Anne Broise

Transformations dilatantes de l'intervalle [0,1] et théorèmes limites

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-42
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___2_A1_0>

TRANSFORMATIONS DILATANTES DE L'INTERVALLE $[0,1]$ ET THEOREMES LIMITES

Anne BROISE

1. Introduction

On veut démontrer un théorème limite central :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

pour certaines transformations dilatantes de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même, en particulier pour les β-transformations et la transformation "fraction continue". On devra préciser en quel sens il faut comprendre la limite et quelles conditions on doit imposer à f pour que σ^2 ne soit pas nul. Pour faire cela, on va définir une classe de transformations dilatantes de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même : $\mathcal{C}$ telle que pour chaque T de $\mathcal{C}$, on puisse :

- définir l'opérateur de Perron-Frobenius associé : Φ
- appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu à Φ pour faire l'étude spectrale de Φ et en déduire l'existence d'une mesure μ qui soit T-invariante.

On suppose alors que le système (T, μ) est ergodique. Pour démontrer le théorème central limite, on est amené à perturber analytiquement Φ. A l'aide du théorème des perturbations et en faisant des développements limités, on peut conclure et même donner la vitesse de convergence. Pour terminer, on applique ces résultats aux β-transformations et à la transformation "fraction continue".

On a réalisé ce travail après l'étude de l'article de J. Rousseau-Egele.

2. Notations et premières définitions

On note l'intervalle $[0,1]$ par I.
On munit I de la tribu de ses boréliens $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue m. On note L^1_m l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{C}$ qui sont intégrables sur I.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$, on dit que f est à variation bornée si $v(f) = \sup \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|$ est fini, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des subdivisions $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ finies sur I.

Un élément f de L^1_m est dit à variation bornée si $v(f) = \inf_{g\in\overline{f}} v(g)$ est fini, où la borne inférieure est prise sur la classe de f modulo m : $\overline{f} = \{g : I \to \mathbf{C} \ : f = g \ mp.p\}$.

On note V l'ensemble $\{f \in L^1_m : v(f) < \infty\}$. On peut considérer que V est l'ensemble des fonctions continues à droite sur I, ayant un nombre au plus dénombrable de sauts dans I et qu'à chaque élément f de V, on peut associer une mesure μ dont la variation totale est bornée telle que $f(x) = \mu([0,x])$ pour tout x de I.

V est un sous espace de L^1_m qui n'est pas fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ [car la suite de fonctions $f_n(x) = \sin\frac{1}{x} 1_{]1/n,1]}(x)$ est dans V mais elle converge vers $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ qui appartient à L^1_m mais n'est pas dans V].

On définit alors la norme $\|\cdot\|_v$ sur V par :

$$\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1.$$

Cette norme rend l'espace $(V, \|\cdot\|_v)$ complet car la boule unité de l'espace des mesures dont la variation totale est bornée est compacte pour la topologie de la convergence faible des mesures à variation totale bornée.

On a pour tout $f : I \to \mathbf{C}$, $f \in V$, pour tout x, y dans I :

$$|f|(x) - |f|(y) \leq v(f).$$

Donc $\int_0^1 [|f|(x) - |f|(y)]dy = |f|(x) - \|f\|_1 \leq v(f)$.

Ainsi $\|f\|_\infty - \|f\|_1 \leq v(f)$ i.e. $\|f\|_\infty \leq \|f\|_v$.

On en déduit qu'une suite $(f_n)_{n>0}$ d'éléments de V qui converge dans V vers f converge uniformément sur I.

Comme on a : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty\|g\|_1 + \|f\|_1\|g\|_\infty$ si f et g sont dans V, et comme pour une subdivision $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ finie de I on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} |(fg)(a_i) - (fg)(a_{i+1})| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} [|f(a_i)||g(a_i) - g(a_{i+1})| + |g(a_i)||f(a_i) - f(a_{i+1})|] \\
&\leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |g(a_i) - g(a_{i+1})| + \|g\|_\infty \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i+1})|.
\end{aligned}$$

Alors $v(fg) \leq \|f\|_\infty v(g) + \|g\|_\infty v(f)$.

Donc
$$\begin{aligned}
\|fg\|_v &\leq \|f\|_\infty\|g\|_v + \|g\|_\infty\|f\|_v \\
\|fg\|_v &\leq 2\|f\|_v\|g\|_v.
\end{aligned}$$

On construit maintenant une classe de transformations dilatantes pour lesquelles on pourra montrer le théorème limite central.

3. Une classe de transformations dilatantes

On appelle $\mathcal{C}$ la classe des applications T de I dans lui-même telles qu'il existe une subdivision finie ou dénombrable $\{a_j\}_{j\in J}$ de I vérifiant :

(1) La restriction de T à I_j est strictement monotone et se prolonge en une application C^2 sur $\overline{I}_j$ où l'on note $I_j =]a_j, a_{j+1}[\ \ j \in J$.

(2) $\{T(I_j)\}_{j\in J}$ est composé d'un nombre fini d'intervalles distincts.

(3) Il existe un entier n tel que $\gamma = \inf_{x\in \cup I_j} |(T^n)'(x)| > 1$.

(4) Il existe un entier N vérifiant : $\gamma^N > 2, \gamma^{N-1} \leq 2$ et $\sup \left|\frac{(T^{nN})''(x)}{[(T^{nN})'(x)]^2}\right| < \infty$.

Remarque. Si la subdivision est finie, les conditions (2) et (4) sont évidentes.

Exemples d'éléments de $\mathcal{C}$

* **Les β-transformations** : elles sont définies par $Tx = \beta x[1]$ où β est un réel strictement supérieur à 1. La subdivision associée à T est $1 < \frac{1}{\beta} < \cdots < \frac{[\beta]}{\beta} \leq 1$. Sur chaque intervalle : $[\frac{j}{\beta}, \frac{j+1}{\beta}]$ où $0 \leq j \leq [\beta] - 1$ et sur $[\frac{[\beta]}{\beta}, 1], T$ est linéaire donc on a (1), $\gamma = \beta > 1$ par hypothèse d'où (3) et comme la subdivision est finie on a $T \in \mathcal{C}$.

* On vérifie aisément que **la généralisation des β-transformations**. Les applications $Tx = \beta x + \alpha$ [1] où $\beta > 1, 0 \leq \alpha < 1$ sont encore dans $\mathcal{C}$.

* **Les applications markoviennes linéaires par morceaux** sont aussi des éléments de $\mathcal{C}$. En effet, il existe une subdivision (I_k) finie ou dénombrable telle que $T(I_k) = I, T$ est linéaire sur I_k et $|T'x| \geq 1 + \epsilon$ où $\epsilon > 0$. Comme la composée d'une application markovienne linéaire en est encore une, on a (4) et $T \in \mathcal{C}$.

* **La transformation "fraction continue"** : elle est définie par $T(0) = 0$ et pour $x \in]0, 1]\ \ Tx = \{\frac{1}{x}\}$.

La subdivision de I associée à T est $(I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[)_{n\in \mathbb{N}^*}$ et sur I_n, $Tx = \frac{1}{x} - n$ qui est une fonction de classe C^2 strictement monotone sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, d'où (1). Pour tout $n > 0$, $T(I_n) = I$, d'où (2).

On a : $\inf_{x\in \cup I_n} |(T \circ T)'(x)| = 4$,

en effet $T'x = -\frac{1}{x^2}$ sur $\cup_n I_n, T''x = \frac{2}{x^3}$,

et $(T \circ T)'(x) = T'(Tx)T'(x) = \frac{1}{(Tx)^2}\ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(1-nx)^2}$ si $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$.

Alors : $\inf_{x\in UI_n}|(T^2)'(x)| = \inf_{n>0}\inf_{x\in I_n}\frac{1}{(1-nx)^2} = \inf_{n>0}\frac{1}{(1-\frac{n}{n+1})^2} = 4$, d'où (3)

$$\begin{aligned}(T^2)"(x) &= T"(x)T'(x) + T"(Tx)(T'(x))^2 = \frac{-2}{x^3}\frac{1}{(Tx)^2} + \frac{2}{(Tx)^3}\frac{1}{x^4} = \frac{2(1-xTx)}{x^4(Tx)^3}\\ \frac{(T^2)"(x)}{[(T^2)'(x)]^2} &= 2(1-xTx)Tx = 2nx(\frac{1}{x}-n) \text{ si } x \in]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[.\end{aligned}$$

D'où $\sup_{x\in UI_n}\left|\frac{(T^2)"(x)}{[(T^2)'(x)]^2}\right| = \sup_{n>0}\frac{2}{n+1} = 1 < \infty$. Ainsi $T \in \mathcal{C}$.

Remarque. On appelle transformation markovienne C^2 une transformation T vérifiant (1), (3) et (2) avec en plus $T(I_j) = I$ pour tout $j \in J$.

Il existe des transformations markoviennes C^2 n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, en effet : soit T définie par

$$\begin{cases} T0 &= 0\\ Tx &= \frac{1}{n}\log(nx+b_n) + a_n \text{ sur }]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\quad n \geq 2\\ Tx &= 4x-2 \text{ sur }]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[\\ Tx &= 4x-3 \text{ sur }]\frac{3}{4},1[\end{cases}$$

avec $a_n = \frac{1}{n}\log[(n+1)(e^n-1)]$ $b_n = \frac{e^n\frac{n}{n+1}-1}{1-e^n}$, ils sont choisis de façon à ce que $T(\frac{1}{n}) = 1$, $T(\frac{1}{n+1}) = 0$, d'où (2). Sur I_n, T est une fonction de classe C^2, on a : $T'x = \dfrac{1}{nx+\frac{e^n\frac{n}{n+1}-1}{1-e^n}}$ qui est une fonction décroissante sur $]-\infty,x_0[$ et sur $]x_0,+\infty[$ où $x_0 = \dfrac{e^n n/(n+1)-1}{n(e^n-1)}$ comme on a : $-\infty < x_0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \infty$ et que sur $]x_0,\infty[$ $T'x \in]0,\infty[$ on en déduit que T est strictement croissante sur I_n, la condition (1) est donc vérifiée

$$\begin{aligned}\inf_{x\in I}|T'x| &= \inf\{\inf_{n>2}T'(\frac{1}{n}),4\} = \inf\{4,\frac{(e^n-1)(n+1)}{(n+1)(e^n-1)-e^n n+n+1}\}\\ &= \inf\{4,(1-e^{-n})(n+1)\ n>2\} = 3(1-e^{-2})\end{aligned}$$

car la fonction $x \rightarrow (x+1)(1-e^{-x})$ est strictement croissante sur $[1,\infty]$.
$\gamma = 3(1-e^{-2}) = 2,59 > 1$, la condition (3) est donc vérifiée. Mais la condition (4) n'est pas vérifiée, en effet :

$$\frac{T"(x)}{[T'(x)]^2} = -[\frac{1}{T'(x)}]' = -[nx+b]' = -n \text{ sur } I_n \text{ pour } n \geq 2.$$

On a donc $\sup_{x\in I}|\frac{T"(x)}{[T'(x)]^2}| = \infty$.

4. L'opérateur de Perron-Frobenius

On considère un élément T de $\mathcal{C}$, on définit alors l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T, $\Phi_T : L^1_m \to L^1_m$ par :

$$\int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm = \int_0^1 f \cdot g \circ T dm \text{ où } f \in L^1_m \text{ et } g \in L^\infty_m.$$

Les principales propriétés de Φ_T sont :

(i) Φ_T est un opérateur linéaire continu de L^1_m.

(ii) Φ_T est positif : $f \geq 0 \Rightarrow \Phi_T f \geq 0$, donc $|\Phi_T f| \leq \Phi_T |f|$ pour $f \in V$.

(iii) Φ_T est une contraction de L^1_m.

(iv) Φ_T préserve l'intégrale : $\int_0^1 \Phi_T f dm = \int_0^1 f dm$.

(v) $\Phi_{T^n} = (\Phi_T)^n$.

(vi) $\Phi_T f = f$ si et seulement si $d\mu = f dm$ est une mesure T-invariante.

Preuve de (iii) et de (vi) :

$$\begin{aligned}
\|\Phi_T f\|_1 &= \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm \right| \\
&\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_0^1 |f| \cdot |g \circ T| dm \\
&\leq \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|f\|_1 \, \|g \circ T\|_\infty \\
&\leq \|f\|_1
\end{aligned}$$

Si $\Phi_T f = f$ alors $\int_0^1 f g dm = \int_0^1 f g \circ T dm$ pour tout $g \in L^\infty_m$ en particulier pour $g = 1_A$ $A \in \mathcal{B}$ on a $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

Si $\mu = fm$ est T-invariante, pour tout $g \in L^\infty_m$ on a :

$$\int_0^1 g \circ T d\mu = \int_0^1 g d\mu \textit{ ie} : \int_0^1 f g \circ T dm = \int_0^1 f g dm \text{ d'où } \Phi_T f = f.$$

Remarque. m est une mesure T-invariante si et seulement si $\Phi_T 1 = 1$.

Les conditions imposées à $T \in \mathcal{C}$ permettent une écriture explicite de Φ_T : $\Phi_T f(x) = \sum_{j \in J} f(\sigma_j x) \chi_j(x) \phi_j(x)$ pour m-presque tout x de I.

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_j : T(I_j) \to I_j \text{ est la réciproque de } T \text{ restreinte à } I_j \\ \chi_j \text{ est l'indicatrice de l'intervalle } T(\overline{I}_j) \\ \phi_j(x) = \frac{1}{|T'j(\sigma_j x)|}. \end{array} \right. .$$

En effet, l'égalité $\int_0^1 \Phi_T f \cdot g dm = \int_0^1 f \cdot g \circ T dm$ donne par changement de variables :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f \cdot g \circ T dm &= \sum_{j\in J} \int_{I_j} f \cdot g \circ T dm = \sum_{j\in J} \int_{T^{-1}(I_j)} f(\sigma_j y) g(y) \frac{1}{|T_j'(\sigma_j y)|} dm(y) \\
&= \sum_{j\in J} \int_I f(\sigma_j x) g(x) \phi_j(x) \chi_j(x) dm(x) \\
&= \int_I [\sum_{j\in J} f(\sigma_j x) \phi_j(x) \chi_j(x)] g(x) dm(x) \text{ pour tout } \ g \in L_m^\infty
\end{aligned}$$

[par le théorème de la convergence monotone dans le cas d'une subdivision dénombrable et en découpant f en $f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives.]

D'où : $\Phi_T f(x) = \sum_{j\in J} f(\sigma_j x)\phi_j(x)\chi_j(x)$ *m.pp.*

Désormais on note Φ à la place de Φ_T et on définit pour tout x de I

$$\Phi f(x) = \sum_{j\in J} f(\sigma_j x) \chi_j(x) \phi_j(x).$$

5. Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu

Les hypothèses : $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ et $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ sont deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{V}$ est contenu dans $\mathcal{L}$, ils vérifient de plus l'hypothèse :

(a) si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{V}$ qui converge dans $\mathcal{L}$ vers f et si pour tout $n \geq 0$ $\|f_n\|_{\mathcal{V}} \leq C$, alors f est dans $\mathcal{V}$ et on a $\|f\|_{\mathcal{V}} \leq C$.
Φ est un opérateur de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ qui laisse stable $\mathcal{V}$ et qui est borné par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$, il vérifie les conditions :

(b) $\sup_{n\geq 0}\{\|\Phi^n f\|_{\mathcal{L}}, f \in \mathcal{V}, \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\} \leq H < \infty$.

(c) Il existe $n_0 \geq 0, \alpha < 1$ et $\beta < \infty$ tels que :

$$\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

(d) si V est une partie bornée de $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ alors $\Phi^{n_0} V$ est relativement compacte dans $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)_{\mathcal{L}})$.

