$ engendré par $A$ est proximal sur le compact $A^N$ et, en ce sens,

$A^N$ est analogue aux frontières envisagées dans la partie précédente. La situation est cependant ici plus simple car chaque transformation est une contraction tandis que le cas des frontières conduit à une "contraction en moyenne". L'inversion de $\theta$ sur $\Omega^+$ conduit à des barycentres de contractions et la somme de Birkhoff $\sum_0^{n-1} f \circ \theta^k(\omega)$ où $f$ est définie sur $\Omega^+$, a même loi qu'une somme de Birkhoff le long d'une trajectoire d'une chaîne de Markov. L'étude en loi des sommes de Birkhoff $S_n(\omega)$ se ramène donc à une question analogue concernant des chaînes de Markov d'un type spécial.

## 7.2. Quelques résultats typiques

On pourra se reporter à [Gu1983], [G.H.1988], [Gu1989]. Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le cas d'un sous-décalage de type fini $(\Omega, \theta, \pi)$. Les situations différentiables s'y ramènent au prix de discussions délicates relatives à la régularité des fonctions considérées.

Si $f$ est une fonction höldérienne de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$, elle sera dite non dégénérée s'il existe $g$ höldérienne et un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ tels que $f + g - g \circ \theta$ soit à valeurs dans ce sous-espace. De même la fonction $f$ sera dite arithmétique s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ et $g$ höldérienne de $\Omega$ dans $\mathbf{T}$ tels que $e^{i\langle \xi, f\rangle} = e^{i\alpha}\dfrac{g \circ \theta}{g}$. Cette forme multiplicative est respectée dans les changements d'espaces entraînés par les choix de partitions markoviennes et des définitions analogues valent dans le cas des systèmes d'Anosov. Si $f$ est à valeurs dans $Z^d$, la notion d'arithméticité est naturellement modifiée en supposant $\xi \notin Z^d$. On peut alors, par exemple, prouver le théorème central limite avec reste suivant.

**Théorème 1.** *Soit $(X, T, \pi)$ un système d'Anosov ergodique, $f$ une fonction höldérienne de $X$ dans $\mathbb{R}$ qui est non dégénérée et vérifie $\int f d\pi = 0$. Alors il existe des constantes $\sigma > 0$ et $C > 0$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}$*

$$\left| \pi\{x; S_n(x) < \sigma t\sqrt{n}\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

On peut plus généralement établir les théorèmes limites du Calcul des probabilités. Le théorème limite local présente un intérêt particulier car il permet d'établir l'ergodicité de produits croisés.

**Théorème 2.** *Soit $(\Omega, \theta, \pi)$ un sous-décalage de type fini (mélangeant), $f$ une fonction höldérienne de $\Omega$ dans $Z^d$ que l'on suppose non arithmétique avec $\int f d\pi = 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout pavé $I$ on ait :*

$$\pi\{\omega, S_n(\omega) \in I\} \sim C \frac{\lambda(I)}{n^{d/2}}$$

**Corollaire.** *Avec les notations du théorème 2, le produit croisé* $\Omega \times Z^d$ *est ergodique si et seulement si* $d \leq 2$.

**Exemple.** Pour presque tout $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| = 1$, les sommes $S_n(z) = \sum_0^{n-1} z^{2^k}$ forment un ensemble dense dans $\mathbf{C}$ . La preuve de ce résultat [Gu1983] est en fait bien plus simple que celle des résultats généraux car on peut ici travailler directement sur le tore $\mathbb{T} = \{z; |z| = 1\}$ au lieu d'utiliser un codage. Une preuve de ce dernier résultat a également été obtenue par d'autres auteurs par des méthodes arithmétiques [A.P.1986].

L'utilisation des partitions markoviennes permet d'obtenir des résultats analogues pour le flot géodésique en courbure négative :

**Théorème 3.** *Soit* $X$ *une variété riemannienne compacte à courbure négative,* $\tilde{X}$ *un revêtement abélien de* $X$ *à fibre* $Z^d$. *Alors le flot géodésique sur* $\tilde{X}$ *est ergodique si et seulement si* $d \leq 2$.

