OLIVIER GUÈS

Ondes solitaires créées par l'interaction d'ondes oscillantes semilinéaires

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 91-124
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_91_0>

Ondes solitaires créées par l'interaction d'ondes oscillantes semilinéaires

Olivier GUÈS

Mars 1992

Le but de cet exposé est de décrire l'évolution de certaines solutions (régulières) **oscillantes** de systèmes hyperboliques semilinéaires (en une dimension d'espace) qui mettent en jeu un phénomène d'interaction **non linéaire**, différent de celui de la résonance "classique" ([T], [HMR], [JMR]), et que nous appellerons "**résonance faible**". Il s'agit de résonances localisées sur des ensembles qui, d'une part sont de mesure nulle (dans le plan (t,x)), mais sont aussi des réunions d'arcs de courbes caractéristiques du système. Le résultat est la création et la propagation d'ondes de type "solitaire", qui se superposent aux ondes oscillantes. Des exemples simples montrent que ces résonances faibles peuvent être responsables de l'explosion de la solution, ou qu'elles peuvent être la cause de comportements compliqués de la solution lorsque la fréquence des oscillations tend vers l'infini.

PLAN DE L'EXPOSE

§1. Rappels et présentration du problème

1.1 Rappels sur les oscillations 1D

Notons $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ et $u(t,x)={}^t(u_1,...,u_N)(t,x)\in\mathbb{C}^N$ la fonction inconnue. Nous choisissons une inconnue à valeurs complexes simplement pour pouvoir manipuler des exponentielles complexes.

On considère un système non linéaire, que l'on écrit avec une notation matricielle

(1.1.1) $$\partial_t u + A(t,x)\,\partial_x u = f(t,x,u,\bar{u})$$

où $A\in C^\infty(\mathbb{R}^2\,;\,\mathfrak{M}_{N\times N}(\mathbb{R}))$ et $f={}^t(f_1,...,f_N)\in C^\infty(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2N}\,;\,\mathbb{C}^N)$.

Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que le système est déjà sous forme diagonale, c'est-à-dire que la matrice A est diagonale avec des coefficients principaux réels et distincts $\lambda_1(t,x)<...<\lambda_N(t,x)$, les fonctions λ_j étant C^∞ de leurs arguments.

Le système (1.1.1) s'écrit donc comme un système de champs de vecteurs (à coefficients réels) :

(1.1.3) $$\begin{cases} X_1 u_1 = f_1(t,x,u,\bar{u}) \\ \vdots \\ X_N u_N = f_N(t,x,u,\bar{u}) \end{cases}, \quad \textit{où } X_j \equiv \partial_t + \lambda_j(t,x)\partial_x$$

Les données de Cauchy sont "oscillantes" de la forme

(1.1.4) $$u_j(0,x) = H_j(\,x\,;\,\vec{\varphi}_j^{\circ}(x)/\varepsilon\,), \qquad j=1,...,N,$$

où $\vec{\varphi}_j^{\circ}\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^{n_j})$ et où les fonctions $H_j(x;\theta_j)$ sont presque périodiques en la variable rapide $\theta_j\in\mathbb{R}^{n_j}$ (nous préciserons plus loin cette régularité).

1.1.1 Phases d'oscillations. Variables rapides. Fonctions presque périodiques

Les fonctions $\vec{\varphi}_j^{\circ}$ sont les restrictions à $\{t=0\}$ de fonctions $\vec{\varphi}_j := (\varphi_{j,1},...,\varphi_{j,n_j})$ où $\varphi_{j,k}\in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, qui sont des "phases" pour le champ X_j, c'est à dire que

(1.1.5) $$X_j\,\vec{\varphi}_j \equiv 0\,.$$

Nous noterons dans la suite Θ_j l'espace $\mathbb{R}^{n_j}$ et $\Theta := \Theta_1\times...\times\Theta_{n_j}$ de sorte que la fonction $\vec{\varphi} := (\vec{\varphi}_1,...,\vec{\varphi}_N)$ est à valeurs dans Θ.

Fixons pour toute le suite un voisinage Ω de $0 \in \mathbb{R}^2$, fermé convexe et borné, tel que $\Omega \cap \{x=0\} = [a,b]$ et que $\Omega \cap \{t \geq 0\}$ soit un domaine de détermination pour $[a,b]$.

