

JEAN-MARC DERRIEN

**Théorème limite central pour les automorphismes ergodiques du tore**

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1992, fascicule 2  
« Fascicule de probabilités », , p. 1-57

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1992\\_\\_2\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992__2_A3_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,  
1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# THEOREME LIMITE CENTRAL POUR LES AUTOMORPHISMES ERGODIQUES DU TORE

Jean-Marc DERRIEN

## INTRODUCTION

### Plan du mémoire

On désire, ici, montrer un théorème limite central pour les automorphismes ergodiques du tore  $T^2 = R^2/Z^2$  (théorème I). Pour ce faire, on établira, d'une part, un théorème limite central pour une certaine classe de chaînes de Markov (théorème II) et, d'autre part, on vérifiera que, via les sous-shifts mélangeants, le théorème I est un corollaire du théorème II.

Après un bref rappel des premières propriétés sur les automorphismes continus du tore (Partie I), on développe, dans la partie II, la construction d'une partition de  $T^2$  liée à un automorphisme ergodique particulier,  $T$ . L'étude des propriétés de cette partition permettra, entre autres choses, d'établir un isomorphisme entre un sous-shift bilatère mélangeant et le système dynamique défini par  $T$ . En fin de partie, une idée est donnée pour généraliser ces résultats à l'ensemble des automorphismes ergodiques, la suite du mémoire ne traitera cependant que le cas de  $T$ .

La partie III utilise la construction précédente pour montrer que le théorème I se déduit de théorèmes analogues pour des sous-shifts mélangeants, bilatère puis unilatère.

Sur ce dernier type de sous-shifts, on définit, dans la partie IV, un noyau markovien dont les propriétés conduisent à préciser les hypothèses du théorème II, théorème qui est démontré dans la partie V, essentiellement à l'aide du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu et de la théorie des perturbations qui sont énoncés en annexes.

La partie VI rassemble les résultats précédents pour conclure.

La partie VII commente un lemme non démontré dans la partie III.

L'ensemble constitue une étude, dans le cas particulier des automorphismes ergodiques du tore, de résultats généraux obtenus par Y. Guivarc'h et J. Hardy dans [5]. Des méthodes similaires ont été utilisées par J. Rousseau-Egele dans [10] pour obtenir le même type de résultats dans le cas de certaines transformations dilatantes de l'intervalle  $[0,1]$  dans lui-même.

## NOTATIONS ET DEFINITIONS

Si  $(X, d)$  est un espace métrique compact, on désignera par

.  $B(x, \eta)$ ,  $x \in X$  et  $\eta > 0$ , la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\eta$ .

.  $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$  l'espace de Banach des fonctions continues sur  $(X, d)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$

avec  $\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in X} |\phi(x)|$

.  $(L_\varepsilon(X), \|\cdot\|_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , l'espace de Banach des fonctions Lipschitziennes sur  $(X, d^\varepsilon)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$

avec  $\|\phi\|_\varepsilon = \|\phi\|_\infty + [\phi]_\varepsilon$  et  $[\phi]_\varepsilon = \sup_{x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^\varepsilon}$

(On oubliera l'indice  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 1$ )

.  $H(X) = \bigcup_{\varepsilon > 0} L_\varepsilon(X)$  l'espace des fonctions höldériennes sur  $(X, d)$

.  $\mathcal{B}_X$  la tribu des boréliens sur  $X$ .

Si  $\mu$  est une mesure sur  $(X, \mathcal{B}_X)$  et si  $T : X \rightarrow X$  est un homéomorphisme précisant la mesure  $\mu$ , on dira que

Définition 1 :  $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  est un cobord si  $f = g \circ T - g$  sur  $X$  avec  $g$  höldérienne à valeurs réelles.

Définition 2 :  $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$  vérifie le théorème limite central si pour toute fonction  $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  höldérienne de moyenne nulle qui ne soit pas un cobord, on a les résultats suivants :

$$1. \quad \sigma^2(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \left( \frac{S_n f}{\sqrt{n}} \right)^2 d\mu \text{ existe et est strictement positif}$$

(où l'on a posé  $S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ )

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\{x \in X / S_n f(x) \leq \sigma(f) t \sqrt{n}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du \text{ pour tout réel } t.$$

Remarquons qu'alors on a le résultat suivant concernant les équations fonctionnelles de cobord :

"Si  $(X, \mathcal{B}_X, \mu, T)$  vérifie le théorème limite central,

si  $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  est höldérienne et s'écrit  $f = g \circ T - g$  avec

$g \in L^2(\mu)$  alors  $f$  s'écrit  $f = \tilde{g} \circ T - \tilde{g}$  avec  $\tilde{g}$  höldérienne"

puisque si  $f = g \circ T - g$  avec  $g \in L^2(\mu)$ , alors  $\sigma^2(f) = 0$ .

PARTIE I

**GENERALITES SUR LE TORE ET SES AUTO-MORPHISMES CONTINUS**

Les résultats de cette partie ne seront qu'énoncés ; pour plus de détails, on pourra se référer au livre "Ergodic theory" de K. Petersen ([9]).

I. Le tore

Dans toute la suite, le tore  $\mathbb{T}^2$  désignera le groupe abélien  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ . On le munira de la distance  $\delta : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \rightarrow \max_{i=1,2} (\min(|x_i - y_i|, 1 - |x_i - y_i|))$$

qui en fait un groupe compact.

$\mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}$  sera alors la tribu borélienne de  $(\mathbb{T}^2, \delta)$  et,  $m$ , la mesure de Haar normalisée sur  $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2})$ .

II. Les automorphismes continus

L'ensemble des automorphismes continus de  $(\mathbb{T}^2, \delta)$  coïncide avec l'ensemble :

$$\{S : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc \in \{-1, 1\}\}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}$$

Les automorphismes considérés seront désormais supposés continus.

Proposition : Un automorphisme  $S$ , défini à l'aide de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , préserve la mesure  $m$ . De plus, il est ergodique si et seulement si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  n'admet pas de racines de l'unité parmi ses valeurs propres.

Propriétés des automorphismes ergodiques : Soit  $S$  un automorphisme ergodique représenté par  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Alors :

1.  $S$  est mélangeant.
2. Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $B$  sont réelles avec, par exemple,  $|\lambda_1| > 1$  et  $|\lambda_2| < 1$ .
3. Si l'on considère  $B$  comme une application linéaire sur l'espace affine  $\mathbb{R}^2$ , les droites passant par 0 et de directions, les directions propres de  $B$ , ont une pente irrationnelle et donc, chacune, une projection dense sur  $\mathbb{T}^2$ .

## PARTIE II

### **CODAGE**

On considère dans cette partie, l'automorphisme ergodique

$$T : (\mathbb{T}^2, \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}, m) \rightarrow (\mathbb{T}^2, \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2}, m)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}$$

On cherche ici à obtenir une partition finie de  $\mathbb{T}^2$  telle que la connaissance de la position d'un point, relativement à cette partition, aux cours du temps caractérise le point considéré. On demandera en plus à cette correspondance une certaine régularité.

Ce type de partitions a été introduit initialement par R. L. Adler et B. Weiss dans [1]. Elles ont été présentées par J.P. Conze et K. Petersen ([9]), en particulier.

On se place dans l'espace affine  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance euclidienne et de la mesure de Lebesgue. Le tore étant identifié à n'importe quel carré de côté unité dont les sommets sont à coordonnées entières.

Le raisonnement dans le plan est justifié par la relation suivante, valable sur  $\mathbb{R}^2$  et évidente par définition de  $T$  :

$$T \circ p = p \circ A \quad \text{où } p \text{ est la projection canonique } p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$\text{et où } A \text{ est l'application linéaire } A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On dira que deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$  de  $\mathbb{R}^2$  sont des copies l'un de l'autre si il existe un couple  $(a, b)$  d'entiers tel que  $E_1 = E_2 + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . On a alors en particulier  $p(E_1) = p(E_2)$ .

#### I. Construction et propriétés markoviennes de la partition

Soient  $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$  les deux valeurs propres de  $A$  et, respectivement  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les directions propres correspondantes. (Puisque  $A$  est symétrique, on peut remarquer que  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont perpendiculaires mais ceci ne joue pas un rôle essentiel dans la suite).

Soit encore  $(0, e_1, e_2)$  le repère orthonormé de  $\mathbb{R}^2$  tel que le vecteur  $e_1$  (respectivement  $e_2$ ) ait pour direction  $\delta_1$  (resp.  $\delta_2$ ) et soit orienté comme indiqué figure 1.

Considérons, a priori, les segments  $P_1$  et  $P_2$  de milieux 0 et respectivement parallèles aux directions  $\delta_1$  et  $\delta_2$  caractérisés figure 1. On obtient alors en envisageant toutes les copies de  $P_1$  et  $P_2$  un pavage de  $\mathbb{R}^2$  ainsi qu'une partition  $\{R_1, \dots, R_7\}$  de  $\mathbb{T}^2$  illustrés figure 2.

Remarques :

1. Si l'on note, pour  $i = 1, 2, \dots, 7$ , l'ensemble de  $\mathbb{R}^2$  constitué de toutes les copies du segment  $P_i$ , la longueur de  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) est déterminée de manière à satisfaire :

. l'appartenance de ses extrémités à  $P_2$  (resp.  $P_1$ ) - d'où un pavage en "quadrilatères fermés".

. la propriété (C) énoncée plus loin.

2.  $p$  est injective sur tout rectangle du pavage et deux rectangles du pavage de  $\mathbb{R}^2$  ayant même projection sur le tore sont des copies l'un de l'autre.

3. Le mot "partition" ci-dessus signifie que  $\mathbb{T}^2 = R_1 \cup \dots \cup R_7$  et que si  $i \neq j$ ,  $R_i \cap R_j = \partial R_i \cap \partial R_j$  (où  $\partial R$  désigne le bord de  $R$ ).

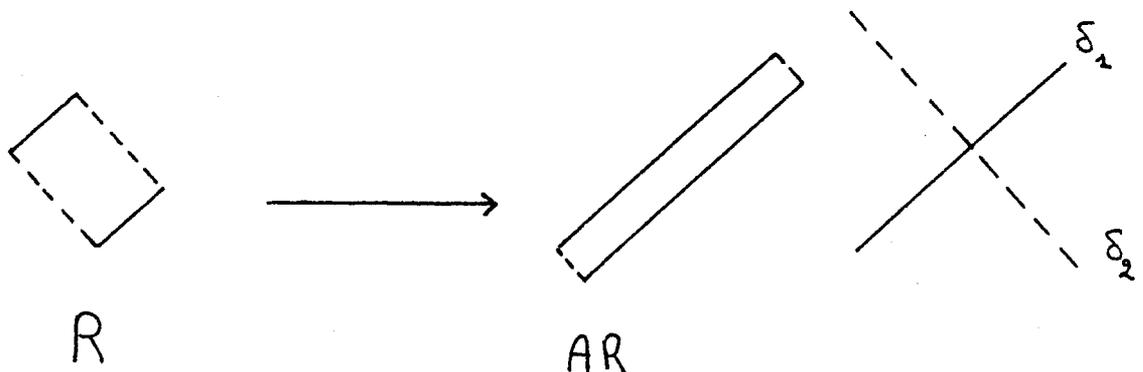
On pose pour la suite  $P = \bigcup_{i=1}^7 \partial R_i$  et  $I = \{1, 2, \dots, 7\}$ .

Quelques définitions (illustrées figure 3)

On appellera :

Rectangle : tout rectangle de  $\mathbb{R}^2$ , ou en projection sur le tore, d'aire non nulle et délimité par des côtés parallèles aux directions propres de  $A$ .

Remarque : Sous l'action de  $A$ , un rectangle va subir une dilatation de rapport  $\lambda_1$ , dans la direction  $\delta_1$  et une contraction de rapport  $\lambda_2$  dans la direction  $\delta_2$ .



Fibre dilatante (respectivement contractante) d'un rectangle R : tout segment de direction  $\delta_1$  (respectivement  $\delta_2$ ) délimité par les "bords contractants" (resp. "dilatants") de R .

c-rectangle (respectivement d-rectangle) : tout rectangle du plan dont les "bords contractants" (respectivement "dilatants") sont contenus dans  $P_2$  (resp.  $P_1$ ) et dont l'intérieur ne contient pas de points de  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) .

c-rectangle simple (respectivement d-rectangle simple) : tout c-rectangle (respectivement d-rectangle) dont l'intérieur ne contient pas de points de  $P_2$  (respectivement  $P_1$ ) .

Propriété de partition Markovienne :

1.  $AP_2 \subset P_2$  : En effet, comme  $P_2$  passe par 0 et est parallèle à la direction contractante, tout point de  $P_2$  est transformé par A en un point de  $P_2$  . Or, si  $x \in P_2$  , il existe y dans  $P_2$  tel que  $p(x) = p(y)$  et d'après ce qui précède  $Ay \in P_2$  . Comme enfin  $p(Ax) = p(Ay)$  , on en déduit que  $Ax \in P_2$  puisque  $P_2$  contient toutes les copies de  $P_2$  .

2.  $A^{-1}P_1 \subset P_1$  : Même raisonnement en remarquant que les directions dilatante et contractante de  $A^{-1}$  sont exactement inversées par rapport à celles de A .

Corollaire : L'image par A d'un c-rectangle R est encore un c-rectangle .

Preuve : De 1. , on déduit que les "bords contractants" de R sont transformés par A en segments contenus dans  $P_2$  . De plus,  $AR \cap P_1 = \emptyset$  car  $A^{-1}(AR \cap P_1) = R \cap A^{-1}P_1 \subset R \cap P_1 = \emptyset$  .

On aurait de même que l'ensemble des d-rectangles est stable par  $A^{-1}$  .

## II. Images de rectangles

Le codage va découler des propriétés qui suivent sur les images des rectangles du plan.

On notera dans la suite  $C_1, C_2, \dots, C_7$  les sept rectangles distincts représentés figure 4. Les conséquences des propriétés de partition markovienne permettent d'obtenir sans calcul une connaissance suffisante des images des  $C_i$  ,  $i = 1, \dots, 7$  (voir les figures 5 à 11).

(Pour s'en assurer il suffit de vérifier les relations :  $a = \frac{b}{\lambda_1 - 2} = \lambda_1 c$  où les constantes a , b et c ( $a = b+c$ ) désignent les longueurs indiquées figure 2).

On constate immédiatement que pour tout  $i$  dans  $I$ ,  $AC_i$  est un  $c$ -rectangle divisé en  $n(i)$   $c$ -rectangles simples  $D_i^1, \dots, D_i^{n(i)}$ . (Ceci résulte d'ailleurs du corollaire précédent).

D'autre part, comme  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$  est un représentant de  $R_i$  modulo la relation d'équivalence qui projette  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{T}^2$ , vu les images des  $C_i$ , on a le système suivant :

$$\begin{array}{llll}
 TR_1 \subset R_5 \cup R_6 \cup R_7 & n(1) = 3 & m(TR_1 \cap R_j) > 0 \text{ si } j \in \{5, 6, 7\}, = 0 \text{ sinon} \\
 TR_2 \subset R_4 \cup R_1 \cup R_2 & n(2) = 3 & m(TR_2 \cap R_j) > 0 \text{ si } j \in \{4, 1, 2\}, = 0 \text{ sinon} \\
 TR_3 \subset R_4 \cup R_1 \cup R_2 & n(3) = 3 & m(TR_3 \cap R_j) > 0 \text{ si } j \in \{4, 1, 2\}, = 0 \text{ sinon} \\
 TR_4 \subset R_4 \cup R_1 \cup R_2 & n(4) = 3 & m(TR_4 \cap R_j) > 0 \text{ si } j \in \{4, 1, 2\}, = 0 \text{ sinon} \\
 TR_5 \subset R_5 \cup R_6 \cup R_7 & n(5) = 3 & m(TR_5 \cap R_j) > 0 \text{ si } j \in \{5, 6, 7\}, = 0 \text{ sinon} \\
 TR_6 \subset R_3 & n(6) = 1 & m(TR_6 \cap R_j) > 0 \text{ si } j = 3, = 0 \text{ sinon} \\
 TR_7 \subset R_5 \cup R_6 \cup R_7 & n(7) = 1 & m(TR_7 \cap R_j) > 0 \text{ si } j \in \{5, 6, 7\}, = 0 \text{ sinon}
 \end{array}$$

Puisqu'il s'agit d'envisager la position au cours du temps d'un point du tore relativement à la partition  $\{R_1, R_2, \dots, R_7\}$ , il est alors naturel d'envisager l'ensemble :

$$\Sigma = \{\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{I}^{\mathbb{Z}} / M(\omega_k, \omega_{k+1}) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

où  $M$  est la matrice  $7 \times 7$  telle que  $M(i, j) = 1$  si  $m(TR_i \cap R_j) > 0$   
 $M(i, j) = 0$  sinon.

Sur  $\Sigma$  on définit le décalage de Bernoulli,  $\theta$  :

$$\begin{array}{l}
 \Sigma \rightarrow \Sigma \\
 \omega \mapsto \theta\omega \text{ tel que } (\theta\omega)_k = \omega_{k+1} \quad \forall k
 \end{array}$$

et les projecteurs  $\Omega_k : \Sigma \rightarrow \mathbb{I}$   
 $\omega \mapsto \omega_k, \quad \forall k$

Sur  $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ , on définit la distance  $d$  :

$$\mathbb{I}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{I}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(\omega, \omega') \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|k|}} (1 - \delta_{\omega_k, \omega'_k}) \text{ qui correspond à la topologie produit}$$

sur  $\mathbb{I}^{\mathbb{Z}}$ .  $(\Sigma, d)$  est alors un fermé de  $(\mathbb{I}^{\mathbb{Z}}, d)$  ; c'est donc un compact et sa tribu borélienne est

$$\mathcal{B}_{\Sigma} = \sigma([\Omega_k = i_0, \dots, \Omega_{k+p} = i_p] : k \in \mathbb{Z} ; p \geq 0 ; i_0, \dots, i_p \in \mathbb{I} \text{ avec } M(i_j, i_{j+1}) = 1)$$

Propriété des  $D_i^k$ ,  $i \in I$ ,  $k \in \{1, \dots, n(i)\}$  :

Soit  $i \in I$ . Il est facile de vérifier :

(C') : si  $j \in I$  et si  $M(i,j)=1$ , il existe un unique  $m(j)$  dans  $\{1, \dots, n(i)\}$  tel que  $p(D_i^{m(j)}) \subset R_j$ .

Les propriétés de l'image par A d'un c-rectangle simple quelconque résultent des propriétés précédentes et de la proposition qui suit.

Soit R un rectangle du pavage du plan. Il existe un unique  $i$  de I tel que  $C_i$  et R soient copies l'un de l'autre.

La proposition suivante est immédiate mais très importante.

Proposition : AR est une copie de  $AC_i$ .

On en déduit, en particulier, que si C est un c-rectangle simple et si  $p(C) \subset R_i$ , AC est un c-rectangle divisé en  $n(i)$  c-rectangles simples  $D_1, \dots, D_{n(i)}$  tels que si  $j \in I$  et si  $M(i,j) = 1$  :

(C) : il existe un unique  $m(j)$  dans  $\{1, \dots, n(i)\}$  tel que  $p(D_{m(j)}) \subset R_j$ .

L'unicité qui intervient dans la propriété (C) sera essentielle pour la définition du codage.

Il est à noter que cette propriété d'unicité manque à toute partition du tore plus grossière, construite à l'aide de segments  $P_1$  et  $P_2$  moins longs.

On pose pour la suite :

$$\ell_1(E) = \sup\{|\xi_1 - \xi_2| / \xi_1 e_1 + \eta_1 e_2, \xi_2 e_1 + \eta_2 e_2 \in E, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\ell_2(E) = \sup\{|\eta_1 - \eta_2| / \xi_1 e_1 + \eta_1 e_2, \xi_2 e_1 + \eta_2 e_2 \in E, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}\}$$

et  $\alpha(E) = \inf\{\xi \in \mathbb{R} / \xi e_1 + \eta e_2 \in E, \eta \in \mathbb{R}\}$  pour tout ensemble E de  $\mathbb{R}^2$ .

Comme dans la direction  $\delta_1$ , A se réduit à une homothétie, il est facile de voir que si  $j \in I$  et si  $M(i,j) = 1$ , on a avec les notations précédentes :

$$1. \text{ il existe } p(i,j) \in ]0,1] \text{ tel que } \ell_1(A^{-1}D_{m(j)}) = p(i,j)\ell_1(C) \quad (*)$$

$$2. \text{ il existe } h(i,j) \in [0,1[ \text{ tel que } \alpha(A^{-1}D_{m(j)}) = \alpha(C) + h(i,j)\ell_1(C) \quad (**)$$

Remarquons que  $\ell_1(C)$  et  $\alpha(C)$  ne dépendent que du rectangle du pavage de  $\mathbb{R}^2$  contenant C. En particulier  $\ell_1(C) = \ell_1(C_i)$ .

Ces résultats sont illustrés figure 12, dans le cas  $i = 1$ . Le tableau des coefficients " $p(i,j)$ " et " $h(i,j)$ " est donné figure 13. Remarquons, en particulier, que ces coefficients ne dépendent que de  $i$  et de  $j$ , ce qui est une conséquence de la proposition ci-dessus.

### III. Codage

#### Définition de $\pi$ :

1. Soit  $(\omega_k)_{k \geq 0}$  une suite d'éléments de  $I$  telle que  $M(\omega_k, \omega_{k+1}) = 1$  pour tout  $k \geq 0$ .