Des résultats similaires valent pour le mouvement brownien sur $\tilde{X}$ et un passage (qualitatif) d'une situation à l'autre est possible [Gu1983] de manière assez générale. Par ailleurs la méthode de preuve du théorème 2 conduit à l'estimation du nombre de géodésiques fermées sur $X$, dans une classe d'homologie donnée, en fonction de la longueur [La1989].

### 7.3. Indications sur les méthodes

Un théorème de quasi-compacité pour certains opérateurs joue un rôle important. Pour un énoncé plus général on pourra se reporter à [Hen1992]. Soient $L$ et $B$ deux espaces de Banach normés par $\|\cdot\|$ et $|\cdot|$ avec $L \subset B$ et l'injection de $L$ dans $B$ compacte

**Théorème 4.** *Soit* $Q$ *un opérateur respectant* $L$ *et* $B$ *tel que les normes* $|Q^n|$ *soient bornées. Supposons qu'il existe un réel* $\rho \in [0,1[$ *et* $C > 0$ *tel que*

$$\forall x \in L \quad \|Qx\| \leq \rho\|x\| + C|x|.$$

*Alors le spectre de* $Q$ *dans* $L$ *est contenu dans* $\{z \in \mathbf{C}\ ; |z| \leq 1\}$ *et son intersection avec* $\{z; |z| > \rho + \epsilon\}$ *est formée d'un nombre fini de valeurs propres, pour* $\epsilon$ *petit.*

Montrons comment ce théorème permet d'étudier les fonctions caractéristiques de $S_n(\omega)$ dans le cas du sous-décalage unilatère $(\Omega^+, \theta, \pi)$ auquel on est finalement ramené. l'opérateur adjoint $Q$ de $\theta$ par rapport à $\pi$ est un noyau Markovien barycentre de contractions qui s'exprime sous la forme :

$$Q\phi(\omega) = \sum_a q(\omega, a)\phi(a\omega)$$

où $q(\omega, a)$ est höldérienne d'ordre $\epsilon$. Cette propriété donne la relation ($C > 0$)

$$[Q\phi]_\epsilon \leq \frac{1}{2^\epsilon}[\phi]_\epsilon + C|\phi|_\infty$$

où $[\phi]_\epsilon$ désigne $\sup_{\omega,\omega'} \frac{|\phi(\omega)-\phi(\omega')|}{d^\epsilon(\omega,\omega')}$ et $d(\omega, \omega') = \sum_0^\infty \frac{1}{2^k}\delta(\omega_k, \omega'_k)$ ; l'opérateur $Q$ satisfait donc les conditions du théorème précédent si $B$ est l'espace des fonctions continues sur $\Omega^+$ et $L$, celui des fonctions höldériennes d'ordre $\epsilon$. Introduisons aussi les opérateurs $Q_\xi (\xi \in \mathbb{R}^d)$ définis par

$$Q_\xi \phi = Q[e^{i\langle \xi, f\rangle}\phi]$$

Ils vérifient aussi les hypothèses du théorème. La fonction caractéristique de $S_n(\omega)$ s'écrit

$$\phi_n(\xi) = \int e^{i\langle \xi, S_n\rangle} d\pi(\omega) = \langle Q_\xi^n 1, 1\rangle_\pi$$

l'étude de $\phi_n(\xi)$ est possible grâce au théorème énoncé et conduit aux énoncés explicités au paragraphe précédent. Les conditions de dégénérescence et d'arithméticité sont liées à la nature des valeurs propres des $Q_\xi$ sur le cercle unité.

On observera que cette méthode est la même que celle indiquée pour les produits de matrices aléatoires. Dans ce dernier cas la situation est plus complexe. Les propriétés des opérateurs $Q_\xi$ découlent alors de la simplicité du plus grand exposant tandis que les conditions de non dégénérescence et d'arithmiticité doivent être prouvées en partant des hypothèses de densité au sens de Zariski du semi-groupe $T_p$.