Si Ψ est un espace vectoriel reél de dimension finie, on note $C^0_{pp}(\Psi)$ l'espace des fonctions presque périodiques de la variable $\theta \in \Psi$, c'est-à-dire l'adhérence dans $L^\infty(\Psi)$ de l'espace des polynômes trigonométriques

$$\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \, e^{i\langle \lambda , \theta \rangle} \ , \quad \Lambda \textit{ partie finie de } \Theta^* \, , a_\lambda \in \mathbb{C} \}.$$

Un élément f de $C^0_{pp}(\Psi)$ admet une "moyenne" $\mathcal{M}f \in \mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{M}(f) := \lim_{T \to \infty} \ (\ T^{-\dim \Psi} \int_{TQ} f(\theta) \, d\theta \ )$$

où Q est le cube unité de Ψ.

Si D est un fermé connexe de $\mathbb{R}^2$, on désignera par $\mathcal{P}_{pp}(D,\Psi) := C^0(D : C^0_{pp}(\Psi))$ l'espace des applications continues sur D à valeurs dans $C^0_{pp}(\Psi)$.

Les fonctions de $\mathcal{P}_{pp}(\Omega,\Psi)$ admettent un spectre dénombrable, c'est à dire qu'il existe un sous-ensemble au plus denombrable de Ψ^*, indépendant de (t,x), que l'on notera $\Lambda(f)$ tel que

$$f(t,x;\theta) \ \sim \sum_{\lambda \in \Lambda(f)} a_\lambda(t,x) \, e^{i\langle \lambda , \theta \rangle} \ , \qquad a_\lambda \in C^0(D;\mathbb{C})$$

au sens où : $\forall (t,x) \in D$, $\forall \lambda \in \Psi^*$, $\mathcal{M}(f e^{-i\langle \lambda , \theta \rangle}) = a_\lambda(t,x) \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \Lambda(f)$.

1.1.2 Hypothèses sur les phases d'oscillations

L'étude de l'interaction **non linéaire** des oscillations fait apparaître des combinaisons linéaires des phases $\varphi_{j,k}$. On commence donc par faire une hypothèses naturelle de "clôture", introduite dans les travaux de HUNTER, MAJDA, ROSALES ([HMR]), reprise par JOLY, METIVIER, RAUCH [JMR] et qui assure la finitude du nombre de phases en jeu :

(1.1.6) *Hyp.*1: (*"Clôture"* [HMR], [JMR]) $\boxed{\begin{array}{l} \forall \lambda \in \Theta^*, \forall j \in \{1,\dots n\} : \ X_j \langle \lambda , \vec{\varphi} \rangle \equiv 0 \Rightarrow \\ \exists \alpha \in \Theta_j^* : \langle \lambda , \vec{\varphi} \rangle = \langle \alpha , \vec{\varphi}_j \rangle \end{array}}$

Nous supposons ensuite que la condition de transversalité entre le système des phases et les champs X_j, introduite dans [JMR], est vérifiée. Il s'agit de la condition de "weak transversality" de [JMR] :

(1.1.7) *Hyp.2* : (*"Transversalité"* [JMR]) $\boxed{\begin{array}{l}\forall\lambda\in\Theta^*, \forall j\in\{1,...N\}, on\, a:\\ X_j\langle\lambda,\vec{\phi}\rangle\equiv 0\, ou\, bien\, X_j\langle\lambda,\vec{\phi}\rangle\neq 0\, p.p\end{array}}$

Enfin, comme dans [JMR], pour éviter l'apparition d'oscillations sur des phases constantes, nous supposerons que :

Hyp.3 : $\forall j\in\{1,...N\}, \forall\, \alpha\in\Theta_j^*\setminus\{0\}$: $grad(\langle\alpha,\vec{\varphi}_j\rangle)\neq 0$ *presque partout.*

1.1.3 Oscillations et asymptotique L^1 de u^ε : un théorème de J.L. JOLY, G. METIVIER et J. RAUCH

Le théorème qui suit montre que la famille de problèmes de Cauchy (1.1.3), (1.1.4) admet une solution oscillante à profil presque périodique.