Considérons alors une suite de  $c$ -rectangles simples  $(F_k)_{k \geq 0}$  définie par récurrence comme suit :

. On prend  $F_0$  un représentant quelconque de  $R_{\omega_0}$  dans le pavage de  $\mathbb{R}^2$ .

. Si  $F_0, \dots, F_n$  sont choisis, on définit  $F_{n+1}$  comme étant l'unique  $c$ -rectangle simple qui divise  $AF_n$  et tel que  $p(F_{n+1}) \subset R_{\omega_{n+1}}$ .

Une telle construction est justifiée par la propriété (C) ci-dessus.

Alors :

a. Pour tout  $n \geq 0$ ,  $F_{n+1}$  est un  $c$ -rectangle simple contenu dans  $AF_n$ . Ainsi ...  $A^{-(n+1)} F_{n+1} \subset A^{-n} F_n \subset \dots \subset A^{-1} F_1 \subset F_0$  et  $A^{-n} F_n$ ,  $n \geq 0$ , est un  $d$ -rectangle simple contenu dans  $F_0$ .

b.  $A^{-1}$  dans la direction  $\delta_1$  se réduit à une homothétie de rapport  $\lambda_2$ . Ainsi  $\varrho_1(A^{-n} F_n) = \lambda_2^n \varrho_1(F_n) \leq \lambda_2^n a$ .

Il résulte de a et b que  $L_{F_0}(\omega_k : k \geq 0) = \bigcap_{n \geq 0} A^{-n} F_n = \bigcap_{n \geq p} A^{-n} F_n$  (pour  $p \geq 0$ ) est une fibre contractante de  $F_0$ .

De plus,  $p(L_{F_0}(\omega_k : k \geq 0))$  est une fibre contractante de  $R_{\omega_0}$  indépendante du représentant  $F_0$  de  $R_{\omega_0}$  choisi. On la notera  $L(\omega_k : k \geq 0)$ .

2. De la même façon, en étudiant  $T^{-1}$  et  $A^{-1}$ , on pourrait associer à toute suite  $(\omega_k)_{k \leq 0}$  vérifiant  $M(\omega_k, \omega_{k+1}) = 1$  pour tout  $k \leq -1$ , une suite  $(B_k)_{k \leq 0}$  de  $d$ -rectangles simples telle que  $L_{B_0}(\omega_k : k \leq 0) = \bigcap_{n \geq 0} A^n B_{-n}$  soit une fibre dilatante de  $B_0$  dont la projection,  $L(\omega_k : k \leq 0)$ , sur  $T^2$  ne dépende pas du représentant  $B_0$  de  $R_{\omega_0}$  choisi.

A toute suite  $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $\Sigma$ , on peut donc associer l'unique élément  $\pi(\omega)$  de  $L(\omega_k : k \geq 0) \cap L(\omega_k : k \leq 0)$ . Ce qui définit l'application :

$$\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$\omega \rightarrow \pi(\omega)$$

Propriétés de  $\pi$  :

1.  $T^k \circ \pi(\omega) \in R_{\omega_k}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

Avec les notations précédentes, il existe un représentant  $y$  de  $\pi(\omega)$  dans  $L_{F_0}(\omega_k : k \geq 0)$  et l'on a  $p(A^k y) = T^k \circ \pi(\omega) \in p(F_k) \subset R_{\omega_k}$ , pour tout  $k \geq 0$ . Le cas  $k < 0$  est similaire.

2.  $\pi$  est surjective

Soient  $x \in \mathbb{T}^2$ ,  $y$  un représentant quelconque de  $x$  et  $R$  un rectangle du pavage contenant  $y$ . Considérons alors une suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  de  $c$ -rectangles simples telle que :

$$F_0 = R$$

Si  $F_0, \dots, F_n$  sont choisis, on prend  $F_{n+1}$  comme étant l'un des  $c$ -rectangles simples qui divise  $A F_n$  et tel que  $A^{n+1} y \in F_{n+1}$ .

Posons pour tout  $n \geq 0$ ,  $\omega_n$  l'unique élément de  $A$  tel que  $p(F_n) \subset R_{\omega_n}$ .

Il est alors facile de voir que :

$$\bullet M(\omega_k, \omega_{k+1}) = 1 \quad \text{pour } k \geq 0$$

$$\bullet \bigcap_{k \geq 0} A^{-k} F_k = L_R(\omega_k : k \geq 0)$$

$$\bullet y \in L_R(\omega_k : k \geq 0) .$$

De la même façon que ci-dessus, on peut construire  $(\omega_k)_{k \leq 0}$  telle que :

$$\bullet M(\omega_{k-1}, \omega_k) = 1 \quad \text{pour } k \leq 0$$

$$\bullet y \in L_R(\omega_k : k \leq 0)$$

Ainsi  $y$  est l'unique élément de  $L_R(\omega_k : k \leq 0) \cap L_R(\omega_k : k \geq 0)$  et donc  $\pi(\omega) = p(y) = x$ . Ce qui assure la surjectivité de  $\pi$ .

Remarques :

A. Détermination de l'abscisse  $\alpha$  de  $y$  dans  $(0, e_1, e_2)$ .

On a  $\alpha = \alpha(L_R(\omega_k : k \geq 0)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(A^{-n}F_n)$  avec les notations ci-dessus.

Montrons que pour  $n \geq 0$  :

a.  $\alpha(A^{-(n+1)}F_{n+1}) = \alpha(A^{-n}F_n) + h(\omega_n, \omega_{n+1}) \ell_1(A^{-n}F_n)$

b.  $\ell_1(A^{-(n+1)}F_{n+1}) = p(\omega_n, \omega_{n+1}) \ell_1(A^{-n}F_n)$

Il en résultera que  $\alpha_1 = \alpha(R) + \ell_1(R) \sum_{n=0}^{+\infty} h(\omega_n, \omega_{n+1}) \prod_{p=0}^{n-1} p(\omega_p, \omega_{p+1})$ .

On a vu (\*\*\*) que  $\alpha(A^{-1}F_{n+1}) = \alpha(F_n) + h(\omega_n, \omega_{n+1}) \ell_1(F_n)$ .

D'autre part, étant donnée la nature de  $A^{-n}$  dans la direction  $\delta_1$ , un point de  $F_n$  d'abscisse  $\alpha(F_n) + x \ell_1(F_n)$  ( $x \in [0, 1]$ ) dans  $(0, e_1, e_2)$  est transformé par  $A^{-n}$  en un point de  $R$  d'abscisse  $\alpha(A^{-n}F_n) + x \ell_1(A^{-n}F_n)$ .

On en déduit que  $\alpha(A^{-(n+1)}F_{n+1}) = \alpha(A^{-n}(A^{-1}F_{n+1}))$   
 $= \alpha(A^{-n}F_n) + h(\omega_n, \omega_{n+1}) \ell_1(A^{-n}F_n)$ .

Le résultat b est similaire en utilisant (\*).

B. Un point  $x$  de  $T^2$  admet au plus 16 codages distincts.

Soit  $y$  un représentant quelconque de  $x$ .

Si  $\omega$  est un codage de  $x$ ,  $x$  est élément de  $R_{\omega_0}$  et  $y$  appartient donc à un rectangle  $R$  du pavage du plan de projection  $R_{\omega_0}$  sur  $T^2$ .

Considérons alors les suites  $(B_k)_{k \leq 0}$  et  $(F_k)_{k \geq 0}$  associées à  $\omega$  et vérifiant  $B_0 = F_0 = R$ , dont la construction a été décrite lors de la définition de  $\pi$ . Par injectivité de  $p$  sur  $R$ , nécessairement  $L_R(\omega_k : k \leq 0) \cap L_R(\omega_k : k \geq 0) = \{y\}$ . On en déduit que les suites  $(B_k)_{k \leq 0}$  et  $(F_k)_{k \geq 0}$ , et donc le codage  $\omega$  de  $x$ , auraient pu être obtenues à partir de  $y$  par la méthode décrite dans la preuve de la surjectivité de  $\pi$ . On peut donc atteindre tout codage de  $x$  par cette méthode et leur nombre est limité par le nombre de constructions possibles de ces suites associées à  $y$ . Envisageons alors ces constructions.

Un point de  $R^2$  ne pouvant appartenir à plus de quatre rectangles du pavage, on a au plus quatre choix possibles pour  $B_0 = F_0 = R$ . De plus, si  $F_0, F_1, \dots, F_n$  sont déterminés, deux situations se présentent pour le choix de  $F_{n+1}$  :

. Soit  $A^{n+1}$  y n'appartient pas aux "bords contractants" délimitant deux des c-rectangles simples qui divisent  $AF_n$  et alors il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de  $F_{n+1}$ .

. Soit  $A^{n+1}$  y appartient à ces segments et il y a deux possibilités pour la détermination de  $F_{n+1}$ . Mais il est à noter qu'alors, pour le choix des  $F_{n+p}$ ,  $p \geq 2$ , on sera dans la situation précédente qui ne présente pas d'ambiguïté ( $A^{n+p}$  y appartenant toujours aux "bords contractants" de  $AF_{n+p-1}$ ).

Ainsi, une fois choisi  $F_0$ , on a au plus deux possibilités pour construire  $(F_n)_{n \geq 0}$ . De la même façon, une fois choisi  $B_0$ , on a au plus deux possibilités pour construire  $(B_{-n})_{n \geq 0}$ . Le nombre de codages de  $x$  est donc limité à  $2 \times 4 \times 2 = 16$ .

### 3. $T \circ \pi = \pi \circ \theta$ sur $\Sigma$

Soit  $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  un élément de  $\Sigma$ .

Notons  $C_{\omega_0, \omega_1}$  le rectangle du pavage de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $D_{\omega_0}^{m(\omega_1)}$ , l'unique c-rectangle simple qui divise  $AC_{\omega_0}$  et dont la projection sur le tore est incluse dans  $R_{\omega_1}$ .

Construisons, comme dans la définition de  $\pi$ , les suites :

.  $(B_k)_{k \leq 0}$  et  $(F_k)_{k \geq 0}$  associées à  $\omega$  avec  $B_0 = F_0 = C_{\omega_0}$ .

.  $(B'_k)_{k \leq 0}$  et  $(F'_k)_{k \geq 0}$  associées à  $\theta\omega$  avec  $B'_0 = F'_0 = C_{\omega_0, \omega_1}$  et

posons  $y$  l'unique élément de  $L_{C_{\omega_0}}(\omega_k : k \leq 0) \cap L_{C_{\omega_0}}(\omega_k : k \geq 0)$  ( $p(y) = \pi(\omega)$ ).

On a alors, pour tout  $k \geq 0$ ,  $F_{k+1} \subset F'_k$  et  $B'_{-(k+1)} \subset B_{-k}$ .

Ainsi :

$$AL_{C_{\omega_0}}(\omega_k : k \leq 0) = A \left( \bigcap_{k \geq 0} A^k B_{-k} \right) = \bigcap_{k \geq 0} A^{k+1} B_{-k} \supset \bigcap_{k \geq 0} A^{k+1} B'_{-(k+1)} = L_{C_{\omega_0, \omega_1}}(\omega_{k+1} : k \leq 0)$$

et  $AL_{C_{\omega_0}}(\omega_k : k \geq 0) = A \left( \bigcap_{k \geq 0} A^{-(k+1)} F_{k+1} \right) = \bigcap_{k \geq 0} A^{-k} F_{k+1} \subset \bigcap_{k \geq 0} A^{-k} F'_k = L_{C_{\omega_0, \omega_1}}(\omega_{k+1} : k \geq 0)$

Enfin, comme  $L_{C_{\omega_0, \omega_1}}(\omega_k : k \leq 0) \cap L_{C_{\omega_0, \omega_1}}(\omega_k : k \geq 0)$  contient un représentant de  $\theta\omega$ , on en déduit que  $AL_{C_{\omega_0}}(\omega_k : k \leq 0) \cap AL_{C_{\omega_0}}(\omega_k : k \geq 0) = \{Ay\} = L_{C_{\omega_0, \omega_1}}(\omega_{k+1} : k \leq 0) \cap L_{C_{\omega_0, \omega_1}}(\omega_{k+1} : k \geq 0)$  et donc que  $\pi(\theta\omega) = p(Ay) = T \circ p(y) = T \circ \pi(\omega)$

4. Si  $x \in \hat{\Gamma}^2 = \Gamma^2 / \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n P$ , il existe un unique  $\omega$  de  $\Sigma$  tel que  $\pi(\omega)=x$  :

En effet, supposons qu'il existe  $\omega$  et  $\omega'$  dans  $\Sigma$  distincts avec  $\pi(\omega) = \pi(\omega') = x$ . Alors, il existe  $k_0$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $\omega_{k_0} \neq \omega'_{k_0}$  et, vu la propriété 1,  $T^{k_0} \circ \pi(\omega) \in R_{\omega_{k_0}} \cap R_{\omega'_{k_0}} = \partial R_{\omega_{k_0}} \cap \partial R_{\omega'_{k_0}}$ . Donc  $x = \pi(\omega) \in T^{-k_0} P$  ce qui est exclus.

Remarquons, de plus, que  $T(\hat{\Gamma}^2) = \hat{\Gamma}^2$ .

Conséquences :

1.  $\hat{\pi} : \hat{\Gamma}^2 \rightarrow \Sigma$

$x \mapsto \omega$  tel que  $\pi(\omega) = x$  est bien définie.

En fait, vu la première propriété,  $\hat{\pi}(x)_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) est parfaitement caractérisé par la relation  $T^k x \in R_{\hat{\pi}(x)_k}$ . Ainsi, comme  $m(\hat{\Gamma}^2) = 1$ , le but fixé est atteint pour presque tout point de  $\hat{\Gamma}^2$ .

2.  $\theta \circ \hat{\pi} = \hat{\pi} \circ T$  sur  $\hat{\Gamma}^2$

Si  $x \in \hat{\Gamma}^2$ ,  $Tx \in \hat{\Gamma}^2$  et  $\pi(\theta \circ \hat{\pi}(x)) = T \circ \pi \circ \hat{\pi}(x) = T(x)$ .

3.  $\hat{\pi} : (\hat{\Gamma}^2, \mathcal{B}_{\hat{\Gamma}^2} \cap \hat{\Gamma}^2) \rightarrow (\Sigma, \mathcal{B}_{\Sigma})$  est mesurable.

En effet, si  $p \geq 0, q \geq 0, i_0, i_1, \dots, i_p, \dots, i_{p+q} \in I$  avec  $M(i_j, i_{j+1}) = 1$  pour  $j \in \{0, \dots, p+q-1\}$  et si  $(B_k)_{k=-p}^0$  et  $(F_k)_{k=0}^q$  sont les rectangles associés à  $(\omega_k)_{k=-p}^q$ , où  $\omega_k = i_{p+k}$  pour  $k \in \{-p, \dots, q\}$ , et vérifiant  $B_0 = F_0 = C_{i_p}$ , on a :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^{-1}[\Omega_{-p} = i_0, \dots, \Omega_0 = i_p, \dots, \Omega_q = i_{p+q}] &= \{x \in \hat{\Gamma}^2 / T^{-p}x \in R_{i_0}, \dots, x \in R_{i_p}, \dots, T^q x \in R_{i_{p+q}}\} \\ &= \hat{\Gamma}^2 \cap p\{y \in R^2 / A^{-p}y \in B_{-p}, \dots, y \in B_0 = F_0 = C_{i_p}, \dots, A^q y \in F_q\} \\ &= \hat{\Gamma}^2 \cap p(A^p B_{-p} \cap A^{-q} F_q) \text{ où } A^p B_{-p} \cap A^{-q} F_q \text{ est un rectangle du plan} \\ &\text{contenu dans } C_{i_p} \text{ et dont les "bords dilatants" (resp. "contractants")} \text{ ont une} \\ &\text{longueur égale à } \lambda_2^q \ell_1(F_q) \text{ (resp. } \lambda_2^p \ell_2(B_{-p})) \text{ .} \end{aligned}$$

La première égalité suffisait pour prouver la mesurabilité, les autres égalités seront utilisées dans la suite.

5.  $\pi$  est höldérienne

Soient  $\omega, \omega' \in \Sigma$ .

Si  $0 < d(\omega, \omega') < 1, \omega \neq \omega', \omega_0 = \omega'_0$  et  $n_0 = \inf\{|k| \geq 0 / \omega_k \neq \omega'_k, k \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{N}^*$ . On a alors  $d(\omega, \omega') \geq \frac{1}{2^{n_0}}$ .

De plus, comme  $\omega_k = \omega'_k$  sur  $\{-n_0+1, \dots, n_0-1\}$ , étant donné la définition de  $\pi$ ,  $\pi(\omega)$  et  $\pi(\omega')$  sont contenus dans un même carré de côté de longueur inférieure ou égale à  $a\lambda_2^{n_0-1}$ .

$$\text{Ainsi, } \delta(\pi(\omega), \pi(\omega')) \leq \sqrt{2} a\lambda_2^{n_0-1} = (\sqrt{2} a\lambda_1) \lambda_2^{n_0}$$

$$\text{et } \delta(\pi(\omega), \pi(\omega')) \leq (\sqrt{2} a\lambda_1) d(\omega, \omega')^\varepsilon \quad \text{où } \varepsilon = \frac{\log \lambda_2}{\log 1/2}$$

$$\text{. Si } d(\omega, \omega') \geq 1, \delta(\pi(\omega), \pi(\omega')) \leq 1/2 \leq 1/2 d(\omega, \omega')^\varepsilon .$$

Il en résulte dans tous les cas que  $\delta(\pi(\omega), \pi(\omega')) \leq \max(\frac{1}{2}, \sqrt{2}a\lambda_1) d(\omega, \omega')^\varepsilon$ , ce qui prouve que  $\pi$  est höldérienne.

#### IV. Une mesure $\tilde{\nu}$ sur $\Sigma$

$\hat{\pi} ; (\hat{\Gamma}^2, \mathbf{B}_{\hat{\Gamma}^2} \cap \hat{\Gamma}^2, m) \rightarrow (\Sigma, \mathbf{B}_\Sigma)$  est mesurable.

On peut donc définir une mesure sur  $(\Sigma, \mathbf{B}_\Sigma)$  en posant :

$$\tilde{\nu}(F) = m(\hat{\pi}^{-1}(F)), \text{ pour tout } F \text{ de } \mathbf{B}_\Sigma$$

On a, en particulier :

$$a- \theta\tilde{\nu} = \tilde{\nu} : \text{ pour tout } F \text{ de } \mathbf{B}_\Sigma ,$$

$$\theta\tilde{\nu}(F) = \tilde{\nu}[\theta \in F] = m[\theta \circ \hat{\pi} \in F] = m[\hat{\pi} \circ T \in F] = m[\hat{\pi} \in F] = \tilde{\nu}(F) .$$

$$b- \text{supp } \tilde{\nu} = \Sigma : \text{ pour tout } \omega \text{ de } \Sigma \text{ et tout } n \geq 0 ,$$

$$B(\omega, \varepsilon) \supset [\Omega_{-n} = \omega_{-n}, \dots, \Omega_n = \omega_n] \text{ dès que } \varepsilon > \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{et donc } \tilde{\nu}(B(\omega, \varepsilon)) \geq \tilde{\nu}[\Omega_{-n} = \omega_{-n}, \dots, \Omega_0 = \omega_0, \dots, \Omega_n = \omega_n]$$

$$= m(\hat{\Gamma}^2 \cap p(A^n B_{-n} \cap A^{-n} F_n)) \quad (\text{notations du III-propriété 4- conséquence 3}).$$

$$= m(p(A^n B_{-n} \cap A^{-n} F_n))$$

$$\geq (c \lambda_2^n)^2 > 0 .$$

**Théorème** : Les systèmes dynamiques  $(\hat{\Gamma}^2, \mathbf{B}_{\hat{\Gamma}^2, m, T})$  et  $(\Sigma, \mathbf{B}_\Sigma, \tilde{\nu}, \theta)$  sont isomorphes.

**Preuve** : Il suffit de rassembler les résultats précédents.

**Remarque** : En particulier,  $(\Sigma, \mathbf{B}_\Sigma, \tilde{\nu}, \theta)$  est ergodique et même mélangeant.

**Propriété markovienne de  $\tilde{\nu}$**  :

Vu le III-propriété 4- conséquence 3- :

$$\tilde{v} [\Omega_0=i_0, \Omega_1=i_1, \dots, \Omega_p=i_p] = m(\hat{T}^2 \cap p(C_{i_0} \cap A^{-P} F_p))$$

où  $F_p$  est obtenu comme précédemment à l'aide de  $(i_0, \dots, i_p)$  et en partant de  $C_{i_0}$

$$\begin{aligned} &= m(p(B_0 \cap A^{-P} F_p)) = \ell_1(A^{-P} F_p) \ell_2(C_{i_0}) \\ &= \ell_1(F_0) p(i_0, i_1) \dots p(i_{p-1}, i_p) \ell_2(C_{i_0}) \quad (\text{voir III- propriété 2-} \\ &= m(R_{i_0}) p(i_0, i_1) \dots p(i_{p-1}, i_p) \quad \text{remarque 1}) \end{aligned}$$

Une remarque sur la matrice M :

Comme T est mélangeante et comme pour tout  $i, j$  de A :

$m(R_i) m(R_j) > 0$  , il existe un entier  $N_{i,j} \geq 1$  tel que

$$m(T^{-n} R_j \cap R_i) = m(\hat{T}^2 \cap R_i \cap T^{-n} R_j) > 0 \quad \text{pour } n \geq N_{i,j} .$$

Ainsi, pour tout  $i, j$  de I , il existe  $N_{i,j} \geq 1$  tel que, dès que  $n \geq N_{i,j}$  , il existe  $\omega^{(n)} \in \Sigma$  avec  $\omega_0^{(n)} = i$  et  $\omega_n^{(n)} = j$  .