## Références


[1] [Al.1989] G. ALEXOPOULOS *Inégalités de Harnack paraboliques et transformées de Riesz sur les groupes de Lie à croissance polynomiale.* C.R.A.S. t. 309, p. 661-662 (1989).

[2] [An.1988] A. ANCONA *Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés.* Lecture Notes in Math 1427, p. 3-112 (1988).

[3] [A.P.1987] J.M. ANDERSON, L.D. PITT *On recurrence properties of certain locunary series.* I, II, J. Fur die Reine Math Bd 377, p. 65-96 (1987).

[4] [A.K.1963] V.I. ARNOLD, A.L. KRYLOV *Uniform distribution of points on a sphere and some ergodic properties of solutions of differential equations in a complex region.* Sov. Math Dokl 4 n° 1, p. 1-5 (1963).

[5] [Av.1974] A. AVEZ *Théorème de Choquet-Deny pour les groupes à croissance non exponentielle.* C.R.A.S. 279, p. 25-28 (1974).

[6] [Az.1970] R. AZENCOTT *Espaces de Poisson des groupes localement compacts.* Lecture Notes in Math 148 Springer (1970).

[7] [Ba.1988] M. BABILLOT *Théorie du renouvellement pour les chaînes semi-Markoviennes transientes.* Ann. I.H.P. vol. 24 n° 4, p. 507-569 (1988).

[8] [B.L.P.1977] P. BALDI, N. LOHOUÉ, J. PEYRIÈRE *Sur la classification des groupes récurrents.* C.R.A.S. t. 285, p. 1103-1104 (1977).

[9] [Bou.1981] P. BOUGEROL *Théorème central limite local pour certains groupes de Lie.* Ann. E.N.S. 4ème série t. 14, p. 403-432 (1981).

[10] [Bou.1983] P. BOUGEROL *Comportement à l'infini du noyau potentiel du mouvement brownien sur un espace Riemannien symmétrique.* Lecture Notes in Math 1096, p. 90-115 (1983).

[11] [B.L.1985] P. BOUGEROL ET J. LACROIX *Products of random matrices with applications to Schroëdinger operators.* Progress in Probability and Statistics 8, Birkhauser 1985.

[12] [Bow.1975] *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* Lecture Notes in Math 470, Springer (1975).

[13] [Br.1981] R. BROOKS *The fondamental group and the spectrum of the Laplacian.* Comment Math Helvetici 56 p. 581-598 (1981).

[14] [B.R.1974] A. BRUNEL, A. REVUZ *Marches de Harris sur les groupes localement compacts.* Ann. E.N.S. (4) 7, p. 273-310 (1974).

[15] [C.K.M.1987] R. CARMONA, A. KLEIN, F. MARTINELLI *Anderson localisation for Bernouilli and other singular potentials.* (Comm. in Math Physics 108, p. 41-66 (1987).

[16] [C.L.1990] R. CARMONA, J. LACROIX *Spectral theory of random Schroëdinger operators.* Probability and its applications Birkhauser 1990.

[17] [Ca.1973] P. CARTIER *Géométrie et analyse sur les arbres.* Séminaire Bourbaki 71-72, exp. 407. Lecture Notes in Maths 317, p. 123-140 Springer, 1973.

[18] [C.D.1960] G. CHOQUET-J. DENY *Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$.* C.R.A.S. t. 250, p. 799-801 (1960).

[19] [Co.1988] Y. COLIN DE VERDIÈRE *Distribution de points sur une sphère.* Séminaire Bourbaki 88-89, exposé 703.

[20] [C.G.1974] J.-P. CONZE, Y. GUIVARC'H *Propriétés de droite fixe et fonctions harmoniques positives.* Lecture Notes in Math 404, p. 126-132 (1974).

[21] [C.R.1990] J.P. CONZE, A. RAUGI *Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications.* Bull. S.M.F. 118 p. 273-310 (1990).

[22] [C.S.V.1991] T. COULHON, L. SALOFF-COSTE, N.TH. VAROPOULOS *Analysis and Geometry on groups.* (1991).