Avant d'énoncer et de prouver le théorème de Marinescu et Ionescu-Tulcea, on remarque que :

Proposition 5.1. *Si $T \in \mathcal{C}$, Φ vérifie les hypothèses (a), (b), (c) et (d).*

Preuve : On prend pour $\mathcal{L}$ l'espace L^1_m muni de la norme $\|\cdot\|_1$ et pour $\mathcal{V}$ le sous espace de $\mathcal{L}$ constitué des fonctions dont la variation est finie, on le munit de la norme $\|f\|_v = v(f) + \|f\|_1$, c'est en fait $(V, \|\cdot\|_v)$.

(a) - On a $A = \{f \in L^1_m : \|f\|_v \leq C\}$ est une partie compacte de L^1_m. On le voit en remarquant que toute fonction à variation bornée peut être considérée comme la fonction de répartition d'une mesure μ pas obligatoirement positive. On dispose de la convergence faible des mesures.

Soit $(\phi_n)_{n\geq 0}$ une suite de A on associe alors une suite de mesures $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de variation totale bornée sur $[0,1]$. Il existe donc une sous-suite de mesures $(\mu_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge faiblement vers μ. Soit $\phi(x) = \mu([0,x])$, comme l'ensemble des points de discontinuité de μ est dénombrable, on en déduit que $\phi_{n_k} \to \phi$ p.s. Les ϕ_n sont bornées on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue et alors : $\phi_n \to \phi$ dans L^1_m et $\|\phi\|_v \leq C$, d'où la compacité de A dans L^1_m.

Soit alors une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de points de A convergent vers $f \in L^1_m$ et telle que $\|f_n\|_v \leq C$. On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$ et $\|f_n\|_v \leq C$. Comme A est compacte dans L^1_m alors $f \in A$ et donc $f \in V$ et $\|f\|_v \leq C$.

(b) - Φ est une contraction de L^1_m. Soit f un élément de V, on a donc $\|\Phi f\|_1 \leq \|f\|_1$ et donc $\sup_{n\geq 0}\{\|\Phi^n f\|_1, f \in V, \|f\| \leq 1\} \leq 1 < \infty$.

(c) - Par hypothèse, il existe $n_0 > 0$ tel que $\gamma = \inf |(T^{n_0})'(x)| > 1$. Il existe $N > 0$ tel que $\gamma^N > 2, \gamma^{N-1} \leq 2$ et $\sup \left|\frac{(T^{Nn_0})''(x)}{[(T^{Nn_0})'(x)]^2}\right| < \infty$.

On pose $S = T^{Nn_0}$, S est un élément de $\mathcal{C}$, en effet : la subdivision associée à S est la plus fine contenue dans $\{(T^{-Nn_0+1})I_{i_{Nn_0-1}} \cap \cdots \cap T^{-1}I_{i_1} \cap I_{i_0}\}_{(i_0,\ldots,i_{Nn_0-1})\in J^{Nn_0}}$, on la note $(J_j)_{j\in J}$. Sur J_j, S est strictement monotone comme composée de fonctions strictement monotones. L'ensemble $\{S^{-1}(J_j)\}_{j\in J}$ est composé d'un nombre fini d'intervalles distincts, on le voit par récurrence, pour $Nn_0 = 2$, la subdivision de T^2 est contenue dans $(T^{-1}(I_{i_1}) \cap I_{i_0})_{(i_0,i_1)\in J^2}$.

Pour i_0, i_1 dans I on a : $T(T^{-1}(I_{i_1}) \cap I_{i_0}) = T(I_{i_0}) \cap I_{i_1}$. Mais il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles distincts $T(I_{i_0})$ d'où un nombre fini d'intervalles distincts dans $\{S(J_j)\}_{j\in J}$.

On a : $|S'(x)| = |(T^{n_0})'(T^{n_0(N-1)}x)(T^{n_0})'(T^{n_0(N-2)}(x)) \cdots (T^{n_0})'(x)| > \gamma^N > 2$ d'où $\inf |S'(x)| \geq 2$.

La condition (4) est évidemment vérifiée.

L'opérateur de Perron-Frobenius associé à S est Φ^{Nn_0} que l'on va écrire sous la forme :

$$\Phi^{Nn_0} f(x) = \sum_{j\in J} f(\sigma_j x)\phi_j(x)\chi_j(x),$$

où $\sigma_j(x) = S_j^{-1}(x)$ sur J_j, $\phi_j(x) = \frac{1}{|S_j'(\sigma_j x)|} \leq \gamma^{-N}$ et $\chi_j(x) = 1_{S_j(\overline{I_j})}(x)$.

Soit $f \in V$.

On calcule la variation de $\Phi^{n_0 N} f$

$$v[\Phi^{n_0 N} f] = v[\sum_{j\in J} f \circ \sigma_j \phi_j \chi_j] \leq \sum_{j\in J} v[f \circ \sigma_j \phi_j \chi_j].$$

On pose $\chi_j = 1_{[a_j,b_j]}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} v[f \circ \sigma_j \phi \chi_j] &\leq v_{[a_j,b_j]}[f \circ \sigma_j \phi_j] + |(f \circ \sigma_j \phi_j)(a_j)| + |(f \circ \sigma_j \phi_j)(b_j)| \\ &\leq v_{[a_j,b_j]}[f \circ \sigma_j \phi_j] + v_{[a_j,b_j]}[f \circ \sigma_j \phi_j] + 2d_j \end{aligned}$$

où $d_i = \inf\{|(f \circ \sigma_j \phi_j)(x)|,\ x \in [a_j, b_j]\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} d_j &\leq \frac{1}{b_j - a_j} \int_{a_j}^{b_j} |f \circ \sigma_j \phi_j| dm = \frac{1}{m(S(\overline{J_j}))} \int_{a_j}^{b_j} |f \circ \sigma_j| \phi_j dm \\ &\leq \frac{1}{m(S(\overline{J_j}))} \int_{J_j} |f| dm \text{ par changement de variables.} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall j \in J \quad m(S(\overline{J_j})) \geq \delta.$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} v(\Phi^{N n_0} f) &\leq 2 \sum_{j\in J} v_{[a_j,b_j]}[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j] + \frac{2}{\delta} \sum_{j\in J} \int_{J_j} |f| dm \\ &\leq 2 \sum_{j\in J} v_{[a_j,b_j]}[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j] + \frac{2}{\delta} \|f\|_1. \end{aligned}$$

On calcule maintenant $v_{[a_j,b_j]}[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j]$.

$$\begin{aligned} v_{[a_j,b_j]}[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j] &= \int_{[a_j,b_j]} |d[f \circ \sigma_j \cdot \phi_j]| \\ &\leq \int_{[a_j,b_j]} |\phi_j||d[f \circ \sigma_j]| + \int_{[a_j,b_j]} |\phi_j'||f \circ \sigma_j| dm \\ &\leq \gamma^{-N} \int_{[a_j,b_j]} |df \circ \sigma_j| + \int_{[a_j,b_j]} |\frac{\phi_j'}{\phi_j}||\phi_j||f \circ \sigma_j| dm \\ &\leq \gamma^{-N} \int_{J_j} |df| + K \int_{J_j} |f| dm \end{aligned}$$

où $K = \sup_{j\in J} \sup_{x\in[a_j,b_j]} |\frac{\phi_j'}{\phi_j}(x)|$. On montre que K est fini :

On a pour x dans $[a_j, b_j]$ $\phi_j(x) = \frac{1}{S_j'(\sigma_j x)} = \sigma_j'(x)$.

Alors :

$$\phi_j'(x) = \frac{S_j''(\sigma_j x)\sigma_j'(x)}{[S_j'(\sigma_j x)]^2} = \frac{S_j''(\sigma_j x)}{[S_j'(\sigma_j x)]^2}\phi_j(x).$$

Ainsi :

$$K = \sup_{j \in J} \sup_{x \in [a_j, b_j]} \left|\frac{S_j''(\sigma_j x)}{[S_j'(\sigma_j x)]^2}\right| = \sup_{j \in J} \sup_{x \in I_j} \left|\frac{S_j''(x)}{[S_j'(x)]^2}\right|$$

qui est fini d'après l'hypothèse (4).

Alors, on a :

$$\begin{aligned} v(\Phi^{Nn_0} f) &\leq 2\sum_{j \in J}[K \int_{I_j} |f| dm + \gamma^{-N} \int_{I_j} |df|] + \frac{2}{\delta}\|f\|_1 \\ &\leq 2(K + \frac{1}{\delta})\|f\|_1 + 2\gamma^{-N} v(f). \end{aligned}$$

Comme $\|\Phi^{n_0 N} f\|_1 \leq \|f\|_1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\Phi^{n_0 N} f\|_v &\leq 2\gamma^{-N}\|f\|_v + [1 + 2(K + \frac{1}{\delta})]\|f\|_1 \\ &\leq \alpha\|f\|_v + \beta\|f\|_1 \text{ où } \alpha = 2\gamma^{-N} < \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

On remarque ici que dans le cas d'une subdivision dénombrable, l'hypothèse (4) sur T est nécessaire.

(d) - Si V est une partie bornée de $(V, \|\cdot\|_v)$, comme Φ est un opérateur borné de V alors $\Phi^n V$ est une partie bornée de $(V, \|\cdot\|_v)$ donc de $(L_m^1, \|\cdot\|_1)$.

On en déduit alors sur $\Phi^{n_0} V$ est une partie relativement compacte de $(V, \|\cdot\|_v)$ car d'après la preuve du (a) l'injection de $(V, \|\cdot\|_v)$ dans $(L_m^1, \|\cdot\|_1)$ est compacte.

Théorème 5.2. *Sous les hypothèses (a), (b), (c) et (d), Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 : $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et Φ s'écrit alors :*

$$\Phi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Phi_i + \psi.$$

Où les Φ_i sont des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{V}$ dans $\Phi_i(\mathcal{V})$ qui est de dimension finie et est contenu dans $\mathcal{V}$, et où ψ est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{V}$ qui vérifie : $\psi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ et ψ a un rayon spectral $\rho(\psi) < 1$ dans $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$. De plus on a :

$$\psi\Phi_i = \Phi_i\psi = 0 \quad \Phi_i\Phi_j = 0 \text{ si } i \neq j \quad \Phi_i^2 = \Phi_i.$$

On peut alors écrire : $\Phi^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n \Phi_i + \psi^n$ pour tout $n > 0$.

Preuve : Elle se fait en plusieurs étapes.

1ère étape : on démontre que Φ a un nombre fini de valeurs propres de module 1 et que les espaces propres associés sont de dimension finie.

Lemme 5.3. *Soit $m \geq 1$ alors,* $\|\Phi^{mn_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m \|f\|_{\mathcal{V}} + L\|f\|_{\mathcal{L}}$.

Preuve : D'après les hypothèses (b) et (c) on a :

pour tout m, $\|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} \leq H < \infty$ donc $\|\Phi^m f\|_{\mathcal{L}} \leq H\|f\|_{\mathcal{L}}$

et $\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha\|f\|_{\mathcal{V}} + \beta\|f\|_{\mathcal{L}}$.

Alors $m \geq 1$, $\|\Phi^{mn_0}\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha\|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{V}} + \beta\|\Phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha\|\phi^{(m-1)n_0} f\|_{\mathcal{V}} + \beta H\|f\|_{\mathcal{L}}$ par récurrence on obtient alors :

$$\|\Phi^m f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^m \|f\|_{\mathcal{V}} + \beta H(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1})\|f\|_{\mathcal{L}}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ on en déduit que $\beta H(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}) \leq \frac{\beta H}{1-\alpha}$. On en déduit alors le lemme 5.4.

Lemme 5.4. *Les normes $(\|\Phi_1^n\|_{\mathcal{V}})_{n\geq 1}$ sont uniformément bornées.*

Preuve : D'après le lemme 5.3 on a : $\|\Phi^{mn_0}\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^{m-n_0} + L$ si $m \geq 0$.

Comme Φ est un opérateur borné par rapport à la norme de $\mathcal{V}$, il en est de même pour Φ^n, $n < n_0$, il existe donc $M > 0$ tel que, $n < n_0$ $\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}} \leq M < \infty$.

D'où l'uniforme bornitude de $\{\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}}\}_{n\geq 0}$.

On note pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ $\mathcal{V}(\lambda) = \{f \in \mathcal{V} : \Phi f = \lambda f\}$ c'est l'espace propre associé à λ, si $\mathcal{V}(\lambda) \neq \{0\}$ alors λ est une valeur propre de Φ.

Lemme 5.5. *$\mathcal{V}(\lambda)$ est de dimension finie si $|\lambda| = 1$.*

Preuve : Pour cela, on montre que $X = \mathcal{V}(\lambda) \cap \{f \in \mathcal{V} : \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\}$ est compact.

Soit $f \in X$, $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1$ et $\Phi f = \lambda f$.

Alors $\|\Phi^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} = \|\lambda^{n_0} f\|_{\mathcal{V}} = \|f\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha\|f\|_{\mathcal{V}} + \beta\|f\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha\|f\|_{\mathcal{V}} + \beta$. Comme $0 < \alpha < 1$ alors : $\|f\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$.

X est donc une partie bornée de $\mathcal{V}$, par (d) elle est transformée en une partie compacte de $\mathcal{L}$ par Φ^{n_0}. Mais X est Φ^{n_0}-invariant. X est donc une partie compacte de $\mathcal{L}$ donc $\dim \mathcal{V}(\lambda) < +\infty$.

Lemme 5.6. *Φ n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1.*

Preuve : Dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de valeurs propres distinctes de module 1 : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots \quad \lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Pour tout n, on choisit f_n dans $\mathcal{V}(\lambda_n), f_n \neq 0$. Les $(f_n)_{n \geq 0}$ sont linéairement indépendants (dans $\mathcal{L}$ comme dans $\mathcal{V}$).

On note $X(n) = \text{vect}\ \{f_1, \ldots, f_n\}$. On a $X(n) \subset X(n+1)$. (l'inclusion est stricte)

Le lemme de F. Riesz prouve alors l'existence d'une suite $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ telle que $\|g_n\|_{\mathcal{L}} = 1$ et $\|g_n - f\|_{\mathcal{L}} \geq \frac{1}{2}$ où $f \in X(n)$ et $g_n \in X(n)$.

On a :

Si $f \in X(n), f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, alors $\Phi^m(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m a_i f_i \in X(n)$

et donc $\Phi^m(f) \in X(n)$.

Si $f \in X(m)$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\lambda_m^p}\Phi^p(f) - f \in X(m-1)$. Car $\frac{1}{\lambda_m^p}\Phi^p f - f = \sum_{i=1}^{m} a_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_m})^p f - \sum_{i=1}^{m} a_i f_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i ((\frac{\lambda_i}{\lambda_m})^p - 1) f_i$.

Pour $n \geq n_0$ $\|\frac{1}{\lambda_j^n}\Phi^n g_j\|_{\mathcal{V}} = \|\Phi^n g_j\|_{\mathcal{V}} \leq \alpha^{k(n)}\|g_j\|_{\mathcal{V}} + L\|g_j\|_{\mathcal{L}} = \alpha^{k(n)}\|g_j\|_{\mathcal{V}} + L$. Comme $0 < \alpha < 1$, il existe alors $n(j) > 0$ tel que

pour tout $n \geq n(j)$ et $n \geq n_0, \alpha^{k(n)}\|g_j\|_{\mathcal{V}} \leq 1$.