(Prendre pour  $\omega^{(n)}$  le codage d'un point de  $\hat{T}^2 \cap R_i \cap T^{-n} R_j$ ) . De plus, comme  $M^n(i, j)$  est le nombre de suites  $\omega_0 \omega_1 \dots \omega_n$  d'entiers de A qui vérifient " $M(\omega_k, \omega_{k+1}) = 1 \quad \forall k, \omega_0 = i, \omega_n = j$ " ,  $M^n(i, j)$  est strictement positif pour tout  $n \geq N_{i,j}$  .

Il en résulte que M est régulière :  $M^{n_0} > 0$  pour  $n_0 = \sup_{i,j} N_{i,j}$  .

On vérifie en fait que  $M^4 > 0$  .

## V. Généralisation

Soit S un automorphisme ergodique quelconque du tore.

On veut montrer ici que pour S on peut définir un codage possédant les mêmes propriétés que le codage relatif à T . La suite du mémoire pourra alors facilement se généraliser à l'ensemble des automorphismes ergodiques du tore.

Si l'on note B l'application linéaire sur  $\mathbb{R}^2$  associée à S , on sait que B possède deux directions propres, l'une contractante, l'autre dilatante. Il va donc être possible, en utilisant le même procédé que pour T, de définir :

. sur  $\mathbb{R}^2$  , un pavage en parallélogrammes délimités par des côtés parallèles aux directions propres de B ,

. sur  $T^2$  , une partition en n éléments distincts :  $R_1, \dots, R_n$  .

Par construction, les propriétés de partition markovienne seront conservées. De plus,  $S$  étant ergodique, les deux droites de  $\mathbb{R}^2$  passant par  $0$  et parallèles aux directions propres de  $B$  ont leur pente irrationnelle et donc leur projection sur  $\Gamma^2$  est partout dense. Il s'ensuit, la plus grande valeur propre de  $B$  étant fixée, que le pavage précédent peut être choisi de manière à ce que  $p$  soit injective sur tous ses parallélogrammes et que ces derniers soient suffisamment "petits" pour vérifier une condition analogue à la condition (C) ci-dessus.

On peut donc encore construire une matrice  $N$  de taille  $n \times n$ , régulière grâce au mélange, qui permette, si  $\tilde{\Sigma} = \{\omega \in \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{Z}} / N(\omega_k, \omega_{k+1}) = 1 \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\}$ , de définir un codage  $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Gamma^2$  qui vérifie les mêmes "bonnes" propriétés que  $\pi : \Sigma \rightarrow \Gamma^2$  associé à  $T$ .

PARTIE III

**DU TORE AUX CHAINES DE MARKOV**

On reprend les notations de la partie II.

I. Les suites unilatères M-admissibles

On considère maintenant l'ensemble  $\Sigma^+ = \{\omega \in \mathbb{I}^{\mathbb{N}} / M(\omega_k, \omega_{k+1}) = 1, \forall k \geq 0\}$  des suites M-admissibles d'éléments de  $\mathbb{I}$ .

On notera alors

$p^+ : \Sigma \rightarrow \Sigma^+$ , la projection canonique,

$\theta$ , le décalage sur  $\Sigma^+$ , ( $\theta \Sigma^+ = \Sigma^+$  et  $p^+ \circ \theta = \theta \circ p^+$ )

$d$ , la distance sur  $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$  définie par  $d(\omega, \omega') = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} (1 - \delta_{\omega_k, \omega'_k})$

et  $\nu$ , la probabilité sur  $(\Sigma^+, \mathcal{B}_{\Sigma^+})$  image de  $\tilde{\nu}$  par  $p^+$  ( $\theta \nu = \nu$ ).

Il est clair que  $(\Sigma^+, d)$  est un fermé de  $(\mathbb{I}^{\mathbb{N}}, d)$ . C'est donc un espace métrique compact. De plus,  $\text{supp } \nu = \Sigma^+$  car  $p^+$  est continue et  $\text{supp } \tilde{\nu} = \Sigma$ .

Remarquons, enfin, que l'on a  $d(p^+(x), p^+(y)) \leq d(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \Sigma \times \Sigma$ .

II. Enoncé du problème

Le but du mémoire est de démontrer le théorème suivant :

Théorème I :  $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m, T)$  vérifie le théorème limite central.

On montrera, dans cette partie, qu'il suffit en fait de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2 :  $(\Sigma^+, \mathcal{B}_{\Sigma^+}, \nu, \theta)$  vérifie le théorème limite central.

On pourra alors, dans la suite, se ramener aux chaînes de Markov sur  $\Sigma^+$ .

III. Du tore à  $\Sigma$

Vu les propriétés de  $\pi$  et la définition de  $\tilde{\nu}$ , la seule difficulté pour déduire le Théorème I de la proposition 1 ci-dessous est de nature topologique. Elle est résumée dans le lemme 1 dont la preuve est discutée dans la dernière partie du mémoire.

Proposition 1 :  $(\Sigma, \mathcal{B}_{\Sigma}, \tilde{\nu}, \theta)$  vérifie le théorème limite central.

Lemme 1 : Soit  $f : (\mathbb{T}^2, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction höldérienne.

Si  $f \circ \pi$  est un cobord dans  $(\Sigma, \mathcal{B}_\Sigma, \tilde{v}, \theta)$ , alors  $f$  est un cobord dans  $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2, m, T})$ .

IV. De  $\Sigma$  à  $\Sigma^+$

Commençons par démontrer le lemme suivant : (Bowen [2]).

Lemme 2 : Si  $g : (\Sigma, d) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction höldérienne, il existe  $v : (\Sigma, d) \rightarrow \mathbb{R}$  höldérienne telle que  $\tilde{g}^+ = g + v \circ \theta - v$  vérifie :  $\tilde{g}^+(x) = \tilde{g}^+(y)$  dès que  $p^+(x) = p^+(y)$ .

Preuve :

On considère pour tout  $p$  de  $A$ ,  $(a_{k,p})_{k=-\infty}^{+\infty}$  dans  $\Sigma$  avec  $a_{0,p} = p$ .

On définit alors la fonction  $r : \Sigma \rightarrow \Sigma$

$$x \rightarrow r(x) \text{ telle que } \begin{cases} r(x)_i = x_i & \text{pour } i \geq 0 \\ r(x)_i = a_{i, x_0} & \text{pour } i \leq 0 \end{cases}$$

( $r(x)$  ne dépend que des  $x_i$ ,  $i \geq 0$ ).

Dans un premier temps, on suppose qu'il existe une fonction höldérienne  $v$  vérifiant les conditions du lemme 2.

Comme  $g + v \circ \theta - v$  ne dépend alors que du futur, il en est a fortiori de même pour la fonction  $g \circ \theta^j + v \circ \theta^{j+1} - v \circ \theta^j$  quel que soit l'entier naturel  $j$  choisi. On en déduit le système suivant :

$$\begin{aligned} g + v \circ \theta - v &= g \circ r + v \circ \theta \circ r - v \circ r \\ g \circ \theta + v \circ \theta^2 - v \circ \theta &= g \circ \theta \circ r + v \circ \theta^2 \circ r - v \circ \theta \circ r \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ g \circ \theta^{N-1} + v \circ \theta^N - v \circ \theta^{N-1} &= g \circ \theta^{N-1} \circ r + v \circ \theta^N \circ r - v \circ \theta^{N-1} \circ r \end{aligned}$$

Ce qui donne après sommation terme à terme et réarrangement :

$$\sum_{j=0}^{N-1} (g \circ \theta^j - g \circ \theta^j \circ r) = (v - v \circ r) - (v \circ \theta^N - v \circ \theta^N \circ r)$$

pour tout  $N \geq 1$ .

Or  $v$  est uniformément continue sur  $\Sigma$  et donc  $(v \circ \theta^N - v \circ \theta^N \circ r)_{N \geq 1}$  converge simplement vers 0. On en déduit que, nécessairement,

$$v(x) - v \circ r(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} (g \circ \theta^j(x) - g \circ \theta^j(r(x))) \text{ pour tout } x \text{ de } \Sigma.$$

De plus, il est facile de vérifier que si  $v$  satisfait les conditions du lemme 2,  $v \circ r$  satisfait également ces mêmes conditions. La fonction  $x \rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} (g \circ \theta^j(x) - g \circ \theta^j(r(x)))$  doit donc convenir.

Revenons maintenant à la démonstration proprement dite. On a :

$$\begin{aligned} |g \circ \theta^j(x) - g \circ \theta^j(r(x))| &\leq K d(\theta^j(x), \theta^j(r(x)))^\epsilon \text{ car } g \text{ est höldérienne} \\ &\leq K \left( \sum_{k=-\infty}^{-j-1} \frac{1}{2^{|k|}} \right)^\epsilon \text{ car } \theta^j(x)_k = \theta^j \circ r(x)_k \text{ pour } k \geq -j. \\ &\leq K 2^\epsilon \left( \frac{1}{2^\epsilon} \right)^j \text{ pour tout } x \text{ dans } \Sigma \text{ et tout } j \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

La quantité  $v(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} (g \circ \theta^j(x) - g \circ \theta^j(r(x)))$  est donc bien définie pour tout  $x \in \Sigma$ . En outre, il est facile de voir que si  $\tilde{g}^+ = g + v \circ \theta - v$ , on a sur  $\Sigma$  :  $\tilde{g}^+(x) = g(r(x)) + \sum_{j=0}^{+\infty} (g \circ \theta^{j+1}(r(x)) - g \circ \theta^j(r(\theta x)))$ , expression qui ne dépend que des coordonnées d'indice positif.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que  $v$  est höldérienne.

Soient  $x$  et  $y$  fixés dans  $\Sigma$ .

. Si  $0 < d(x, y) < 1$ ,  $x \neq y$  et  $x_0 = y_0$ .

Ainsi  $n_0 = \sup\{k \geq 0 \mid x_i = y_i, \forall |i| \leq k\} \in \mathbb{N}$  et pour  $0 \leq j \leq n_0$  :

$$|g \circ \theta^j(x) - g \circ \theta^j(y)| \leq K(d(\theta^j(x), \theta^j(y)))^\epsilon \leq K 2^\epsilon \left( \frac{1}{2^\epsilon} \right)^{n_0 - j} \quad (2)$$

$$\text{et } |g \circ \theta^j(r(x)) - g \circ \theta^j(r(y))| \leq K(d(\theta^j(r(x)), \theta^j(r(y))))^\epsilon \leq K d(\theta^j(x), \theta^j(y))^\epsilon \leq K 2^\epsilon \left( \frac{1}{2^\epsilon} \right)^{n_0 - j} \quad (3)$$

On déduit donc de (1), (2) et (3), en posant  $b = K 2^\epsilon$  et  $\alpha = 2^{-\epsilon}$  :

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &\leq \sum_0^{[n_0/2]} |g \circ \theta^j(x) - g \circ \theta^j(y)| + \sum_0^{[n_0/2]} |g \circ \theta^j(r(x)) - g \circ \theta^j(r(y))| \\ &\quad + \sum_{[n_0/2]+1}^{+\infty} |g \circ \theta^j(x) - g \circ \theta^j(r(x))| + \sum_{[n_0/2]+1}^{+\infty} |g \circ \theta^j(y) - g \circ \theta^j(r(y))| \\ &\leq 2b \left( \sum_0^{[n_0/2]} \alpha^{n_0 - j} + \sum_{[n_0/2]+1}^{+\infty} \alpha^j \right) = \frac{2b}{1-\alpha} \left( \alpha^{n_0 - 2[n_0/2]} \frac{1 - \alpha^{[n_0/2]+1}}{1-\alpha} + \alpha \right) \alpha^{[n_0/2]} \\ &\leq 2b \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \alpha^{[n_0/2]} \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $d(x, y) \geq \frac{1}{2^{n_0+1}}$ ,  $|v(x) - v(y)| \leq K' d(x, y)^{\epsilon'}$  où  $K' = \frac{2b}{\alpha} \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)$

et  $\epsilon' = \frac{1}{2} \frac{\log \alpha}{\log 1/2}$ .

. Si  $d(x,y) \geq 1$ ,  $|v(x)-v(y)| \leq |v(x)|+|v(y)| \leq \frac{2b}{1-\alpha} = \frac{\alpha K'}{1+\alpha} \leq K'd(x,y)^{\epsilon'}$

Ce qui achève la preuve du lemme.

On considère maintenant une fonction  $f : (\Sigma, d) \rightarrow \mathbb{R}$  höldérienne, de moyenne nulle, qui ne soit pas un cobord et l'on admet la proposition 2. Pour clore cette partie, il suffit de montrer que  $f$  vérifie les implications de la proposition 1.

Le lemme 2 permet d'associer à  $f$  une fonction  $u : (\Sigma, d) \rightarrow \mathbb{R}$  höldérienne telle que  $\tilde{f}^+ = f + u \circ \theta - u$  ne dépende que des coordonnées d'indice positif. Comme  $\theta$  est höldérienne et comme  $\tilde{f}^+ - f$  est un cobord, les hypothèses faites sur  $f$  sont encore vérifiées par  $\tilde{f}^+$ .

De plus, on peut définir une fonction  $f^+$  sur  $\Sigma^+$  par  $f^+ \circ p^+(x) = \tilde{f}^+(x)$ ,  $\forall x \in \Sigma$ .

Lemme 3 :  $f^+$  vérifie les implications de la proposition 2.

Preuve :

Comme on admet la proposition 2, il suffit de vérifier les trois points suivants :

-  $f^+$  est höldérienne :

Soient  $x$  et  $y$  dans  $\Sigma^+$ .

→ Si  $x_0 \neq y_0$ , prenons  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans  $\Sigma$  tels que  $p^+(\bar{x}) = x$  et  $p^+(\bar{y}) = y$ . Alors  $|f^+(x) - f^+(y)| = |\tilde{f}^+(\bar{x}) - \tilde{f}^+(\bar{y})| \leq C d(\bar{x}, \bar{y})^\eta$  car  $\tilde{f}^+$  est höldérienne  
 $\leq C(1+d(x,y))^\eta \leq C 2^\eta d(x,y)^\eta$  car  $d(x,y) \geq 1$ .

→ Si  $x_0 = y_0$ , il existe  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans  $\Sigma$  tels que  $p^+(\bar{x}) = x$ ,  $p^+(\bar{y}) = y$  et  $\bar{x}_i = \bar{y}_i$  pour tout  $i \leq 0$ .

Alors  $|f^+(x) - f^+(y)| = |\tilde{f}^+(\bar{x}) - \tilde{f}^+(\bar{y})| \leq C d(\bar{x}, \bar{y})^\eta = C d(x,y)^\eta \leq 2^\eta C d(x,y)^\eta$ .

-  $f^+$  est de moyenne nulle :

$$\int f^+ dv = \int f^+ \circ p^+ d\tilde{v} = \int \tilde{f}^+ d\tilde{v} = 0$$

-  $f^+$  n'est pas un cobord : Sinon, on aurait  $f^+ = g \circ \theta - g$  avec  $g : \Sigma^+ \rightarrow \mathbb{R}$

höldérienne et, pour tout  $x$  de  $\Sigma$ ,  $\tilde{f}^+(x) = f^+ \circ p^+(x) = g \circ \theta \circ p^+(x) - g \circ p^+(x) = (g \circ p^+) \circ \theta(x) - (g \circ p^+)(x)$ ; ce qui est exclus car comme  $p^+$  est lipschitzienne,  $g \circ p^+$  est höldérienne.

L'étroite relation entre  $f^+$  et  $\tilde{f}^+$  permet alors d'assurer le lemme qui suit :

Lemme 4 :  $\tilde{f}^+$  vérifie les implications de la proposition 1.

Preuve :

Le lemme se déduit des deux égalités suivantes qui résultent de la commutativité de  $p^+$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{S_n \tilde{f}^+}{\sqrt{n}} \right)^2 d\tilde{\nu} &= \int \frac{1}{n} \left( \sum_0^{n-1} \tilde{f}^+ \circ \theta^k \right)^2 d\tilde{\nu} = \int \frac{1}{n} \left( \sum_0^{n-1} (f^+ \circ p^+) \circ \theta^k \right)^2 d\tilde{\nu} \\ &= \int \frac{1}{n} \left( \sum_0^{n-1} f^+ \circ \theta^k \right)^2 \circ p^+ d\tilde{\nu} = \int \left( \frac{S_n f^+}{\sqrt{n}} \right)^2 d\nu \end{aligned}$$

. De même, on a  $\tilde{\nu}\{x \in \Sigma \mid S_n \tilde{f}^+(x) \leq \sigma(f^+) t \sqrt{n}\} = \nu\{x \in \Sigma \mid S_n f^+(x) \leq \sigma(f^+) t \sqrt{n}\}$

Pour conclure, il suffit donc de montrer le résultat suivant :

Lemme 5 : Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions höldériennes sur  $\Sigma$  à valeurs réelles et de moyenne nulle. Si  $g-h$  est un cobord et si  $g$  vérifie les implications de la proposition 1, il en est de même de  $h$ .

Preuve :

Il existe  $v \in H(\Sigma)$  tel que  $g-h = v \circ \theta - v$ . Ainsi  $S_n g - S_n h = v \circ \theta^n - v$  et donc, en particulier

$$\int \left( \frac{S_n g}{\sqrt{n}} \right)^2 d\tilde{\nu} = \int \left( \frac{S_n h}{\sqrt{n}} \right)^2 d\tilde{\nu} + 2\tilde{\nu} \left( \frac{S_n h}{n} (v \circ \theta^n - v) \right) + \frac{1}{n} \tilde{\nu} \left( (v \circ \theta^n - v)^2 \right), \text{ pour tout } n \geq 1$$

Or, par ergodicité,  $\left( \frac{S_n h}{n} \right)_{n \geq 1}$  converge dans  $L^1(\tilde{\nu})$  vers  $\int h d\tilde{\nu} = 0$ . L'inégalité  $\left| \tilde{\nu} \left( \frac{S_n h}{n} (v \circ \theta^n - v) \right) \right| \leq 2 \|v\|_\infty \tilde{\nu} \left( \left| \frac{S_n h}{n} \right| \right)$  assure donc la convergence vers 0 de  $\left( \tilde{\nu} \left( \frac{S_n h}{n} (v \circ \theta^n - v) \right) \right)_{n \geq 1}$ .

Ainsi, comme évidemment  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \tilde{\nu} \left( (v \circ \theta^n - v)^2 \right) = 0$ , si  $\left( \int \left( \frac{S_n g}{\sqrt{n}} \right)^2 d\tilde{\nu} \right)_{n \geq 1}$  converge, il en est de même pour  $\left( \int \left( \frac{S_n h}{\sqrt{n}} \right)^2 d\tilde{\nu} \right)_{n \geq 1}$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \left( \frac{S_n^g}{\sqrt{n}} \right)^2 d\tilde{\nu} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \left( \frac{S_n^h}{\sqrt{n}} \right)^2 d\tilde{\nu} = \sigma^2$$

Enfin,  $v$  étant bornée,  $\left( \left| \frac{S_n^g - S_n^h}{\sigma \sqrt{n}} \right| \right)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers 0 .

Il en résulte que si  $\left( \frac{S_n^g}{\sigma \sqrt{n}} \right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la loi normale centrée réduite,

il en est de même de  $\left( \frac{S_n^h}{\sigma \sqrt{n}} \right)_{n \geq 1}$  .

PARTIE IV

**UN NOYAU MARKOVIEEN SUR  $\Sigma^+$**

Le passage de  $\Sigma$  à  $\Sigma^+$  correspond intuitivement à oublier le comportement passé des points de  $\mathbb{T}^2$  relativement à la partition  $\{R_1, R_2, \dots, R_7\}$ . On va ici construire un opérateur  $P$  qui permettra, en un certain sens, de reconstituer ce passé perdu. La reconstitution sera de nature probabiliste. Plus précisément, comme le montrera la propriété 3 ci-dessous,  $P$  sera l'adjoint de l'opérateur  $\theta : \phi \rightarrow \theta\phi = \phi \circ \theta$ .

Dans la suite, on se fixe  $\epsilon > 0$  quelconque et l'on reprend les notations précédemment introduites.

Notations :

. Pour tout  $a$  de  $A$ , on considérera l'application :

$$a : I^{\mathbb{N}} \rightarrow I^{\mathbb{N}}$$

$$x \rightarrow ax \text{ tel que } \begin{cases} (ax)_0 = a \\ (ax)_k = x_{k-1}, \text{ pour } k \geq 1 \end{cases}$$

. On définit aussi, pour tout  $a$  de  $I$  :

$$p_a : I^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow p_a(x) = \frac{m(R_a)}{m(R_{x_0})} p(a, x_0) \text{ où } p(i, j) = 0 \text{ si } M(i, j) = 0.$$

Remarques :

Pour tout  $a$  de  $I$  :

→  $a$  est une contraction sur  $(I^{\mathbb{N}}, d^\epsilon)$  :

$$\text{pour } x, y \in I^{\mathbb{N}}, d(ax, ay)^\epsilon = \frac{1}{2^\epsilon} d(x, y)^\epsilon$$

→  $p_a$  est lipschitzienne sur  $(I^{\mathbb{N}}, d^\epsilon)$  :

$$\text{pour } x, y \in I^{\mathbb{N}}, |p_a(x) - p_a(y)| \leq 2 \sup_{b \in A} \left( \frac{m(R_a)}{m(R_b)} p(a, b) \right) d(x, y)^\epsilon.$$

Origine et définition de  $P$  :

Le raisonnement qui suit manque de rigueur. Son but est simplement de justifier de manière intuitive la définition de  $P$ .