[23] [Cr.1973] P. CRÉPEL *Récurrence des marches aléatoires sur les groupes de Lie.* Lecture Notes in Math 532, p. 50-69, Springer. (1973)

[24] [Den.1957] A. DENJOY *Sur une fonction de Minkowski* Un demi siècle de notes communiquées aux Académies I La variable complexe Paris Gauthier-Villars, p.180-182, 1957.

[25] [Der.1975] Y. DERRIENNIC *Frontière de Martin pour les marches aléatoires sur le groupe libre.* Z. Wahr 32, p. 261-276 (1975).

[26] [Der.1986] Y. DERRIENNIC *Entropie, théorèmes limites et marches aléatoires.* Lecture Notes in Math 1210, p. 241-284, Springer (1986).

[27] [D.M.1961] E.B. DYNKIN, M. MALYUTOV *Random walks on groups with a finite number of generators.* Soviet Math Dokl 2, p. 399-402 (1961).

[28] [E1982] L. ELIE *Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les groupes de Lie.* Ann. E.N.S. t. 15, p. 257-364 (1982).

[29] [F.P.1983] A. FIGA-TALAMANCA, M.A. PICARDELLO *Harmonic analysis on free groups.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 87, Dekker New York (1983).

[30] [F.1963] H. FURSTENBERG *A Poisson formula for semi-simple Lie groups.* Annals of Math 2, t. 77, p. 335-386 (1963).

[31] [F.1965] H.FURSTENBERG *Translation invariant cones of functions on semi-simple Lie groups.* Bull. A.M.S. t. 71, p. 271-326 (1965).

[32] [F.1972] H. FURSTENBERG *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous space.* Proc. Symp. Pure Math 26 p. 193-229 (1972).

[33] [F.1971] H. FURSTENBERG *Random walk and discrete subgroups of Lie groups.* Advances in Probability and related topics (Ed P. Ney) Vol 1, p. 1-63 M. Dekker (1971).

[34] [F.K.1960] H. FURSTENBERG, H. KESTEN *Products of random matrices.* Ann. Math Stat. 31 p. 457-469 (1960).

[35] [Ge.1980] P. GERL *Asymptotic behaviour of convolution power on $F_2$.* Astérique 74, p. 1-7, (1980).

[36] [Ge.1985] P. GERL *Random walks on graphs.* Lecture Notes in Math 1210, p. 285-303 (1985).

[37] [Gl.1976] S. GLASNER *Proximal flows.* Lecture Notes in Math 517, Springer (1976).

[38] [Go.Gu.1991] I. GOLDSHEID, Y. GUIVARC'H *Dimension de la loi Gaussienne pour un produit de matrices aléatoires indépendantes et adhérence de Zariski.* C.R.A.S. t. 213 I, p. 305-308, 1991.

[39] [G.M.1989] I. GOLDSHEID, G.A. MARGULIS *Lyapunov indices of a product of random matrices.* Russian Math Surveys 44-5 p. 11-81 (1989).

[40] [G.M.P.1977] I GOLDSHEID, S.A. MOLCANOV, L.A. PASTUR *A pure point spectrum of the one-dimensional Schroëdinger operators.* Funct. Anal. Appl. 11, p. 1-10 (1977).

[41] [Gor1973] L.G. GOROSTIZA *The central limit theorem for random motions of d-dimensional euclidian space.* Annals of Proba vol. n° 4 (1973).

[42] [Gre1963] U. GRENANDER *Probabilities on algebraic structures.* Wiley 1963

[43] [Gri.1974] A.K. GRINCEVICIUS *A central limit theorem for the group of linear transformations of the real axis.* Soviet Math Dokl vol. 15, p. 1512-1515 (1974).

[44] [Gro1981] M. GROMOV *Groups of polynomial growth and expanding maps.* Publ. Math I.H.E.S. n° 53, p. 53-78 (1981).

[45] [Gu1973] Y. GUIVARC'H *Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques.* Bull. S.M.F. 101, p. 333-379 (1973).

