PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. P. CONZE

A. RAUGI

Analyse multi-échelle et frontières de marches aléatoires

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___2_A2_0>

Analyse multi-échelle et frontières de marches aléatoires

J.P. Conze et A. Raugi

Introduction

Les méthodes récentes d'analyse multi-échelle et la théorie des ondelettes peuvent être rapprochées des techniques utilisées en Probabilités dans l'étude des frontières associées à une mesure de probabilité portée par un groupe opérant sur un espace.

En analyse multi-échelle, on considère un espace X et un groupe ou un semi-groupe G opérant sur l'espace X et dont l'action vérifie une propriété de contraction. L'exemple principal est celui du groupe affine opérant sur $\mathbb{R}$. Les bases d'ondelettes sont construites à partir d'une fonction solution d'une équation de convolution pour l'action de G sur X. De façon analogue, les μ-frontières sont obtenues à partir d'un groupe ou d'un semi-groupe opérant sur un espace X et d'une mesure ν sur X solution d'une équation de convolution de la forme $\mu * \nu = \nu$, où μ est une mesure de probabilité sur G.

L'objet de cet article est de présenter une méthode d'analyse des fonctions définies sur le support de la mesure invariante ν d'une μ-frontière, analogue à l'analyse des fonctions sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ dans des bases d'ondelettes.

Dans une première partie, nous commençons par un bref rappel des techniques utilisées dans l'analyse multi-échelle, puis nous introduisons les idées principales de l'analyse des μ-frontières que nous proposons. La deuxième partie est consacrée à une présentation plus formelle de l'analyse des μ-frontières et à la preuve des résultats, qui reposent essentiellement sur la théorie des martingales, dont la parenté avec les méthodes d'analyse réelle de Caldéron et Zygmund sous-jacentes à l'analyse en ondelettes a été reconnue depuis longtemps.

Les résultats présentés ici ont été résumés dans [2].

1. L'analyse en ondelettes et les μ-frontières

Au cours des dernières années, deux types d'analyse en ondelettes ont été développés (cf. [10]): l'analyse en ondelettes à temps continu d'une part, les développements en base d'ondelettes orthogonales d'autre part. Nous rappelons brièvement ces méthodes dans le cas de la droite réelle.

Nous noterons G le groupe affine $\{g = (a, b), a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ opérant sur $\mathbb{R}$ par $x \to g.x = ax + b$.

1.1. Transformées en ondelettes

Dans la première méthode, on considère une fonction test fixée $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, vérifiant la condition d'admissibilité

$$\int \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{\lambda} d\lambda < \infty,$$

où $\widehat{\psi}$ désigne la transformée de Fourier de ψ. A toute fonction f dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut associer la fonction H_f définie sur G ou de façon équivalente sur le demi-plan $\{(a, b), a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ par

$$H_f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) a^{-1/2} \psi(\frac{x-b}{a}) dx. \qquad (*)$$

La condition d'admissibilité vérifiée par ψ assure la validité d'une formule d'isométrie

$$\int |f(x)|^2 dx = \frac{1}{c_\psi} \int\int |H_f(a, b)|^2 \frac{da}{a^2} db, \qquad (**)$$

où c_ψ est une constante, et d'une formule d'inversion qui s'écrit formellement:

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int H_f(a, b) a^{-1/2} \psi(\frac{x-b}{a}) \frac{da}{a^2} db.$$

1.2. Les ondelettes orthogonales

Dans la méthode des ondelettes orthogonales, on cherche à éviter la redondance en se limitant aux coefficients $H_f(2^{-j}, 2^{-j}k), j, k \in \mathbb{Z}$ de la formule 1.1 $(*)$. On choisit pour ψ une ondelette orthogonale, autrement dit une fonction telle que la famille $\{\psi_{j,k}(.)\} = \{2^{j/2}\psi(2^j. - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Les coefficients $H_f(2^{-j}, 2^{-j}k)$ sont alors les coefficients du développement de f dans la base orthonormée $\{\psi_{j,k}\}$.

La base de Haar fournit un exemple simple de famille $\{\psi_{j,k}\}$ formant une base orthonormée, mais non régulières, de $L^2(\mathbb{R})$. La construction d'ondelettes orthogonales régulières, due principalement aux travaux récents de Yves Meyer et Ingrid Daubechies (voir [10]), peut être décrite dans le formalisme de l'analyse multi-échelle de Stéphane Mallat [9].

Soit V_0 un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par l'action des translations entières, et tel que

$$f(.) \in V_0 \Rightarrow f(./2) \in V_0. \qquad (C_1)$$

La suite $(V_n = \{f(2^n.), f \in V_0\}, n \in \mathbb{Z})$ forme alors une suite croissante de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$. Si cette suite vérifie

$$\bigcap_n V_n = \{0\}, \text{ et } \overline{\bigcup_n V_n} = L^2(\mathbb{R}), \qquad (C_2)$$

on peut effectuer une analyse multi-échelle de $L^2(\mathbb{R})$ à l'aide de la suite (V_n), qui constitue l'analogue d'une filtration dans les modèles probabilistes.

On cherche à construire un sous-espace V_0 engendré par les translatées entières d'une fonction ϕ de $L^2(\mathbb{R})$. Plus précisément, on cherche ϕ telle que les translatées $\{\phi(.-n), n \in$

$\mathbb{Z}\}$ forment une base de Riesz du sous-espace fermé qu'elles engendrent dans $L^2(\mathbb{R})$. La condition (C_1) s'écrit alors

$$\phi(x) = 2\sum_k h_k \phi(2x - k), \tag{1}$$

où (h_k) forme une suite de coefficients telle que $\sum |h_k|^2 < \infty$.