Soit  $\phi : (\Sigma^+, \mathcal{B}_{\Sigma^+}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  une fonction mesurable bornée.

On appellera "classe +" de  $\mathbb{T}^2$  associée à  $\omega \in \Sigma^+$ , le sous-ensemble  $C_\omega$  de  $\mathbb{T}^2$  qui regroupe les éléments du tore dont un codage admet  $\omega$  comme partie positive. (On sait que les "classes +" correspondent aux fibres contractantes de la

partition). On peut alors considérer  $\phi$  comme une "application" sur ces "classes +".

Si  $\omega$  est un élément de  $\Sigma^+$ , on veut désigner par  $P\phi(\omega)$  la valeur probable de  $\phi$  en une "classe +"  $C_\gamma$  de  $\Gamma^2$  sachant simplement que  $T(C_\gamma) \subset C_\omega$ .  $P\phi$  sera alors en quelque sorte une "reconstitution de " $\phi \circ \theta^{-1}$ ". (Voir la propriété 3 ci-dessous qui exprime cette correspondance entre  $P$  et  $\theta^{-1}$ ).

Il est donc naturel de définir  $P\phi(\omega)$  comme le barycentre des valeurs  $\phi(a\omega)$ ,  $a \in I$  et  $a\omega \in \Sigma^+$ , pondérées des chances d'être en  $C_{a\omega}$  sachant qu'à l'instant suivant on se trouve en  $C_\omega$ . La figure 14 permet, sur un exemple, de constater que ces poids sont égaux à  $\frac{m(R_a \cap T^{-1}R_{\omega_0})}{m(R_{\omega_0})} = \frac{m(R_a)p(a, \omega_0)}{m(R_{\omega_0})} = p_a(\omega)$ . (En fait, plus directement, la nature markovienne de la partition assure que le poids associé à  $\phi(a\omega)$  ne dépend que de  $a$  et de  $\omega_0$  et qu'il vaut  $m(R_a | T^{-1}R_{\omega_0}) = p_a(\omega)$ )

On pose donc  $P\phi(\omega) = \sum_{a \in I, a\omega \in \Sigma^+} p_a(\omega)\phi(a\omega)$ ; ce qui définit une probabilité de transition sur  $(\Sigma^+, \mathcal{B}_{\Sigma^+})$ .

Propriétés de P : Vu les remarques précédentes, les résultats 1 et 2 suivants sont bien connus :

1.  $P(C(\Sigma^+)) \subset C(\Sigma^+)$ ,  $P$  est un opérateur borné et positif sur  $(C(\Sigma^+), \|\cdot\|_\infty)$  et  $\|P\|_\infty \leq 1$ .
2.  $P(L_\epsilon(\Sigma^+)) \subset L_\epsilon(\Sigma^+)$  et  $\|P\phi\|_\epsilon \leq \rho\|\phi\|_\epsilon + C\|\phi\|_\infty$  pour  $\phi \in L_\epsilon(\Sigma^+)$  avec  $\begin{cases} \rho = 2^{-\epsilon} < 1 \\ C \geq 0 \end{cases}$
3.  $v(\phi.P\psi) = v(\phi \circ \theta.\psi)$  pour toutes fonctions  $\phi, \psi : (\Sigma^+, \mathcal{B}_{\Sigma^+}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$  mesurables bornées.

$$v(P\phi) = v(\phi) :$$

Par un raisonnement classique qui utilise le théorème des classes monotones on voit qu'il suffit de vérifier que, pour tout  $p \geq 0$  et tout

$(p+1)$ -uplet  $(i_0, i_1, \dots, i_p) \in I^{p+1}$  avec  $M(i_j, i_{j+1}) = 1$  pour  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ , on a :  $v(P^1_{[\Omega_0=i_0, \dots, \Omega_p=i_p]}) = v[\Omega_0=i_0, \dots, \Omega_p=i_p]$  (\*). Or, étant donné la nature markovienne de  $v$  :

$$\begin{aligned} v(P^1_{[\Omega_0=i_0, \dots, \Omega_p=i_p]}) &= \sum_{\substack{a \in I \\ M(a, i_1)=1}} \int 1_{[\Omega_0=i_0, \dots, \Omega_p=i_p]}(ax) p_a(x) dv(x) \\ &= \sum_{a \in I} \frac{m(R_a)}{m(R_{i_1})} p(a, i_1) v\{x \in \Sigma^+ / (ax)_0 = i_0, (ax)_1 = i_1, \dots, \\ &\hspace{15em} (ax)_p = i_p\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{a \in I} \frac{m(R_a)}{m(R_{i_1})} p(a, i_1) \delta_a(i_0) m(R_{i_1}) p(i_1, i_2) \dots \\
 &\qquad\qquad\qquad p(i_{p-1}, i_p) . \\
 &= m(R_{i_0}) p(i_0, i_1) \dots p(i_{p-1}, i_p) ; \text{ ce qui prouve}
 \end{aligned}$$

l'égalité (\*).

$$\begin{aligned}
 \cdot v(\phi.P\psi) &= \sum_{a \in I} \int \phi(x) \psi(ax) p_a(x) dv(x) \text{ avec } \psi(ax) p_a(x) = 0 \text{ si } ax \notin \Sigma^+ \\
 &= \sum_{a \in I} \int \phi \circ \theta(ax) \psi(ax) p_a(x) dv(x) \\
 &= v(P(\phi \circ \theta.\psi)) = v(\phi \circ \theta.\psi) \text{ d'après ce qui précède.}
 \end{aligned}$$

4. P est compact de  $(L_\epsilon(\Sigma^+), \|\cdot\|_\epsilon)$  dans  $(L_\epsilon(\Sigma^+), \|\cdot\|_\infty)$  (i.e. :

Si  $(\phi_n)_n \in L_\epsilon(\Sigma^+)$  et si  $\sup_n \|\phi_n\|_\epsilon < +\infty$ , il existe  $(n_k)_k$  et  $h \in L_\epsilon(\Sigma^+)$  tels que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|P\phi_{n_k} - h\|_\infty = 0$  :

. Il existe  $(n_k)_k$  et  $h \in C(\Sigma^+)$  tels que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|P\phi_{n_k} - h\|_\infty = 0$ .

En effet, comme  $\sup_n \|\phi_n\|_\epsilon < +\infty$ ,  $\sup_n \|P\phi_n\|_\epsilon < +\infty$  et donc  $(P\phi_n)_n$  est une suite bornée dans  $(C(\Sigma^+), \|\cdot\|_\infty)$  et uniformément équicontinue. On conclut alors par le théorème d'Ascoli puisque  $(\Sigma^+, d)$  est compact.

.  $h \in L_\epsilon(\Sigma^+)$  car  $\sup_k \|P\phi_{n_k}\|_\epsilon < +\infty$  et car

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{d(x, y)^\epsilon} \leq \liminf_k [P\phi_{n_k}]_\epsilon \text{ pour tous } x \text{ et } y \text{ de } \Sigma^+ \text{ avec}$$

$x \neq y$ .

5. Sur les valeurs propres de module 1 de l'opérateur  $P : L_\epsilon(\Sigma^+) \rightarrow L_\epsilon(\Sigma^+)$ .

a.  $P1 = 1$  car  $\sum_{a \in I} p_a(x) = 1$  pour tout  $x \in \Sigma^+$ .

b. 1 est valeur propre simple :

Soit  $\phi \in L_\epsilon(\Sigma^+)$  avec  $P\phi = \phi$ .

Comme il s'agit de montrer que  $\phi$  est constante et comme  $p_a$  est réelle pour tout  $a$  de  $I$ , on peut supposer  $\phi$  à valeurs réelles, ce que l'on fait dans la suite.

Puisque  $(\Sigma^+, d^\epsilon)$  est compact, il existe  $x$  dans  $\Sigma^+$  tel que  
 $\phi(x) = \sup_{y \in \Sigma^+} \phi(y)$ . Mais  $\phi(x) = \sum_{a \in I} p_a(x) \phi(ax)$  et donc, si  $ax \in \Sigma^+$ , on ne  
 $M(a, x_0) = 1$   
 peut avoir  $\phi(ax) < \phi(x)$  (car  $p_a(x) > 0$ ,  $\sum_a p_a(x) = 1$  et  $\phi(y) \leq \phi(x)$ ,  $\forall y \in \Sigma^+$ ).

On en déduit que  $\phi(ax) = \phi(x)$  dès que  $ax \in \Sigma^+$  et, par récurrence, que  
 $\phi(a_0 \dots a_k x) = \phi(x)$  pour tous  $k \geq 0$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_k \in I$  pourvu que  $a_0 a_1 \dots a_k x \in \Sigma^+$ .  
 Le lemme suivant et la continuité de  $\phi$  permettent alors de conclure.

Lemme :  $\{a_0 a_1 \dots a_k x / k \geq 0 ; a_0, a_1, \dots, a_k \in I ; a_0 a_1 \dots a_k x \in \Sigma^+\}$  est dense dans  
 $(\Sigma^+, d)$ .

Preuve :

Soient  $x' \in \Sigma^+$  et  $n \geq 0$  fixés quelconques.

Posons  $a_0 = x'_0, \dots, a_n = x'_n$ . Comme  $M^4 > 0$ , il existe  $a_{n+1}, a_{n+2}$   
 et  $a_{n+3}$  dans  $I$  tels que  $M(a_n, a_{n+1}) = M(a_{n+1}, a_{n+2}) = M(a_{n+2}, a_{n+3}) =$   
 $M(a_{n+3}, x'_0) = 1$ .

Ainsi  $a_0 a_1 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} x \in \Sigma^+$

et  $d(a_0 a_1 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} x, x') \leq \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$ , ce qui assure la  
 densité.

c. 1 est l'unique valeur propre dans  $S^1$  de  $P$  (même méthode en passant  
 d'abord par les valeurs absolues).

PARTIE V

**THEOREME LIMITE CENTRAL POUR UNE CLASSE DE CHAINES DE MARKOV**

Cette partie est entièrement inspirée de l'article [5] de Y. Guivarc'h et J. Hardy.

On considère ici un espace métrique compact  $(X, d)$  et une probabilité de transition,  $P$ , sur  $(X, \mathcal{B}_X)$  satisfaisant les hypothèses :

1.  $P(C(X)) \subset C(X)$
2.  $P(L(X)) \subset L(X)$  et  $\|P\phi\| \leq \rho\|\phi\| + C\|\phi\|_\infty$  pour  $\phi \in L(X)$  avec  $0 \leq \rho < 1$  et  $C \geq 0$ .
3.  $P$  est compact de  $(L(X), \|\cdot\|)$  dans  $(L(X), \|\cdot\|_\infty)$ .
4. 1 est valeur propre simple de l'opérateur  $P : L(X) \rightarrow L(X)$  et c'est l'unique valeur propre de module 1.

Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (annexe I) permet alors d'affirmer les propriétés suivantes ( $P$  étant considéré comme opérateur borné de  $(L(X), \|\cdot\|)$ ) :

a -  $\text{Ker}(I-P) = \text{Ker}(I-P)^2$

b - Il existe un sous-espace fermé  $H$  de  $L(X)$  tel que

$$L(X) = \text{Ker}(I-P) \bullet H$$

et la restriction de  $P$  à  $H$  a un rayon spectral  $< 1$ .

c - Le projecteur  $\pi$  sur  $\text{Ker}(I-P)$  dans la décomposition ci-dessus est borné dans  $(L(X), \|\cdot\|_\infty)$ .

I. Existence et unicité d'une probabilité  $P$ -invariante sur  $(X, \mathcal{B}_X)$

Remarquons tout d'abord que, pour toute fonction  $\phi$  de  $L(X)$ , la suite  $(\|P^n(I-\pi)\phi\| = \|P^n\phi - \pi\phi\|)_{n \geq 0}$  converge exponentiellement vers 0 car  $r(P(I-\pi)) < 1$ .

De plus, puisque  $\dim(\text{Ker}(I-P))=1$ , on peut considérer la forme linéaire continue  $\nu$  sur  $(L(X), \|\cdot\|)$  définie par  $\pi\phi = \nu(\phi)1$  pour toute  $\phi \in L(X)$ .

Ainsi, comme  $\pi$  est borné dans  $(L(X), \|\cdot\|_\infty)$  et comme  $L(X)$  est dense dans  $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ,  $\nu$  se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur  $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$  que l'on note encore  $\nu$  et qui vérifie pour  $\phi$  dans  $C(X)$  :  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n\phi = \nu(\phi)$  uniformément sur  $X$ .

Enfin, on déduit de la convergence précédente que  $\nu$  est positive (car  $P$  est positif) et  $P$ -invariante.  $\nu$  est donc une mesure de probabilité ( $\nu(1) = 1$  car  $P1 = 1$ ) sur  $(X, \mathcal{B}_X)$   $P$ -invariante. On vérifie facilement que c'est la seule.

## II. Perturbation de l'opérateur de Perron-Frobenius

On considère, dans la suite, la chaîne de Markov canonique,  $(X_k)_{k \geq 0}$ , à valeurs dans  $X$ , de probabilité de transition  $P$  et de loi initiale la masse de Dirac,  $\delta_x$ , au point  $x \in X$  fixé. On notera  $P_x$ , la probabilité correspondante sur l'espace des trajectoires de la chaîne et  $E_x$  l'espérance associée.

On pose  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ X_k$ ,  $n \geq 1$  où  $f$  est une fonction de  $L(X)$  à valeurs réelles vérifiant  $\nu(f) = 0$ .

On veut démontrer un théorème limite central pour  $(S_n)_{n \geq 1}$ . On s'intéresse donc aux fonctions caractéristiques  $\lambda \rightarrow E_x[e^{i\lambda S_n}]$ ,  $n \geq 1$ . Le lemme suivant en donne une expression plus commode.

Lemme 1 : Pour tout  $n \geq 1$ , tout réel  $\lambda$  et toute fonction  $\phi \in L(X)$ , on a

$$E_x[e^{i\lambda S_n} \phi(X_n)] = e^{i\lambda f(x)} P_{i\lambda}^{n-1}(P\phi)(x)$$

où  $P_z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , est l'opérateur borné de  $(L(X), \|\cdot\|)$  défini par  $P_z \psi = P(e^{z\cdot} \psi)$ ,  $\psi \in L(X)$

Preuve :

Le lemme résulte de la formule suivante, valable pour tout  $n \geq 1$  :

$$\underbrace{P(e^{i\lambda f} \cdot P(e^{i\lambda f} \dots P(e^{i\lambda f} \cdot P\phi) \dots))}_{(n-1) \text{ fois}} = P_{i\lambda}^{n-1}(P\phi) ; \text{ formule que l'on vérifie}$$

aisément par récurrence.

Lemme 2 : La fonction  $z \rightarrow P_z$  est analytique de  $\mathbb{C}$  dans l'espace de Banach,  $\mathcal{L}(L(X), \|\cdot\|)$ , des opérateurs bornés de  $(L(X), \|\cdot\|)$  et, pour tout  $z$  complexe,

$$P_z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} M_k \quad \text{où } M_k \in \mathcal{L}(L(X), \|\cdot\|) \text{ est défini par}$$

$$M_k \phi = P(f^k \phi), \quad \phi \in L(X).$$

Preuve :

Remarquons tout d'abord que, pour tout  $k \geq 1$ ,  
 $\|M_k\| \leq \|P\| \cdot \|f\|_\infty^{k-1} (k[f] + \|f\|_\infty)$  d'où l'on déduit que la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} M_k, z \in \mathbb{C}$ ,  
 converge normalement dans l'espace de Banach  $\bar{L}(L(X), \|\cdot\|)$ .

Pour tout  $k \geq 1$  et toute fonction  $\phi$  de  $L(X)$ ,

$$\begin{aligned} \|M_k \phi\| &\leq \|P\| \|f^k \phi\| = \|P\| (\|f^k \phi\| + \|f\|_\infty \|f\|_\infty^k) \\ &\leq \|P\| (\|f\|_\infty \|f^k\| + \|f\|_\infty^k \|\phi\| + \|f\|_\infty \|f\|_\infty^k) \end{aligned}$$

Mais il est facile de vérifier par récurrence que  $\|f^k\| \leq k \|f\|_\infty^{k-1} \|f\|$ .

Ainsi,  $\|M_k \phi\| \leq \|P\| (\|f\|_\infty (k \|f\|_\infty^{k-1} \|f\| + \|f\|_\infty^k) + \|\phi\| \|f\|_\infty^k)$ .

$\leq \|P\| (k \|f\| + \|f\|_\infty) \|f\|_\infty^{k-1} \|\phi\|$ , ce qui prouve l'inégalité cherchée.

Les égalités suivantes achèvent alors la preuve du lemme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} M_k \phi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int \frac{z^k}{k!} f^k(y) \phi(y) P(x, dy) \\ &= \int \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} f^k(y) \right) \phi(y) P(x, dy) \text{ car } \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} f^k \right) \\ &\text{converge uniformément sur } X \\ &= P_z \phi(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } \Sigma, \text{ toute fonction } \phi \text{ dans} \\ &L(X) \text{ et tout complexe } z. \end{aligned}$$

Le lemme 2, l'égalité  $P_0 = P$  et les propriétés 4-, a- et b- sur  $P$  permettent, grâce au théorème des perturbations (annexe II), de préciser le spectre,  $\sigma(P_z)$ , des opérateurs  $P_z$ ,  $z$  suffisamment petit :

Il existe  $\alpha, \beta > 0$  tels que si  $z \in D(0, \beta)$

(i)  $\sigma(P_z) \subset D(0, 1-3\alpha) \cup \{k(z)\}$  où  $k(z)$  est valeur propre simple de  $P_z$  vérifiant  $|k(z)-1| < \alpha$  (nécessairement,  $k(0) = 1$ ).

(ii) Il existe un projecteur  $\pi(z)$  sur le sous-espace propre associé à  $k(z)$  qui commute avec  $P_z$  et tel que

$$\sup_{|z| < \beta} \|P_z^n (I - \pi(z))\| \leq C(1-3\alpha)^{n+1} \text{ pour } n \geq 0 \text{ avec } C \geq 0.$$

(iii)  $k(\cdot)$  et  $\pi(\cdot)$  sont  $m$  fois continûment dérivables sur  $D(0, \beta)$ , quel que soit  $m \geq 1$ .

Remarque : L'unicité de  $v$  et les propriétés de  $\pi(0)$  assurent que  $\pi = \pi(0)$ .

On en déduit la convergence suivante :

Corollaire : Pour toute fonction  $\phi$  dans  $L(X)$  et tout réel  $\lambda$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| P_{\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}}^{n-1} \phi - e^{-\frac{k''(0)\lambda^2}{2}} v(\phi) \right\| = 0$$

Preuve :

Notons  $n_0$  le plus petit entier qui vérifie :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{i\lambda}{\sqrt{n}} \right| < \beta \text{ où } \lambda \text{ est un réel fixé.}$$

Vu ce qui précède, si  $\phi \in L(X)$ ,

$$\begin{aligned} P_{\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}}^{n-1} \phi &= P_{\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}}^{n-1} \pi\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right) \phi + P_{\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}}^{n-1} (I - \pi\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right)) \phi \\ &= k\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} \pi\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right) \phi + P_{\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}}^{n-1} (I - \pi\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right)) \phi \text{ pour } n \geq n_0 \end{aligned} \quad (1)$$

D'autre part, on a  $\left\| P_{\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}}^{n-1} (I - \pi\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right)) \phi \right\| \leq C(r(P) - 3\alpha)^n \|\phi\|$ , pour  $n \geq n_0$ ,

$$\text{et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| P_{\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}}^{n-1} (I - \pi\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right)) \phi \right\| = 0 \quad (2)$$

$$\text{Comme } \pi(0) = v.1, \text{ on a aussi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \pi\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right) \phi - v(\phi) \right\| = 0 \quad (3)$$

par continuité de " $z \rightarrow \pi(z)$ ".

Notons maintenant " $\pi(z) = v + z\varepsilon + o(z)$ " le développement à l'ordre 1 de " $z \rightarrow \pi(z)$ ". Alors, l'égalité " $\pi(z)P_z = k(z)\pi(z)$ " (justifiée par la commutativité de  $\pi(z)$  et  $P_z$ ) donne par une identification terme à terme des développements à l'ordre 1 :  $\varepsilon P + vM_1 = k'(0)v + \varepsilon$ . Et, en appliquant cette dernière relation à la fonction  $1 \in L(X)$ , il vient :  $k'(0) = v(M_1 1) = v(Pf) = v(f) = 0$ .

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} k\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{k''(0)}{2} \frac{\lambda^2}{n} + o\left(\frac{\lambda^2}{n}\right)\right)^n = \exp\left(-\frac{k''(0)\lambda^2}{2}\right) \quad (4)$$

D'où le corollaire en rassemblant les résultats (1), (2), (3) et (4).