D'où l'ensemble $\{\frac{1}{\lambda_j}\Phi^n g_j, j \in \mathbb{N}^*, n \geq \sup\{n(j), n_0\}\}$ est la transformée par Φ^{n_0} d'une partie bornée de $\mathcal{V}$, d'après (4) c'est donc une partie compacte de $\mathcal{L}$, il existe donc deux sous-suites (λ_s) et (n_s) croissantes de (j) et (s) telles que la suite $(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s})_{s>0}$ converge dans $\mathcal{L}$. Mais :

$$\begin{aligned} D &= \|\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s} - \frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}}\Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}}\|_{\mathcal{L}} \\ D &= \|g_{j_{s+1}} + \frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}}\Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}} + \frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s}\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\lambda_{j_{s+1}}^{n_{s+1}}}\Phi^{n_{s+1}} g_{j_{s+1}} - g_{j_{s+1}}$ est dans $X(j_{s+1} - 1)$ et comme $\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s}$ est dans $X(j_s)$ qui est contenu dans $X(j_{s+1} - 1)$ on en déduit que $D \geq \frac{1}{2}$ par hypothèse sur la suite $(g_n)_{n \geq 0}$. Ceci contredit le fait que $(\frac{1}{\lambda_{j_s}^{n_s}}\Phi^{n_s} g_{j_s})$ converge dans $\mathcal{L}$ et donc il existe un nombre fini de valeurs propres de module 1.

2ème étape : On construit les opérateurs Φ_λ.

Lemme 5.7. *Quelque soit le nombre complexe λ de module 1, quelque soit f dans $\mathcal{V}$, il existe $\overline{f}$ dans $\mathcal{V}$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f-\overline{f}\|_{\mathcal{L}}=0.$$

Preuve : Soit $\overline{\mathcal{V}}=\{f\in\mathcal{L}:\lim_{n\to\infty}\|f-g_n\|_{\mathcal{L}}=0$ où $(g_n)_{n>0}$ est une suite de $\mathcal{V}\}$ $\overline{\mathcal{V}}$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{V}}}$ qui est la restriction à $\overline{\mathcal{V}}$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$.

$\Phi:\mathcal{V}\to\Phi(\mathcal{V})\subset\mathcal{V}$ est un opérateur linéaire tel qu'il existe $H>0, \|\Phi^n\|_{\mathcal{L}}\le H$ pour $m=1,2,\ldots$, par le théorème de Hahn-Banach il existe un prolongement $\hat{\Phi}:\overline{\mathcal{V}}\to\hat{\Phi}(\overline{\mathcal{V}})\subset\overline{\mathcal{V}}$ de Φ vérifiant :

$$\forall f\in\mathcal{V},\forall m>0\ \ \hat{\Phi}^m f=\Phi^m f \text{ et } \|\hat{\Phi}^m\|_{\overline{\mathcal{V}}}\le H \text{ pour } m=1,2,\ldots.$$

Le lemme 5.4. entraîne que les normes $\|\Phi^m\|_{\mathcal{V}}$ $m=1,2,\ldots$ sont uniformément bornées par $M=\sup_{1\le m<\infty}\|\Phi^m\|_{\mathcal{V}}$.

Soit $f\in\mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+n_0}}\hat{\Phi}^k f\|_{\mathcal{V}} &\le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|\hat{\Phi}^k f\|_{\mathcal{V}}\le\frac{n-1}{n}M\|f\|_{\mathcal{V}}+\frac{1}{n}\|f\|_{\mathcal{V}}\\ &\le \begin{cases}\|f\|_{\mathcal{V}} & \text{si } M\le 1\\ M\|f\|_{\mathcal{V}} & \text{si } M>1\end{cases}.\end{aligned}$$

L'ensemble $\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+n_0}}\hat{\Phi}^k f,\ \ n\in I\!N^*\}$ est une partie bornée de $\mathcal{V}$ par (d) elle est transformée par Φ^{n_0} en une partie compacte de $\mathcal{L}$. C'est $\{\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f\ n>0\}$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente dans $\mathcal{L}$ donc dans $\overline{\mathcal{V}}$. En fait c'est la suite elle-même qui converge dans $\mathcal{L}$ donc dans $\overline{\mathcal{V}}$.

Donc il existe $\overline{f}\in\overline{\mathcal{V}}$ tel que $\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(f)-\overline{f}\|_{\mathcal{L}}=0$. On montre maintenant que $\overline{f}$ est dans $\mathcal{V}$, on observe que :

$$\|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f\|_{\mathcal{V}}\le\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\|\Phi^k f\|_{\mathcal{V}}\le M\|f\|_{\mathcal{V}}.$$

$\overline{f}$ est donc limite dans $\mathcal{L}$ d'une suite de points de $\mathcal{V}$ qui sont bornés par $M\|f\|_{\mathcal{V}}$ dans $\mathcal{V}$, l'hypothèse (a) permet de conclure que $\overline{f}\in\mathcal{V}$ et $\|\overline{f}\|_{\mathcal{V}}\le M\|f\|_{\mathcal{V}}$.

On peut alors poser pour tout f dans $\mathcal{V}$ $\overline{f}=\Phi_\lambda f$. L'opérateur Φ est un opérateur linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\Phi_\lambda(\mathcal{V})\subset\mathcal{V}$. L'inégalité $\|\overline{f}\|_{\mathcal{V}}\le M\|f\|_{\mathcal{V}}$ entraîne alors que

$$\|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{V}}\le M \text{ pour tout } \lambda\in\mathbb{C}\ ,|\lambda|=1.$$

On a aussi,

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\Phi^k f\right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\|\Phi^k f\| \leq H\|f\|_{\mathcal{L}} \text{ pour tout } n,$$

on a donc :

$$\|\Phi_\lambda f\|_{\mathcal{L}} \leq H\|f\|_{\mathcal{L}} \text{ et donc } \|\Phi_\lambda\|_{\mathcal{L}} \leq H.$$

3ème étape : On démontre les dernières assertions du théorème.

Lemme 5.8. $\Phi_\lambda(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\lambda)$.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{V}(\lambda)$, on a : $\Phi^k f = \lambda^k f$ $k \geq 1$.

Alors : $\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k f = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} f = f \Rightarrow \Phi_\lambda f = f$ et $\mathcal{V}(\lambda) \subset \Phi_\lambda(\mathcal{V})$.

Soit $f \in \Phi_\lambda(\mathcal{V})$ alors il existe g dans $\mathcal{V}$ tel que $f = \Phi_\lambda g$ pour tout $n > 0$ on a :

$$\Phi[\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(g)] = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^{k+1}(g) = \frac{n+1}{n}\lambda\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n_0+n}\frac{1}{\lambda^k}\Phi^k(g) - \frac{1}{n}\frac{1}{\lambda^{n_0-1}}\Phi^{n_0}g.$$

On passe alors à la limite dans $\mathcal{L}$, $\Phi_\lambda f = \lambda f$.

On en déduit alors que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, non valeur propre de Φ, $\Phi_\lambda = 0$.

Lemme 5.9. *Soit λ une valeur propre de module 1 de Φ alors $\Phi_\lambda^2 = \Phi_\lambda$.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{V}$ alors $\Phi_\lambda f \in \mathcal{V}(\lambda)$ comme si $f \in \mathcal{V}(\lambda)$ $\Phi_\lambda f = f$ on en déduit que $\Phi_\lambda^2 f = \Phi_\lambda f$. Φ_λ est donc une projection de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}(\lambda)$.

Lemme 5.10. *Si μ et λ sont distinctes alors $\Phi_\lambda\Phi_\mu = 0$.*

Preuve : Si $f \in \mathcal{V}, \Phi_\mu f \in \mathcal{V}(\mu) \Rightarrow \Phi_\lambda\Phi_\mu f \in \mathcal{V}(\mu) \cap \mathcal{V}(\lambda) = \{0\}$.

On peut alors décomposer $\mathcal{V}$ en : $\mathcal{V} = \oplus_{i=1}^p \mathcal{V}(\lambda_i) \oplus \mathcal{W}$. On note maintenant Φ_i à la place de Φ_{λ_i}. Les Φ_i sont des projections de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}(\lambda_i)$ qui sont de dimension finie. $f \in \mathcal{V}$ s'écrit alors de façon unique

$$f = \Phi_1 f + \cdots + \Phi_p f + g \text{ où } g \in \mathcal{W}.$$

Alors pour tout $m > 0$ on a :

$$\Phi^m f = \lambda_1^m\Phi_1 f + \cdots + \lambda_p^m\Phi_p f + \Phi^m g,$$

en effet :

Soit σ la projection de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$, on pose $\psi f = \Phi g = \Phi\sigma f = \sigma\Phi f$. On a $\sigma\psi = \psi$ car $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$.

On a donc : $\Phi^m\sigma = \psi^m$ ce qui entraîne $\psi\Phi_i = \Phi_i\psi = 0$ car $\mathcal{V}(\lambda_i) \cap \mathcal{W} = \{0\}$.

Par construction, ψ n'a pas de valeur propre de module 1 dans $\mathcal{V}$. C'est un opérateur borné de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{L}$ on a :

$$\|\psi^m\|_{\mathcal{L}} = \|\Phi^m - \lambda_1^m\Phi_1 - \cdots - \lambda_p^m\Phi_p\|_{\mathcal{L}} \leq \|\Phi^m\|_{\mathcal{L}} + \|\Phi_1\|_{\mathcal{L}} + \cdots + \|\Phi_p\|_{\mathcal{L}} \leq (p+1)M.$$

De même on a : $\|\psi^m\|_{\mathcal{V}} \leq (p+1)H$. Ainsi on a $\psi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ et ψ a un rayon spectral $\rho(\psi) < 1$ dans $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$.

Conséquences : D'après la proposition 5.1., on peut appliquer ce théorème à Φ. On s'intéresse à la valeur $\lambda = 1$, on définit alors $h = \Phi_1(1)$. Comme la fonction 1 est un élément de V, d'après la preuve du théorème (2ème étape) on sait que $h \in V$, il reste à montrer que h n'est pas nulle. On a $\int_0^1 hdm = 1$.

En effet h est définie comme la limite dans $\mathcal{V}$ des fonctions $h_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1)$ on a pour tout $n > 0$, $\int_0^1 h_n dm = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n+n_0-1} \int_0^1 \Phi^k(1)dm = 1$ d'après la propriété (iv) de l'opérateur de Perron-Frobenius. Comme h est dans V donc dans L_m^1, on en déduit alors que $\int_0^1 hdm = 1$ donc que h n'est pas nulle.

Par construction h est positive d'après (ii) et (iv). On en déduit alors que Φ admet 1 pour valeur propre et qu'une fonction propre associée est h.

Exemples :

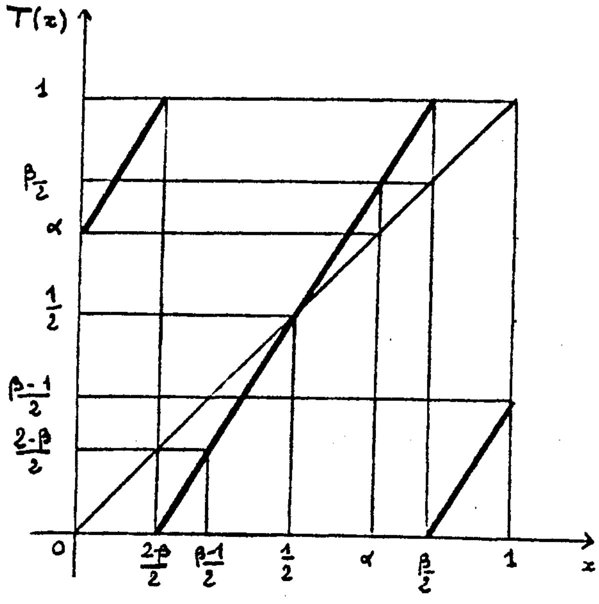
La transformation "fraction continue" : sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$, on a : $Tx = \frac{1}{x} - n$. La réciproque vaut donc : $\sigma_n x = \frac{1}{x+n}$ et $\sigma_n' x = \frac{-1}{(x+n)^2}$. L'opérateur Φ vaut alors : $\Phi f(x) = \sum_{n\geq 1} f(\frac{1}{x+n})\ \frac{-1}{(x+n)^2}$. $h(x) = \frac{1}{\log 2}\ \frac{1}{1+x}$ car $\int_0^1 h(x)dx = 1$ et $\Phi h(x) = \frac{1}{\log 2}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+\frac{1}{x+n}}\frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{\log 2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x+n+1}\frac{1}{x+n} = \frac{1}{\log 2}\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}) = \frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}$.

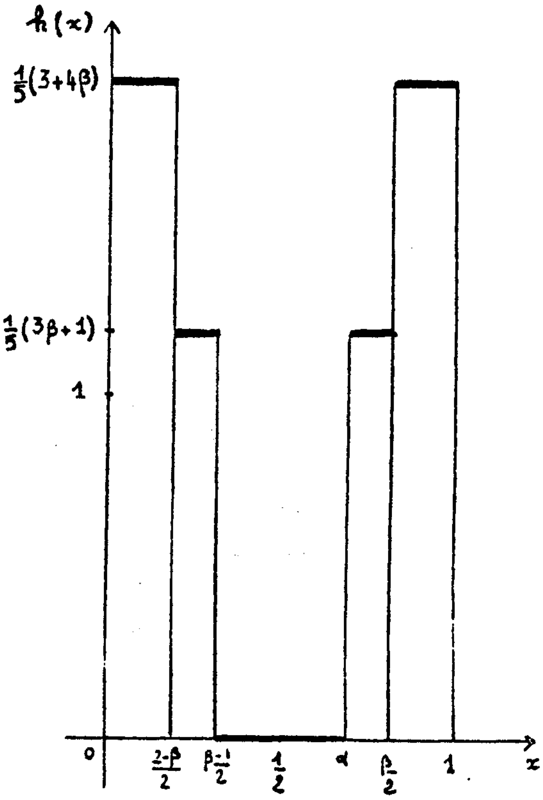
Dans le cas d'une transformation markovienne linéaire on a $h = 1$ et m est T-invariante.

Pour les β-transformations, si $\beta \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 0$, $\Phi f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\beta-1} f(\frac{x+k}{\beta})$ et $\Phi 1 = 1$ donc $h = 1$.

Remarque : h n'est pas obligatoirement strictement positive, par exemple si on prend $Tx = \beta x + \alpha[1]$ $\beta > 0, \beta^2 = \beta + 1$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$.

$$h(x) = \frac{1}{5}(3+4\beta)(1_{[0,(2-\beta)/2[}(x) + 1_{[\beta/2,1[}(x)) + \frac{1}{5}(3\beta+1)(1_{[(2-\beta)/2[,(\beta-1)/2[}(x) + 1_{[\alpha,\beta/2[}(x)).$$





On a $\int_0^1 h(x)dx = 1$ et $\Phi h = h$ en effet :

$$\Phi f(x) = (\beta-1)[f(\frac{x-\alpha}{\beta})1_{[\alpha,1]}(x) + f(\frac{x-\alpha+1}{\beta}) + f(\frac{x-\alpha+2}{\beta})1_{[0,\frac{\beta-1}{2}]}(x)].$$

$$\begin{aligned}
\Phi h(x) &= \frac{1}{5}(\beta-1)(3+4\beta)[(1_{[\alpha,1[}(x) + 1_{[2,\frac{3+\beta}{2}[}(x))\; 1_{[\alpha,1]}(x) + 1_{[\alpha-1,0]}(x) \\
&+ 1_{[1,\frac{1+\beta}{2}[}(x) + (1_{[\alpha-2;1[}(x) + 1_{[0,\frac{\beta-1}{2}[}(x))1_{[0,\frac{\beta-1}{2}]}(x)] + \frac{1}{5}(\beta-1)(3\beta+1)[(1_{[1,\frac{2-\beta}{2}[}(x) \\
&+ 1_{[\frac{\beta+2}{2}[}(x))1_{[\alpha,1]}(x) + 1_{[0,\frac{1-\beta}{2}[}(x) + 1_{[\frac{\beta}{2},1[}(x) + (1_{[-1,-\frac{\beta}{2}[}(x) + 1_{[\frac{\beta}{2}-1,0[}(x))1_{[0,\frac{\beta-1}{2}]}(x)] \\
&= \frac{1}{5}(3\beta+1)[1_{[\alpha,1[}(x) + 1_{[0,\frac{\beta-1}{2}[}] + \frac{1}{5}(\beta+2)[1_{[0,\frac{2-\beta}{2}[} + 1_{[\frac{\beta}{2},1[}(x)] = h(x).
\end{aligned}$$

On a ainsi construit une mesure $\mu = hm$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue mais non nécessairement équivalente à m tel que (T,μ) soit un système dynamique.