On reconnait là une équation de convolution pour l'action du groupe affine G sur $\mathbb{R}$. Considérons en effet le groupe G et la mesure discrète portée par G donnant la masse h_k à $g_k = (\frac{1}{2}, \frac{k}{2})$, pour $k \in \mathbb{Z}$. L'équation (1) peut alors être vue comme une équation de convolution de la forme $\mu * \nu = \nu$, où ν est une mesure de densité ϕ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Pour certains choix du tableau h, il est possible de montrer l'existence d'une solution régulière de (1). On obtient ainsi une fonction ϕ dont les translatées par les éléments de $\mathbb{Z}$ engendrent un espace V_0 vérifiant la condition (C_1) et il n'est pas difficile de vérifier de plus que la condition (C_2) est satisfaite.

Il reste à construire ψ telle que la famille $\{\psi_{j,k}\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Si l'on se place dans le cas où les fonctions $(\phi(. - n), n \in \mathbb{Z})$ forment non seulement une base de Riesz mais une base orthonormée de V_0, alors ψ est donnée par la formule

$$\psi(x) = 2\sum_n (-1)^n h_{1-n} \phi(2x - n).$$

On vérifie en effet facilement que les translatées entières de ψ forment dans ce cas une base orthonormée du supplémentaire orthogonal de V_0 dans V_1.

La propriété d'orthogonalité impose des conditions algébriques au tableau de coefficients (h_k). Il peut être intéressant d'abandonner l'orthogonalité au profit d'autres propriétés. Une direction possible est celle des bases d'interpolation dyadiques. Un autre choix consiste à prendre pour tableau de coefficients (h_k) un vecteur de probabilité ($h_k \geq 0, \sum_k h_k = 1$). Si ce choix a l'inconvenient de faire perdre l'orthogonalité (en dehors du cas particulier de la base de Haar), il offre plusieurs avantages: il conduit à des opérateurs d'approximation positifs, il est généralisable à des situations géométriques variées, enfin il permet de recourir aux outils fournis par la théorie des probabilités.

C'est ce point de vue qui nous a conduit à l'analyse des μ-frontières exposée ici. Dans la suite de cette section, nous en donnerons une présentation rapide pour le cas de $\mathbb{R}$, avant d'aborder dans les sections ultérieures le cas général et la preuve des résultats.

1.3. Analyse associée à une μ-frontière, le cas de $\mathbb{R}$

Restons pour l'instant dans le cadre de l'action du groupe affine G sur $\mathbb{R}$. Si g est un élément du groupe G, nous notons $(a(g), b(g))$ les coefficients de g.

Soit μ une mesure de probabilité sur G vérifiant les conditions $(*)$ suivantes:

$$\int \log^+ a(g)\ \mu(dg) < +\infty, \int \log^+ b(g)\ \mu(dg) < +\infty,$$

et

$$\int \log a(g)\ \mu(dg) < 0.$$

Désignons par $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans G, de loi μ. Les hypothèses faites entraînent, par la loi des grands nombres:

$$\lim_n |a(Y_1)...a(Y_n)|^{1/n} = exp(\int \log a(g)\ \mu(dg)) < 1,$$

et

$$\limsup_n |b(Y_n)|^{1/n} \leq 1.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il en résulte que le processus

$$Y_1...Y_n \cdot x = a(Y_1)...a(Y_n)x + \sum_{k=0}^{n-1} a(Y_1)...a(Y_k)b(Y_{k+1}),$$

converge $\mathbb{P}$-p.s. vers une variable aléatoires Z ne dépendant pas de x.

On en déduit que la loi ν de Z est l'unique mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de convolution $\mu * \nu = \nu$, et que la suite de mesures de probabilités $(X_n.\nu)_{n\geq 1}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers la mesure de Dirac δ_Z.

Nous dirons que $\mathbb{R}$ muni de la mesure ν est une μ-**frontière**.

Supposons que, pour μ-presque tout $g \in G$, la mesure $g.\nu$ soit absolument continue par rapport à ν, condition qui est satisfaite, par exemple, lorsque μ est discrète. Pour tout entier $n \geq 1$, posons

$$T_n f(x) = \int_G < f, \frac{dg\nu}{d\nu} >_\nu \frac{dg\nu}{d\nu}(x)\ \mu^n(dg) = \int_{\mathbb{R}} K_n(x,y) f(y)\ \nu(dy),$$

avec

$$K_n(x,y) = \int_G \frac{dg\nu}{d\nu}(x) \frac{dg\nu}{d\nu}(y)\ \mu^n(dg).$$

La formule précédente est analogue à une formule de décomposition du type ondelette. La mesure ν est une mesure test, de même que la fonction ψ du paragraphe 1.1. est une fonction test dans l'analyse multi-échelle. L'intégrale de f par rapport à la mesure $g\nu$ donne les coefficients de f dans le développement.

Le fait qu'il s'agit bien d'une formule de décomposition, ou d'interpolation pour f, est assuré par le résultat suivant que nous démontrerons au paragraphe 3:

Si (X, ν) est une (G, μ)-frontière, pour toute fonction f dans $L^p(\nu)$, on a: $\lim_n T_n f = f$, la convergence ayant lieu en norme L^p pour $p \geq 1$, et ponctuellement pour tout $p > 1$.