Dans l'énoncé du théorème intervient un opérateur $\mathbb{E}_j$ qui est un opérateur de "moyenne" sur $\mathcal{P}_{pp}(\Omega_T,\Theta)$. Il s'agit d'un projecteur linéaire continu de $\mathcal{P}_{pp}(\Omega_T,\Theta)$ dans $\mathcal{P}_{pp}(\Omega_T,\Theta_j)$ dont on rappellera la définition précise plus loin, car elle fait intervenir la structure des *"résonances"* entre les phases $\vec{\phi}_j$.

D'autre part, si $\Omega_T := \Omega\cap\{0\leq t\leq T\}$ $(T>0)$, on note $C^0L^1(\Omega_T)$ l'espace des fonction $f(t,x)$ continues sur Ω_T, muni de la norme :

$$\sup_t \|f(t,.)\|_{L^1(\Omega_T(t))},\ où\ \ \Omega_T(t) := \{x\,/\,(t,x)\in\Omega_T\}\ .$$

THEORÈME 1.1.1 ([JMR]). Soit $H_j(x,\theta_j)\in\mathcal{P}_{pp}([a,b],\Theta_j)$ *pour tout* $j\in\{1,...N\}$. *Le problème* (1.1.3)–(1.1.4) *possède, sur un domaine* $\Omega_T := \Omega\cap\{0\leq t\leq T\}$ $(T>0)$ *indépendant de* $\varepsilon>0$, *une solution* $u^\varepsilon(t,x)$ *continue et bornée dans* $L^\infty(\Omega_T)$ *uniformément en* ε. *De plus pour tout* $j\in\{1,...N\}$, *il existe* $\mathcal{V}_j\in\mathcal{P}_{pp}(\Omega_T,\Theta_j)$ *tel que*

$$u_j^\varepsilon(t,x) - \mathcal{V}_j(x;\vec{\phi}_j(t,x)/\varepsilon) = o(1)\ \ dans\ \ C^0L^1(\Omega_T),$$

et le "profil" $\mathcal{V} := (\mathcal{V}_1,\dots,\mathcal{V}_N)$ *est la (seule) solution du système intégrodifférentiel suivant, où les* $\mathbb{E}_j$ *sont des "opérateurs de moyennes" qui dépendent de la structure des résonances entre les phases* $\vec{\varphi}_j$:

$$(1.1.8)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_j\mathcal{V}_j = \mathbb{E}_j\{f_j(t,x,\mathcal{V},\ \overline{\mathcal{V}}\,)\},\quad \forall j\in\{1,...N\}\\ \mathcal{V}_{j\,|\{t=0\}}(x;\theta_j) = H_j(x;\theta_j)\,. \end{array}\right.$$

On peut cependant se poser des questions plus précises concernant l'évolution de l'onde oscillante u^ε. On peut en particulier s'intéresser

- *à une description dans* L^∞ *des fluctuations de* u^ε,

- *à la durée d'existence régulière de* u^ε *ou aux liens existant entre la durée de vie du profil* $\mathcal{V}$ *et celle de* u^ε.

La réponse à ce type de question fait intervenir la notion de "forte transversalité" qui a été introduite par [JMR].

1.1.4 Forte transversalité

Pour tout $j \in \{1,..N\}$ et $x_0 \in [a,b]$, on notera $\gamma_{j,x_0} : s \in [0,...] \to \gamma_{j,x_0}(s) \in \Omega$ la courbe intégrale de X_j telle que $\gamma_{j,x_0}(0) = x_0$, décrite dans le sens des t croissants, et $\mathscr{C}_{j,x_0}$ le graphe de γ_{j,x_0}.