[46] [Gu1976] Y. GUIVARC'H *Equirépartition dans les espaces homogènes.* Lecture Notes in Math 523, p. 131-142, Springer (1976).

[47] [G.K.R.1977] Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE *Marches aléatoires sur les groupes de Lie.* Lecture Notes in Math 624, Springer 1977.

[48] [Gu1.1980] Y. GUIVARC'H *Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires.* Lecture Notes in Math 774, p. 176-250, Springer (1980).

[49] [Gu2.1980] Y. GUIVARC'H *Une loi des grands nombres pour les groupes de Lie.* Astérisque 74, p. 47-98, (1980).

[50] [Gu1.1981] Y. GUIVARC'H *Sur les exposants de Liapunoff des marches aléatoires.* C.R.A.S. 292, p. 327-329 (1981).

[51] [Gu2.1981] Y. GUIVARC'H *Mouvement brownien sur les revêtements d'une variété compacte.* C.R.A.S. t. 292, p. 851-853 (1981).

[52] [Gu.1983] Y. GUIVARC'H *Application d'un théorème limite local à la transience et à la récurrence de marches de Markov.* Lecture Notes in Math 1096 (Théorie du potentiel), p. 301-332, Springer (1983).

[53] [Gu.1984] Y. GUIVARC'H *Sur la représentation intégrale des fonctions harmoniques et de fonctions propres positives dans un espace Riemannien symmétrique.* Bull. Sc Math 2ème série 108, p. 373-392 (1984).

[54] [G.R.1986] Y. GUIVARC'H, A. RAUGI *Products of random matrices and convergence theorems.* Contempory Math 50 A.M.S., p. 31-54 (1986).

[55] [G.H.1988] Y. GUIVARC'H, J. HARDY *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov.* Ann. I.H.P. 24 n° 1, p. 73-98 (1988).

[56] [Gu.1989] Y. GUIVARC'H *Propriétés ergodiques, en mesure infinie, de certains systèmes dynamiques fibrés.* Ergod. Th., Dyn. Syst. 9, p. 433-453 (1989).

[57] [G.R.1989] Y. GUIVARC'H, A. RAUGI *Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles.* Israël Journal of Math 65 n° 2, p. 165-196 (1989).

[58] [Gu.1990] Y. GUIVARC'H *Produits de matrices aléatoires et applications aux sous-groupes du groupe linéaire.* Ergod. Th. and Dyn. Syst. 10, p. 483-512 (1990).

[59] [G.L.1990] Y. GUIVARC'H, Y. LE JAN *Sur l'enroulement du flot géodésique.* C.R.A.S. t. 311, ser. I p. 645-648 (1990).

[60] [G.L.P.1991] Y. GUIVARC'H, E. LE PAGE *Relations de récurrence à coefficients aléatoires et lois stables.* Préprint 1991.

[61] [G.T.1991] Y. GUIVARC'H, J.-C. TAYLOR *The Martin compactification of a symmetric space at the bottom of the positive spectrum.* Préprint 1991

[62] [Ha1980] J. HAWKES *Probabilistic behaviour of some locunary series.* Z. Wahr 53, p. 21-33 (1980).

[63] [Hen1976] H. HENNION *Marches aléatoires sur les espaces homogènes des groupes nilpotents à génération finie.* Z. Wahr 34, p. 245-267 (1976).

[64] [Hen1992] H. HENNION *Décomposition spectrale des opérateurs de Doeblin Fortet.* A paraître Proceedings of the A.M.S.

[65] [Her1983] M. HERMAN *Une méthode pour minorer les exposants de Liapunoff et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et Moser sur le tore de dimension 2.* Comment Math Helvetici 58, p. 453-502 (1983).

[66] [Hey1977] H. HEYER *Probability measures on locally compact groups.* Ergebnisse der Math, Springer 1977.

[67] [Hul1974] A. HULANICKI *Subalgebra of $\mathbb{L}^1(G)$ associated to a Laplacian on a Lie group.* Colloq. Math 31, p. 259-287 (1974).