Hypothèse : Dans toute la suite, on suppose que **1 est une valeur propre simple de Φ.**

Alors le système (T,μ) est ergodique.

On en déduit que les autres valeurs propres de module 1 de Φ sont toutes simples en effet :

On montre d'abord que :

Si $\Phi u = \lambda u \quad u \in V, u \neq 0$ et $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$, il existe $v \in V$ ne s'annulant pas sur I tel que $u = vh$.

Car $|\Phi u| = |u|$, mais d'après (ii) $|\Phi u| \leq \Phi|u|$ donc $\Phi|u| \geq |u| \geq 0$. D'après (iv) $\int_0^1 \Phi|u|dm = \int_0^1 |u|dm$. Ainsi $\Phi|u| = |u|$ m.p.p. donc on a $\Phi|u| = |u|$ dans V, comme 1 est valeur propre simple de Φ associée à h, on en déduit que $|u| = kh$ où k est une constante positive.

On peut donc écrire $u = vh$, v étant un élément de V ne s'annulant pas sur I tel que : $\Phi(vh) = \lambda vh$.

Sur $\{h \neq 0\}$, on peut poser $P(v) = \frac{\Phi(vh)}{h}$. P admet T pour adjoint dans L^2_μ et est une contraction de L^2_μ, en effet, on note $\langle v, w\rangle_\mu$ le produit scalaire de L^2_μ :

$$\langle Pv, w\rangle_\mu = \int_0^1 \Phi(vh) \cdot w \; dm = \int_0^1 v \cdot w \circ T \cdot hdm = \langle v, w \circ T\rangle_\mu$$

$$\|Pv\|_{2,\mu} = \sup_{\|w\|_{2,\mu} \leq 1} |\langle Pv, w\rangle_\mu|.$$

Comme

$$\begin{aligned}
|\langle Pv, w\rangle_\mu| &= |\int_0^1 \Phi(vh)wdm| = |\int_0^1 v \cdot w \circ Td\mu| \leq \int_0^1 |v \cdot w \circ T|d\mu \\
&\leq [\int_0^1 v^2 d\mu]^{\frac{1}{2}} [\int_0^1 w^2 \circ Td\mu]^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{2,\mu}\|w\|_{2,\mu},
\end{aligned}$$

on a $\|Pv\|_{2,\mu} \leq \|v\|_{2,\mu}$.

Soit, maintenant, $\lambda \neq 1$ une valeur propre de module 1 de Φ. Il existe donc $v \in V$ ne s'annulant pas sur I tel que :

$$\Phi(vh) = \lambda \; vh \text{ donc } Pv = \lambda v,$$

λ est donc une valeur propre de module 1 de P et v est un point fixe de l'opérateur $\frac{P}{\lambda}$.

$\frac{P}{\lambda}$ est une contraction de L^2_μ car $|\lambda| = 1$ et son adjoint est λT, en effet :

$$\langle \frac{P}{\lambda}v, w\rangle_\mu = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \Phi(vh)wdm = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 v \cdot w \circ Td\mu = \frac{1}{\lambda}\langle v, w \circ T\rangle = \langle v, \frac{1}{\overline{\lambda}} w \circ T\rangle$$

et $\lambda\overline{\lambda} = 1$ d'où $\frac{1}{\overline{\lambda}} = \lambda$.

Dans un espace de Hilbert, les points fixes d'une contraction sont ceux de son adjoint.

Ainsi $\lambda v \circ T = v$.

Si $v_1 \in V$ vérifie $\lambda v_1 \circ T = v_1$ alors comme v ne s'annule pas sur I on a : $(\frac{v_1}{v}) \circ T = \frac{v_1}{v}$.

Alors $\Phi(\frac{v_1}{v} \circ T \cdot h) = \Phi(\frac{v_1}{v} \cdot h)$ i.e. $\frac{v_1}{v} h = \Phi(\frac{v_1}{v} \cdot h)$.

Donc $\frac{v_1}{v}$ est une constante et $\frac{P}{\lambda}$ n'admet qu'un espace vectoriel de dimension 1 comme invariant, c'est-à-dire λ est une valeur propre simple de P et donc de Φ.

On suppose donc que toutes les valeurs propres de Φ sont simples.

On veut maintenant démontrer le théorème central limite : soit f un élément de V à valeurs réelles, sous l'hypothèse $\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 (\frac{S_n f}{\sqrt{n}})^2 h dm > 0$ et si $\mu(f) = 0$ on a :

$$\lim_{n \to \infty} \mu[\frac{S_n f}{\sigma \sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^{v} e^{-u^2/2} du \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de Paul Lévy, il suffit de prouver que pour tout t de $\mathbb{R}$ $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm = e^{-t^2/2}$.

On remarque que :

$$\int_0^1 e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h \, dm = \int_0^1 e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot h \cdot 1 \circ T^n dm = \int_0^1 \Phi^n[e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot h] dm.$$

On est donc amené à étudier $\Phi^n[e^{it\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot h]$ et pour cela à construire un nouvel opérateur $\Phi_f(i\theta)$ vérifiant : $\Phi_f^n(i\theta)(g) = \Phi^n[e^{i\theta S_n f} g]$ pour tout g de V et tout θ réel.

6. Les perturbations de l'opérateur Φ

On perturbe l'opérateur Φ : soit f une fonction réelle appartenant à V, pour tout θ dans $\mathbb{R}$, on définit l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$ par :

$$\Phi_f(i\theta)(g) = \Phi[\exp(i\theta f) \cdot g] \quad \text{où } g \text{ est dans } V.$$

Propriétés de l'opérateur $\Phi_f(i\theta)$:

[P1] $\Phi_f(0) = \Phi$.

[P2] Pour tout θ de $\mathbb{R}$, $\Phi_f(i\theta)$ est un opérateur continu de V.

[P3] L'application $\theta \to \Phi_f(i\theta)$ est analytique.

[P4] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a l'égalité m-presque-partout

$$\Phi_f^n(i\theta)(g) = \Phi^n[\exp(i\theta S_n f) \cdot g] \quad \text{où } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

La propriété [P4] permet de faire l'étude de $S_n f$ en utilisant les propriétés spectrales de $\Phi_f(i\theta)$.

Preuves :

[P2] : On montre d'abord que si f est dans V et θ dans $\mathbb{R}$ alors $\exp(i\theta f)$ est dans V. On a :

$$\|\exp(i\theta f)\|_1 = \int_0^1 |\exp(i\theta f)| dm = 1 \quad \text{donc } \exp(i\theta f) \in L^1_m.$$

Pour toute subdivision $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ finie de $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} |\exp(i\theta f)(a_j) - \exp(i\theta f)(a_{j+1})| &= \sum_{j=0}^{n-1} [[\cos(\theta f(a_{j+1})) - \cos(\theta f(a_j))]^2 \\
&\quad + [\sin(\theta f(a_{j+1})) - \sin(\theta f(a_j))]^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2} \sum_{j=0}^{n-1} [1 - \cos(\theta f(a_j)) \cos(\theta f(a_{j+1})) \\
&\quad - \sin(\theta f(a_j)) \sin(\theta f(a_{j+1}))]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2} \sum_{j=0}^{n-1} [1 - \cos(\theta(f(a_{j+1}) - f(a_j)))]^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \sum_{j=0}^{n-1} |\sin(\frac{\theta}{2}(f(a_{j+1}) - f(a_j)))| \\
&\leq 2\pi \frac{|\theta|}{2} \sum_{j=0}^{n-1} |f(a_{j+1}) - f(a_j)| \quad \text{car } |\sin \alpha| \leq \pi |\alpha|
\end{aligned}$$

d'où

$$v[\exp(i\theta f)] \leq \pi |\theta| v(f) < \infty.$$

On fixe maintenant θ dans $\mathbb{R}$ et g dans V

$$\|\Phi_f(i\theta)(g)\|_v \leq \|\Phi\|_v \cdot \|\exp(i\theta f) \cdot g\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|\exp(i\theta f)\|_v \cdot \|g\|_v.$$

D'où la continuité de $\Phi_f(i\theta)$ dans V et on a : $\|\Phi_f(i\theta)\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|\exp(i\theta)\|_v$.

[P3] : Comme

$$\|\frac{(i\theta)^n}{n!} \Phi(f^n \cdot g)\|_v \leq \frac{|\theta|^n}{n!} \|\Phi\|_v \cdot \|f^n g\|_v \leq 2\|\Phi\|_v \cdot \|g\|_v \frac{[2|\theta| \cdot \|f\|_v]^n}{n!},$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \Phi(f^n g)$ est normalement convergente dans V et sa limite vaut $\Phi_f(i\theta)(g)$. Ainsi la fonction $\theta \to \Phi_f(i\theta)$ est analytique.

[P4] : On montre d'abord pour $f \in V$ et $g \in V$ que

$$\Phi[f \circ T \cdot g] = f \cdot \Phi g \quad m\text{ -presque partout.}$$

On note $\langle f, \phi \rangle$ pour $\int_0^1 f \cdot \phi dm$ si $f \in V$ et $\phi \in L_m^\infty$. On a par définition de Φ, pour tout ϕ de L_m^∞ :

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(f \circ T \cdot g), \phi \rangle &= \langle f \circ T \cdot g, \phi \circ T \rangle \\
&= \langle g, (f\phi) \circ T \rangle \text{ car} f \in V \Rightarrow f \in L_m^\infty \\
&= \langle \Phi g, \phi \cdot f \rangle = \langle f \cdot \Phi g, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϕ de L_m^∞, on en déduit que $\Phi[f \circ T \cdot g] = f \cdot \Phi g$ m-presque partout.

On peut alors démontrer [P4] par récurrence sur n :

c'est vrai au rang 1 par définition de $\Phi_f(i\theta)$.

Supposons que $\Phi_f^n(i\theta)(g) = \Phi^n[\exp(i\theta S_n f) \cdot g]$ m.p.p.

Alors, il existe $N_1 \in \mathcal{B}, m(N_1) = 0$ et sur $I \setminus N_1$ on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_f^{n+1}(i\theta)(g) &= \Phi_f^n(i\theta)[\Phi_f(i\theta)(g)] \\
&= \Phi^n[\exp(i\theta S_n f) \cdot \Phi_f(i\theta)(g)] \\
&= \Phi^n[\exp(i\theta S_n f)\Phi(\exp(i\theta f)g)].
\end{aligned}$$

Il existe $N_2 \in \mathcal{B}$ tel que $m(N_2) = 0$ et sur $I \setminus N_2$ on a :

$$\begin{aligned}
\Phi[\exp(i\theta f) \cdot g] \exp(i\theta S_n f) &= \Phi[\exp(i\theta S_n f) \circ T \cdot \exp(i\theta f) \cdot g] \\
&= \Phi[\exp(i\theta S_{n+1} f) \cdot g].
\end{aligned}$$

Soit alors $N_3 = N_1 \cup N_2$, on a : $m(N_3) = 0$ et sur $I \setminus N_3$,

$$\Phi_f^{n+1}(i\theta)(g) = \Phi^n[\Phi((\exp i\theta S_{n+1} f) \cdot g)] = \Phi^{n+1}[\exp(i\theta S_{n+1} f) g].$$

Le spectre de $\Phi_f(i\theta)$ est donné par le théorème des perturbations.

Proposition 6.1. *Il existe un réel $a > 0$ tel que si $|\theta| < a$, alors pour tout $n \geq 1$, pour tout $g \in V$, on peut écrire :*

$$\Phi_f^n(i\theta)(g) = \lambda_1^n(i\theta)\Phi_1(i\theta)(g) + \sum_{k=2}^{p} \lambda_k^n(i\theta)\Phi_k(i\theta)(g) + \psi_f^n(i\theta)(g).$$

Avec :

- les applications $\theta \to \Phi_k(i\theta), \theta \to \lambda_k(i\theta)$ et $\theta \to \psi_f(i\theta)$ sont analytiques dans un voisinage de $\theta = 0$.

- $\lambda_k(0) = \lambda_k, (\lambda_1 = 1)$ *et* $\lambda_k(i\theta)$ *est une valeur propre de* $\Phi_f(i\theta)$ *de module plus grand que* $\frac{2+\rho(\psi)}{3} = \rho_2$ *(plus petit que 1 car* $\|\Phi_f(i\theta)\|_1 \leq \|\Phi\|_1 \leq 1$*).*

- *les opérateurs* $\Phi_k(i\theta)$ *sont des projections de* V *sur le sous espace propre* $V(\lambda_k(i\theta))$ *qui est de dimension 1 et* $\Phi_k(0) = \Phi_k, (\Phi_1(f) = m(fh) \cdot h)$.

- *l'opérateur* $\psi_f(i\theta)$ *est un opérateur sur* V *de rayon spectral* $\rho(\psi_f(i\theta)) \leq \rho_2$, $\psi_f(0) = \psi$ *et pour tout* $1 \leq k \leq p$ *:*

$$\psi_f(i\theta)\Phi_k(i\theta) = \Phi_k(i\theta)\psi_f(i\theta) = 0 \quad et \quad \|\psi_f^n(i\theta)(h)\|_v \leq C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

Preuve :

Résultats préliminaires :

Notations :
$\mathcal{D}$ est l'ensemble des opérateurs de V à valeurs dans V.
Si $\Phi \in \mathcal{D}$

$$\begin{array}{ll} \rho(\Phi) & = \{\lambda \in \mathbf{C} \ : \lambda I - \Phi \text{ est inversible dans } \mathcal{D}\} \\ \sigma(\Phi) & = \mathbf{C} \ \setminus \rho(\Phi) \end{array}.$$

Si $\lambda \in \rho(\Phi), R(\lambda, \Phi) = (\lambda I - \Phi)^{-1}$ existe dans V.
$\mathcal{F}(\Phi)$ est l'ensemble de toutes les fonctions f qui sont analytiques dans un voisinage de $\sigma(\Phi)$. Si $f \in \mathcal{F}(\Phi)$, si $U \subset \sigma(\Phi)$ est un ouvert dont la frontière B est constituée d'un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan orientés positivement et si $U \cup B$ est contenu dans le domaine d'analycité de f, alors $f(\Phi)$ est défini par :

$$f(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \int_B f(\lambda) R(\lambda, \Phi) d\lambda.$$

Lemme 6.2. *L'ensemble* $\mathcal{G}$ *des éléments de* $\mathcal{D}$ *qui admettent un inverse dans* $\mathcal{D}$ *est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs dans* $\mathcal{D}$. *De plus l'application* $\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{G} & \to \mathcal{G} \\ A & \to A^{-1} \end{array} \right.$ *est un homéomorphisme pour la topologie de la convergence des opérateurs dans* $\mathcal{D}$.

Preuve : $\mathcal{G}$ n'est pas vide, car l'opérateur identité est dans $\mathcal{G}$.