DEFINITION 1.1.2 ([JMR]). *Soit* $j \in \{1,..N\}$ *et* $h \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$. *On dit que h est fortement transverse à* X_j, *ce que nous noterons "* $h \pitchfork X_j$ *", si:*

$$\forall x_0 \in [a,b]:\quad X_j\, h(\gamma_{j,x_0}(s)) \neq 0,\quad s\text{-}p.p.$$

Cette notion permet dans certains cas de préciser le théorème 1.1.1:

THEORÈME 1.1.3.([JMR]). *En plus des hypothèses du théorème* 1.1.1, *supposons que la propriété suivante est vérifiée (appelée "condition de forte transversalité" dans* [JMR] *ce qui revient aussi à remplacer* (1.1.7) *par* (1.1.9)):

$$(1.1.9)\qquad \forall \lambda \in \Theta^*,\ \forall j \in \{1,..N\},\ X_j\langle \lambda, \vec{\varphi}\rangle \not\equiv 0 \Rightarrow \langle \lambda, \vec{\varphi}\rangle \pitchfork X_j.$$

Alors le théorème 1.1.1 *est vrai avec un* $o(1)$ *dans* $L^\infty(\Omega_T)$.

On a également des renseignements sur le temps d'existence des solutions. Notons T_ε la durée de vie de u^ε et T^* la durée de vie du profil $\mathcal{V}$:

THEORÈME 1.1.4 ([JMR]). *Supposons que la condition* (1.1.9) *est vérifiée. Alors: pour tout* T *tel que* $0 < T < T^*$ *il existe* $\varepsilon_0 > 0$, *tel que* $T_\varepsilon \geq T$ *lorsque* $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

Il est observé dans [JMR] que *sans l'hypothèse* (1.1.9), *les théorèmes* 1.1.3 *ou* 1.1.4 *ne sont plus vrais*. Nous renvoyons également le lecteur aux divers exemples donnés au §3. Cette observation est le point de départ de notre exposé. Nous allons voir que la cause de ce phénomène est l'existence de **résonances faibles**, dont le résultat est l'apparition d'ondes du type "solitaire" (c'est à dire en $\mathcal{U}(\varphi/\varepsilon)$ où $\mathcal{U}(\theta) \to 0$ quand $|\theta| \to \infty$) qui viennent se superposer à l'onde oscillante "de base ", donnée par le théorème 1.1.1.

1.1.5 Résonances classiques et résonances faibles

Une résonance classique est une relation de dépendance linéaire entre les phases $\varphi_{j,k}$ et l'on identifie une telle relation à un élément $\lambda \in \Theta^* - \{0\}$ tel que :

$$\langle \lambda , \vec{\varphi}(t,x) \rangle = 0 \quad , \quad \forall (t,x) \in \Omega.$$

Nous appellerons *résonance faible pour* X_j un élément de l'ensemble (conique) $\mathcal{R}f_j$ défini par :

$$\mathcal{R}f_j := \{ \lambda \in \Theta^* - \{0\} : X_j \langle \lambda , \vec{\varphi} \rangle \neq 0 \ \ p.p \ dans \ \Omega \ et \ \langle \lambda , \vec{\varphi} \rangle \pitchfork X_j \}.$$

et si $\lambda \in \mathcal{R}f_j$, nous appellerons "*support de la résonance faible* λ", l'ensemble $\cup \mathcal{C}_{j,x_0}$ la réunion portant sur les $x_0 \in [a,b]$ tels que

$$mes_{\mathbb{R}}(\ \{ s>0 \ / \ X_j \langle \lambda , \vec{\varphi} \rangle (\gamma_{j,x_0}(s)) = 0 \} \ ) > 0.$$

On peut alors éviter l'hypothèse (1.1.9) et généraliser les théorèmes 1.1.3 et 1.1.4 de la manière suivante.

THEORÈME 1.2.1. *Soit* $\mathcal{V} := (\mathcal{V}_1 ,..., \mathcal{V}_N)$ *le profil déterminé dans le théorème* 1.1.1. *Supposons que*

$$\text{(1.2.1)} \qquad \Lambda(f_j (t,x,\mathcal{V},\overline{\mathcal{V}})) \cap \mathcal{R}f_j = \emptyset, \quad \forall j \in \{1,...,N\},$$

alors la conclusion du théorème 1.1.1 *reste vraie avec un* $o(1)$ *dans* $L^\infty(\Omega_T)$, *ainsi que celle du théorème* 1.1.4.

En particulier (1.2.1) *est vérifiée lorsque pour tout* $j \in \{1,...,N\}$, $\Lambda(H_j) \subset M$ *où* M *est un sous-espace vectoriel de* Θ^* *tel que* $M \cap \mathcal{R}f_j = \emptyset$, $\forall j \in \{1,...,N\}$.