[68] [Kah1969] J.-P. KAHANE *Sur la distribution de certaines séries aléatoires.* Colloque Théorie des nombres, Bordeaux (1969), Bull. S.M.F. mém. 25, p. 119-122 (1971).

[69] [K.V.1983] V.A. KAIMANOVITCH, A.M. VERSHIK *Random walks on discrete groups : boundary and entropy.* Annals of proba vol 11 n° 3, p. 457-490 (1983).

[70] [Kai1985] V.A. KAIMANOVITCH *An entropy criterion for maximality of the boundary of random walks on discrete groups.* Sov. Math Dokl vol. 31, n° 1, p. 193-197 (1985).

[71] [Kai1987] V.A. KAIMANOVITCH *Boundaries of random walks on polycyclic groups and the law of large numbers for solvable groups.* Vestn Leningr Gos Univ. Ser 1, n° 4, p. 38-45, (1987).

[72] [Kar1965] F.I. KARPELEVIC *The geometry of geodesics and the eigen functions of the Laplace. Beltrami operator on symmetric spaces.* Trans Moscow Math Soc. t. 14, p. 51-199 (1965).

[73] [K.S.1987] A. KATSUDA, T. SUNADA *Homology and closed geodecis in a compact Riemann surface.* Amer. Journal of Math 109 p. 145-156 (1987).

[74] [K.P.1991] R. KENYON, Y. PERES *Intersecting random translates of invariant Cantor sets.* Inventiones Math, Fasc. 3, p. 601-629 (1991).

[75] [Ke1959] H. KESTEN *Symmetric random walks on groups.* TAMS 92, p. 336-354 (1959).

[76] [Ke1967] H. KESTEN *The Martin boundary of recurrent random walks on countable groups.* Proc $5^{th}$ Berkeley Symp on Math Statistics and Probability t. II, p. 51-74 (1967).

[77] [Ke1973] H. KESTEN *Random difference equations and renewal theory for products of random matrices.* Acta Math 131, p. 208-248 (1973).

[78] [K.K.S.1975] H. KESTEN, M.V. KOZLOV, F. SPITZER *A limit law for random walk in a random environment.* Composito Math 30-2, p. 145-168 (1975).

[79] [Key1987] E.S. KEY *Computable examples of the maximal Lyapunov exponent.* Proba Th. Rel. Fields 75, p. 97-107 (1987).

[80] [Ki1986] Y. KIFER *Ergodic theory of random transformations.* Birkhauser Boston (1986).

[81] [La1989] S.P. LALLEY *Renewal theory in symbolic dynamics with applications to geodesic flows, non euclidian tessellations and their fractal limits.* Acta Math 163, p.1-55 (1989).

[82] [Le.1984] F. LE DRAPPIER *Quelques propriétés des exposants caractéristiques.* Lecture Notes in Math 1097, p. 305-396, Springer (1984).

[83] [Le1985] F. LE DRAPPIER *Poisson boundaries of discrete groups of matrices.* Israël Journal of Math, vol. 50 n° 4 (1985).

[84] [L.P.1982] E. LE PAGE *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires.* Lecture Notes in Math 928, p. 258-303, Springer 1982.

[85] [L.P.1983] E. LE PAGE *Répartition d'états d'un opérateur de Schroëdinger aléatoire.* Lecture Notes in Math 1064 p. 309-363 (1983).

[86] [L.P.1989] E. LE PAGE *Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications.* Ann. I.H.P. 25, p. 109-142 (1989).

[87] [L.P.S.1987] A. LUBOTSKY, R. PHILLIPS, P. SARNAK *Hecke operators and distributing points on the sphere I.* CPAM 39, p. 149-186 (1987).

[88] [L.S.1984] T. LYONS, D. SULLIVAN *Function theory, random paths and covering spaces.* Journal of Differential Geometry 19, p. 299-323 (1984).

[89] [Ma.1966] G.A. MARGULIS *Positive harmonic functions on nilpotent groups.* Soviet Math Dokl t. 166, p. 241-244 (1966).