Si A est dans $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}$ contient la sphère $S_A = \{B \in \mathcal{D} : \|B - A\|_v < \|A^{-1}\|_v^{-1}\}$ et si B est dans S_A, B^{-1} vaut $A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty}((A-B)A^{-1})^n$

$$\begin{aligned} \|B^{-1} - A^{-1}\|_v & \leq 2\|A^{-1}\|_v \sum_{n=1}^{\infty} \|((A-B)A^{-1})^n\|_v \\ & \leq 2\|A^{-1}\|_v \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \|A-B\|_v^n \cdot \|A^{-1}\|_v^n \end{aligned}$$

$$\leq \frac{8\|A^{-1}\|_v^2\|A-B\|_v}{1-4\|A^{-1}\|_v\|A-B\|_v}$$

d'où $\begin{cases} \mathcal{G} & \to \mathcal{G} \\ A & \to A^{-1} \end{cases}$ est un homéomorphisme

Corollaire 6.3. *Si Φ_1 et Φ sont dans $\mathcal{D}$, si $\lambda \in \rho(\Phi)$ et si $\|\Phi - \Phi_1\|_v < \frac{1}{4}\|R(\lambda,\Phi)\|_v^{-1}$ alors $\lambda \in \rho(\Phi_1)$ et :*

$$R(\lambda, \Phi_1) = R(\lambda, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_1) R(\lambda, \Phi)]^n.$$

Lemme 6.4. *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ vérifiant $\overline{U} \subset \rho(\Phi)$, alors il existe $r > 0$ tel que si $|\theta| < r$, on a : $\overline{U} \subset \rho(\Phi_f(i\theta))$ et pour tout $\lambda \in U$, $R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ est une fonction analytique au voisinage de $\theta = 0$.*

Preuve : D'après le corollaire 2, on sait que pour tout $\lambda \in \rho(\Phi)$,

si $\|\Phi - \Phi_f(i\theta)\|_v < \frac{1}{4}\|R(\lambda,\Phi)\|_v^{-1}$ alors $\lambda \in \rho(\Phi_f(i\theta))$.

Soit $\overline{U} \subset \rho(\Phi)$, alors pour tout $\lambda \in \overline{U}, R(\lambda, \Phi) \in V$ et n'est pas nul.

Comme

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \|R(\lambda,\Phi)\|_v = \lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{1}{|\lambda|} \|(I - \frac{\Phi}{\lambda})^{-1}\|_v = 0$$

on a alors $\delta = \inf_{\lambda \in \overline{U}} \frac{1}{4}\|R(\lambda,\Phi)\|_v^{-1} > 0$.

Pour tout $\lambda \in \overline{U} \subset \rho(\Phi)$ on a alors :

$$\|\Phi - \Phi_f(i\theta)\|_v < \delta$$

entraîne

$$\|\Phi - \Phi_f(i\theta)\|_v < \frac{1}{4}\|R(\lambda,\Phi)\|_v^{-1}$$

et donc $\lambda \in \rho(\Phi_f(i\theta))$, ainsi $\overline{U} \subset \rho(P_f(i\theta))$.

De plus $R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) = R(\lambda, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(i\theta)) R(\lambda, \Phi)]^n$ est une série qui converge normalement pour $\|\cdot\|_v$ et pour la norme de la convergence uniforme des opérateurs de $\mathcal{D}$. Comme la fonction $\theta \to \Phi - \Phi_f(i\theta)$ est analytique au voisinage de 0, on en déduit alors que $\theta \to R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ est analytique pour tout $\lambda \in U$ dès que $\|\Phi - \Phi_f(i\theta)\|_v < \delta$. Cette condition, à cause de [P1] et [P4] revient à $|\theta| < r$. D'où le lemme 3.

Lemme 6.5. *Soit g un élément de $\mathcal{F}(\Phi)$, alors il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $|\theta| < r$, $g \in \mathcal{F}(\Phi_f(i\theta))$ et $g(\Phi_f(i\theta))$ est un opérateur qui dépend analytiquement de θ au voisinage de $\theta = 0$.*

Preuve : Soit U un voisinage de $\sigma(\Phi)$ sur lequel g est analytique. Soit U_1 un voisinage de $\sigma(\Phi)$ dont la frontière B est constituée d'un nombre fini d'arcs de Jordan orientés positivement et tel que $U_1 \cup B \subseteq U$. D'après le lemme 3, il existe un réel $r > 0$ tel que $|\theta| < r$ entraîne $\theta \to R(\lambda, \Phi_f(i\theta))$ est une fonction analytique le long de B et la série $R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) = R(\lambda, \Phi) \sum_{n=0}^{\infty} [(\Phi - \Phi_f(i\theta))R(\lambda, \Phi)]^n$ converge uniformément pour la topologie de la convergence uniforme des opérateurs de $\mathcal{D}$ et normalement dans $(V, \|\cdot\|_v)$.

Ainsi $g(\Phi_f(i\theta)) = \frac{1}{2i\pi} \int_B g(\lambda) R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) d\lambda$ se développe au voisinage de 0 en une série entière en θ et donc $g(\Phi_f(i\theta))$ est un opérateur qui dépend analytiquement de θ si $|\theta| < r$.

Preuve de la proposition (6.1.)

Les points $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq p}$ sont des points isolés du spectre de Φ, il existe donc pour tout k, $r_k > 0$ tel que :

$$B(\lambda_k, r_k) \cap \sigma(\Phi) = \{\lambda_k\},$$

on prend par exemple $r_k = \inf\{\frac{1-\rho(\psi)}{3}, \frac{|\lambda_k - \lambda_j|}{2}\ j \neq k\}$. Ainsi les cercles $(C(\lambda_k, r_k))_k$ et $C(0, \frac{2\rho(\psi)+1}{3}) = C(0, \rho_2)$ sont entièrement contenus dans $\rho(\Phi)$. On note B la réunion de tous ces cercles, c'est une courbe constituée d'un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan, on va supposer que B est orientée positivement.

On peut alors définir les projections par :

- Soit n_k une fonction analytique dans un voisinage de $\sigma(\Phi)$, qui vaut 1 sur $B(\lambda_k, r_k)$ et 0 sur le reste de $\sigma(P)$, alors d'après le lemme 4, il existe $\alpha_k > 0$ tel que $|\theta| < \alpha_k$ entraîne : $n_k \in \mathcal{F}(\Phi_f(i\theta))$ et $n_k(\Phi_f(i\theta))$ est analytique en θ.

On a alors pour $|\theta| < \alpha_k$.

$$n_k(\Phi_f(i\theta)) = \Phi_k(i\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_B n_k(\lambda) R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(\lambda_k, r_k)} R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) d\lambda.$$

- Soit m une fonction analytique dans un voisinage de $\sigma(\Phi)$ qui vaut 1 sur $B(0, \rho_2)$ et 0 sur le reste de $\sigma(\Phi)$, de même il existe $\alpha > 0$ tel que $m \in \mathcal{F}(\Phi_f(i\theta))$ et $m(\Phi_f(i\theta))$ est analytique en θ si $|\theta| < \alpha$. On a alors pour $|\theta| < \alpha$:

$$m(\Phi_f(i\theta)) = M(i\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_B m(\lambda) R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,\rho_2)} R(\lambda, \Phi_f(i\theta)) d\lambda.$$

On a alors pour $|\theta| < \theta_0 = \inf\{\alpha_k\ 1 \leq k \leq p, \alpha\}$

$$M(i\theta)\Phi_k(i\theta) = \Phi_k(i\theta)M(i\theta) = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq p.$$

De plus pour $|\theta| < \theta_0$ on peut écrire :

$$I = \Phi_1(i\theta) + \Phi_2(i\theta) + \cdots + \Phi_p(i\theta) + M(i\theta)$$

où les fonctions $\theta \longrightarrow \Phi_k(i\theta)$ et $\theta \longrightarrow M(i\theta)$ sont analytiques en θ et $\Phi_k(0) = \Phi_k$.

Il existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tel que $|\theta| < b_k$ entraîne $\dim \Phi_k(i\theta)(V) = \dim \Phi_k(V) = 1$.

En effet, il existe $0 < b_k \leq \theta_0$ tel que :

$$|\theta| < b_k \Rightarrow \|\Phi_k(i\theta) - \Phi_k\|_v < 1$$

car $\Phi_k(0) = \Phi_k$ et $\theta \longrightarrow \Phi_k(i\theta)$ est analytique en θ.

On suppose que $\dim \Phi_k(i\theta)(V) \geq 2$, alors il existe h_1 et h_2 dans $\Phi_k(i\theta)(V)$ qui sont linéairement indépendantes. Comme $\dim \Phi_k(V) = 1$, il existe un scalaire λ tel que : $\Phi_k(h_1) = \lambda \Phi_k(h_2)$ et on pose $h = h_1 - \lambda h_2$. h n'est pas nulle et appartient à V.

Comme on a : $[\Phi_k - \Phi_k(i\theta)](h) = -h$, la condition $\|\Phi_k - \Phi_k(i\theta)\|_v < 1$ n'est pas valable.

Donc si $|\theta| < b_k$ on a $\dim \Phi_k(i\theta)(V) = 1$.

Soit g_k une base $\Phi_k(V)$, il existe $0 < \overline{b}_k \leq b_k$ tel que $|\theta| < \overline{b}_k$ implique $\Phi_k(i\theta)(g_k)$ est une base de $\Phi_k(i\theta)(V)$. En effet $\Phi_k(g_k) = g_k$ qui n'est pas nulle en $\theta = 0$ donc elle n'est pas nulle dans un voisinage de 0 car $\theta \longrightarrow \Phi_k(i\theta)$ est analytique en θ. $\Phi_k(i\theta)(g_k)$ est donc bien une base de $\Phi_k(i\theta)(V)$ si $|\theta| < \overline{b}_k$.

On a alors pour $|\theta| < \overline{b}_k$:

$$\Phi_f(i\theta)[\Phi_k(i\theta)(g_k)] = \Phi_k(i\theta)[\Phi_f(i\theta)(g_k)] = \lambda_k(i\theta)\Phi_k(i\theta)(g_k).$$

La fonction $\theta \longrightarrow \lambda_k(i\theta)$ vaut λ_k en 0 et est analytique en θ comme produit de fonctions analytiques en θ. On en déduit alors qu'il existe $0 < \overline{\overline{b}}_k \leq \overline{b}_k$ tel que $\lambda_k(i\theta) \in B(\lambda_k, r_k)$ si $|\theta| < \overline{\overline{b}}_k$.

On a alors démontré que $\lambda_k(i\theta)$ est une valeur propre de $\Phi_f(i\theta)$ et que l'espace propre associé $\Phi_k(i\theta)(V)$ est de dimension 1 pour $|\theta| \leq \overline{\overline{b}}_k$.

On pose alors $a = \inf\{\overline{\overline{b}}_k, 1 \leq k \leq p\} > 0$. Pour $|\theta| < a$, on a :

$$\Phi_k(i\theta)\Phi_j(i\theta) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq j.$$

On pose maintenant $\psi_f(i\theta) = M(i\theta)\Phi_f(i\theta) = \Phi_f(i\theta)M(i\theta)$. Pour $|\theta| < a$, la fonction $\theta \longrightarrow \psi_f(i\theta)$ est analytique en θ comme composée de fonctions analytiques en θ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\theta| < a \Rightarrow \Phi_f^n(i\theta)(g) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n(i\theta)\Phi_k(i\theta)(g) + \psi_f^n(i\theta)(g), \quad \text{si} \quad g \quad \text{est dans} \quad V.$$

On a $\psi_f(i\theta) = \Phi_f(i\theta)M(i\theta)$.

Comme $\Phi_f(i\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_B \lambda R(\lambda, \Phi_f(i\theta))d\lambda$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\psi_f(i\theta) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_B \lambda R(\lambda, \Phi_f(i\theta))M(i\theta)d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0,\rho_2)} \lambda R(\lambda, \Phi_f(i\theta))d\lambda\end{aligned}$$

car le long de $C(\lambda_k, r_k), R(\lambda, \Phi_f(i\theta))M(i\theta) = 0$

le long de $C(0, \rho_2), R(\lambda, \Phi_f(i\theta))M(i\theta) = R(\lambda, \Phi_f(i\theta)$.

On a donc de même pour $n \in I\!N^*$:

$$\psi_f^n(i\theta) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C(0,\rho_2)} \lambda^n R(\lambda, \Phi_f(i\theta))d\lambda = \frac{1}{2\pi}\rho_2^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha(n+1)} R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))d\alpha.$$

Alors :

$$\|\psi^n f(i\theta)(h)\|_v \leq \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))(h)\|_v d\alpha.$$

Mais $R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))(h)$ vaut 0 en $\theta = 0$.

Comme $\theta \longrightarrow R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))$ est un opérateur analytique pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$ on en déduit que :

$$\|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))\|_v \leq C|\theta|$$

où

$$C = \sup_{\substack{\alpha\in[0,2\pi] \\ |\theta|<a}} \|R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi)(\frac{\Phi - \Phi_f(i\theta)}{\theta})R(\rho_2 e^{i\alpha}, \Phi_f(i\theta))\|_v < \infty$$

car $\theta \longrightarrow \dfrac{\Phi - \Phi_f(i\theta)}{\theta}$ est analytique en θ. Alors :

$$\|\psi_f^n(i\theta)(h)\| < \int_0^{2\pi} C|\theta| d\alpha \frac{\rho_2^{n+1}}{2\pi} = C\rho_2^{n+1}|\theta|.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition (6.1.).

On peut alors démontrer le :

7. Théorème limite central

On fixe f un élément de V, à valeurs réelles, on suppose quitte à lui enlever une constante que $\mu(f) = m(f \cdot h) = 0$. On veut étudier le comportement de la somme $= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k$. On va d'abord démontrer le résultat capital de cette partie.

Proposition 7.1. *La suite $M_N = \int_0^1 (\frac{S_N f}{\sqrt{N}})^2 h dm$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$, soit σ^2 sa limite. On a les équivalences suivantes.*

$$\begin{aligned}\sigma^2 = 0 \ &\Leftrightarrow\ f = u - u\circ T \text{ dans } L^2(hm)\cdot u \in L^2(hm)\ u\cdot h \in V\\ &\Leftrightarrow\ f\cdot h = u\cdot h - u\circ T\cdot h \text{ dans } V.\end{aligned}$$

Preuve. Elle se fait en plusieurs étapes.

1ère étape : On démontre l'existence de la limite de la suite $(M_N)_{N>0}$

$$\begin{aligned} M_N &= \int_0^1 (\frac{S_N f}{\sqrt{N}})^2 h dm = \frac{1}{N}\langle S_N f, S_N f\rangle_{hm}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1}\langle f\circ T^k, f\circ T^\ell\rangle_{hm}\\ &= \frac{1}{N}\left[N\langle f,f\rangle_{hm} + 2\sum_{k=1}^{N-1}(N-k))\rangle f\circ T^k, f\rangle_{hm}\right]\end{aligned}$$

car la mesure hm est invariable par T.

On désigne par P l'opérateur adjoint de T par rapport à la mesure hm dans l'espace de Hilbert $L^2(hm)$, P est défini par l'égalité :

$$\langle Pf, g\rangle_{hm} = \langle f, g\circ T\rangle_{hm} \qquad f,g\in L^2(hm).$$

Les deux remarques suivantes vont permettre de donner la décomposition spectrale de P au point f.

Remarque 1 : Si f et g sont dans V, alors P est aussi l'opérateur adjoint de T pour la dualité $L^1(hm) - L^\infty(hm)$.

Remarque 2 : Si f est dans V, donc dans $L^1(hm)$ et $L^2(hm)$ on a :

$$Pf\cdot h = \Phi(f\cdot h)\ \ m\text{-p.p.}$$

et donc

$$Pf = \frac{\Phi(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq 0\}}\ \ hm\text{-p.p.}$$

Comme $f\in V$, on en déduit que pour tout $k>0$, on a :

$$\begin{aligned} P^k f &= \Phi^k\frac{(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq0\}} = m(f\cdot h)1_{\{h\neq0\}}\\ &+ \sum_{j=2}^{p}\lambda_j^k\Phi_j\frac{(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq0\}} + \frac{\psi^k(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq0\}}\\ P^k f &= \sum_{j=2}^{p}\lambda_j^k\Phi_j\frac{(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq0\}} + \frac{\psi^k(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq0\}}\end{aligned}$$

où $\|\frac{\psi^k(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq 0\}}\|_{1,hm} \leq \|\psi^k(f\cdot h)\|_v \leq \rho^k\|f\cdot h\|_v \leq C_f\rho^k\|f\|_{1,hm}$ avec $0<\rho<1$.

car $\|fh\|_v = \|f\cdot h\|_1 + v(f\cdot h) = \|f\|_{1,hm} + v(f\cdot h)$.