III. Détermination et nullité de  $k''(0)$

a) Détermination de  $k''(0)$

Commençons par résoudre l'équation fonctionnelle en  $u$  :  $(I-P)u = Pf$  sur  $X$ . Il est bien clair que formellement, il vient  $u = \sum_{n \geq 0} P^{n+1} f$ . Or,  $Pf \in L(X)$  et  $v(Pf) = 0$ ,  $(\|P^{n+1} f\|)_{n \geq 0}$  converge donc exponentiellement vers 0. Il en résulte que  $\sum_{n \geq 0} P^{n+1} f$  converge normalement dans l'espace de Banach  $(L(X), \|\cdot\|)$  et donc que  $u = \sum_{n \geq 0} P^{n+1} f$  est lipschitzienne sur  $(X, d)$  et est l'unique solution de l'équation à résoudre.

On considère alors les opérateurs suivants, bornés dans  $(L(X), \|\cdot\|)$  :

- .  $\tilde{P}_z$  avec  $z$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\tilde{P}_z \phi = e^{-zu} P_z(\phi e^{zu})$  pour toute  $\phi$  dans  $L(X)$ .
- .  $\tilde{M}_k$  avec  $k \geq 0$  et  $\tilde{M}_k \phi(x) = \int (f(y)+u(y)-u(x))^k \phi(y) P(x, dy) dv(x)$ , pour tout  $x$  dans  $X$  et toute  $\phi$  de  $L(X)$ .

Leur introduction est justifiée par les propriétés qui suivent.

Remarquons tout de suite que  $\tilde{M}_1 1 - M_1 1 = Pu - u = -Pf = -M_1 1$  et donc que  $\tilde{M}_1 1 = 0$ .

D'autre part, de la même façon que pour  $z \rightarrow P_z$ , on montre que  $z \rightarrow \tilde{P}_z$  est analytique sur  $\mathbb{C}$  et que  $\tilde{P}_z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \tilde{M}_k$ . Ainsi, puisque  $\tilde{P}_0 = P$ , on déduit du théorème des perturbations qu'il existe  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > 0$  tels que si  $z \in D(0, \tilde{\beta})$  :

(i)  $\sigma(\tilde{P}_z) \subset D(0, 1-3\tilde{\alpha}) \cup \{\tilde{k}(z)\}$  où  $\tilde{k}(z)$  est valeur propre simple de  $\tilde{P}_z$  vérifiant  $|\tilde{k}(z)-1| < \tilde{\alpha}$ .

(ii) Il existe un projecteur  $\tilde{\pi}(z)$  sur le sous-espace propre associé à  $\tilde{k}(z)$  qui commute avec  $\tilde{P}_z$  et tel que  $r(\tilde{P}_z(I-\tilde{\pi}(z))) < (1-3\tilde{\alpha})$ . (D'où nécessairement  $\tilde{\pi}(0) = \pi$ ).

(iii)  $\tilde{k}(\cdot)$  et  $\tilde{\pi}(\cdot)$  sont  $m$  fois continûment dérivables sur  $D(0, \tilde{\beta})$ , quel que soit  $m \geq 1$ .

Remarque : Puisque  $k(z)$  (resp  $\tilde{k}(z)$ ),  $|z| < \min(\beta, \tilde{\beta})$ , est une valeur propre de  $P_z$  (resp  $\tilde{P}_z$ ), il est clair que c'est aussi une valeur propre de  $\tilde{P}_z$  (resp  $P_z$ ). Ainsi, étant donnée leur place respective dans les spectres de  $P_z$  et  $\tilde{P}_z$ ,  $k(z)$  et  $\tilde{k}(z)$  sont égales.

En conclusion, si l'on note " $\tilde{\pi}(z) = v + z\tilde{\varepsilon} + \frac{z^2}{2} \tilde{\Sigma} + o(z^2)$ " le développement au second ordre de " $z \rightarrow \tilde{\pi}(z)$ " sur  $D(0, \min(\beta, \tilde{\beta}))$ , on déduit de l'égalité " $\tilde{\pi}(z)\tilde{P}_z = k(z)\tilde{\pi}(z)$ " la relation :  $\tilde{\Sigma}P + v\tilde{M}_2 + 2\tilde{\pi}\tilde{M}_1 = k''(0)v + \tilde{\pi}$ . Cette dernière assur-  
rant, lorsqu'on lui applique la fonction 1 de  $L(X)$  que :

$$\begin{aligned} k''(0) &= v(\tilde{M}_2 1) + 2\tilde{\pi}(\tilde{M}_1 1) = v(\tilde{M}_2 1) \quad \text{car } \tilde{M}_1 1 \equiv 0 \\ &= \int (f(y) + u(y) - u(x))^2 P(x, dy) dv(x). \end{aligned}$$

b) Nullité de  $k''(0)$

La nullité de  $k''(0)$  est étroitement liée à la notion suivante :

Définition : On dira qu'une fonction  $g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne est dégénérée s'il existe une fonction  $v$  dans  $L(X)$  à valeurs réelles telle que  $g(y) = v(x) - v(y)$  pour  $P(x, \cdot)$ -presque tout  $y$  et  $v$ -presque tout  $x$ .

L'expression de  $k''(0)$  assure alors que :

Lemme 3 : Si  $k''(0) = 0$ ,  $f$  est dégénérée.

Dans le cas où  $\text{supp } v = X$ , ce lemme admet une réciproque :

Lemme 4 : Si  $f$  est dégénérée et si  $\text{supp } v = X$ ,  $k''(0) = 0$ .

Preuve :

Si  $f(y) = v(x) - v(y)$  pour  $P(x, \cdot)$ -presque tout  $y$  et  $v$ -presque tout  $x$  avec  $v \in L(X)$ , alors  $Pf = v - Pv$   $v$ -presque partout.

Ainsi, par continuité,  $Pf = v - Pv$  sur  $\text{supp } v = X$  et donc  $u \equiv v$ , ce qui entraîne que  $k''(0) = 0$ .

IV. Théorème limite central

Théorème II : Si  $\sigma^2 = \int (f(y) + u(y) - u(x))^2 P(x, dy) dv(x)$  est strictement positif,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_x[S_n \leq \sigma t \sqrt{n}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du \quad \text{pour tout } t \text{ réel.}$$

Remarque : Le lemme 2 donne une condition suffisante sur  $f$  pour avoir  $\sigma^2 > 0$ ; condition qui devient nécessaire dans le cas où  $\text{supp } v = X$ .

Preuve :

D'après le corollaire,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| P_{\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}}^{n-1}(1) - e^{-\lambda^2/2} \right\| = 0$ , pour tout réel  $\lambda$ .

On en déduit que, pour tout réel  $\lambda$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_x \left( e^{i\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}f\right)} P_{\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}}^{n-1}(P_1) \right) = e^{-\lambda^2/2}$   
puisque  $P_1 = 1$ .

Le lemme 1 assure donc la convergence en loi de  $\left( \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \right)$  vers la loi normale centrée réduite.

PARTIE VI

EPILOGUE

Le lemme III-1 mis à part, on est maintenant en mesure de démontrer la proposition III-2, c'est-à-dire d'achever la preuve du théorème I.

Soit donc  $f : (\Sigma^+, d) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction höldérienne et de moyenne nulle. En particulier, il existe  $\epsilon > 0$  pour lequel  $f \in L_\epsilon(\Sigma^+)$ .

On considère alors l'espace métrique compact  $(\Sigma^+, d^\epsilon)$ , le noyau markovien  $P$  sur  $\Sigma^+$  introduit partie IV, la mesure de probabilité  $\nu = p^+ \tilde{\nu}$  et la chaîne de Markov canonique  $(X_k)_{k \geq 0}$  à valeurs dans  $\Sigma^+$  de probabilité de transition  $P$  et de loi initiale  $\nu$  dont la probabilité correspondante sur l'espace des trajectoires est notée  $P_\nu$ .

$\nu$  étant  $P$ -invariante, l'application à ces objets des résultats de la partie V assure que :

. Si  $\phi \in L_\epsilon(\Sigma^+)$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|P^k \phi - \nu(\phi)\|_\epsilon = 0$  et la convergence est exponentielle

. Si  $\sigma^2 = \int (f(y)+u(y)-u(x))^2 P(x, dy) d\nu(x)$  est strictement positif,

alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_\nu[S_n \leq \sigma t \sqrt{n}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du$

$$\text{où } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ X_k, \quad n \geq 1$$

$$\text{et } u = \sum_{k \geq 0} P^{k+1} f \text{ dans } (L_\epsilon(\Sigma^+), \|\cdot\|_\epsilon).$$

Remarque : Si  $g, \nu \in L_\epsilon(\Sigma^+)$ ,

$$\begin{aligned} \int (g(y)+\nu(y)-\nu(x))^2 P(x, dy) d\nu(x) &= \int (g^2+2\nu^2) d\nu = 2 \int (\nu P\nu + \nu P g - g\nu) d\nu \text{ car } \nu(P\phi) = \nu(\phi) \\ &= \int (g^2+2\nu^2) d\nu - 2 \int (\nu\theta \cdot \nu + \nu\theta \cdot g - g \cdot \nu) d\nu \text{ car } \nu(P\phi \cdot \psi) = \nu(\phi \cdot \psi\theta) \\ &= \int (g+\nu-\nu\theta)^2 d\nu. \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité (I) du lemme suivant :

Lemme 1 :

$$\sigma^2 = \int (f+u-\nu\theta)^2 d\nu \tag{I}$$

$$= \nu(f^2) + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \nu(f \cdot f\theta^{k+1}) \tag{II}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \left( \frac{S_n f}{\sqrt{n}} \right)^2 d\nu \tag{III}$$

Preuve de l'égalité (II) :

$$\begin{aligned} \text{Comme } v \text{ est } P\text{-invariante, } \sigma^2 &= v(f^2) + 2v(f.u) + 2v(u.(u - Pu - Pf)) \\ &= v(f^2) + 2v(f. \sum_{k=0}^{+\infty} P^{k+1}f) \text{ car } u - Pu - Pf = 0 \\ &= v(f^2) + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} v(fo\theta^{k+1}.f) \text{ car la série} \end{aligned}$$

converge uniformément sur  $\Sigma^+$ .

Preuve de l'égalité (III) :

Comme  $|v(f.fo\theta^k)| = |v(P^k f.f)| \leq \|f\|_\infty \|P^k f\|_\infty$  et comme  $(\|P^k f\|)_{k \geq 1}$  converge exponentiellement vers 0, la série  $\sum_{k \geq 1} k.v(f.fo\theta^k)$  est convergente

$$\text{Ainsi } \sigma^2 = v(f^2) + 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v(f.fo\theta^k) = v(f^2) + 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{n}) v(f.fo\theta^k)$$

On conclut alors car, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\left(\frac{\sum f^2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f^2 o\theta^k + 2 \sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} fo\theta^k . fo\theta^\ell \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f^2 o\theta^k + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} fo\theta^\ell . fo\theta^{k+\ell} \right)$$

$$\text{et donc, } v\left(\left(\frac{\sum f}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = v(f^2) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-k-1} v(fo\theta^\ell . fo\theta^{k+\ell}) = v(f^2) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) v(f.fo\theta^k).$$

L'égalité (III) prouve que  $\left(\int \left(\frac{\sum f}{\sqrt{n}}\right)^2 dv\right)_{n \geq 1}$  converge et que sa limite vaut  $\sigma^2$ . La première égalité, associée au fait que  $\text{supp } v = \Sigma^+$ , montre que si  $f$  n'est pas un cobord,  $\sigma^2$  est strictement positif. Le lemme suivant suffit donc pour conclure :

Lemme 2 : Pour tout  $n \geq 1$ ,  $P_v[f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})] \leq \sigma \sqrt{n} = v\{x \in \Sigma^+ / \sum_{k=0}^{n-1} fo\theta^k(x) \leq \sigma \sqrt{n}\}$ .

Remarque : Intuitivement, vu la dualité entre  $P$  et  $\theta$ ,  $(X_k)_{k \geq 0}$  est une reconstitution aléatoire du passé de  $X_0$ . Il est donc naturel que la loi de  $(X_0, \dots, X_{n-1})$  coïncide avec la loi de  $(\theta^{n-1}x, \dots, \theta x, x)$ . Le lemme 2 en est une conséquence.

Preuve :

Si  $h_i : (\Sigma^+, \mathbf{B}_{\Sigma^+}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{B}_{\mathbb{R}})$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , sont des fonctions mesurables bornées,

$$\begin{aligned} \int h_0(X_0)h_1(X_1)\dots h_{n-1}(X_{n-1})dP_\nu &= \int h_0(x)P(h_1 \cdot P(h_2 \dots P(h_{n-2} \cdot Ph_{n-1}) \dots))(x)dv(x) \\ &= \int h_0 \circ \theta(x)h_1(x)P(h_2 \dots P(h_{n-2} \cdot Ph_{n-1}) \dots)(x)dv(x) \end{aligned}$$

$$\text{car } \nu(P\phi \cdot \psi) = \nu(\phi \cdot \psi \circ \theta) .$$

En procédant ainsi (n-1) fois, on aboutit à l'égalité :

$$\int h_0(X_0)h_1(X_1)\dots h_{n-1}(X_{n-1})dP_\nu = \int h_0 \circ \theta^{n-1}(x)\dots h_{n-2} \circ \theta(x)h_{n-1}(x)dv(x) .$$

Le lemme en découle, via le théorème des classes monotones.

PARTIE VII

**A PROPOS DU LEMME III-1**

**A. POINT DE VUE : "ANALYSE DE FOURIER"**

**I. Rappels et notations**

1. La famille  $\left\{ \frac{1}{\|(k, \ell)\|^\alpha} / (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2, (0) \right\}$  est sommable si et seulement si  $\alpha > 2$ .

2. On pose, pour tout  $(k, \ell)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ ,  $e_{(k, \ell)} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{C}$   
 $(x, y) \rightarrow e^{2i\pi \langle (k, \ell), (x, y) \rangle}$ .

Alors :

. La famille  $\{e_{(k, \ell)} / (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\}$  est une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{T}^2)$ .

. Pour toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{T}^2)$ ,  $\|f\|_2^2 = \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2} |\hat{f}(k, \ell)|^2$  où

$$\hat{f}(k, \ell) = \int_{\mathbb{T}^2} f \cdot e_{-(k, \ell)} dm. \quad (\text{Relation de Parseval}).$$

. La famille  $\{\hat{f}(k, \ell) e_{(k, \ell)}\}_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2}$  est sommable dans  $L^2(\mathbb{T}^2)$  de somme  $f$ .

. Si  $\sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2} |\hat{f}(k, \ell)| < +\infty$ ,  $f = \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(k, \ell) e_{(k, \ell)}$  m-presque partout.

(Théorème d'inversion de Fourier).

**II. Comportement de certaines trajectoires**  $(A^n(x, y))_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On désignera par  $(u(x, y), v(x, y))$  les coordonnées d'un point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $(0, e_1, e_2)$ .

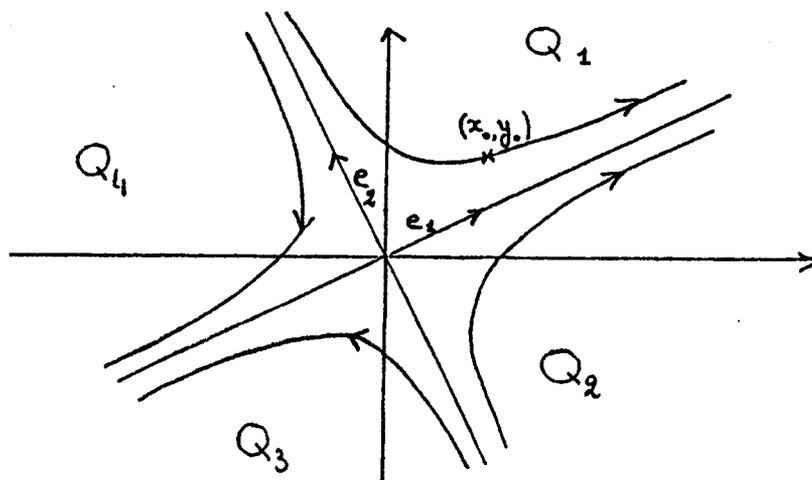
On considère alors les quadrants

$$Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / u(x, y) > 0, v(x, y) > 0\}$$

$$Q_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / u(x, y) > 0, v(x, y) < 0\}$$

$$Q_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / u(x, y) < 0, v(x, y) < 0\}$$

$$Q_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / u(x, y) < 0, v(x, y) > 0\}.$$



Si  $(x_0, y_0) \in Q_1$ , la trajectoire  $(A^n(x_0, y_0))_{n \in \mathbb{Z}}$  est contenue dans la branche d'hyperbole  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / u(x, y)v(x, y) = u(x_0, y_0)v(x_0, y_0), u(x, y) > 0\}$  puisque  $u(A^n(x_0, y_0))v(A^n(x_0, y_0)) = \lambda_1^n u(x_0, y_0)\lambda_2^n v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)v(x_0, y_0)$ .

De plus, comme  $\lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0$ , la trajectoire est décrite dans le sens indiqué sur la figure ci-dessus. On en déduit, en particulier, que  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|A^n(x, y)\| = +\infty$ .

On obtient des résultats analogues avec les autres quadrants.

### III. Quelques résultats d'analyse de Fourier sur le tore relatifs à T

Lemme 1 : Si  $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$  et si  $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\widehat{foT}(k, \ell) = \widehat{f}(A^{-1}(k, \ell))$ .

Preuve :

$$\begin{aligned} \widehat{foT}(k, \ell) &= \int foT \cdot e_{-(k, \ell)} dm = \int f \cdot e_{-(k, \ell)} \circ T^{-1} dm \text{ car } mT = m \\ &= \int f \cdot e_{-(k, \ell)} \circ A^{-1} dm = \int f \cdot e_{-A^{-1}(k, \ell)} dm \text{ car } A^{-1} \text{ est} \\ &= \widehat{f}(A^{-1}(k, \ell)). \end{aligned} \quad \text{autoadjointe}$$

Lemme 2 : Si  $f = goT - g$  avec  $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$  et si  $\sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{f}(k, \ell)| < +\infty$ , alors

$$\widehat{f}(0) = 0 \text{ et } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(A^n(k, \ell)) = 0 \text{ pour tout } (k, \ell) \text{ de } \mathbb{Z}^2 / (0).$$

Preuve :

Comme A n'admet pas de point fixe autre que 0, on déduit de la sommabilité de  $\{|\widehat{f}(k, \ell)| / (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\}$ , celle de  $\{\widehat{f}(A^n(k, \ell)) / n \in \mathbb{Z}\}$  pour  $(k, \ell)$  dans  $\mathbb{Z}^2 / (0)$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(A^n(k, \ell)) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N (\widehat{goT}(A^n(k, \ell)) - \widehat{g}(A^n(k, \ell))) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N (\widehat{g}(A^{n-1}(k, \ell)) - \widehat{g}(A^n(k, \ell))) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} (\widehat{g}(A^{-N-1}(k, \ell)) - \widehat{g}(A^N(k, \ell))) = 0 \text{ d'après la relation de Parseval} \end{aligned}$$

et parce que  $\lim_{N \rightarrow \pm\infty} \|A^N(k, \ell)\| = +\infty$ .

Lemme 3 : Soit  $f \in C(\mathbb{T}^2)$  avec  $\widehat{f}(0) = 0$ ,  $(|\widehat{f}(k, \ell)|)_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)} \in O\left(\frac{1}{\|(k, \ell)\|^\alpha}\right)$ ,  $\alpha > 3$

$$\text{et } \sum_{\mathbb{Z}} \widehat{f}(A^n(k, \ell)) = 0 \text{ pour tout } (k, \ell) \text{ dans } \mathbb{Z}^2 / (0).$$

Alors,  $f$  est de classe  $C^1$ ,  $g = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2/(0)} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(A^n(k,\ell)) \right) e_{(k,\ell)}$   
 est de classe  $C^1$  et  $f = g \circ T - g$ . En particulier,  $f$  est un cobord.

Preuve :

Comme  $f \in C(\Gamma^2)$  et que  $(|f(k,\ell)|)_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2/(0)} \in O\left(\frac{1}{\|(k,\ell)\|^\alpha}\right)$  avec

$\alpha > 3$ , le rappel 1 et le théorème d'inversion de Fourier assurent l'égalité des fonctions continues  $f$  et  $\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2/(0)} \hat{f}(k,\ell) e_{(k,\ell)}$  sur  $\Gamma^2$ .

Le rappel 1- assure aussi la sommabilité de  $\{\|\hat{f}(k,\ell) \frac{\partial e_{(k,\ell)}}{\partial x}\|_{\infty} / (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2/(0)\}$   
 et de  $\{\|\hat{f}(k,\ell) \frac{\partial e_{(k,\ell)}}{\partial y}\|_{\infty} / (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2/(0)\}$ .

Il en résulte que  $f$  admet des dérivées partielles du premier ordre continues.  $f$  est donc de classe  $C^1$ .

Soit maintenant  $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2/(0)$ . On pose  $C_{(k,\ell)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(A^n(k,\ell)) = \sum_{n=-\infty}^0 \hat{f}(A^n(k,\ell))$ .  
 Les pentes des directions propres de  $A$  étant irrationnelles,  $(k,\ell) \in \bigcup_{i=1}^4 Q_i$ .