2. Définitions, Notations et Exemples

Nous abordons maintenant la présentation de l'analyse des μ-frontières dans le cas général. Nous serons amenés à utiliser des résultats classiques concernant la théorie de l'espérance conditionnelle et des martingales, que l'on pourra trouver, par exemple, dans [11].

2.1. Définition.

Dans toute la suite, on désigne par G un semi-groupe (ou un groupe) topologique et par μ une mesure de probabilité sur les boréliens de G. La loi du semi-groupe G est notée multiplicativement et on suppose que G possède un élément neutre e.

On appelle G-espace, tout espace topologique E sur lequel G opère continûment, c'est-à-dire tel qu'il existe une application continue $(g,x) \to g \cdot x$ de $G \times E$ dans E telle que $e \cdot x = x$ et $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$, $\forall x \in E$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

2.2. Notation. Si ν est une mesure de probabilité sur un G-espace E, on note $\mu * \nu$ l'image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $G \times E$ par l'application $(g,x) \to g \cdot x$. Autrement dit nous avons :

$$\int_E f(x)\ \mu * \nu(dx) = \int_G \int_E f(g \cdot x)\ \mu(dg)\nu(dx).$$

En particulier, en considérant G, lui-même, comme un G-espace, on retrouve la convolution usuelle des mesures.

Lorsque μ est une mesure de Dirac δ_g sur G, la mesure $\delta_g * \nu$ sera notée, plus simplement, $g.\nu$.

2.3. Définition. On appelle (G,μ)-espace tout couple (E,ν) formé d'un G-espace E et d'une mesure de probabilité ν qui est μ-invariante (c'est-à-dire telle que $\mu * \nu = \nu$).

2.4. Exemples.

1. Soit $G = \{(a,b) : a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ le groupe affine opérant sur $\mathbb{R}$ par : $g \cdot x = ax + b$, pour $g = (a,b) \in G$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul r, considérons la mesure de probabilité μ_r sur G définie par:

$$\mu_r = \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \delta_{(1/2,k/2)}.$$

La loi ν_r de la somme de r variables aléatoires, indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$, est l'unique mesure de probabilité μ_r-invariante sur $\mathbb{R}$. La mesure ν_r possède une densité φ_r par rapport à la mesure de Lebesgue, portée par $[0,r]$. Pour $r \geq 2$, φ_r est une fonction de classe C^{r-2}, polynomiale par morceaux, de degré $r-1$.

2. Soit $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ le disque unité du plan complexe. Soit $G = \{(\rho, \alpha) \in \mathbf{C}^2 : |\rho| = 1, |\alpha| < 1\}$ le groupe des transformations homographiques du disque D; si $g = (\rho, \alpha) \in G$ et $z \in D$, $g \cdot z = \rho \dfrac{z + \alpha}{1 + \overline{\alpha} z}$. Notons $K = \{(\rho, 0) : |\rho| = 1\}$ le sous-groupe des rotations de G. Le groupe G opère continûment sur le cercle unité $E = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Si μ est une mesure de probabilité sur G, invariante à gauche par rotation (c'est-à-dire telle que, $k.\mu = \mu$, $\forall k \in K$), alors la mesure de Lebesgue sur le cercle unité E est l'unique mesure de probabilité μ-invariante.

Fonctions harmoniques et (G, μ)-espaces

Dans la suite nous supposerons donné un (G, μ)-espace (E, ν), tel que E soit localement compact à base dénombrable.

2.5. Définition. Une fonction H sur G, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, est dite μ-harmonique si, pour tout $g \in G$, l'intégrale $\int_G H(gh)\, \mu(dh)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est égale à $H(g)$.

Une fonction H sur G, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, est dite μ-harmonique au sens large si, pour μ-presque tout $g \in G$, l'intégrale $\int_G H(gh)\mu(dh)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est égale à $H(g)$.

2.6. Soit f une fonction borélienne sur E. Posons

$$H_f(g) = \int_E f(g \cdot x)\, \nu(dx), \quad (g \in G).$$

La fonction ainsi définie est μ-harmonique bornée sur G si la fonction f est bornée. Elle est μ-harmonique sur G, à valeurs dans $[0, +\infty]$, si f est positive. Si f est ν-intégrable, $H_f(g)$ a un sens pour μ-presque tout $g \in G$. On définit ainsi une fonction μ-harmonique au sens large sur G. L'application $f \longrightarrow H_f$ est une contraction de $L^p(E, \nu)$ dans $L^p(G, \mu)$, pour tout réel $1 \leq p \leq +\infty$.

2.7. Exemple. Reprenons le second exemple de (2.4). Comme ν est la mesure de Lebesgue du cercle unité, la fonction H_f est invariante à droite par les rotations, c'est-à-dire $H_f(gk) = H_f(g)$, $\forall g \in G$, $\forall k \in K$. Le sous-groupe des rotations K est le stabilisateur de zéro dans G; $K = \{g \in G : g \cdot 0 = 0\}$. En posant

$$h_f(g \cdot 0) = H_f(g), \ (g \in G),$$

on définit alors une fonction h_f sur le cercle unité D. Nous avons, si $g \cdot 0$ possède la décomposition polaire $re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} h_f(g \cdot 0) &= \int_E f(g \cdot x)\nu(dx) \\ &= \int_E f(x) \frac{dg\nu}{d\nu}(x)\nu(dx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} dt. \end{aligned}$$

On reconnaît dans la dernière égalité, le noyau de Poisson; la fonction h_f est donc une fonction harmonique au sens classique du Laplacien.

Dans cet exemple, le passage de f à H_f s'interprète donc comme la construction, de la fonction harmonique (au sens du Laplacien) sur D ayant f pour trace sur le cercle unité E.