$v(f\cdot h)$ étant fini, il existe donc une constante $C_f \geq 1$ telle que $v(f\cdot h) \leq (C_f-1)\|f\|_{1,hm}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M_N &= \langle f,f\rangle_{hm} + 2\sum_{k=1}^{N-1}(1-\frac{k}{N})\langle f\circ T^k, f\rangle_{hm} \\ &= -\langle f,f\rangle_{hm} + 2\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})\langle f, P^k f\rangle_{hm} \\ &= -\langle f,f\rangle_{hm} + 2\langle\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^k f, f\rangle_{hm} \end{aligned}$$

Maintenant, on démontre que la suite $(\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^kf)_{N>0}$ converge dans $L^1(hm)$.

D'après la décomposition spectrale, on a :

$$\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^kf = \sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})[\sum_{j=2}^{p}\lambda_j^k\Phi_j(f\cdot h) + \psi^k(f\cdot h)]\frac{1}{h}1_{\{h\neq 0\}}.$$

Comme $\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_j^k = \frac{1-\lambda_j^N}{1-\lambda_j}$ et comme $\sum_{k=0}^{N-1}k\lambda_j^k = -\frac{N\lambda_j^N}{1-\lambda_j} - \frac{1-\lambda_j^N}{(1-\lambda_j)^2}$ alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^kf &= \sum_{j=2}^{p}[\frac{1}{1-\lambda_j} + \frac{1}{N}\frac{1-\lambda_j^N}{(1-\lambda_j)^2}]\frac{\Phi_j(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq 0\}} \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\psi^k(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq 0\}} - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}k\frac{\psi^k(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq 0\}}. \end{aligned}$$

Comme $\|\frac{\psi^k(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq 0\}}\|_{1,hm} \leq C_f\rho^k\|f\|_{1,hm}$, on en déduit que les suites $\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\psi^k(f\cdot h)}{h}$ et $\sum_{k=0}^{N-1}k\frac{\psi^k(f\cdot h)}{h}1_{\{h\neq 0\}}$ sont convergentes dans $L^1(hm)$.

Comme $\lim_{N\to\infty}[\frac{1}{1-\lambda_j} + \frac{1}{N}\frac{1-\lambda_j^N}{(1-\lambda_j)^2}] = \frac{1}{1-\lambda_j}$, on en déduit la convergence dans $L^1(hm)$ de la suite $\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^kf$, soit $G\in L^1(hm)$ sa limite. G vérifie $(I-P)G = f$. G vaut d'ailleurs $\frac{1}{h}[\sum_{j=2}^{p}\frac{1}{1-\lambda_j}\Phi_j(fh) + \sum_{k=0}^{\infty}\psi^k(fh)]1_{\{h\neq 0\}}$.

Exactement de la même façon, on montre que $h\cdot\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})P^kf$ converge dans V, sa limite vaut $G\cdot h$.

Ainsi on en déduit que la suite M_N admet une limite dans $\mathbb{R}_+$ et $\sigma^2 = -\langle f,f\rangle_{hm} + 2\langle G,f\rangle_{hm}$ avec $G\in L^1(hm)$ $Gh\in V$ et $(I-P)G = f$. On a aussi :

$$\sigma^2 = 2[\sum_{j=2}^{p}\frac{1}{1-\lambda_j}\langle\Phi_j(fh),f\rangle_m + \sum_{k=0}^{\infty}\langle\psi^k(fh),f\rangle_m] - \langle f,f\rangle_{hm}.$$

2ème étape : On suppose que $\sigma^2 = 0$, on montre les deux assertions annoncées.

Lemme 7.2. *La suite $(S_N f)_{N>0}$ est uniformément bornée dans $L^2(hm)$ en N.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\|S_N f\|^2_{2,hm} &= NM_N \\
&= 2N\sum_{k=N}^{+\infty}\langle\psi^k(fh),f\rangle_m - 2\sum_{k=0}^{N-1}k\langle\psi^k(fh),f\rangle_m \\
&+ \sum_{j=2}^{p}\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda_j}\langle\Phi_j(fh),f\rangle_m \text{ car } \sigma^2=0
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
|\langle\psi^k(fh),f\rangle_m| &= |\int_0^1\psi^k(fh)\cdot f dm| \le \|\psi^k(fh)\|_v\cdot\|f\|_1 \\
&\le C\rho^k \text{ où } 0<\rho<1
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|N\sum_{k=N}^{+\infty}\langle\psi^k(fh),f\rangle_m| &\le CN\frac{\rho^N}{1-\rho} \\
|\sum_{k=0}^{N-1}k\langle\psi^k(fh),f\rangle_m| &\le C\sum_{k=0}^{N-1}k\rho^k = C[\frac{1-\rho^N}{(1-\rho)^2}-\frac{N\rho^N}{1-\rho}]
\end{aligned}$$

λ_j est de module 1 donc $|1-\lambda_j^N|\le 2$.

Ainsi : $\|S_N f\|^2_{2,hm} \le \frac{2C}{(1-\rho)^2} + 2\sum_{j=2}^{p}\frac{1}{(1-\lambda_j)^2}|\langle\Phi_j(fh),f\rangle_m| \le r^2$.

Lemme 7.3. *Pour tout $g\in L^2(hm)$ on a $\lim_{N\to\infty}\langle S_N f,g\rangle_{nm} = \langle S,g\rangle_{hm}$ où $S\in L^2(hm)\cap L^1(hm), m(S\cdot h)=\mu(S)=0$.*

Preuve : D'après le lemme 1, la suite $(S_N f)_{N>0}$ est une suite d'éléments de $L^2(hm)$ qui est uniformément bornée par r. L'espace $L^2(hm)$ est réflexif, la suite $(S_N f)_{N>0}$ est donc faiblement convergente dans $L^2(hm)$, on appelle S sa limite faible. Alors pour tout $g\in L^2(hm)$, on en déduit que :

$$\langle S,1\rangle_{hm} = \lim_{N\to\infty}\langle S_N f,1\rangle_{hm}.$$

Or

$$\langle S_N f,1\rangle = \sum_{k=0}^{N-1}\langle f\circ T^k,1\rangle_{hm} = N\langle f,1\rangle_{hm} = 0$$

Donc $\langle S,1\rangle_{hm} = m(Sh) = \mu(S) = 0$.

Comme la fonction signe de S est dans $L^2(hm)$ on en déduit que $m(|S|h)<\infty$ donc que $S\in L^1(hm)$.

Lemme 7.4. *$f = S - S \circ T$ dans $L^2(hm)$.*

Preuve : Pour tout $N > 0$ on a $f - f \circ T^N = S_N f - S_N f \circ T$.

Donc, pour tout $g \in L^2(hm)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f - f \circ T^N, g \rangle_{hm} &= \langle S_N f - S_N f \circ T, g \rangle_{hm} \\ &= \langle S_N f, g \rangle_{hm} - \langle S_N f \circ T, g \rangle_{hm} \\ &= \langle S_N f, g \rangle_{hm} - \langle S_N f, Pg \rangle_{hm} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{N\to\infty} \langle f - f \circ T^N, g \rangle_{hm} = \langle S, g \rangle_{hm} - \langle S, Pg \rangle_{hm}$$

donc

$$\lim_{N\to\infty} \langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} = -\langle S, g \rangle_{hm} + \langle S \circ T, g \rangle_{hm} + \langle f, g \rangle_{hm}$$

Or $\langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} = \langle f \circ T^N, g \cdot h \rangle_m$.

D'abord si $g \cdot h$ est dans V on a : $\langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} = \langle f, \Phi^N(g \cdot h) \rangle_m$ que l'on peut décomposer :

$$\begin{aligned} \langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} &= \sum_{j=2}^{p} \lambda_j^N \langle \Phi_j(g \cdot h), f \rangle_m + m(gh) \langle h, f \rangle_m \\ &+ \langle \psi^N(g \cdot h), f \rangle_m \\ &= \sum_{j=2}^{p} \lambda_j^N \langle \Phi_j(g \cdot h), f \rangle_m + \langle \psi^N(g \cdot h), f \rangle_m \end{aligned}$$

on a $\lim_{N\to\infty} \langle \psi^N(g \cdot h), f \rangle_m = 0$ car ψ a un rayon spectral $\rho < 1$. La quantité $\sum_{j=2}^{p} \lambda_j^N \langle \Phi_j(g \cdot h), f \rangle_m$ "tourne" quand N varie, elle est bornée et admet une limite, elle est donc nulle.

Maintenant si $g \cdot h$ n'est pas dans V, gh est donc simplement dans $L^2(hm)$. V est dense dans $L^2(hm)$, il existe donc une suite d'éléments de V qui approche uniformément $g \cdot h$ dans $L^2(hm)$. Le même raisonnement prouve que $\lim_{N\to\infty} \langle f \circ T^N, g \rangle_{hm} = 0$.

Ainsi pour tout $g \in L^2(hm)$ on a :

$$\langle f, g \rangle_{hm} = \langle S - S \circ T, g \rangle_{hm}.$$

Donc $f = S - S \circ T$ dans $L^2(hm)$.

Maintenant on veut calculer explicitement S.

Lemme 7.5. *$P(S \circ T) = S$ dans $L^2(hm)$.*

Preuve : On sait que $S \in L^2(hm)$ donc $S \circ T \in L^2(hm)$ car $\int_I (S \circ T)^2 hdm = \int_I S^2 \circ T \cdot hdm = \int_I S^2 \cdot hdm < \infty$.

Par définition de P on a pour tout $g \in L^2(hm)$

$$\langle P(S \circ T), g\rangle_{hm} = \langle S \circ T, g \circ T\rangle_{hm} = \langle S, g\rangle_{hm}$$

et donc $P(S \circ T) = S$ dans $L^2(hm)$

Lemme 7.6. *$S = -G + f$ dans $L^1(hm)$ et $S \cdot h = (f - G) \cdot h$ dans V.*

Preuve : Du lemme 7.5., on déduit que pour tout $N > 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} P^k f = P^N S - S.$$

Dans $L^1(hm)$, la suite $\sum_{k=1}^{N} P^k f$ est convergente, sa limite est $G - f + S$ est aussi dans $L^1(hm)$.

On en déduit que $P^N S = \sum_{k=1}^{N} P^k f + S$ admet pour limite dans $L^1(hm)$ $G - f + S$. D'autre part, comme on peut approcher S par une suite d'éléments de V de mesure nulle on en déduit que $\lim P^N S = 0$ dans $L^1(hm)$.

Donc $S = f - G$ dans $L^1(hm) \cap L^2(hm)$.

Ainsi $S \cdot h = f \cdot h - G \cdot h$ est dans V.

3ème étape : On démontre la réciproque.

Si $f = u \circ T - u \quad u \in L^2(hm), u \cdot h \in V$.

Alors $S_N f = u \circ T^N - u$.

Donc $\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{N}} S_N f)^2 hdm = \frac{1}{N} \int_0^1 (u^2 \circ T^N - 2u \circ T^N \cdot u + u^2) hdm$ qui tend bien vers 0 quand N tend vers $+\infty$ donc $\sigma^2 = 0$.

On peut alors démontrer le théorème limite central.

Définition : On dit que f vérifie l'hypothèse (H) si :

* $f \in V, \mu(f) = 0$
* il existe $u \in L^2(hm), u \cdot h \in V$ tel que $f = u - u \circ T$ dans $L^2(hm)$ ou $f \cdot h = u \cdot h - u \circ T \cdot h$ dans V.

Théorème 7.7. *Si $f - \mu(f)$ ne vérifie pas (H), alors pour tout réel v, on a :*

$$\lim_{N \to \infty} \mu[\frac{S_N f - N\mu(f)}{\sigma\sqrt{N}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-t^2/2} dt.$$

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes.

1ère étape : On montre que $\lambda_1'(0) = \mu(f)$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp(i\theta S_n f)\cdot h dm &= \int_0^1 \Phi^n(\exp(i\theta S_n f)\cdot h)dm = \int_0^1 \Phi_f^n(i\theta)(h)dm \\ &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n(i\theta)\int_0^1 \Phi_k(i\theta)(h)dm + \int_0^1 \psi^n(i\theta)(h)dm\end{aligned}$$

pour tout $|\theta| < a$ d'après la proposition 6.1. avec toutes les fonctions écrites analytiques en θ.

On fixe t dans $\mathbb{R}$, alors pour n suffisamment grand, on a : $|\frac{t}{n}| < a$.

Alors

$$\int_0^1 \exp(it\frac{S_n f}{n})\cdot h dm = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n(\frac{it}{n})\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{n})(h)dm + \int_0^1 \psi^n(\frac{it}{n})(h)dm.$$

On peut alors développer $\int_0^1 \exp(it\frac{S_n f}{n})\cdot h dm$:

$$\begin{aligned}\lambda_k^n(\frac{it}{n}) &= [\lambda_k + \frac{it}{n}\lambda_k'(0) - \frac{t^2}{2n^2}\lambda_k''(0) + \frac{t^2}{n^2}\epsilon(\frac{it}{n})]^n \text{ avec } \lim_{n\to\infty}\epsilon(\frac{it}{n}) = 0 \\ &= \lambda_k^n \exp(it\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k})\left[1 - \frac{t^2}{2n}(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k} - \frac{\lambda_k'^2(0)}{\lambda_{k^2}}) + \frac{t^2}{n^2}\overline{\epsilon}(\frac{it}{n})\right]\end{aligned}$$

$\Phi_k(\frac{it}{n}) = \Phi_k + \frac{it}{n}\Phi_k^{(1)} + \frac{it}{n}\epsilon(\frac{it}{n})$ où $\Phi_k^{(1)}$ et $\epsilon(\frac{it}{n})$ sont des opérateurs bornés de V et où $\lim_{n\to\infty}\|\epsilon(\frac{it}{n})\|_v = 0$.

Alors :

$$\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{n})(h)dm = \int_0^1 \Phi_k(h)dm + \frac{it}{n}\int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm + \frac{it}{n}\overline{\epsilon}(\frac{it}{n}),$$

avec $$\lim_{n\to\infty}\overline{\epsilon}(\frac{it}{n}) = 0 \text{ et } \int_0^1 \Phi_k(h)dm = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ 1 & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp(it\frac{S_n f}{n})h dm &= \exp(it\lambda_1'(0)) + \frac{it}{n}[\int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h)dm\cdot\exp(it\lambda_1'(0)) \\ &- \frac{t}{2}(\lambda_1''(0) - \lambda_1'^2(0))\exp(it\lambda_1'(0)) \\ &+ \sum_{k=2}^{p}\lambda_k^n\exp(it\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k})\int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm] + \int_0^1 \psi^n(\frac{it}{n})(h)dm + \frac{it}{n}\epsilon(\frac{it}{n}).\end{aligned}$$

Comme $\|\psi^n(\frac{it}{n})(h)\|_v \leq |\frac{t}{n}|C\rho_2^{n+1}$, on peut passer à la limite dans le second membre, on obtient alors :
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp(it\frac{S_nf}{n})hdm = \exp[it\lambda_1'(0)].$$
Mais le théorème de Birkhoff entraîne, comme (T, hm) est un système dynamique ergodique et que f est dans L^1_m donc dans L^1_{hm}, que $\lim_{n\to\infty}\frac{S_nf}{n} = \mu(f)$ hm p.p, cette dernière fonction étant hm intégrable on en déduit que :
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp(it\frac{S_nf}{n})hdm = \exp(it\mu(f)) = \exp(it\lambda_1'(0)).$$
Ainsi pour tout t fixé dans $\mathbb{R}$, on a $\exp(it\mu(f)) = \exp(it\lambda_1'(0))$. C'est-à-dire $\mu(f) = \lambda_1'(0)$ que l'on suppose pour la suite de la preuve égale à 0.

2ème étape : On démontre que $\sigma^2 = \lambda_1''(0)$.