Supposons que  $(k,\ell) \in Q_1$  (les autres cas sont similaires). Alors :

. Si  $u(k,\ell) \geq v(k,\ell)$ , on a pour tout  $n \geq 1$

$$\|A^n(k,\ell)\| \geq u(A^n(k,\ell)) = \lambda_1^n u(k,\ell) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1^n \|(k,\ell)\|$$

et donc,

$$|C_{(k,\ell)}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\hat{f}(A^n(k,\ell))| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{\|A^n(k,\ell)\|^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} C \left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda_1^n \|(k,\ell)\|}\right)^\alpha = \frac{1}{\|(k,\ell)\|^\alpha} \left(C \frac{(\sqrt{2} \lambda_2)^\alpha}{1 - \lambda_2^\alpha}\right)$$

. Si  $u(k,\ell) < v(k,\ell)$ , on a pour tout  $n \geq 0$

$$\|A^{-n}(k,\ell)\| \geq v(A^{-n}(k,\ell)) = \lambda_1^n v(k,\ell) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1^n \|(k,\ell)\|$$

et donc,

$$|C_{(k,\ell)}| \leq \sum_{n=-\infty}^0 |\hat{f}(A^n(k,\ell))| \leq \sum_{n=-\infty}^0 \frac{C}{\|A^n(k,\ell)\|^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} C \left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda_1^n \|(k,\ell)\|}\right)^\alpha = \frac{1}{\|(k,\ell)\|^\alpha} \left(C \frac{2^{\alpha/2}}{1 - \lambda_2^\alpha}\right)$$

Ainsi  $(|C_{(k,\ell)}|)_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2/(0)} \in O\left(\frac{1}{\|(k,\ell)\|^\alpha}\right)$  et les mêmes arguments que ceux du début de la preuve montrent que  $g = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2/(0)} C_{(k,\ell)} e_{(k,\ell)}$  est de classe  $C^1$ .

$$\begin{aligned}
 \text{De plus, } g \circ T^{-1} g &= \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)} C_{(k, \ell)} e_{(k, \ell)} \circ T^{-1} - \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)} C_{(k, \ell)} e_{(k, \ell)} \\
 &= \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)} C_{(k, \ell)} e_{A(k, \ell)} - \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)} C_{(k, \ell)} e_{(k, \ell)} \\
 &= \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)} (C_{A^{-1}(k, \ell)} - C_{(k, \ell)}) e_{(k, \ell)} \\
 &= \sum_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)} \hat{f}((k, \ell)) e_{(k, \ell)} = f .
 \end{aligned}$$

$f$  est donc un cobord puisque, par le théorème des accroissements finis, les fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{T}^2$  sont lipschitziennes.

Remarques :

1. Soit  $f : (\mathbb{T}^2, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue de moyenne nulle.

(i) Si  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(A^n(k, \ell)) \neq 0$  pour un élément  $(k, \ell)$  de  $\mathbb{Z}^2 / (0)$

alors  $f$  n'est pas un cobord (Lemme 2).

(ii) Pour la même raison, si  $\hat{f}(k, \ell) \geq 0$  pour tout  $(k, \ell)$  dans  $\mathbb{Z}^2$  et si  $f$  est non nulle, ce n'est pas un cobord.

2. Soit  $f : (\mathbb{T}^2, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme trigonométrique de moyenne nulle.

Alors  $\hat{f} = 0$  sur le complémentaire d'une boule fermée  $\bar{B}(0, R)$ . Il en résulte que :

. Pour tout  $(k, \ell)$  dans  $\mathbb{Z}^2 / (0)$ , la somme  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(A^n(k, \ell))$  est finie

(car  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|A^n(k, \ell)\| = +\infty$ ).

. Si, de plus,  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(A^n(k, \ell)) = 0$  pour tout  $(k, \ell)$  dans  $\mathbb{Z}^2 / (0)$ ,  $f$  vérifie les hypothèses du lemme 3 et comme  $C_{(k, \ell)}$ ,  $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)$ , peut toujours s'écrire comme somme de  $\hat{f}(A^n(k, \ell))$  où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\|A^n(k, \ell)\| \geq \|(k, \ell)\|$ ,  $g = \sum_{(k, \ell) \in \bar{B}(0, R)} C_{(k, \ell)} e_{(k, \ell)}$  est un polynôme trigonométrique (notations de la preuve du lemme 3).

3. Si  $f$  est de classe  $C^4$ ,  $(|\hat{f}(k, \ell)|)_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 / (0)} \in o\left(\frac{1}{\|(k, \ell)\|^4}\right)$ .

En effet, si  $k \in \mathbb{Z} / (0)$ , une intégration par partie donne pour toute fonction  $h$

de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{S}^1$  :  $\hat{h}(k) = \frac{i}{2\pi k} \int_0^1 h'(x) e^{-2i\pi kx} dx + [i \frac{e^{-2i\pi kx}}{2\pi k} h(x)]_0^1 = \frac{i}{2\pi k} \hat{h}'(k)$

Ainsi, pour  $(k, \ell)$  dans  $\mathbb{Z}^2 / (0)$ , on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(k, \ell) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) e^{-2i\pi kx} dx \right) e^{-2i\pi \ell y} dy = \frac{i}{2\pi k} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) e^{-2i\pi kx} e^{-2i\pi \ell y} dx dy \\ &= \dots = \frac{1}{(2\pi)^4 k^4} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y) e^{-2i\pi kx} e^{-2i\pi \ell y} dx dy = \frac{1}{(2\pi)^4 k^4} \widehat{\left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)}(k, \ell) . \end{aligned}$$

De même,  $\hat{f}(k, \ell) = \frac{1}{(2\pi)^4 (k^2 \ell^2)} \widehat{\left( \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f \right)}(k, \ell) = \frac{1}{(2\pi)^4 \ell^4} \widehat{\left( \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right)}(k, \ell) .$

Mais  $\frac{\partial^4}{\partial x^4} f$ ,  $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f$ ,  $\frac{\partial^4}{\partial y^4} f \in C(\mathbb{T}^2) \subset L^2(\mathbb{T}^2)$  et la relation de Parseval assure donc que :

$$\lim_{\|(k, \ell)\| \rightarrow +\infty} (k^4 + 2\ell^2 k^2 + \ell^4) |\hat{f}(k, \ell)| = \lim_{\|(k, \ell)\| \rightarrow +\infty} \|(k, \ell)\|^4 |\hat{f}(k, \ell)| = 0 .$$

#### IV. Réponse partielle au lemme III.1

On considère une fonction  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les hypothèses suivantes :

- 1 -  $f$  est continue
- 2 -  $m(f) = 0$
- 3 -  $(|\hat{f}(k, \ell)|)_{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0)} \in O\left(\frac{1}{\|(k, \ell)\|^\alpha}\right)$ ,  $\alpha > 3$  .

Alors, étant donné ce qui précède :

- a)  $f$  est höldérienne
- b) Si  $f \circ \pi$  est un cobord, en passant par  $\hat{\mathbb{T}}^2$ , on vérifie qu'il existe  $h \in L^2(\mathbb{T}^2)$  telle que  $f = h \circ T - h$  dans  $L^2(\mathbb{T}^2)$ . On en déduit, par le lemme 2, que  $f$  vérifie les hypothèses du lemme 3 et donc que  $f$  est un cobord.

Ainsi, on a ici une version plus faible du lemme III-1, version qui permet d'assurer la validité du théorème limite central sur  $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2, m, T})$  pour les fonctions  $f$  qui vérifient les hypothèses 1-, 2- et 3- et qui ne sont pas des cobords.

Exemples : Le théorème limite central est donc valide pour :

- a) les polynômes trigonométriques de moyenne nulle (i.e. : sans terme constant) qui ne sont pas des cobords.

Exemples :

$$. f(x, y) = \cos(2\pi(x+y)) = \frac{1}{2} e^{-2i\pi(x+y)} + \frac{1}{2} e^{2i\pi(x+y)} \text{ et, plus généralement,}$$

les polynômes trigonométriques non nuls, de moyenne nulle à coefficients non négatifs (voir remarque 1-(ii)).

.  $f(x,y) = \sin(2\pi(x+y)) = -\frac{1}{2i} e^{-2i\pi(x+y)} + \frac{1}{2i} e^{2i\pi(x+y)}$  ; ce n'est pas un cobord comme le montre chacun des deux points suivants :

→ On vérifie facilement, grâce au II- que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}/(0)$ ,  $A^n(1,1) \in \{(-1,-1), (1,1)\}$ . Il s'ensuit que  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(A^n(1,1)) = \hat{f}(1,1) = \frac{1}{2i} \neq 0$  et donc que  $f$  n'est pas un cobord.

→ Le point  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$  est périodique de période 3 pour  $T$  et

$$(f+f \circ T+f \circ T^2)(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \sin(2\pi(\frac{3}{4} + \frac{1}{2})) + \sin(2\pi(0 + \frac{1}{4})) + \sin(2\pi(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})) = 2 \neq 0$$

b) Les fonctions de classe  $C^4$ , de moyenne nulle et qui ne sont pas des cobords (voir remarque 3).

B. POINT DE VUE : "TRAJECTOIRES PERIODIQUES"

La méthode employée dans la suite est décrite par R. Bowen dans [2].

Si  $x$  est un point de  $\mathbb{T}^2$  de période  $n$  pour  $T$ , comme  $\pi^{-1}\{x\}$  est de cardinal fini,  $x$  admet un codage  $\omega$ , périodique pour  $\theta$ , de période  $nd$  ( $d$  entier  $\geq 1$ ). Ainsi, si  $f : (\mathbb{T}^2, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  est höldérienne et si  $f \circ \pi$  est un cobord,  $\sum_0^{nd-1} f \circ \pi \circ \theta^k(\omega) = d \sum_0^{n-1} f \circ T^k(x) = 0$ .

Le lemme III-1 se déduit donc de la proposition suivante :

Proposition 1 : Soit  $f : (\mathbb{T}^2, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction höldérienne.

Si  $\sum_0^{n-1} f \circ T^k(x) = 0$  dès que  $n \geq 1$  et  $T^n x = x$ ,  $f$  est un cobord.

Résumé de la preuve :

On fixe un point  $x$  d'orbite dense dans  $\mathbb{T}^2$ . On pose  $u(T^k x) = \sum_{j=0}^{k-1} f(T^j x)$ .

Quand deux points  $y$  et  $z$  de l'orbite de  $x$  sont proches, on peut approcher l'orbite de  $x$  entre ces deux points par une orbite périodique, et ceci permet de contrôler  $u(y) - u(z)$ . On montre ainsi que  $u$  est höldérienne sur l'orbite de  $x$ , ce qui prouve que  $u$  se prolonge en une fonction höldérienne sur  $\mathbb{T}^2$  qui vérifie  $u \circ T - u = f$ .

Commençons par établir deux lemmes qui seront utilisés dans la suite.

Dorénavant, on note  $\epsilon = \frac{\lambda_2}{2\sqrt{2}}$  et  $C = \sqrt{2} \epsilon$  et l'on considère la distance

sur le tore définie par :  $\delta(x, y) = \inf\{\|u - v\| / u, v \in \mathbb{R}^2, p(u) = x, p(v) = y\}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{T}^2$ . (Elle est équivalente à la précédente mais elle est plus pratique pour ce qui suit.)

Lemme 1 : Si  $x$  et  $y$  sont deux points du tore tels que  $\delta(T^k x, T^k y) \leq \epsilon$  pour tout  $k$  de  $\langle -n, n \rangle$  alors  $\delta(x, y) \leq C \lambda_2^n$ .

Preuve : Si  $R$  est un rectangle du plan dont les "bords dilatants" (resp. "contractants") ont une longueur  $a$  (resp  $b$ ), on le notera  $R(a, b)$ .

S/lemme\_1 : Si  $\delta(T^k x, T^k y) \leq \epsilon$  pour tout  $k$  de  $\langle 0, n \rangle$ , il existe des représentants  $u$  et  $v$  de  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui sont contenus dans un rectangle  $R_0(\epsilon \lambda_2^n, \epsilon)$ .

Preuve :

Comme  $\delta(T^n x, T^n y) \leq \varepsilon$ , il existe des représentants  $A^n u$  et  $A^n v$  de  $T^n x$  et  $T^n y$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui sont contenus dans un même carré  $R_n(\varepsilon, \varepsilon)$ .

Si  $n = 0$ , le résultat du s/lemme 1 est donc obtenu.

Sinon, on suppose que, pour  $k > 0$ ,  $A^k u$  et  $A^k v$  sont contenus dans un même rectangle  $R_k(\varepsilon \lambda_2^{n-k}, \varepsilon)$  et l'on montre que, alors,  $A^{k-1} u$  et  $A^{k-1} v$  sont dans un rectangle  $R_k(\varepsilon \lambda_2^{n-k+1}, \varepsilon)$  ce qui établira le s/lemme 1.

Comme les "bords dilatants" de  $A^{-1} R_k$  ont une longueur égale à  $\lambda_2 \varepsilon \lambda_2^{n-k} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$  (1) et comme ses "bords contractants" ont une longueur égale à  $\lambda_1 \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,

$$\Delta A^{-1} R_k = \sup\{\|r-s\|/r, s \in A^{-1} R_k\} < \frac{1}{2}.$$

D'autre part,  $p(A^{k-1} u) = T^{k-1} x$  et  $\delta(T^{k-1} x, T^{k-1} y) \leq \varepsilon$ ; il existe donc  $w$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $p(w) = T^{k-1} y$  et  $\|A^{k-1} u - w\| \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$ .

Mais  $p$  est injectif sur  $B(A^{k-1} u, \frac{1}{2})$ ,  $\|A^{k-1} u - A^{k-1} v\| < \frac{1}{2}$  et  $p(A^{k-1} v) = T^{k-1} y$ . Ainsi,  $w = A^{k-1} v$  et  $\|A^{k-1} u - A^{k-1} v\| \leq \varepsilon$  (2).

On déduit de (1) et (2) qu'il existe un rectangle  $R_{k-1}(\varepsilon \lambda_2^{n-k+1}, \varepsilon)$  contenu dans  $A^{-1} R_k$  et contenant  $A^{k-1} u$  et  $A^{k-1} v$ , ce qui achève la preuve du s/lemme 1.

De la même façon, on démontre le

S/lemme 2 : Si  $\delta(T^k x, T^k y) \leq \varepsilon$  pour tout  $k$  de  $\langle -n, 0 \rangle$ , il existe des représentants  $u'$  et  $v'$  de  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui sont contenus dans un même rectangle  $R'_0(\varepsilon, \varepsilon \lambda_2^n)$ .

Conclusion : Il existe donc  $v''$ , représentant de  $y$ , tel que  $u$  et  $v''$  soient contenus dans un même rectangle  $R''_0(\varepsilon, \varepsilon \lambda_2^n)$ . Ainsi  $\|u - v''\| < \frac{1}{2}$  et, comme  $\|u - v\| < \frac{1}{2}$ ,  $v'' = v$  par injectivité de  $p$  sur  $B(u, \frac{1}{2})$ .  $u$  et  $v$  appartiennent donc à  $R_0(\varepsilon \lambda_2^n, \varepsilon) \cap R''_0(\varepsilon, \varepsilon \lambda_2^n)$ . Il en résulte que :  $\delta(x, y) \leq \|u - v\| \leq \sqrt{2} \varepsilon \lambda_2^n = C \lambda_2^n$ .

La proposition suivante est essentielle dans la preuve de la proposition 1

Proposition 2 : Pour tout  $\beta > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que si  $x \in \mathbb{T}^2$  et si  $\delta(T^n x, x) < \alpha$  ( $n \geq 1$ ), il existe  $x' \in \mathbb{T}^2$  avec  $T^n x' = x$  et  $\delta(T^k x, T^k x') \leq \beta$  pour tout  $k$  de  $\langle 0, n-1 \rangle$ .

La preuve de la proposition 2 nécessite l'introduction de deux notions et la démonstration d'un lemme (lemme 2) relatif à ces notions.

Définition 1 : Une suite  $\{x_i\}_{i=a}^b$  ( $a < b, a, b \in \bar{\mathbb{Z}}$ ) de points de  $\mathbb{T}^2$  est une  $\alpha$ -pseudo-orbite ( $\alpha > 0$ ) si  $\delta(Tx_i, x_{i+1}) < \alpha$  pour tout  $i \in \langle a, b-1 \rangle$ .

Définition 2 : On dit que  $x \in \mathbb{T}^2$   $\beta$ -approche ( $\beta > 0$ ) une suite  $\{x_i\}_{i=a}^b$  de points de  $\mathbb{T}^2$  si  $\delta(T^i x, x_i) \leq \beta$  pour tout  $i$  de  $\langle a, b \rangle$ .

Lemme 2 : Pour tout  $\beta > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que toute  $\alpha$ -pseudo-orbite de  $\mathbb{T}^2$ ,  $\{x_i\}_{i=a}^b$ , de longueur  $(b-a)$  arbitraire, soit  $\beta$ -approchée par un point  $x$  de  $\mathbb{T}^2$ .

Preuve :

1er cas :  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b = a+p$ ,  $p > 0$ .

Soit  $\alpha > 0$  et  $\{x_i\}_{i=a}^{a+p}$  une  $\alpha$ -pseudo-orbite de  $\mathbb{T}^2$ .

Soit également  $y_a$  un représentant de  $x_a$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Comme  $\delta(Tx_a, x_{a+1}) < \alpha$ , il existe un représentant  $y_{a+1}$  de  $x_{a+1}$  tel que  $\|Ay_a - y_{a+1}\| < \alpha$ . En réitérant cet argument, on peut construire une suite  $\{y_i\}_{i=a}^{a+p}$  de points de  $\mathbb{R}^2$ , représentants de  $\{x_i\}_{i=a}^{a+p}$ , telle que  $\|Ay_i - y_{i+1}\| < \alpha$  pour tout  $i$  de  $\langle 0, a+p-1 \rangle$ .

Notons maintenant  $D$  la droite passant par  $y_a$  et de direction  $\delta_1$  et  $C$  la droite passant par  $y_{a+p}$  et de direction  $\delta_2$ .

Montrons alors par récurrence que  $d(A^n D, y_{a+n}) < \alpha(1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_2^{n-1})$  pour  $n = 1, \dots, p$  (où  $d$  est la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ )

. Pour  $n = 1$ ,  $Ay_a \in AD$  ainsi  $d(AD, y_{a+1}) \leq d(Ay_a, y_{a+1}) < \alpha$ .

. Supposons le vrai pour  $n < p$  et montrons le pour  $n+1$  :

On a  $d(A^{n+1} D, y_{a+n+1}) \leq d(A^{n+1} D, Ay_{a+n}) + d(Ay_{a+n}, y_{a+n+1})$  (1)

Si  $d(A^n D, y_{a+n}) > 0$ , on peut considérer l'unique point  $z$  de la droite  $A^n D$  tel que  $\|z - y_{a+n}\| = d(A^n D, y_{a+n})$ . Le segment  $[z, y_{a+n}]$  est perpendiculaire à la droite  $A^n D$ ; il est donc contracté d'un rapport  $\lambda_2$  sous l'action de  $A$  et  $A[z, y_{a+n}] = [Az, Ay_{a+n}]$  reste orthogonal à  $\delta_1$ .

Ainsi  $d(A^{n+1} D, Ay_{a+n}) = \|Az - Ay_{a+n}\| = \lambda_2 \|z - y_{a+n}\| = \lambda_2 d(A^n D, y_{a+n})$  et l'on déduit de l'inégalité (1) et de l'hypothèse de récurrence que :

$$d(A^{n+1} D, y_{a+n+1}) < \lambda_2 (\alpha(1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_2^{n-1})) + \alpha = \alpha(1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_2^n)$$

La récurrence est donc achevée et  $d(A^n D, y_{a+n}) < \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$  pour  $n=1, \dots, p$ . De la même façon, on peut montrer que  $d(A^{-n} C, y_{a+p-n}) < \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$  pour  $n=1, \dots, p$ .

On note  $y$  l'unique élément de  $D \cap A^{-p} C$ .

. Par orthogonalité de  $D$  et  $A^{-p} C$ , on a  $\|y - y_a\| = d(A^{-p} C, y_a) < \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$  et par orthogonalité de  $A^p D$  et  $C$ , on a  $\|A^p y - y_{a+p}\| = d(A^p D, y_{a+p}) < \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$ .

. De plus, si  $n = 1, \dots, p-1$ ,  $A^n y \in A^n D \cap A^{-p+n} C$ . Ainsi, comme  $d(A^n D, y_{a+n}) < \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$  et comme  $d(A^{-p+n} C, y_{a+n}) < \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$ ,  $\|A^n y - y_{a+n}\| < \sqrt{2} \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$ .

Il résulte des deux derniers points que  $\|A^n y - y_{a+n}\| < \sqrt{2} \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$  pour  $n = 0, 1, \dots, p$ .

Ainsi  $\delta(T^{n \text{ op}}(y), x_{a+n}) \leq \|A^n y - y_{a+n}\| < \sqrt{2} \frac{\alpha}{1 - \lambda_2}$  pour  $n = 0, 1, \dots, p$ .

Ce qui prouve la proposition dans ce premier cas :

Pour tout  $\beta > 0$ , toute  $\alpha$ -pseudo-orbite finie avec  $\alpha = \frac{1 - \lambda_2}{\sqrt{2}} \beta$  est  $\beta$ -approchée par un point de  $T^2$ .

2d cas :  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ .

Soit  $\beta > 0$  fixé quelconque et  $\alpha$  le réel associé à  $\beta$  déterminé dans le 1er cas.

Soit  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$  une  $\alpha$ -pseudo-orbite quelconque.

D'après ce qui précède, à tout  $m \geq 1$ , on peut associer un élément  $x^{(m)}$  de  $T^2$  qui  $\beta$ -approche  $\{x_i\}_{i=-m}^m$ .

Comme  $T^2$  est compact, on peut extraire de la suite  $(x^{(m)})_{m \geq 1}$  une sous-suite  $(x^{(m_k)})_{k \geq 1}$  convergente vers  $x$  dans  $T^2$ .

Alors, pour  $k \geq 1$  et  $n \in \langle -m_k, m_k \rangle$ ,  $\delta(T^n(x^{(m_k)}), x_n) \leq \beta$ ; ce qui prouve, par passage à la limite sur  $k$ , et par continuité de  $\delta$  et  $T^n$  que  $x$   $\beta$ -approche  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ .

Preuve de la proposition 2 :

On peut toujours supposer que  $\beta \leq \frac{\epsilon}{2}$ .

Considérons  $\alpha > 0$  le réel associé à  $\beta$  dans le lemme 2.

Si  $x \in \mathbb{T}^2$  et si  $\delta(T^n x, x) < \alpha$ , on pose pour tout entier  $i$ ,  $x_i = T^k x$  où  $i \equiv k \pmod n$  et  $k \in \langle 0, n-1 \rangle$ . Alors,  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$  est une  $\alpha$ -pseudo-orbite :

$$\delta(Tx_i, x_{i+1}) = \delta(T(T^k x), T^{k+1} x) = 0 \text{ si } i \equiv k \pmod n \text{ et } k \in \langle 0, n-2 \rangle.$$

$$\delta(Tx_i, x_{i+1}) = \delta(T(T^{n-1} x), x) < \alpha \text{ si } i \equiv n-1 \pmod n.$$

Il existe donc un point  $x'$  de  $\mathbb{T}^2$  qui  $\beta$ -approche  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$  et, pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a :  $\delta(T^i x', T^i(T^n x')) \leq \delta(T^i x', x_i) + \delta(x_i, T^i(T^n x'))$   
 $= \delta(T^i x', x_i) + \delta(x_{i+n}, T^{i+n} x') \leq 2\beta \leq \epsilon$ .

Ainsi, vu le lemme 2,  $x' = T^n x'$ .

De plus, pour tout  $k$  dans  $\langle 0, n-1 \rangle$ ,  $\delta(T^k x, T^k x') = \delta(x_k, T^k x') \leq \beta$ ; ce qui achève la démonstration.

On est maintenant en mesure de montrer la proposition 1.

Preuve de la proposition 1 :

Comme  $(\mathbb{T}^2, \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2, m, T})$  est ergodique et comme  $\text{supp } m = \mathbb{T}^2$ ,  $(\mathbb{T}^2, \mathbb{B}_{\mathbb{T}^2, m, T})$  est topologiquement transitif. On en déduit qu'il existe  $x \in \mathbb{T}^2$  tel que  $O(x) = \{T^k x : k \geq 1\}$  soit partout dense.

$$\text{On pose, pour tout } k \geq 1, u(T^k x) = \sum_0^{k-1} f \circ T^j(x).$$

$$\text{Alors, pour tout } z \text{ dans } O(x), f(z) = u \circ T(z) - u(z) \quad (1)$$

D'autre part, la proposition 2 appliquée à  $\beta = \frac{\epsilon}{2}$  assure qu'il existe  $\delta > 0$  tel que si  $y \in \mathbb{T}^2$  et si  $\delta(T^n y, y) < \delta$ , il existe  $y' \in \mathbb{T}^2$  avec

$$. T^n y' = y'$$

$$. \delta(T^k y, T^k y') \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ pour } k \in \langle 0, n-1 \rangle.$$

Soient  $y = T^k x$  et  $z = T^m x$  avec  $n = m-k > 0$  et

$\frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda_2) \frac{1}{\lambda_1^{N+1}} \leq \delta(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda_2) \frac{1}{\lambda_1^N} \leq \delta$  ( $N \geq 1$ ). Comme  $z = T^n y$ , on peut donc trouver  $y'$  dans  $T^2$  avec :

.  $T^n y' = y'$

.  $\delta(T^k y, T^k y') \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour  $k \in \langle 0, n-1 \rangle$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } |u(z)-u(y)| &= \left| \sum_0^{m-1} foT^j(x) - \sum_0^{k-1} foT^j(x) \right| = \left| \sum_k^{m-1} foT^j(x) \right| = \left| \sum_0^{m-k-1} foT^j(T^k x) \right| \\ &= \left| \sum_0^{n-1} foT^j(y) - \sum_0^{n-1} foT^j(y') \right| \quad \text{par hypothèse sur } f \text{ et} \\ &\leq a \sum_0^{n-1} \delta(T^j(y), T^j(y'))^\theta \quad \text{car } y' \text{ est } n\text{-périodique.} \\ &\quad \text{car } f \text{ est höldérienne.} \end{aligned}$$

Or,  $\delta(T^k y, T^k y') \leq \varepsilon$  pour  $k \in \langle -N, n+N \rangle$ . En effet,

. Pour  $k \in \langle 0, n-1 \rangle$ ,  $\delta(T^k y, T^k y') \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

. Pour  $k \in \langle 0, N \rangle$  : - 1er cas :  $N < n$  ou  $k < n$  :

$$\begin{aligned} \text{Alors } \delta(T^{n+k} y, T^{n+k} y') &= \delta(T^{n+k} y, T^k y') \leq \delta(T^k(T^n y), T^k y) + \delta(T^k y, T^k y') \\ &\leq \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^N} (1-\lambda_2) \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

- 2d cas :  $N \geq n$  et  $k \geq n$  :

Alors  $\delta(T^{n+k} y, T^{n+k} y') = \delta(T^{n+k} y, T^j y')$  avec  $j \in \langle 0, n-1 \rangle$  et  $k = j + n\ell$ ,  $\ell \geq 1$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{p=0}^{\ell-1} \delta(T^{j+pn}(T^n y), T^{j+pn} y) + \delta(T^j y, T^j y') \\ &\leq \delta(T^n y, y) \sum_{p=0}^{\ell-1} \lambda_1^{j+pn} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda_2) \sum_{p=0}^{\ell-1} \lambda_2^{N-(j+pn)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

. Pour  $k \in \langle -N, -1 \rangle$ ,

$\delta(T^k y, T^k y') = \delta(T^k y, T^j y')$  avec  $j \in \langle 0, n-1 \rangle$  et  $k = j - n\ell$ ,  $\ell \geq 1$ .

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{p=0}^{\ell-1} \delta(T^{j-n(p+1)}(T^n y), T^{j-n(p+1)} y) + \delta(T^j y, T^j y') \\ &\leq \delta(T^n y, y) \sum_{p=0}^{\ell-1} \lambda_1^{n(p+1)-j} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda_2) \sum_{p=0}^{\ell-1} \lambda_2^{N+j-n(p+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

Il en résulte que si  $j \in \langle 0, n-1 \rangle$ ,

$$\delta(\Gamma^{j+k}y, \Gamma^{j+k}y') \leq \epsilon \text{ pour } k \in \langle -\min(j+N, N+n-j), \min(j+N, N+n-j) \rangle$$

et donc, d'après le lemme 2,  $\delta(\Gamma^jy, \Gamma^jy') \leq C \lambda_2^{\min(j+N, N+n-j)}$ .

$$\text{Ainsi, } |u(z)-u(y)| \leq aC^\theta \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_2^{\theta \min(j+N, N+n-j)} \leq 2aC^\theta \sum_{j=N}^{+\infty} \lambda_2^{\theta j} = \frac{2aC^\theta}{1-\lambda_2^\theta} \lambda_2^{\theta N},$$

$$\text{et, } \delta(y, z)^\theta \geq \left(\frac{\epsilon}{2} (1-\lambda_2)\lambda_2\right)^\theta \lambda_2^{\theta N} \geq \frac{(1-\lambda_2^\theta)}{2aC^\theta} \left(\frac{\epsilon}{2}(1-\lambda_2)\lambda_2\right)^\theta |u(z)-u(y)|.$$

On a donc établi qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que :

$$\text{Si } y, z \in \mathcal{O}(x) \text{ avec } \delta(y, z) < \min\left(\frac{\epsilon}{2}(1-\lambda_2)\lambda_2, \delta\right), |u(y)-u(z)| \leq K\delta(y, z)^\theta.$$

Ainsi,  $u$  est uniformément continue sur  $\mathcal{O}(x)$  et se prolonge donc en une fonction sur  $\Gamma^2$  uniformément continue, encore notée  $u$ .

Comme  $u$  est bornée sur  $\Gamma^2$ , pour tout  $y$  et  $z$  dans l'orbite de  $x$ , on a :

$$|u(z)-u(y)| \leq \max(K, 2\|u\|_\infty \min\left(\frac{\epsilon}{2}(1-\lambda_2)\lambda_2, \delta\right)^{-\theta}) \delta(y, z)^\theta;$$

inégalité qui passe, par continuité de  $u$  et  $\delta$ , à tout  $(y, z)$  de  $\Gamma^2 \times \Gamma^2$ .  
 $u$  est donc höldérienne.

Enfin, toujours par continuité de  $u$ , l'égalité (1) reste vraie pour tout  $z$  dans  $\Gamma^2$ , ce qui signifie que  $f$  est un cobord.



ANNEXE

I. THEOREME DE IONESCU-TULCEA ET MARINESCU

Théorème : On considère un espace de Banach  $(L, \| \cdot \|)$ , un opérateur borné  $T$  sur  $(L, \| \cdot \|)$  dont le rayon spectral  $r(T)$  est  $\geq 1$  et une norme  $|\cdot|$  sur  $L$  telle que :  $|\cdot| \leq \| \cdot \|$

$T$  soit borné sur  $(L, |\cdot|)$

On suppose que :

- 1 -  $T$  est compact de  $(L, \| \cdot \|)$  dans  $(L, |\cdot|)$
- 2 - Il existe  $0 \leq \rho < 1$  et  $C \geq 0$  tels que  $\|Tf\| \leq \rho \|f\| + C|f|$  pour tout  $f \in L$ .
- 3 -  $\sup_{n \geq 0} |T^n| < +\infty$ .

Alors :

a -  $r(T) = 1$ . Plus précisément, le spectre,  $\sigma(T)$ , de  $T$  s'écrit :

$$\sigma(T) = \sigma \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \text{ avec } |\lambda_i| = 1 \text{ pour } i = 1, \dots, k \text{ et}$$
$$\sigma \subset D(0, 1-\varepsilon) \text{ où } 0 < \varepsilon < 1.$$

b -  $1 \leq \dim \text{Ker}(\lambda_i I - T) < +\infty$  et  $\text{Ker}(\lambda_i I - T) = \text{Ker}(\lambda_i I - T)^2$   
pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

c - Il existe un sous-espace fermé  $H$  de  $L$  tel que

$$L = \left( \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(\lambda_i I - T) \right) \oplus H$$

et la restriction de  $T$  à  $H$  a un rayon spectral  $< 1$ .

d - Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ , le projecteur  $\pi_{\lambda_i}$  sur  $\text{Ker}(\lambda_i I - T)$  dans la décomposition ci-dessus est borné dans  $(L, |\cdot|)$ .

La première version de ce théorème a été donnée dans l'article [8] de C.T. Ionescu Tulcea et G. Marinescu. On pourra retrouver l'énoncé précédent ainsi que sa preuve dans l'article [6] de H. Hennion.

## II. THEOREME DES PERTURBATIONS

Dans la suite,  $(L, \|\cdot\|)$  désignera un espace de Banach et  $\mathcal{L}(L, \|\cdot\|)$  l'anneau des opérateurs bornés de  $(L, \|\cdot\|)$ .

Il est utile, pour énoncer le théorème des perturbations, d'introduire la définition suivante :

Définition : Soit  $T$  un opérateur borné de  $(L, \|\cdot\|)$  de rayon spectral  $r(T)$ .

On dira que  $T$  a une valeur propre simple dominante  $\lambda$ , si :

(i)  $\dim \text{Ker}(\lambda I - T)^2 = \dim \text{Ker}(\lambda I - T) = 1$

(ii) Il existe un sous-espace fermé  $H$  de  $L$  tel que

$$L = \text{Ker}(\lambda I - T) \oplus H$$

et la restriction de  $T$  à  $H$  a un rayon spectral  $< r(T)$ .

On notera dans la suite  $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ .

Théorème : Soient  $\gamma > 0$  et  $\mu \in D(0, \gamma) \rightarrow T(\mu) \in \mathcal{L}(L, \|\cdot\|)$  une application  $m$  fois continûment dérivable.

Si  $T(0)$  a une valeur propre simple dominante  $k(0)$ , il existe  $0 < \beta \leq \gamma$  et  $\alpha > 0$  tels que pour  $\mu \in D(0, \beta)$

(i)  $\sigma(T(\mu)) \subset D(0, r(T(0)) - 3\alpha) \cup \{k(\mu)\}$  où  $k(\mu)$  est une valeur propre simple de  $T(\mu)$  qui vérifie  $|k(\mu) - k(0)| < \alpha$ .

(ii) Il existe un projecteur  $\pi(\mu)$  sur le sous-espace propre associé à  $k(\mu)$  qui commute avec  $T(\mu)$  et tel que  $r(T(\mu)(I - \pi(\mu))) < r(T(0)) - 3\alpha$ .

(iii)  $k(\cdot)$  et  $\pi(\cdot)$  sont  $m$  fois continûment dérivables sur  $D(0, \beta)$ .

On trouvera une preuve de ce résultat, qui est un cas particulier de la théorie classique des perturbations (Dunford, Schwartz [4]), dans l'article [7] de H. Hennion.

### Complément au théorème :

En reprenant la démonstration du théorème, on peut remarquer que l'on a en fait :

$$\sup_{|\mu| < \beta} \|T(\mu)^n (I - \pi(\mu))\| \leq C(r(T(0)) - 3\alpha)^{n+1} \text{ pour } n \geq 0 \text{ avec } C \geq 0,$$

propriété qui entraîne la propriété (ii) du théorème.

En effet, si l'on pose

$$D_0 = \{z: |z| < r(T(0)) - 3\alpha\}$$

$$D_1 = \{z: |z - k(0)| < \alpha\}$$

$$C_1 = \{z: |z - k(0)| = \alpha\}$$

$$C_2 = \{z: |z| = r(T(0)) - 3\alpha\}$$

$V = \mathbb{C} / (D_0 \cup D_1)$  et  $R(z, T(\mu))$  la résolvante de  $T(\mu)$ , on sait que ([7])

$$\pi(\mu) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} R(z, T(\mu)) dz \text{ pour } \mu \in D(0, \beta)$$

$(z, \mu) \rightarrow R(z, T(\mu))$  est continue sur  $V \times D(0, \beta_1)$  avec  $\beta_1 > \beta > 0$ .

On en déduit que  $T(\mu)^n (I - \pi(\mu)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} z^n R(z, T(\mu)) dz$  pour  $\mu \in D(0, \beta)$

et que  $\sup_{|\mu| < \beta} \sup_{z \in C_2} |R(z, T(\mu))| < +\infty$ .

Ainsi  $\|T(\mu)^n (I - \pi(\mu))\| \leq \sup_{|\mu| < \beta} \sup_{z \in C_2} |R(z, T(\mu))| (r(T(0)) - 3\alpha)^{n+1}$  pour

tout  $\mu$  de  $D(0, \beta)$ , ce qu'il fallait démontrer.