3. Théorème de convergence

3.1. On considère l'espace produit $\Omega = G^{\mathbb{N}^*}$, muni de la tribu $\mathcal{F}$ de ses boréliens et de la mesure produit $\mathbb{P} = \otimes_{\mathbb{N}^*}\mu$. On appelle $(Y_k)_{k\geq 1}$ les coordonnées de Ω et on pose

$$\begin{aligned} X_0 &= e, \\ X_n &= Y_1 \cdots Y_n, \ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

On note: $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale et, pour $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables $\{Y_k : 1 \leq k \leq n\}$.

La théorie des martingales permet de montrer le résultat suivant.

3.2. Proposition

i) Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite de mesures de probabilité $(X_n(\omega)\cdot\nu)_{n\geq 0}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité $P(\omega,\cdot)$ sur E telle que

$$\nu(dx) = \int_\Omega P(\omega, dx)\mathbb{P}(d\omega).$$

ii) L'opérateur de transition, noté P, défini par

$$Pf(\omega) = \int_E f(x)P(\omega, dx) \ \ (\omega \in \Omega),$$

est une contraction de $L^p(E,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mathbb{P})$, pour tout $p \in [1,+\infty]$.

iii) Pour tout élément f de $L^1(E,\nu)$, nous avons

$$H_f(X_n) \overset{\mathbb{P}\text{-}p.s.}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Pf|\mathcal{F}_n].$$

iv) Le processus $\{H_f(X_n) : n \geq 0\}$ converge, $\mathbb{P}$-p.s. et au sens de $L^p(\Omega,\mathbb{P})$ vers Pf, pour $f \in L^p(E,\nu)$, pour tout $p \in [1,+\infty[$.

Preuve: De la relation d'invariance $\mu * \nu = \nu$, il résulte que, pour toute fonction borélienne bornée f, le processus $\{H_f(X_n), n \geq 0\}$ est une martingale bornée. D'après la théorie des martingales, ce processus converge donc $\mathbb{P}$-p.s. et au sens de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ($p \geq 1$) vers une variable aléatoire W_f qui ferme la martingale:

$$H_f(X_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W_f|\mathcal{F}_n].$$

L'espace $C_0(E)$, E étant supposé localement compact à base dénombrable, est séparable. Soit $(f_p)_{p\geq 0}$ une suite dense dans $C_0(E)$. D'après ce qui précède, il existe un sous-ensemble mesurable Ω_0 de Ω de $\mathbb{P}$-mesure 1 tel que, pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout $p \geq 0$, la suite $(F_{f_p}(X_n(\omega)) = X_n(\omega).\nu(f_p))_{n\geq 0}$ converge. Il en résulte que, pour $\omega \in \Omega_0$, la convergence de $(X_n(\omega).\nu(f))_{n\geq 0}$ a lieu, pour toute $f \in C_0(E)$. La suite de mesures de probabilité $(X_n(\omega).\nu)_{n\geq 0}$ converge donc vaguement vers une mesure positive $P(\omega, .)$, vérifiant

$$H_f(X_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\int_E f(x)P(., dx)|\mathcal{F}_n], \ \forall f \in C_0(E). \qquad (*)$$

En passant aux espérances, on obtient

$$\int_E f(x)\nu(dx) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\int_E f(x)P(., dx)], \ \forall f \in C_0(E).$$

On en déduit, d'une part que $\nu(dx) = \int_\Omega P(\omega, dx)\mathbb{P}(d\omega)$, d'autre part, en prenant une suite d'éléments de $C_0(E)$ qui converge en croissant vers la fonction partout égale à 1, que, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $P(\omega, .)$ est une mesure de probabilité sur E.

On étend la relation $(*)$ aux éléments de $L^1(E, \nu)$, par un argument de densité. Enfin, l'assertion *iv*) résulte de *iii*) via la théorie des martingales.

□

3.3. Considérons l'espace produit $\tilde{\Omega} = \Omega \times E$ muni de ses boréliens et de la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ définie par

$$\tilde{\mathbb{P}}(d\omega, dx) = \mathbb{P}(d\omega)P(\omega, dx)$$

Nous appelons W et U les applications projections de $\tilde{\Omega}$ respectivement sur Ω et E.

Pour toutes fonctions $f \in L^p(E, \nu)$ et $F \in L^q(\Omega, \mathbb{P})$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leq p \leq +\infty$), l'égalité

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[f \circ U \cdot F \circ W] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Pf \cdot F]$$

montre que

$$(Pf) \circ W = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[f \circ U|W].$$

Autrement dit, P est une loi conditionnelle de U connaissant W.

Appelons P^*F l'élément de $L^q(E, \nu)$ défini par $(P^*F) \circ U = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[F \circ W|U]$. On définit ainsi une contraction P^* de $L^q(\Omega, \mathbb{P})$ dans $L^q(E, \nu)$ caractérisée par les relations

$$\int_\Omega Pf(\omega)F(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_E f(x)P^*F(x)\nu(dx),$$

pour tous $f \in L^p(E, \nu)$ et $F \in L^q(\Omega, \mathbb{P})$.

L'espace $G^{\mathbb{N}^*}$ et E étant des espaces polonais, on sait (cf. par exemple [11]) qu'il existe une version "opérateur de transition" de P^*. Cette version constitue une loi conditionnelle de U connaissant W.