On remarque d'abord que $\int_0^1[\frac{S_nf}{\sqrt{n}}]^2hdm = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\int_0^1\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_nf)hdm]_{|t=0}$.

En effet, la fonction $t \to \exp(it\frac{S_nf}{\sqrt{n}})$ est une fonction analytique pour tout $t \in \mathbb{R}$, elle est uniformément bornée par 1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\exp(it\frac{S_nf}{\sqrt{n}})] = -(\frac{S_nf}{\sqrt{n}})^2\exp(it\frac{S_nf}{\sqrt{n}})$ qui est intégrable par rapport à la mesure hm pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\int_0^1\exp(it\frac{S_nf}{\sqrt{n}})hdm\}$ existe et vaut $-\int_0^1\exp(it\frac{S_nf}{\sqrt{n}})\cdot(\frac{S_nf}{\sqrt{n}})^2hdm$. Ainsi on a le résultat annoncé quand on prend $t = 0$. On fixe t dans $\mathbb{R}$, alors pour n suffisamment grand :
$$\int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_nf)hdm = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})\int_0^1\Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm + \int_0^1\psi^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm,$$
on peut alors faire un développement de $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^1\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_nf)hdm$, car toutes les fonctions écrites sont analytiques en $\frac{t}{\sqrt{n}}$.

Pour dériver le premier terme on utilise $(uv)'' = u''v + uv'' + 2u'v'$,

avec $u(t) = \lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})$ et $v(t) = \int_0^1\Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm$.

$$\text{Si } k \neq 1, \qquad \begin{aligned} v(0) &= 0 \\ u(0) &= \lambda_k^n \\ u'(0) &= i\sqrt{n}\lambda_k^{n-1}\lambda_k'(0). \end{aligned}$$

$\Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h) = \frac{it}{\sqrt{n}}\Phi_k^{(1)}(h) - \frac{t^2}{2n}\Phi_k^{(2)}(h) + \frac{t^2}{n}\epsilon\frac{it}{\sqrt{n}}(h)$ où les opérateurs $\Phi_k^{(1)}, \Phi_k^{(2)}$ et $\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})$ sont des opérateurs bornés de V et $\lim_{n\to\infty}\|\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})\|_v = 0$.

Ainsi :
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})\int_0^1(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm] = -\lambda_k^n\frac{1}{n}\int_0^1\Phi_k^{(1)}(h)dm - 2\lambda_k^{n-1}\lambda_k'(0)\int_0^1\Phi_k^{(1)}(h)dm.$$

Si $k=1, v(0)=1, u(0)=1, u'(0)=0, u''(0)=-\lambda_1''(0)$.

$$v'(0)=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h)dm \text{ et } v''(0)=\frac{-1}{n}\int_0^1 \Phi_1^{(2)}(h)dm.$$

On sait que $\psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{C(0,\rho_2)}\lambda^n R(\lambda,\Phi_t(\frac{it}{\sqrt{n}}))(h)d\lambda$. La fonction $\theta\to R(\lambda,\Phi(i\theta))$ est analytique si $|\theta|<a$, il existe donc $N>0$ tel que $n>N$ entraîne que :

$$R(\lambda,\Phi(\frac{it}{\sqrt{n}}))=R(\lambda,\Phi)-\frac{it}{\sqrt{n}}R^{(1)}(\lambda,\Phi)-\frac{t^2}{2n}R^{(2)}(\lambda,\Phi)+\frac{t^2}{n}\overline{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})$$

où les opérateurs $R^{(1)}(\lambda,\Phi), R^{(2)}(\lambda,\Phi)$ et $\overline{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})(\lambda)$ sont des opérateurs bornés de V et où $\lim_{n\to\infty}\|\overline{R}(\frac{it}{\sqrt{n}})(\lambda)\|_v=0$.

Ainsi $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^1\psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm=\frac{1}{n}\frac{1}{2i\pi}\oint_{C(\rho_2,0)}\lambda^n R^{(2)}(\lambda)d\lambda$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^1(\frac{S_nf}{\sqrt{n}})^2hdm &= \lambda_1''(0)+2\sum_{k=2}^{p}\lambda_k^{n-1}\lambda_k'(0)\int_0^1\Phi_k^{(1)}(h)dm\\ &+ \frac{1}{n}[\int_0^1\Phi_1^{(2)}(h)dm+\sum_{k=2}^{p}\lambda_k^n\int_0^1\Phi_k^{(2)}(h)dm]+o(\frac{1}{n}).\end{aligned}$$

Comme $\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\int_0^1(\frac{S_nf}{\sqrt{n}})^2hdm$. Et comme dans le second terme tout a une limite sauf éventuellement le terme borné $2\sum_{k=2}^{p}\lambda_k^{n-1}\lambda_k'(0)\int_0^1\Phi_k^{(1)}(h)dm$ qui "tourne", on en déduit que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{p}\lambda_k^{n-1}\lambda_k'(0)\int_0^1\Phi_k^{(1)}(h)dm=0$.

Et donc $\sigma^2=\lambda_1''(0)$.

3ème étape : On démontre que $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm=\exp(\frac{-t^2\sigma^2}{2})$.

On fixe t dans $\mathbb{R}$, alors pour n suffisamment grand, on peut écrire d'après la proposition 6.1. :

$$\begin{aligned}\int_0^1\Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm &= \lambda_1^n(\frac{it}{\sqrt{n}})\int_0^1\Phi_1(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm\\ &+ \sum_{k=2}^{p}\lambda_k^n(\frac{it}{\sqrt{n}})\int_0^1\Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm+\int_0^1\psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm.\end{aligned}$$

On a : $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\psi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm=0$ comme dans la 1ère étape.

$$\begin{aligned}[\lambda_1(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n &= [1-\frac{t^2}{2n}\lambda_1''(0)-\frac{it^3}{3n\sqrt{n}}\lambda_1'''(0)+\frac{t^3}{n\sqrt{n}}\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n\\ &= e^{-t^2\lambda_1''(0)/2}[1-\frac{it^3}{\sqrt{n}}\lambda_1'''(0)+\frac{t^3}{\sqrt{n}}\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})] \text{ avec } \lim_{n\to\infty}\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})=0\end{aligned}$$

$\int_0^1 \Phi_1(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h)dm + \frac{it}{\sqrt{n}}\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})$. Pour $k \neq 1$,

$$\begin{aligned}
[\lambda_k(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n &= \lambda_k^n[1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k} - \frac{t^2}{2n}\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k} - \frac{it^3}{6n\sqrt{n}}\frac{\lambda_k'''(0)}{\lambda_k} + \frac{it^3}{n\sqrt{n}}\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})]^n \\
&= \lambda_k^n \exp[\sqrt{n}\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}it]\exp[-t^2\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k} + \frac{2\lambda_k'(0)}{\lambda_{k^2}}][1 - \frac{it^3}{6\sqrt{n}}B_k + \frac{it}{\sqrt{n}}\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})]
\end{aligned}$$

$\int_0^1 \Phi_k(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = \frac{it}{\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h)dm + \frac{it}{\sqrt{n}}\epsilon(\frac{it}{\sqrt{n}})$.

D'où :

$$\int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = e^{-t^2\lambda_1''(0)/2} + \frac{it}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{p} \lambda_k^n e^{it\lambda_k'(0)\frac{\sqrt{n}}{\lambda_k}} e^{-t^2[A_k]} \int_0^1 \Phi_k^{(1)}(h)dm + o(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Comme $\theta \to \lambda_k(i\theta)$ est une fonction analytique tel qu'il existe $a > 0$ tel que $|\theta| < a \Rightarrow |\lambda_k(i\theta)| \leq 1$, on en déduit $\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}$ est réel.

En effet : $\lambda_k(i\theta) = \lambda_k[1 + i\theta\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k} - \frac{\theta^2}{2}\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k} + o(\theta^2)]$. On passe au module :

$$1 \geq [1 - \theta Im(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}) - \frac{\theta^2}{2}Re(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k})]^2 + [\theta Re(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}) - \frac{\theta^2}{2}Im(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k})]^2 + o(\theta^2)$$

d'où

$$1 \geq 1 - 2\theta Im\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k} + \theta^2[[Re(\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k})]^2 + [Im\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k}]^2 - Re(\frac{\lambda_k''(0)}{\lambda_k})] + o(\theta^2)$$

ce qui est possible uniquement si $Im\frac{\lambda_k'(0)}{\lambda_k} = 0$. Donc on peut passer à la limite et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = e^{-t^2\frac{\lambda_1''(0)}{2}} = e^{-t^2\frac{\sigma^2}{2}}.$$

4ème étape : Conclusion.

On a démontré que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{it}{\sqrt{n}})(h)dm = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_nf)hdm = e^{-t^2\frac{\sigma^2}{2}}.$$

On a donc aussi : $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \exp(it\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}})hdm = e^{\frac{-t^2}{2}}$ qui est la transformée de Fourier de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Le théorème de Paul Lévy entraîne alors la convergence en loi de $\frac{S_nf}{\sqrt{n}\,\sigma}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Donc pour tout $v \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mu[\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

où μ désigne la mesure hm.

8. Diverses remarques à propos de la condition H.

Pratiquement, pour appliquer le théorème central limite à une fonction f, on doit être capable de décider si elle vérifie l'hypothèse H ou non.

Dans le cas particulier où le système (T, μ) est **faiblement mélangeant** (Φ n'admet que 1 comme valeur propre de module 1) et si f **est l'indicatrice d'un borélien** on a :

Proposition 8.1. *Si $f = 1_A, A \in \mathcal{B}$ et (T, μ) est faiblement mélangeant, la condition $f = \phi - \phi \circ T + \mu(A)$ (partout) équivaut à $\mu(A) = 1$ ou 0.*

Preuve :

On a $e^{2if\pi} = e^{2i1_A\pi} = 1 = e^{i\phi}e^{2i\pi\phi\circ T}e^{2i\pi\mu(A)}$.

D'où : $e^{2i\pi\phi} \circ T = e^{2i\pi\phi}e^{2i\pi\mu(A)}$.

Comme les valeurs propres d'une contraction (Φ) sont les mêmes que celles de son adjoint ($f \to f \circ T$), on en déduit alors que : $e^{2i\pi\mu(A)} = 1$ donc $\mu(A) = 1$ ou 0.

Dans le cas où f est une **fonction continue sauf en un nombre dénombrable** (au plus) **de points de I : $\mathcal{T}_f$**, on peut préciser H.

Si $f = u - u \circ T$ hm-p.p ($\mu(f) = 0$), la proposition 7.1. et le lemme 7.6. donnent la valeur de u :

$$u = s = \frac{1}{h}[\sum_{j=1}^{\infty} \psi^j(hf) + \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{1-\lambda_k}\Phi_k(fh)]1_{\{h\neq 0\}}.$$

On peut maintenant trouver les points de discontinuité de u, ils correspondent aux points de discontinuité de h, de $(\psi^j(fh))_{j\in \mathbb{N}^*}$ et de $(\Phi_k(fh))_{2\leq k \leq 0}$ [ce sont les points de discontinuité de $(\Phi^j(fh))_{j\geq n_0}$ car $\Phi_k(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^j\frac{(fh)}{\lambda_k^j}$ on utilise ici le fait que si $f_n \to f$ dans V alors $f_n \to f$ uniformément sur I].

Points de discontinuité de h, h est définie comme la limite dans V de la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=n_0}^{n+n_0-1} \Phi^k(1)$, ses points de discontinuité sont donc ceux des fonctions $(\Phi^k(1))$. On a : $\Phi(1)(x) = \sum_{j\in J} \phi_j(x)\chi_j(x)$, la fonction $x \to \phi_j(x)$ étant continue sur I, les points de discontinuité de $\Phi(1)$ sont donc les $\{T(aj), j \in J\}$. L'ensemble des sauts de h est donc $\mathcal{T}_h = \{T^n(a_j) | j \in J, n \geq 1\}$.

Points de discontinuité de $\Phi(fh)$, on a $\Phi(fh)(x) = \sum_{j\in J}(fh)\sigma_j(x)\phi_j(x)\chi_j(x)$. Les sauts de $\Phi(fh)$ sont alors les sauts de $(f\sigma_j)_{j\in J}$ donc l'ensemble $T(\mathcal{T}_f)$, ceux de $(h\sigma_j)_{j\in J}$ donc $T(\mathcal{T}_h)$ et l'ensemble $\{T(a_j)\}_{j\in J}$.

Donc $\mathcal{T}_{\Phi(fh)} = T(\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_f \cup \{a_j\}_{j\in J})$.

Alors les sauts de Φ_k sont dans l'ensemble $\cup_{n\geq n_0} T^n[\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_f \cup \{a_j\}_{j\in J}]$.

Comme $\psi^j(fh) = \Phi^j(fh) - \lambda_2^n \Phi_2(fh) - \cdots - \lambda_p^n \Phi_p(fh)$ car $m(fh) = 0$ on a :

$$\mathcal{T}_u = \cup_{n\geq 1} T^n[\mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_f \cup \{a_j\}_{j\in J}].$$

Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_u \cup \mathcal{T}_f \cup T^{-1}(\mathcal{T}_u)$.

C'est un ensemble dénombrable de points de I et on a

sur $(I \setminus \{h \neq 0\}) \setminus \mathcal{T}$ $\;f = \phi - \phi \circ T$.

$\mathcal{T}$ se compose de l'ensemble des images par $T^n, n \geq 0$ des points de discontinuité de f et des points de la subdivision de I associée à T

$$\mathcal{T} = \cup_{n\geq 0} T^n[\{a_j, j \in J\} \cup \mathcal{T}_f].$$

Ainsi si on est capable de montrer qu'un point T-périodique de période k n'est pas dans $\mathcal{T} \cup T^{-1}(\mathcal{T}) \cup \cdots \cup T^{-k}(\mathcal{T})$, on peut utiliser le test des points périodiques pour décider si f vérifie la condition H ou non.

9. La vitesse de convergence.

La méthode employée pour démontrer le théorème central limite permet aussi de donner la vitesse de convergence.