L'objet du paragraphe suivant est de mettre en place un cadre et des outils qui permettent d'analyser des situations où (1.2.1) n'est plus vérifiée.

§2. Optique géométrique en présence de résonances faibles et fortes

2.1 Matériel et hypothèses

2.1.1 Résonances classiques

Nous appelons résonance classique ou "résonance forte", une relation de dépendance linéaire entre les phases $\varphi_{j,k}$ (ou relation *abélienne* entre les feuilletages définis par les courbes de niveau des $\varphi_{j,k}$). On introduit l'espace des résonances

(2.1.1) $$\boldsymbol{R} := \{\, \lambda \in \Theta^* : \langle \lambda , \vec{\varphi} \rangle \equiv 0 \ \textit{dans} \ \Omega \,\} .$$

Alors $\vec{\varphi} = (\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_N)$, qui prend ses valeurs a priori dans Θ, est en fait à valeurs dans le sous-espace $\boldsymbol{R}^{\perp} \subset \Theta$. On notera $\Psi := \boldsymbol{R}^{\perp}$.

2.1.2 Contrôle des résonances faibles

Introduisons de façon générale l'espace des *résonances faibles pour* X_j :

(2.1.2) $$\mathscr{R}\!f_j := \{\, \lambda \in \Theta^* : \ X_j \langle \lambda , \vec{\varphi} \rangle \neq 0 \ \ p.p \ dans \ \Omega \ et \ \langle \lambda , \vec{\varphi} \rangle \not\pitchfork X_j \ \}$$

Pour décrire de manière suffisament générale l'ensemble $\mathscr{R}\!f_j$, on fixe de (nouvelles) fonctions phases pour X_j

$$\zeta_{j,0} \equiv 1, \ \zeta_{j,1}(t,x), \ \ldots \ , \zeta_{j,mj}(t,x) \ \ où \ \ \zeta_{j,k} \in C^{\infty}(\Omega;\mathbb{R}) \ \ et \ \ X_j \, \zeta_{j,k} \equiv 0 \ \ dans \ \ \Omega \, ,$$

et l'on note $\vec{\zeta}_j = (\zeta_{j,0} \, , \, \ldots \, , \, \zeta_{j,mj}) \in C^{\infty}(\Omega;\mathbb{R}^{1+mj})$. Pour éviter les redondances nous supposerons que

(2.1.3) $\forall j \in \{1, \ldots N\}, \ \forall \, \alpha \in (\mathbb{R}^{1+mj})^* : \ \langle \alpha , \vec{\zeta}_j \rangle \neq 0$ *presque partout dans* Ω.

En outre, pour tout $j \in \{1, \ldots N\}$, on suppose qu'il existe des applications

$$\alpha_j : \mathscr{R}\!f_j \to \mathbb{R}^{1+mj} \quad , \ \textit{homogène de degré } 1$$

$$\beta_j : \mathscr{R}\!f_j \to C^{\infty}(\Omega;\mathbb{R}) \quad , \ \textit{homogène de degré } 0$$

$M_j \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n_j};\Psi)$ *identifié à une matrice réelle à coefficients constants* vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(2.1.4)\qquad \boxed{\begin{array}{l}\forall j\in\{1,\dots,N\},\ \forall\lambda\in\mathcal{R}f_j:\\ 1.\ \langle\lambda,\vec{\varphi}\rangle=\langle\alpha_j(\lambda),\ \vec{\zeta_j}\rangle\ \beta_j(\lambda)\ +\ \langle\lambda,\quad M_j\vec{\varphi_j}\rangle\\ 2.\ \beta_j(\lambda;.)\pitchfork X_j\end{array}}$$

REMARQUES 2.1.1

1. Les propriétés (2.1.4) entrainent effectivement que $\lambda\in\mathcal{R}f_j$ puisque d'après (2.1.4).1 :

$$X_j\langle\lambda,\vec{\varphi}\rangle=\ \langle\alpha_j(\lambda),\vec{\zeta_j}\rangle\ \ X_j\beta_j(\lambda;.)$$

et le membre de droite reste nul le long de toutes les courbes γ_{j,x_0} pour lesquelles $\langle\alpha_j(\lambda),\vec{\zeta_j}(0,x_0)\rangle=0$. Le support de la résonance λ sera donc la réunion des courbes $\{\vec{\zeta_j}(t,x)=\vec{\zeta_j}(0,x_0)\}$, où x_0 vérifie $\langle\alpha_j(\lambda),\vec{\zeta_j}(0,x_0)\rangle=0$.