3.4. Pour tout $n \geq 0$, on note T_n la contraction de $L^p(E,\nu)$, $(1 \leq p \leq +\infty)$, définie par:

$$T_n = P^* \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_n} P,$$

où $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_n}$ désigne le projecteur d'espérance conditionnelle relatif à la tribu $\mathcal{F}_n$. Nous avons

$$T_n f = P^*[H_f(X_n(\cdot))].$$

De la théorie des martingales et des propriétés de l'espérance conditionnelle, il résulte immédiatement que pour tout $f \in L^p(E,\nu)$, $1 \leq p < +\infty$, la suite de fonctions $(T_n f)_{n\geq 0}$ converge au sens de $L^p(E,\nu)$ vers P^*Pf. En outre cette convergence a lieu au sens ν-p.s. lorsque

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\sup_{n\geq 0} |H_f(X_n)|] < +\infty,$$

ce qui est le cas pour $p > 1$, d'après un théorème de Doob.

3.5. Nous avons vu que, pour $f \in L^p(E,\nu)$, $1 \leq p < +\infty$, la suite $(T_n f)_{n\geq 0}$ converge dans $L^p(E,\nu)$ vers l'élément P^*Pf de $L^p(E,\nu)$. Un cas intéressant est celui où l'opérateur P^*P est l'identité.

Si $U = Z \circ W$, $\mathbb{P}$-p.s., il est clair que P^*P est l'identité. Réciproquement, supposons que P^*P soit l'opérateur identité. Pour toute fonction $f \in L^2(E,\nu)$, nous avons

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(Pf)^2] = < Pf, Pf >_{\mathbb{P}} = < f, P^*Pf >_\nu = < f, f >_\nu = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[P(f^2)].$$

Il existe alors un sous-ensemble Ω_0 de Ω de $\mathbb{P}$-mesure 1 tel que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, on ait:

$$\forall f \in C_0(E), P(f^2)(\omega) = (Pf)^2(\omega),$$

c'est-à-dire f est $P(\omega,.)$-p.s. constant. Il en résulte que $P(\omega,.)$ est une mesure ponctuelle, pour tout ω dans Ω_0.

On a donc montré que l'opérateur P^*P est l'identité si et seulement si, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la mesure $P(\omega,\cdot)$ est ponctuelle, de la forme $\delta_{Z(\omega)}$, où Z est une variable aléatoire (de loi ν) à valeur dans E.

3.6. Définition Un (G,μ)-espace (E,ν) est appelé une **μ-frontière** si, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite de mesure de probabilité $(X_n\nu)_{n\geq 0}$ converge étroitement vers une mesure de Dirac $\delta_{Z(\omega)}$.

3.7. Dans le cas d'une μ-frontière, nous avons les relations

$$P^*P = I \text{ et } PP^* = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{Z},$$

où $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{Z}$ désigne le projecteur d'espérance conditionnelle par rapport à Z.

Nous avons donc obtenu le résultat suivant:

3.8. Théorème *Pour tout élément f de $L^p(E,\nu)$, $1 \leq p < +\infty$, la suite $(T_n f)_{n\geq 0}$ converge dans $L^p(E,\nu)$ vers f et cette convergence a lieu aussi au sens ν-p.s. pour $p > 1$.*

4. Expression de $T_n f$, représentation en série d'un élément de $L^1(E,\nu)$

4.1. Hypothèse. Nous supposons que pour μ-presque tout $g \in G$, et par suite pour $\sum_{r\geq 1} \frac{1}{2^r}\mu^r$-presque tout $g \in G$, la mesure $g\nu$ est absolument continue par rapport à ν, c'est-à-dire:

$$g\nu(dx) = \frac{dg\nu}{d\nu}(x)\ \nu(dx),$$

où l'on a noté $\frac{dg\nu}{d\nu}$ la dérivée de Radon-Nikodym-Lebesgue de la mesure $g\nu$ relativement à ν.

Cette hypothèse est évidemment vérifiée si la mesure μ est discrète.

4.2. Expression de T_n.

Pour $\varphi \in L^q(E,\nu)$ et $f \in L^p(E,\nu)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\boldsymbol{P}}[P\varphi \cdot H_f(X_n)] &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}}[H_f(X_n)\mathbb{E}_{\boldsymbol{P}}^{\mathcal{F}_n}[P\varphi]] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}}[H_f(X_n)H_\varphi(X_n)] \\
&= \int_G H_f(g)H_\varphi(g)\mu^n(dg) \\
&= \int_G H_f(g)\left(\int_E \varphi(g\cdot x)\nu(dx)\right)\mu^n(dg) \\
&= \int_G H_f(g)\left(\int_E \varphi(u)\frac{dg\nu}{d\nu}(u)\nu(du)\right)\mu^n(dg) \\
&= \int_E \varphi(u)\left[\int_G H_f(g)\frac{dg\nu}{d\nu}(u)\mu^n(dg)\right]\nu(du).
\end{aligned}$$

D'où

$$T_n f(x) = \int_G H_f(g)\frac{dg\nu}{d\nu}(x)\mu^n(dg) \ \ (x \in E).$$

Dorénavant on se place dans le cas d'une μ-frontière (E,ν) pour laquelle l'hypothèse (4.1.) est satisfaite.