Théorème 9.1. *Sous les hypothèses du théorème 7.7. et si $\mu(f) = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\sup_{v\in\mathbf{R}} |\mu[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

La preuve de ce théorème repose sur l'inégalité de Berry-Essen qui peut s'écrire ici :

Il existe $K > 0$ tel que pour tout $U > 0$, tout n vérifiant $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on a :

$$\sup_{v\in\mathbf{R}} |\mu[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{K}{U} + \frac{1}{\pi} \int_{-U}^{U} \frac{|\int_0^1 e^{iu\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}}} h dm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|} du.$$

Comme $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, alors pour tout $u \in [-U,U], \frac{u}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on peut alors utiliser la proposition 6.1., pour $u \in [-U,U]$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{iu\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}} h dm &= \int_0^1 \Phi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm \\
&= \lambda_1^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_1(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm \\
&+ \sum_{k=2}^{p} \lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm + \int_0^1 \psi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|\int_0^1 e^{iu\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}} hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}| &\leq \sum_{k=2}^{p} |\lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})|| \int_0^1 \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| + |\int_0^1 \psi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \\
&+ |\lambda_1^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_1(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm - e^{-\frac{u^2}{2}}|.
\end{aligned}$$

Les applications $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} \to \lambda_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ sont analytiques. Les opérateurs $\frac{u}{\sigma\sqrt{n}} \to \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ et $\psi_f(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})$ sont analytiques on a alors :

$$|\int_0^1 \psi_f^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \leq \frac{C\rho_2^{n+1}}{\sigma\sqrt{n}}|u|.$$

D'après les calculs de la 3ème étape de la preuve du théorème limite central on a :

$$\begin{aligned}
|\lambda_1^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_1(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm - e^{-\frac{u^2}{2}}| &= |e^{-\frac{u^2}{2}}[\frac{-iu^3}{6\sigma 3\sqrt{n}}\lambda_1''(0) + \frac{iu}{\sigma\sqrt{n}} \int_0^1 \Phi_1^{(1)}(h)dm \\
&+ \frac{k}{\sqrt{n}}\epsilon(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})]| \leq e^{-\frac{u^2}{2}}[\frac{A|u|^3}{\sqrt{n}} + \frac{B|u|}{\sqrt{n}}].
\end{aligned}$$

$|\lambda_k^n(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}}) \int_0^1 \Phi_k(\frac{iu}{\sigma\sqrt{n}})(h)dm| \leq \exp[-\frac{u^2}{\sigma^2}C_k^2]D_k\frac{|u|}{\sqrt{n}}$ où $C_k \in \mathbb{R}$. On peut alors intégrer

$$\int_{-U}^{U} \frac{|\int_0^1 e^{iu\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}} hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|} du \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-U}^{U} [e^{-\frac{u^2}{2}}(Au^2 + B) + \sum_{k=2}^{p} D_k e^{-\frac{u^2}{\sigma^2}C_k^2} + \frac{C\rho_2^{n+1}}{\sigma}]du$$

comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-U}^{U} \frac{|\int_0^1 e^{iu\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}}} hdm - e^{-\frac{u^2}{2}}|}{|u|} du &\leq (\frac{A}{\sqrt{n}} + \frac{B}{\sqrt{n}})\sqrt{2\pi} \sum_{k=2}^{p} D_k \frac{\sigma\sqrt{n}}{C_k\sqrt{n}} + \frac{2C\rho_2^{n+1}U}{\sigma\sqrt{n}U} \\
&= \frac{C_1}{\sqrt{n}} + C_2\rho_2^{n+1}\frac{U}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} |\mu[\frac{S_nf}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{K}{U} + \frac{C_1}{\pi\sqrt{n}} + C_2\rho_2^{n+1}\frac{U}{\sqrt{n}}$$

et ceci pour $\frac{U}{\sigma\sqrt{n}} < a$, on peut prendre $U = \alpha\sqrt{n}\sigma$ avec $\alpha < a$. On a alors :

$$\cdots \leq \frac{K}{\sigma\alpha\sqrt{n}} + \frac{C_1}{\pi\sqrt{n}} + \frac{C_2\rho_2^{n+1}}{\sigma\alpha}$$

comme ρ_2^{n+1} est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\rho_2 < 1$ on a le résultat voulu en posant $C = \frac{k}{\sigma\alpha} + \frac{C_1}{\pi} + \frac{C_2}{\sigma\alpha}$:

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} |\mu[\frac{S_n f}{\sigma\sqrt{n}} \leq v] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{u^2}{2}} du| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

10. Applications sur des exemples.

1er exemple : Les polynômes trigonométriques et la transformation $Tx = 2x[1]$, généralisation au cas où $Tx = rx[1] \quad r \in \mathbb{N}, r > 2$:

L'opérateur de Perron-Frobenius associé à T est : $\Phi f(x) = \frac{1}{2}[f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})]$. On vérifie facilement que Φ n'admet comme valeur propre de module 1 la valeur 1 et que cette valeur propre est simple associée à la fonction constante 1. Le système ergodique (T, m) est donc faiblement mélangeant. On peut donc appliquer le théorème central limite à T. On choisit pour fonction f un polynôme trigonométrique, on l'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(2k\pi x) + \sum_{\ell=1}^{N} b_\ell \sin(2\pi\ell x).$$

On a $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Conditions sur les a_k, b_ℓ pour que f vérifie la condition H :

Supposons $f = \phi - \phi \circ T$.

ϕ admet un développement en série trigonométrique :

$$\phi(x) = \sum_k \alpha_k \cos(2\pi kx) + \sum_\ell \beta_\ell \sin(2\pi\ell x).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\phi(x) - \phi(Tx) &= \sum_k \alpha_k \cos(2\pi kx) + \sum_\ell \beta_\ell \sin(2\pi\ell x) - \sum_k \alpha_k \cos(4\pi kx) - \sum_\ell \beta_\ell \sin(4\pi\ell x) \\
&= \sum_k (\alpha_{2k} - \alpha_k)\cos(4\pi kx) + \sum_k \alpha_{2k+1}\cos(2(2k+1)\pi x) \\
&+ \sum_\ell (\beta_{2\ell} - \beta_\ell)\sin(4\pi\ell x) + \sum_\ell \beta_{2\ell+1}\sin(2(2\ell+1)\pi x)
\end{aligned}$$

$f = \phi - \phi \circ T$ si on a :

$$1 \leq k \leq \left[\frac{N}{2}\right] \begin{cases} a_{2k} &= \alpha_{2k} - \alpha_k \\ a_{2k+1} &= \alpha_{2k+1} \end{cases} \quad \text{et } k > N \quad \alpha_k = 0$$

$$1 \leq \ell \leq \left[\frac{M}{2}\right] \begin{cases} b_{2\ell} & = \beta_{2\ell} - \beta_\ell \\ b_{2\ell+1} & = \beta_{2\ell+1} \end{cases} \quad \text{et } \ell > M \quad \beta_\ell = 0.$$

On en déduit alors que : $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_1 + a_2$, $\alpha_n = a_1 + a_2 + a_n, \ldots, \alpha_{2^k} = \sum_{\ell=0}^{k} a_{2^\ell}$ si $2^k \leq N$ i.e $k \leq \frac{\log N}{\log 2}$ et $\alpha_{2^k} = \sum_{\ell=0}^{[\log N/\log 2]} a_{2^\ell}$ si $2^k > N$ de même : $\alpha_3 = a_3$, $\alpha_6 = a_3 + a_6$, $\alpha_{12} = a_3 + a_6 + a_{12}, \ldots, \alpha_{3 \cdot 2^k} = \sum_{\ell=0}^{k} a_{3 \cdot 2^\ell}$ si $2^k \leq \frac{N}{3}$ i.e $k \leq \frac{\log N - \log 3}{2}$ et $\alpha_{3 \cdot 2^k} = \sum_{\ell=0}^{[(\log N - \log 3)/\log 2]} a_{3 \cdot 2^\ell}$ si $3 \cdot 2^k > N$. On obtient donc les relations si $f = \phi - \phi \circ T$

$\sum_{\ell=0}^{[(\log N - \log k)/\log 2]} a_{k2^\ell} = 0$ pour k entier non multiple de 2 compris entre 1 et N.

$\sum_{\ell=0}^{[(\log M - \log k)/\log 2]} b_{k2^\ell} = 0$ pour k entier non multiple de 2 compris entre 1 et M.

Généralisation pour $T = rx[1]$, on obtient les relations

$\sum_{\ell=0}^{[(\log N - \log k)/\log r]} a_{kr^\ell} = 0$ pour k entier non multiple de r compris entre 1 et N.

$\sum_{\ell=0}^{[(\log M - \log k)/\log r]} b_{kr^\ell} = 0$ pour k entier non multiple de r compris entre 1 et M.

Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, on sait alors que σ^2 est strictement positif. Ici, on peut même calculer la valeur exacte de σ^2

$$\sigma^2 = \int_0^1 f^2 dm + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f \quad f \circ T^k dm.$$

On remarque que :

$$\begin{array}{ll} \int_0^1 \cos(2k\pi x)\cos(2q\pi x)dx & = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } q = k \end{cases} \\ \int_0^1 \sin(2k\pi x)\sin(2q\pi x)dx & = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq k \\ \frac{1}{2} & \text{si } q = k \end{cases} . \\ \int_0^1 \sin(2k\pi x)\cos(2q\pi x)dx & = 0 \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2 dm &= \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell^2] \\ \int_0^1 f \quad f \circ T^p dm &= \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{[N/2^p]} a_k a_{k2^p} + \sum_{\ell=1}^{[M/2^p]} b_\ell b_{\ell 2^p}]. \end{aligned}$$

Dans le cas où $[\frac{N}{2^p}]$ ou $[\frac{M}{2^p}]$ est nul on impose à la somme correspondante d'être nulle.

On obtient alors :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell^2] + \sum_{p=1}^{\infty}[\sum_{k=1}^{[N/2^p]} a_{k2^p} a_k + \sum_{\ell=1}^{[M/2^p]} b_{\ell 2^p} b_\ell]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sum_{1\le k \text{ impair}\le N}\Big[\sum_{p=0}^{[(\log N-\log k)/\log 2]} a_{k2^p}\Big]^2 + \sum_{1\le \ell \text{ impair}\le M}\Big[\sum_{p=0}^{[(\log M-\log k)/\log 2]} b_{\ell 2^p}\Big]^2\Big].$$

Généralisation pour $Tx = rx[1]$ $r \in \mathbb{N}$ on trouve :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{2}\left[\sum_{1\le k \text{ non multiple de } r\le N}\left[\sum_{p=0}^{[(\log N-\log k)/\log r]} a_{kr^p}\right]^2\right.\\ &\quad\left.+ \sum_{1\le \ell \text{ non multiple de } r\le M}\left[\sum_{p=0}^{[(\log N-\log k)/\log r]} b_{\ell r^p}\right]^2\right].\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème central limite et même donner la vitesse de convergence pour f un polynôme trigonométrique.

2ème exemple : Utilisation de la proposition 8.1.

On peut appliquer le théorème central limite à $f = 1_J$ où J est un intervalle $\mu(J) \neq 0$ ou 1 contenu dans I dans le cas où (T,μ) est un système faiblement mélangeant. C'est le cas pour la transformation "fraction continue" et les β-transformations $Tx = \beta x + \alpha[1]$ où :

$$\begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta & > 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha & \neq 0 \\ \beta & > 2 \end{cases}$$

3ème exemple : Calcul direct de σ^2

On prend $Tx = 2x[1]$ et f un polynôme de degré 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ \mu(f) &= \int_0^1 ax + b = \frac{a}{2} + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

On va donc prendre $f(x) = a(x - \frac{1}{2})$

$$\sigma^2 = \int_0^1 f^2 dm + 2\sum_{n=1}^{\infty}\langle f, f\circ T^n\rangle.$$

On a :

$$\int_0^1 f^2 dm = a^2\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx = \frac{a^2}{12}$$

pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\cdot f\circ T^n dm &= \int_0^1 (x-\frac{1}{2})(T^m x - \frac{1}{2})dx \\ &= \int_0^1 xT^m x dx + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}[\int_0^1 x dx + \int_0^1 T^m x dx] = \int_0^1 xT^m x dx - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xT^m x dx &= \int_0^1 x\{2^m x\}dx = \sum_{k=0}^{2^m-1}\int_{k/2^m}^{(k+1)/2^m} x(2^m(x-\frac{k}{2^m}))dx \\
&= \sum_{k=0}^{2^m-1} 2^m\left[\frac{x^3}{3}-\frac{k}{2^m}\frac{x^2}{2}\right]_{k/2^m}^{(k+1)/2^m} \\
&= \sum_{k=0}^{2^m-1}\frac{1}{6(2^m)^2}[2(k+1)^3-3k(k+1)^2+2k^3+3k^3] = \frac{1}{6(2^m)^2}\sum_{k=0}^{2^m-1}(3k+2)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle f, f\circ T^n\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}\frac{1}{2^m}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\frac{1}{2^m}.$$

Ainsi

$$\sigma^2 = (\frac{2}{12}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}-\frac{1}{12})a^2 = \frac{a^2}{12}[\frac{2}{1-\frac{1}{2}}-1] = \frac{a^2}{4}.$$

On en déduit que si a n'est pas nul, on peut appliquer le théorème central limite aux polynômes de degré 1.

Pour un polynôme de degré 2, on prend $f(x) = a(x^2-\frac{1}{3})+b(x-\frac{1}{2})$. On trouve par un calcul analogue.

$$\sigma^2 = \frac{32a^2+27b^2+45ab}{108}$$

qui est positif si $(a,b)\neq(0,0)$ car

$$\Delta = (45)^2 - 4\times 32\times 27 = -1431 < 0.$$

Conjecture, tous les polynômes vérifient la condition H et on peut alors leur appliquer le théorème central limite.

4ème exemple : Utilisation des points périodiques

On prend $Tx = \{\frac{1}{x}\}$ et f une transformation homographique : $f(x) = \frac{1}{ax+b}$, on suppose $-\frac{b}{a}\notin[0,1]$ et $a\neq 0$. $\mu(f) = \frac{1}{\log 2}\int_0^1\frac{1}{1+x}\frac{1}{ax+b}dx$ est donc non nul car c'est l'intégrale d'une fonction qui garde un signe constant sur I. $\mathcal{T} = \{\frac{1}{n}, n\in \mathbb{N}\}$ f et h sont continues sur I, u aussi donc si on trouve deux points (x,y) T-périodiques de période m et n et n'appartenant pas à $\mathcal{T}\cup T^{-1}(\mathcal{T})\cdots\cup T^{-n}(\mathcal{T})$ tels que : $\frac{f(x)+\cdots+f(T^{n-1}x)}{n}\neq\frac{f(y)+\cdots+f(T^{m-1}y)}{m}$ on sait que f vérifie H et donc qu'on peut appliquer le théorème central limite.

Les points T-périodiques de période 1 sont les solutions des équations $x^2+nx-1=0$ où $n\in\mathbb{N}^*$. Il sont donc de la forme $\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}$

$$f(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = \frac{1}{a\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b},\quad f(\frac{\sqrt{8}-2}{2}) = \frac{1}{a(\sqrt{2}-1)+b}$$

on a l'égalité si $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b = a(\sqrt{2}-1)+b$ i.e $a=0$ ce qui est exclu.

f vérifie donc H et on peut appliquer le théorème central limite.

5ème exemple : une autre utilisation des points périodiques

On prend $Tx = \beta x + \alpha[1]$ $\beta > 0$ $\beta^2 = \beta + 1$ et $\alpha = \frac{3-\beta}{2}$. h a pour points de discontinuité l'ensemble $\{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\}$. Cet ensemble est invariant par T.

Si on prend f une fonction continue sur I, on a alors $\mathcal{T}_f = \emptyset$ et $\mathcal{T} = \cup_{n\geq 0} T^n\{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\} = \{0, \frac{2-\beta}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{2}, 1\}$. On peut donc appliquer le test des points périodiques à f en prenant des points n'appartenant pas à $\mathcal{T}$ ni à $[\frac{\beta-1}{2}, \alpha]$ qui est l'ensemble $\{h = 0\}$.

Ainsi on peut appliquer le théorème central limite à T et f "bien choisie" continue sur I. C'est un ensemble de β-transformation tel que le système (T, μ) est ergodique et non faiblement mélangeant.

References

[1] N. DUNFORD ET J.T. SCHWARTZ *Linear operators part I.* Interscience New York, 1958.

[2] B.V. GNEDENKO ET A.N. KOLMOGOROV *Limit distributions for sums of independent random variables.* Addison Wesley Reading, 1954.

[3] Y. GUIVARC'H ET J. HARDY *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov.* Annales de l'Institut Henri Poincaré, vol. 24, p. 73-98, 1988.

[4] C.T. IONESCU-TULCEA ET G. MARINESCU *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complément continues.* Ann. Math. 47, p. 140-147, 1946.

[5] G. KELLER *Piecewise monotonics transformations and exactness.* Séminaires de Probabilités de Rennes, 1978.

[6] A. LASOTA ET J.A. YORKE *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations.* Trans. Amer. Math. Soc., 186, p. 481-488, 1973.

[7] S.V. NAGAEV *Some limit theorems for Markov chains.* Theor. Prob. Appl. 2, p. 378-416, 1957.

[8] W. PARRY *Representation for real numbers.* Acta Math. Acad. Sc. Hungar, 15, p. 95-105, 1964.

[9] A. RENYI *Representation for real numbers and their ergodic properties.* Acta Math. Acad. Sc. Hungar, 8, p. 477-493, 1957.

[10] J. ROUSSEAU-EGELE *Un théorème de la limite locale pour une classe de tranformations dilatantes et monotones par morceaux* Annals of Probability, 3, p. 772-788, 1983.