2. Pour tout $j\in\{1,\dots N\}$ et tout $\lambda\in\Theta^*$, une (et une seule) des trois propriétés suivantes est vérifiée :

i) $X_j\langle\lambda,\vec{\varphi}\rangle\equiv 0$ *dans* Ω , *ii)* $\langle\lambda,\vec{\varphi}\rangle\pitchfork X_j$, *iii* $\lambda\in\mathcal{R}f_j$.

3. *Forme de* $\mathcal{R}f_j$. Introduisons le *cône* $\Gamma_j=\{\lambda\in\mathcal{R}f_j\ /\ \lambda_j=(\lambda_{j,1},\dots,\lambda_{j,n_j})=0\}$ et *l'espace vectoriel* $\Theta^{*,j}:=\{\lambda\in\Theta^*\ /\ \lambda_k=0\ si\ k\neq j\}\subset\Psi^*$. Alors $\mathcal{R}f_j$ est la somme de Γ_j et $\Theta^{*,j}$ et Γ_j *s'identifie à* $\mathcal{R}f_j/\Theta^{*,j}$:

$$(2.1.5)\qquad \mathcal{R}f_j=\Gamma_j+\Theta^{*,j},\qquad \Gamma_j=\mathcal{R}f_j/\Theta^{*,j}.$$

2.1.3 Notion de "répartition linéaire des résonances faibles" (RLRF)

DEFINITION 2.1.2 *Soit σ une partie de Ψ^* et $j\in\{1,\dots N\}$. Nous dirons que σ vérifie la propriété de "répartition linéaire des résonances faibles en X_j" (en abrégé RLRF$_j$) si les deux propriétés suivantes sont vérifiées*:

i) Il existe une famille <u>*finie*</u> $\mathcal{F}_j$ de <u>sous-espaces vectoriels</u> de Ψ^* tels que

$$(\sigma\cap\mathcal{R}f_j)\subset\bigcup_{V\in\mathcal{F}_j}V\quad\text{et}\quad\forall V\in\mathcal{F}_j\ :\ V\subset\overline{\mathcal{R}f_j}\quad(\textit{adhérence de }\mathcal{R}f_j)\ ,$$

ii)Pour tout $V\in\mathcal{F}_j$ et tout $(t,x,z_j)\in\Omega\times\mathbb{R}^{1+m_j}$, l'application

$$\lambda\in V\cap\mathcal{R}f_j\to\langle\alpha_j(\lambda),z_j\rangle\ \beta_j(\lambda;t,x)\in\mathbb{R}$$

est la restriction à $V\cap\mathcal{R}f_j$ d'une <u>*forme linéaire sur V*</u> *notée*:

$$\lambda\in V\to\langle\lambda,Q_V(t,x,z_j)\rangle\in\mathbb{R}.$$

Nous dirons que σ vérifie RLRF si pour tout $j\in\{1,\dots N\}$ σ vérifie RLRF$_j$.

REMARQUES 2.1.3 :

1. $Q_V(t,x,z_j)$ est forcément linéaire en z_j et continue en (t,x). On notera parfois par la suite $Q_V(t,x,z_j) = Q^V(t,x)z_j$, où Q^V désigne une application continue de Ω dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{1+m_j}\ ; V^*)$.

2. Quitte à saturer $\mathscr{F}_j$ pour l'intersection, on peut supposer que $\mathscr{F}_j$ est stable par intersection (finie, puisque $\mathscr{F}_j$ est fini).

EXEMPLES 2.1.4 :

1. Une partie σ vérifie la propiété de *RLRF$_j$* lorsque $\sigma \cap \mathscr{R}f_j$ est fini. En particulier, c'est toujours vrai lorsque <u>σ est finie</u>.