4.3. Expression de "l'innovation" Pour $f \in L^1(E,\nu)$, $T_n f$ s'écrit

$$T_n f(\cdot) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}}[H_f(X_n)\frac{dX_n\nu}{d\nu}(\cdot)] = \int K_n(\cdot,y)f(y)\nu(dy),$$

où

$$K_n(x,y) = \mathbb{E}[\frac{dX_n\nu}{d\nu}(x)\frac{dX_n\nu}{d\nu}(y)].$$

On remarque que le noyau $K_n(x,y)$ n'est pas nécessairement défini pour $x = y$. Puisque $\mu * \nu = \nu$, pour ν-presque tout $x \in E$, la fonction $g \to \frac{dg\nu}{d\nu}(x)$ est μ-harmonique au sens large. Il s'ensuit que, pour ν-presque tout $x \in E$, le processus $\left(\frac{dX_n\nu}{d\nu}(x)\right)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$; d'où les relations:

$$\begin{aligned}(T_{n+1}f - T_nf)(\cdot) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[[H_f(X_{n+1}) - H_f(X_n)]\frac{dX_{n+1}\nu}{d\nu}(\cdot)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(H_f(X_{n+1} - H_f(X_n))(\frac{dX_{n+1}\nu}{d\nu} - \frac{dX_n\nu}{d\nu})(\cdot)\right].\end{aligned}$$

4.4. Pour $g, y \in G$, posons

$$\psi_{g,y}(x) = \frac{dgy\nu}{d\nu}(x) - \frac{dg\nu}{d\nu}(x), \ (x \in E).$$

On définit ainsi une fonction de $L^1(E, \nu)$.

Des relations précédentes, il résulte, pour toute fonction $f \in L^1(E,\nu)$, l'égalité dans $L^1(E,\nu)$:

$$f(\cdot) = \langle f, 1\rangle_\nu + \sum_{n\geq 1}\int_G\int_G \langle f, \psi_{g,y}\rangle_\nu \psi_{g,y}(\cdot)\mu^n(dg)\mu(dy).$$

Si $f \in L^p(E,\nu)$, avec $p > 1$, cette égalité a lieu dans $L^p(E,\nu)$ et même au sens ν-p.s..

4.5. Exemple

Reprenons l'exemple 1 de (2.4). On obtient les formules

$$\varphi_r(x)T_nf(x) = 2^{2n}\sum_{k=0}^{(2^n-1)r}\left[\int_{\mathbb{R}} f(u)\varphi_r(2^nu - k)du\right]\varphi_r(2^nx - k)\rho_n(k),$$

$$\varphi_r(\cdot)f(\cdot) = \int_E f(u)\nu(du) + \sum_{n\geq 1} 2^{2n}\sum_{k=0}^{(2^n-1)r}\sum_{\ell=0}^{r}\rho_n(k)\rho_1(\ell)\left[\int_{\mathbb{R}} f(u)\psi_{k,\ell}^{(n)}(u)du\right]\psi_{k,\ell}^{(n)}(\cdot),$$

avec

$$\psi_{k,\ell}^{(n)}(x) = 2\varphi_r(2^{n+1}x - 2k - \ell) - \varphi_r(2^nx - k),$$

$$\rho_n(k) = \frac{1}{2^{nr}}\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2^n}]}(-1)^iC_r^iC_{k-2^ni+r-1}^{r-1}, \ 0 \leq k \leq (2^n-1)r,$$

et, pour $\ell - 1 \leq x < \ell$, $\ell = 1, ..., r$,

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{i=0}^{\ell-1}(-1)^iC_r^i(x-i)^{r-1}, \ \forall r \geq 2.$$

La formule ci-dessus donnant $\rho_n(k)$ s'obtient en écrivant

$$\rho_n(k) = \mathbb{P}[X_1 + 2X_2 + ... + 2^{n-1}X_n = k],$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi binomiale $B(r, \frac{1}{2})$, et en utilisant les fonctions génératrices.

4.6. Remarques.

1. Caractérisation de $L^p(\nu)$.

   Montrons que f est dans $L^p(\nu)$ si et seulement si la martingale $(H_f(X_n), n \in \mathbb{N})$ est dans H^p. Nous pouvons supposer dans la suite $f \geq 0$. Nous avons vu que $f = \lim_n f_n(x)$, avec

   $$f_n(x) = \mathbb{E}[H_f(X_n)\frac{dX_n\nu}{d\nu}(x)].$$

   D'où, en remarquant que $\frac{dX_n\nu}{d\nu}d\mathbb{P}$ est une probabilité et en appliquant l'inégalité de Jensen,

   $$\begin{aligned} \|f_n\|_p^p &= \int \mathbb{E}[H_f(X_n)\frac{dX_n\nu}{d\nu}(x)])^p\nu(dx) \\ &\leq \int \mathbb{E}[H_f(X_n)^p\frac{dX_n\nu}{d\nu}(x)]\nu(dx) \\ &= \mathbb{E}(H_f^p(X_n)] \\ &\leq \mathbb{E}(\sup_n H_f^p(X_n)) \end{aligned}$$

   En passant à la limite, on obtient par le lemme de Fatou:

   $$\|f\|_p^p \leq \liminf_n \|f_n\|_p^p \leq \mathbb{E}(\sup_n H_f^p(X_n)) \leq \|f\|_p^p.$$

   Par les inégalités de Burkholder [1], la caractérisation suivante en résulte: f est dans $L^p(\nu)$ si et seulement si

   $$\mathbb{E}[(\sum_{n\geq 0}(H_f(X_{n+1}) - H_f(X_n))^2)^{p/2}] < \infty.$$

2. Supposons, pour simplifier, que μ soit discrète. Notons μ^0 la mesure de Dirac en l'élément neutre e de G. Pour tout entier $n \geq 1$, appelons V_n le sous-espace vectoriel fermé de $L^1(E,\nu)$ engendré par les fonctions $\{T_n f, f \in L^1(E,\nu)\}$. Le sous-espace V_0 est réduit aux constantes.