[90] [Ma.1991] G.A. MARGULIS *Discrete subgroups of semi-simple Lie groups.* Ergebnisse der Math. Springer 1991.

[91] [Mo1987] CC MOORE *Exponential decay of correlations coefficients for geodesic flows.* Math sciences research institute Publ., vol 6, Springer p. 163-181 (1987).

[92] [N.S.1966] P. NEY, F. SPITZER *The Martin boundary for random walks.* T.A.M.S. 121 (1966).

[93] [Pa1984] S.J. PATTERSON *Lectures on measures on limit set of Kleinian groups London.* Lecture Notes série 111, p. 281-323, Cambridge Univ. Press (1984).

[94] [Pe1992] Y. PERES *Analytic dependance of Lyapunov exponents on transition probabilities.* Lecture Notes in Math,(Proc. of the conference on Lyapunov exponents Ed L. Arnold), Springer (1992).

[95] [Pi1983] M. PICARDELLO *Spherical functions and local central limit theorems on free groups.* Annali di Matematica pura ed applicata IV vol. 33, p. 177-191 (1983).

[96] [P.S.1986] T. PYTLIK, R. SZWARC *An analytic family of uniformly bounded representation of free groups.* Acta Math 157, p. 287-309 (1986).

[97] [Ra.1977] A. RAUGI *Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes de Lie.* Bull. S.M.F. mém. 54 (1977).

[98] [Ra.1978] A. RAUGI *Théorèmes de la limite centrale sur les groupes nilpotents.* Z. Wahr 43, p. 149-172 (1978).

[99] [Ros1981] J. ROSENBLATT *Ergodic mixing of random walks on locally compact groups.* Math Ann. 257, p. 31-42 (1981).

[100] [Roy1974] B. ROYNETTE *Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$.* Z. Wahr 31, p. 25-34 (1974).

[101] [Sa1978] S. SAWYER *Isotropic random walks on a tree.* Z. Wahr 42, p. 279-292, (1978).

[102] [S.T.1966] V.V. SAZONOV, V.N. TUTUBALIN *Probability distributions on topological groups.* Theory of Proba and Appl. vol. 10 n° 1 (1966).

[103] [Se1983] C. SERIES *The Martin boundary for a Fuchsian group.* Israël Journal of Math 44, p. 221-242 (1983).

[104] [Si.1982] YA. SINAÏ *The limiting behaviour of a one dimensionnal random walk in a random medium.* Theory of Proba. Appl. vol. 28, n° 2, p. 256-269 (1982).

[105] [Sp1964] F. SPITZER *Principles of random walks.* Van Nostrand, 1964.

[106] [Su1979] D. SULLIVAN *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions.* Publi. Math I.H.E.S. 50, p. 171-202 (1979).

[107] [Sun1986] C. SUNYACH *Marches aléatoires récurrentes, en milieu aléatoire sur un groupe.* C.R.A.S. t. 303 p. 479-481 (1986).

[108] [Ta.1991] J.-C. TAYLOR *Compactification of $\mathbb{R}^n$ induced by a polyedral cone decomposition.* (Proceedings of the 1991 Rome conference in harmonic analysis and discrete potential theory).

[109] [Ti.1972] J. TITS *Free subgroups in linear groups.* Journal of Algebra 20, p. 250-270 (1972).

[110] [V1983] N.T. VAROPOULOS *Brownian motion and transient groups.* Ann. Inst. Fourier 33 (2), p. 241-261 (1983).

[111] [V1986] N.T. VAROPOULOS *Théorie du potentiel sur des groupes et des variétés.* C.R.A.S. t. 302 ser 1 n° 6, p. 203-205 (1986)

[112] [Zi.1977] R. ZIMMER *Ergodic actions and stochastic process on groups and homogeneous spaces.* Lecture Notes in Math 668, p. 253-264 (1977).

[113] [Zi.1984] R. ZIMMER *Ergodic theory and semi-simple groups.* Birkhauser Boston 1984.