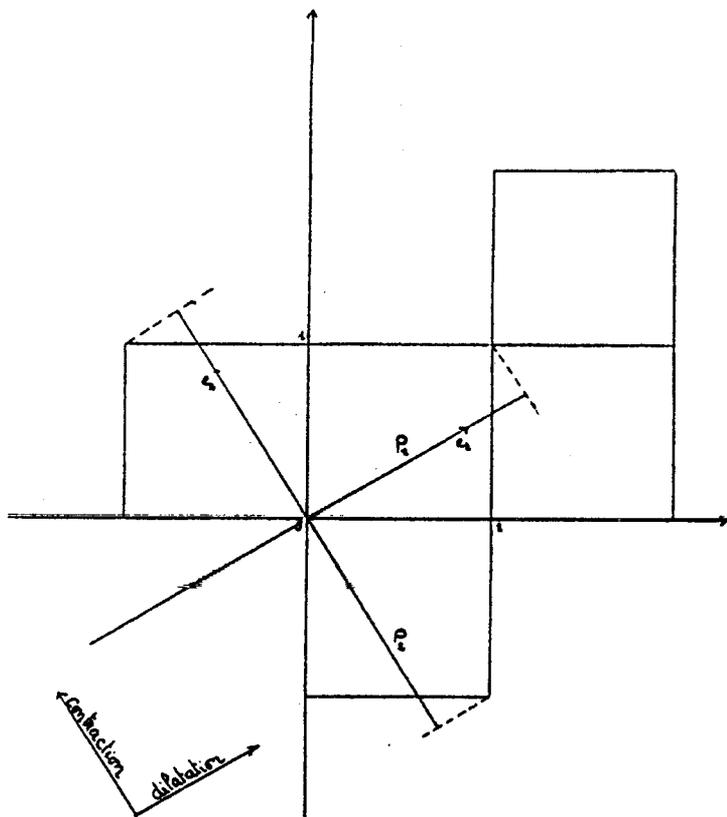


Figure 1

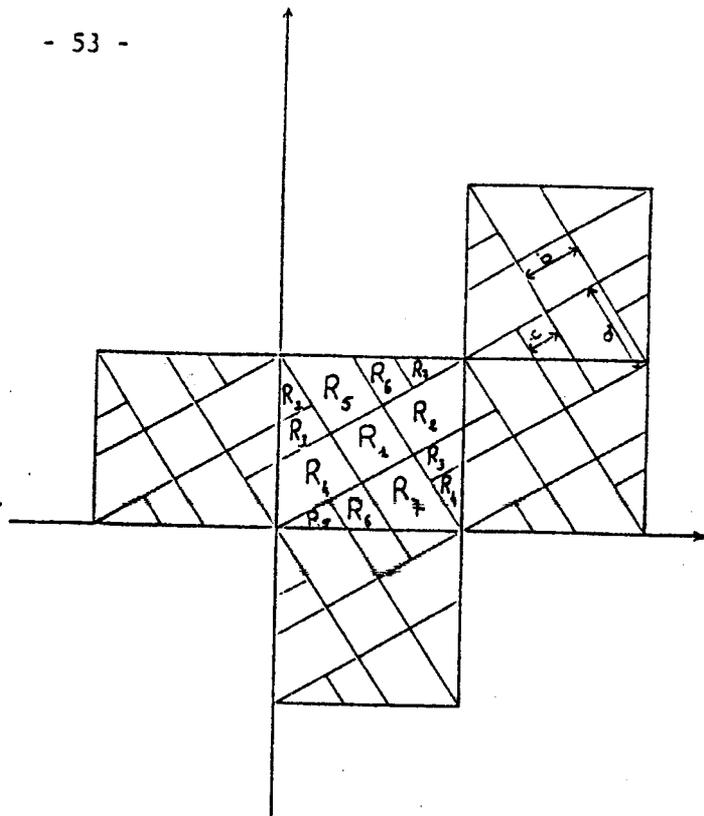


Figure 2

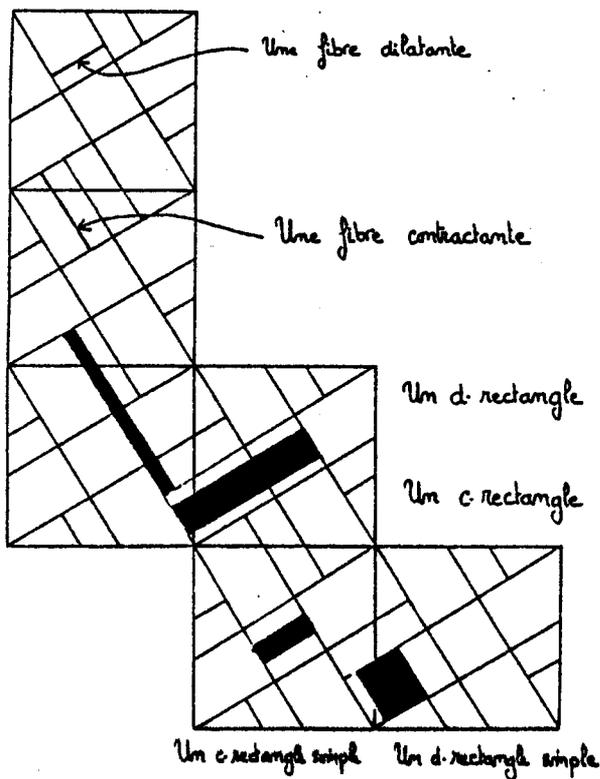


Figure 3

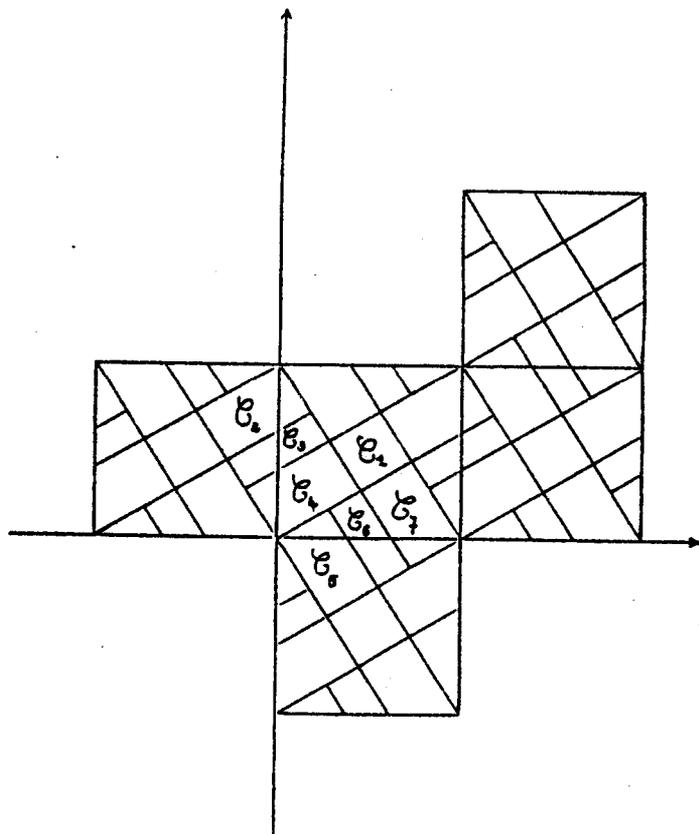


Figure 4

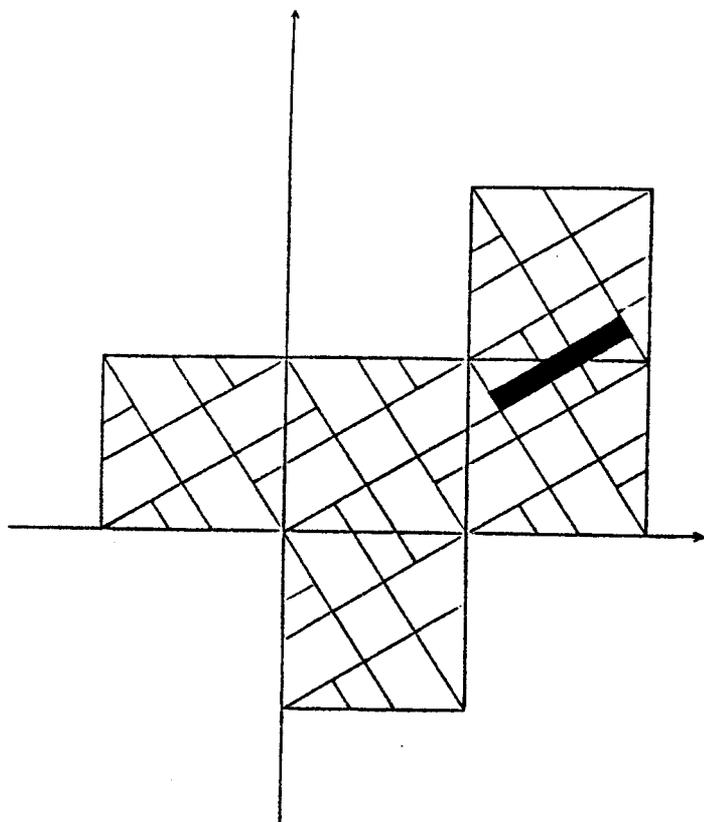


Figure 5 . Image de  $\mathcal{E}_1$

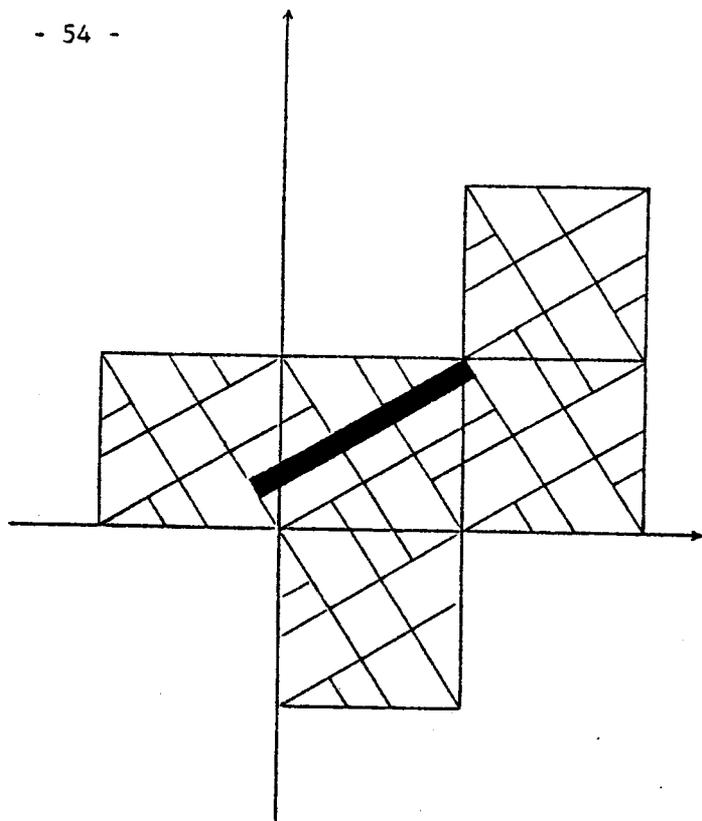


Figure 6. Image de  $\mathcal{E}_2$

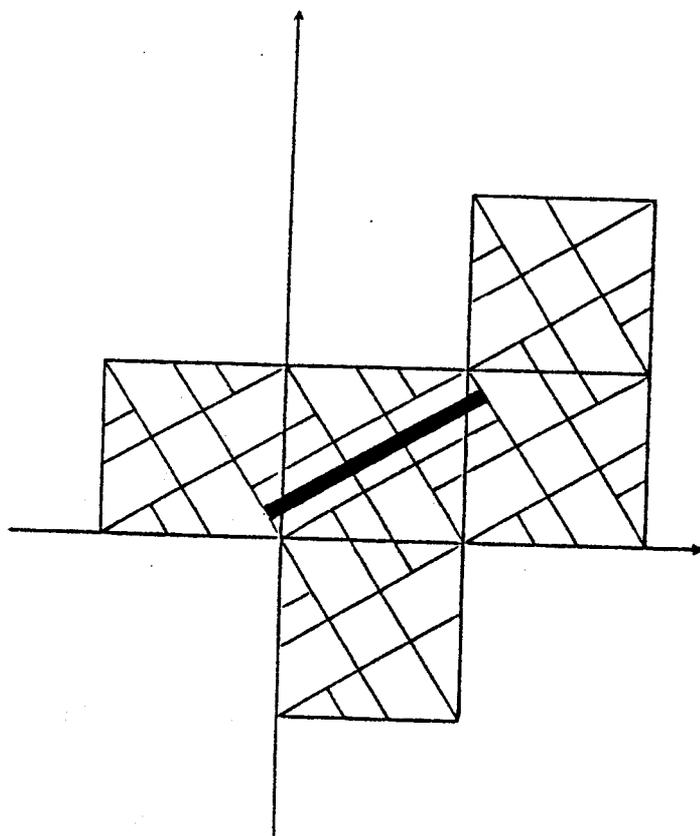


Figure 7. Image de  $\mathcal{E}_3$

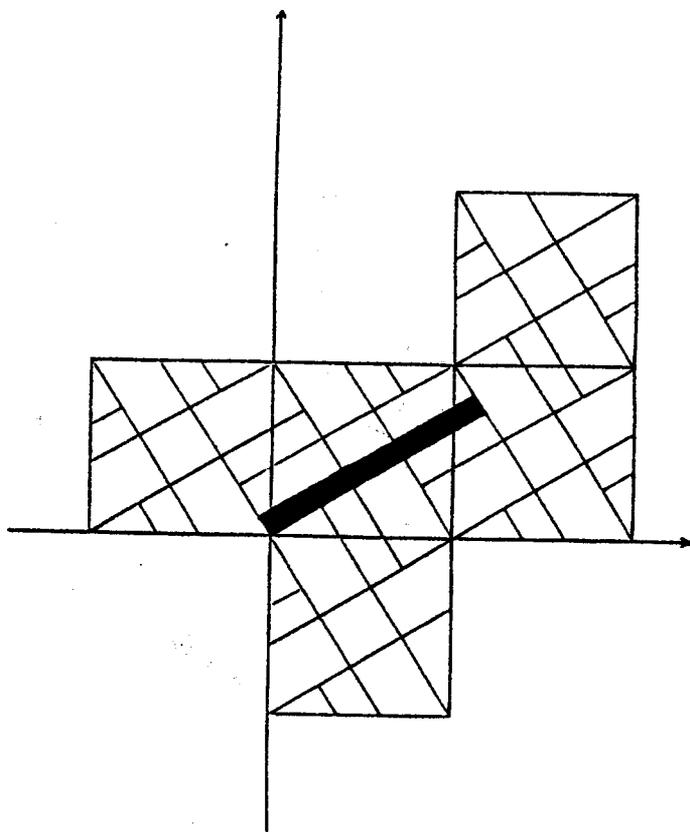


Figure 8. Image de  $\mathcal{E}_4$

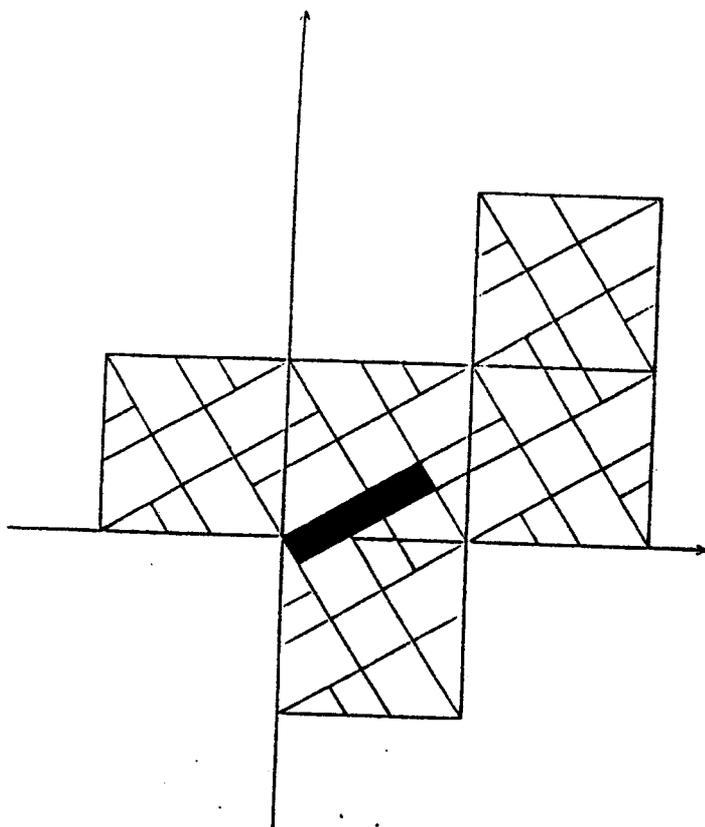


Figure 9. Image de  $\mathcal{E}_5$

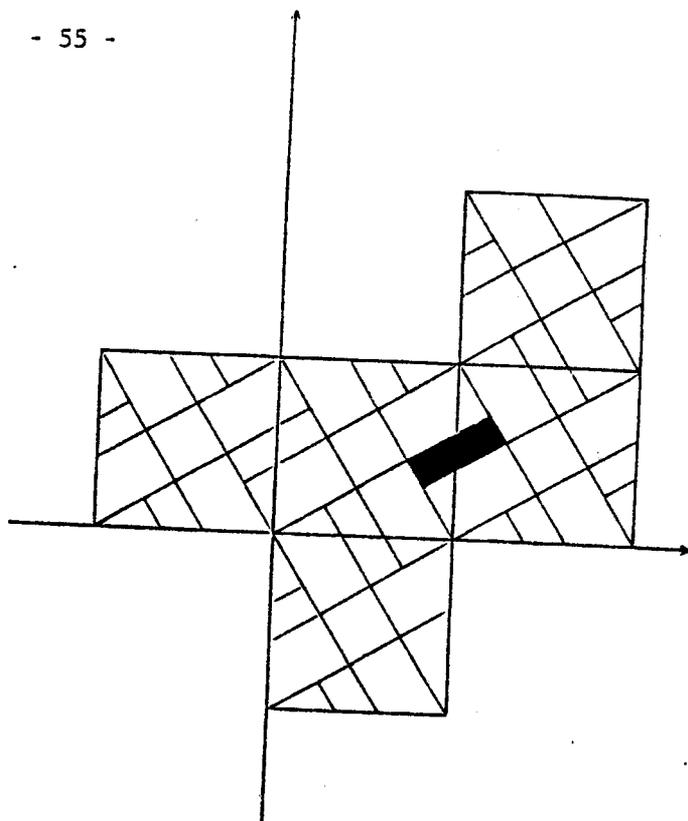


Figure 10. Image de  $\mathcal{E}_6$

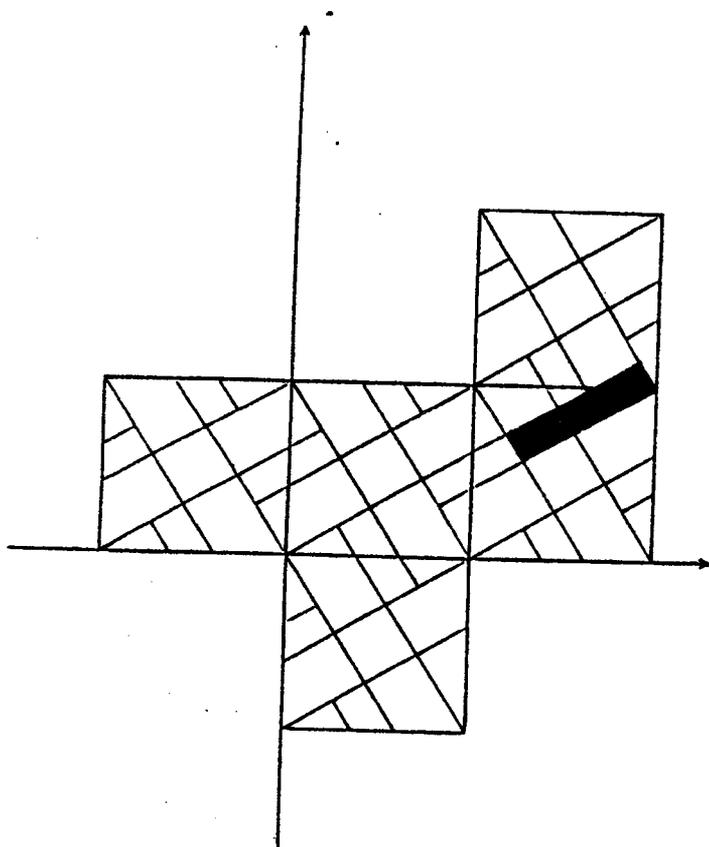
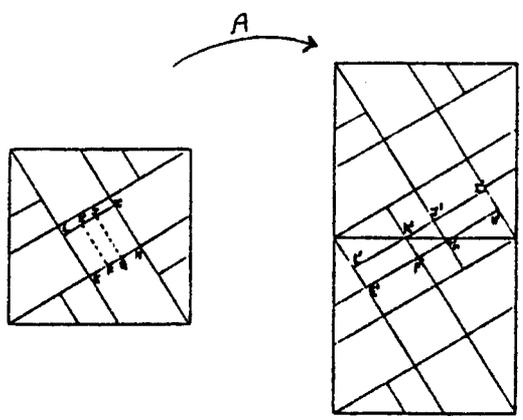


Figure 11. Image de  $\mathcal{E}_7$



$$\frac{\lambda(EFKL)}{\lambda(EHIL)} = \frac{\lambda(E'F'K'L')}{\lambda(E'H'I'L')} = p(1,5) = \frac{b}{2b+c} = \lambda_2; \alpha(A'(EFK'L')) = \alpha(E) = \alpha(EHIL)$$

$$\Rightarrow R(1,5) = 0$$

$$\frac{\lambda(FGJW)}{\lambda(EHIL)} = \frac{\lambda(F'G'J'K')}{\lambda(E'H'I'L')} = p(2,6) = \frac{c}{2b+c} = 1 - \lambda_2; \alpha(A'(FG'J'K')) = \alpha(EHIL) \lambda_2 \lambda(EHIL)$$

$$\Rightarrow R(1,6) = \lambda_2$$

$$\frac{\lambda(GHIJ)}{\lambda(EHIL)} = \frac{\lambda(G'H'I'J')}{\lambda(E'H'I'L')} = p(1,7) = \frac{b}{2b+c} = \lambda_2; \alpha(A'(G'H'I'J')) = \alpha(EHIL) (1 - \lambda_2) \lambda(EHIL)$$

$$\Rightarrow R(1,7) = 1 - \lambda_2$$

Figure 12

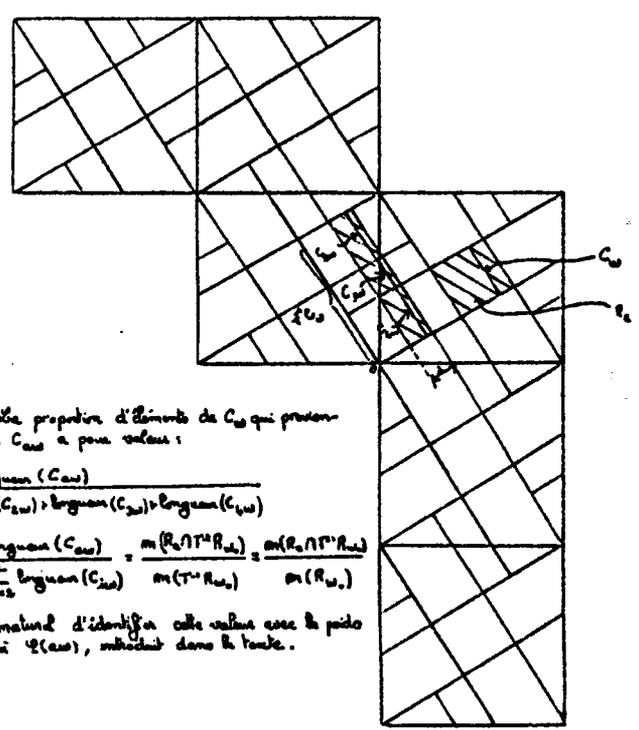
i \ j	1	2	3	4	5	6	7
1					$\lambda_2$	$1 - \lambda_2$	$\lambda_2$
2	$1 - \lambda_2$	$\lambda_2$		$\lambda_2$			
3	$1 - \lambda_2$	$\lambda_2$		$\lambda_2$			
4	$1 - \lambda_2$	$\lambda_2$		$\lambda_2$			
5					$\lambda_2$	$1 - \lambda_2$	$\lambda_2$
6						$\lambda_2$	$1 - \lambda_2$
7			1				

Tableau des "p(i,j)" ( $\frac{a}{2a+b} = \lambda_2$ )

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
1					0	$\lambda_2$	$1 - \lambda_2$
2	$\lambda_2$	$1 - \lambda_2$		0			
3	$\lambda_2$	$1 - \lambda_2$		0			
4	$\lambda_2$	$1 - \lambda_2$		0			
5					0	$\lambda_2$	$1 - \lambda_2$
6						0	$\lambda_2$
7							0

Tableau des "R(i,j)"

Figure 13



La proportion d'éléments de  $C_{20}$  qui proviennent de  $C_{21}$  a pour valeur :

$$\frac{\text{longueur}(C_{21})}{\text{longueur}(C_{20})} = \frac{\text{longueur}(C_{21})}{\text{longueur}(C_{20})} = \frac{\text{longueur}(C_{21})}{\text{longueur}(C_{20})}$$

$$= \frac{\text{de longueur}(C_{21})}{\sum_{i=1}^2 \text{longueur}(C_{2i})} = \frac{m(R_0 \cap T^* R_{21})}{m(T^* R_{20})} = \frac{m(R_0 \cap T^* R_{21})}{m(R_{20})}$$

Il est naturel d'identifier cette valeur avec le poids associé à  $\varphi(C_{20})$ , noté dans le texte.

Figure 14

## REFERENCES

- [1] R.L. ADLER et B. WEISS, Similarity of automorphisms of the torus, Mem. Amer. Math. Soc., 98, 1970.
- [2] R. BOWEN, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Springer Lectures Notes, n° 470, 1975.
- [3] J.P. CONZE, Résultats récents en Théorie Ergodique, Ecole d'Eté de St-Flour, 1974.
- [4] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, Linear operators, Part. I, Pure and Applied Mathematics, vol. VII, Interscience.
- [5] Y. GUIVARC'H et J. HARDY, Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov, Ann. Inst. Henri Poincaré, 24, 1, 1988, 73-98.
- [6] H. HENNION, Décomposition spectrale des opérateurs de Doeblin-Fortet, Publications des séminaires de l'Univ. de Rennes, Probabilités.
- [7] H. HENNION, Quasi-compacité, Publications des séminaires de l'Univ. de Rennes, Probabilités.
- [8] C.T. IONESCU TULCEA et G. MARINESCU, Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues, Ann. Math., 47, 1946, 140-147.
- [9] K. PETERSEN, Ergodic Theory, Cambridge University Press, 1981.
- [10] J. ROUSSEAU-EGELE, Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux. The Annals of Proba., 11, 3, 1983, 772-788.