   Le sous-espace V_n est égal au sous-espace vectoriel fermé W_n engendré par les fonctions $\{\frac{dg\nu}{d\nu}, g \in supp(\mu^n)\}$. Il est clair en effet que V_n est contenu dans W_n. D'autre part, si $\phi \in L^\infty(E,\nu)$ est orthogonal à V_n, nous avons:

   $$< T_n f, \phi >_\nu = 0, \ \forall f \in L^1(E,\nu).$$

   En particulier, pour $f = \phi$, nous obtenons $\mathbb{E}(H_\phi^2(X_n)] = 0$, c'est-à-dire $< \phi, \frac{dg\nu}{d\nu} >= 0$, pour μ^n-presque tout $g \in G$. D'où l'inclusion de W_n dans V_n.

   L'égalité

   $$\sum_{y\in G}\frac{dgy\nu}{d\nu}(\cdot)\mu(y) = \frac{dg\nu}{d\nu}(\cdot), (g \in G)$$

   montre l'inclusion $V_n \subset V_{n+1}$.

Nous avons les propriétés suivantes, à comparer avec celle d'une analyse multi-échelle:

$$\bigcap_{n\geq 0} V_n = V_0$$

et, d'après ce qui précède,

$$\overline{\bigcup_n V_n} = L^1(E,\nu).$$

3. Les exemples de μ-frontières sont nombreux.

   Nous avons déjà donné des exemples quand G est le groupe affine.

   Considérons maintenant le cas où $G = Gl(d,\mathbb{R})$ ou $G = Sl(d,\mathbb{R})$. Prenons pour espace E l'espace projectif P^{d-1} ou plus généralement un espace de drapeaux. Pour une large classe de mesures de probabilité μ, il existe une unique mesure de probabilité ν sur E telle que (E,ν) soit une (G,μ) frontière (voir [3], [4], [5], [6], [7], [8], [12]).

4. Nous avons une formule de type Plancherel (à rapprocher de la formule d'isométrie (**) de 1.1):

$$\int_E f^2(x)\nu(dx) = \sum_{n>0}\int (H_f(g))^2(\mu^{n+1}-\mu^n)(dg) + H_f^2(e).$$

5. Passage du local au global

5.1. Dans ce qui précède, le couple (μ,ν) peut être remplacé par le couple $(\tau\mu\tau^{-1},\tau\nu)$ pour tout élément τ de G. Il s'ensuit que, pour $f\in L^p(E,\tau\nu)$, la suite de fonctions,

$$T_n f^\tau(\tau^{-1}\cdot x) = \int_G H_f(\tau g)\frac{dg\nu}{d\nu}(\tau^{-1}\cdot x)\mu^n(dg),$$

converge dans $L^p(E,\tau\nu)$, et même $\tau\nu$-p.s. si $p>1$, vers f. [On note f^τ la fonction qui à $x\in E$ associe $f(\tau\cdot x)$.]

Ceci permet de reconstruire f sur le support de $\tau\nu$ et non plus sur celui de ν.

5.2. Supposons qu'il existe un sous-groupe discret Γ de G tel que $\sum_{\tau\in\Gamma}\tau\nu$ définisse une mesure de Radon positive λ sur les boréliens de E.

Posons

$$S_n f(x) = \sum_{\tau\in\Gamma}\left(\int_G H_f(\tau g)\frac{dg\nu}{d\lambda}(\tau^{-1}x)\mu^n(dg)\right),\ (x\in E).$$

Nous avons alors le résultat suivant.

5.3. Théorème *Pour tout entier $n\geq 0$, l'opérateur S_n est une contraction des espaces $L^p(E,\lambda)$, $(p\geq 1)$. Pour toute $f\in L^p(E,\lambda)$, la suite de fonctions $(S_n f)_{n\geq 0}$ converge dans $L^p(E,\lambda)$ vers f et cette convergence a lieu aussi au sens λ-p.s. si $p>1$.*

Preuve: Pour toute partie Λ de Γ et tout entier $n \geq 0$, posons

$$S_n^{\Lambda} f(x) = \sum_{\tau \in \Lambda} \Big(\int_G H_f(\tau g) \frac{dg\nu}{d\lambda}(\tau^{-1}x) \mu^n(dg) \Big), \ (x \in E).$$

En remarquant que

$$\left(\sum_{\tau_0 \in \Lambda} \frac{d\tau_0 \nu}{d\lambda}(x) \right)^{-1} \sum_{\tau_0 \in \Lambda} \frac{dg\nu}{d\lambda}(\tau_0^{-1}x) \delta_{\tau_0}(d\tau) \mu^n(dg),$$

définit, pour λ-presque tout $x \in E$, une mesure de probabilité sur les boréliens de $\Gamma \times G$, on obtient l'inégalité de convexité,

$$\|S_n^{\Lambda} f\|_{L^p(E,\lambda)}^p \leq \int_E \left(\sum_{\tau \in \Lambda} \frac{d\tau\nu}{d\lambda}(x) \right)^p S_n^{\Lambda}(|f|^p)(x) \lambda(dx).$$

Comme $\displaystyle\sum_{\tau \in \Lambda} \frac{d\tau\nu}{d\lambda}(\cdot) \leq 1$, λ-p.s., on obtient

$$\|S_n^{\Lambda} f\|_{L^p(E,\lambda)}^p \leq \sum_{\tau \in \Lambda} H_{|f|^p}(\tau) = \|f\|_{L^p(E, \sum_{\tau \in \Lambda} \tau\nu)}^p.$$

On en déduit que l'opérateur $S_n = S_n^{\Gamma}$ est une contraction des espaces $L^p(E, \lambda)$ et que, pour tout élément f de $L^p(E, \lambda)$, la suite $(S_n f)_{n \geq 0}$ converge dans $L^p(E, \lambda)$ vers f.

Lorsque $p > 1$, montrons que cette convergence a lieu aussi au sens λ-p.s.. Nous savons que, pour $\tau \in \Gamma$, la suite de fonctions

$$\int_G H_f(\tau g) \frac{dg\nu}{d\lambda}(\tau^{-1} \cdot) \mu^n(dg) = (T_n f^{\tau}(\tau^{-1} \cdot) \frac{d\tau\nu}{d\lambda}(\cdot))_{n \geq 0}$$

converge $\tau\nu$-p.s. vers $f(\cdot)\dfrac{d\tau\nu}{d\lambda}(\cdot)$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il suffit de montrer que, pour tout élément f positif de $L^p(E, \lambda)$,

$$\sum_{\tau \in \Gamma} \sup_n (T_n f^{\tau}(\tau^{-1} \cdot)) \frac{d\tau\nu}{d\lambda}(\cdot) < +\infty, \ \lambda - p.s..$$

Nous montrons en fait que cette fonction est de puissance p-ième intégrable par rapport à λ. En effet, nous avons

$$[\sum_{\tau \in \Gamma} sup_n (T_n f^{\tau}(\tau^{-1}.)) \frac{d\tau\nu}{d\lambda}(.)]^p \leq \sum_{\tau \in \Gamma} (sup_n (T_n f^{\tau}(\tau^{-1}.))^p \frac{d\tau\nu}{d\lambda}(.)], \lambda - p.s.,$$

car

$$\sum_{\tau \in \Gamma} \frac{d\tau\nu}{d\lambda} = 1, \lambda - p.s..$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_E [\sup_n (T_n f^\tau(\tau^{-1}x))]^p \frac{d\tau\nu}{d\lambda}(x)\lambda(dx) &= \int_E \sup_n (T_n f^\tau(x))^p \nu(dx) \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_n (\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\tau Z)|\mathcal{F}_n]|Z])^p\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_n \mathbb{E}[f(\tau Z)|\mathcal{F}_n]^p\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_n H_f(\tau X_n)^p\right] \\
&\leq \left\|\sup_n H_f(\tau X_n)\right\|^p_{L^p(\Omega,\mathbf{P})} \\
&\leq (\frac{p}{p-1})^p \sup_n \|H_f(\tau X_n)\|^p_{L^p(\Omega,\mathbf{P})} \\
&\leq (\frac{p}{p-1})^p \int_E f^p(x)\tau\nu(dx).
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit le résultat. On a utilisé au passage l'inégalité de Doob sur les martingales p-intégrables.

5.4. Exemple.

Dans l'exemple 1 de (1.4), prenons pour Γ le groupe des translations entières. Nous obtenons pour λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

L'approximation d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$S_n f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma_{n,m}(\int_{\mathbb{R}} f(u)\varphi_r(2^n u - m)du)\varphi_r(2^n x - m),$$

avec

$$\gamma_{n,m} = 2^{2n} \sum_{\{\ell:0\leq m-2^n\ell\leq(2^n-1)r\}} \rho_n(m - 2^n\ell),$$

et le développement de f est

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \{ \quad (&\int f(u)\varphi_r(u-m)du)\varphi_r(x-m) \\
&+ \sum_{n\geq 1}\sum_{l=0}^{r} \gamma_{n,m}\rho_1(\ell)[\int_{\mathbb{R}} f(u)\psi^{(n)}_{m,l}(u)\ du]\ \psi^{(n)}_{m,l}(x)\}.
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] D.L. Burkholder, Martingale transforms, Ann. of Math. Stat., 37 (1966), 1494-1504.

[2] Conze (J.P.), Raugi (A.). - Fonctions μ-harmoniques et méthodes probabilistes d'approximation, CRAS t. 308, Sér. I, p. 185-188, 1989.

[3] Y. Derriennic, Entropie et frontière d'une marche aléatoire, dans Probabilités sur les structures géométriques, Toulouse 1984.

[4] Furstenberg (H.). - Boundary theory and stochastic processes on homogenous spaces, Proc. Symp. Pure Math., 26, 1972, p. 193-229.

[5] V.A. Kaimanovich, A.M. Vershik, Random walks on discrete groups: boundary and entropy, Ann. Prob. 11 (1983), 457-490.

[6] V.A. Kaimanovich, An entropy criterion for maximality of the boundary of random walks on discrete groups, Sov. Math. Dokl., vol. 31 (1985), No 1.

[7] F. Ledrappier, Une relation entre entropie, dimension et exposant pour certaines marches aléatoires, CRAS, Sér. Math. 296 (1983), 369-372.

[8] Letac (G.), Seshadri (V.). - A characterisation of the generalised inverse gaussian distribution by continuous fractions, Zeit. Wahr., 62, 1983, p. 485-489.

[9] Mallat (S.). - (1989) Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$, Trans. Amer. Math Soc., 315, no 1, 1989, p. 69-88.

[10] Meyer (Y.). - *Ondelettes et Opérateurs* , Tomes I, II et III, Hermann, 1990.

[11] Neveu (J.). - *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités,* Masson, 1964.

[12] Raugi (A.). - Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 54, 1977.

Jean Pierre Conze, Albert Raugi

Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu, 35042, Rennes Cedex, France

Janvier 1991