2. Une partie σ vérifie la propiété de *RLRF$_j$* si

$$\sigma \cap \mathscr{R}f_j \subset \mathscr{D}_j + \Theta^{*,j} \text{ où } \mathscr{D}_j \text{ est } \underline{\text{une réunion finie de droites}} \text{ de } \Gamma_j\ .$$

3. Lorsque $\mathscr{R}f_j$ vérifie *RLRF$_j$*, toute partie σ vérifie *RLRF$_j$*. En particulier, c'est toujours le cas lorsque $\mathscr{R}f_j$ *est un <u>plan</u>*, puisque dans ce cas il résulte de (2.1.5) que $\sigma \equiv \mathscr{R}f_j$ vérifie le point 2 précédent.

2.1.4 Profils

Désignons par $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ le compactifié de $\mathbb{R}$ avec un point à l'infini. Etant donné un espace vectoriel réel de dimension finie $Z = \mathbb{R}^\nu$, et un fermé D de $\mathbb{R}^2$, introduisons l'espace (de Banach) $\mathscr{A}(D\times\hat{\mathbb{R}},\Psi) := C^0(D\times\hat{\mathbb{R}} : C^0_{pp}(\Psi))$. Il s'agit d'une algèbre qui s'identifie avec l'espace des fonctions $f(t,x;\rho;\theta) \in C^0(D\times\mathbb{R} : C^0_{pp}(\Psi))$, $(t,x)\in D$, $\rho\in\mathbb{R}$, $\theta\in\Psi$, qui admettent une limite lorsque $|\rho|\to\infty$, uniformément par rapport à $(t,x,\theta)\in D\times\Psi$. On notera $f(t,x;\infty;\theta) \in C^0(D : C^0_{pp}(\Psi)) = \mathscr{P}_{pp}(D,\Psi)$ la fonction presque périodique obtenue lorsque $|\rho|\to\infty$.

DEFINITION 2.1.5 *Nous appelons $\mathscr{P}(D,Z,\Psi)$ l'adhérence dans $C^0_b(D\times Z : C^0_{pp}(\Psi))$ ($\equiv$ fonctions continues bornées) de l'algèbre engendrée par les fonctions de la forme $f(t,x;\langle\alpha,z\rangle;\theta)$ où $\alpha\in Z^*$ et $f(t,x;\rho;\theta) \in \mathscr{A}(D\times\hat{\mathbb{R}},\Psi)$. Autrement dit $f\in\mathscr{P}(D,Z,\Psi)$ si et seulement si: $\forall\,\varepsilon>0$, il existe un ensemble fini de fonctions $f_{k,\ell}\in\mathscr{A}(D\times\hat{\mathbb{R}},\Psi)$ et des $\alpha_{k,\ell}\in Z^*$ $1\le k\le p$, $(1\le\ell\le q_k)$ tels que:*

$$(2.1.6) \qquad \Big|\, f(t,x;z;\theta) \;-\; \sum_{k=1}^{p} \prod_{\ell=1}^{q_k} f_{k,\ell}(t,x;\langle\alpha_{k,\ell},z\rangle;\theta) \,\Big| \;\le\; \varepsilon\,.$$

Dans la suite, on notera $Z_j = \mathbb{R}^{m_j}$ et $z_j \in Z_j$ la "variable rapide" à laquelle on substituera "$\zeta_j(t,x)/\varepsilon$".

La proposition suivante montre que les éléments de $\mathscr{P}(D,Z,\Psi)$ admettent une limite "lorsque z tend vers l'infini le long d'un sous espace vectoriel de Z".

PROPOSITION 2.1.6 *Soit Y un sous espace vectoriel de Z.*

1) *Pour tout $f \in \mathcal{P}(D,Z,\Psi)$ il existe une application notée $\mathfrak{L}_Y f \in \mathcal{P}(D,Z,\Psi)$ telle que pour Y-presque partout $y \in Y$:*

(2.1.7) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f(t,x;z+\lambda y;\theta) = (\mathfrak{L}_Y f)(t,x;z;\theta)\,, \quad \forall\, (t,x,z,\theta) \in D \times Z \times \Psi.$

2) *$\mathfrak{L}_Y f$ est invariante pour les translations par des vecteurs de Y:*

(2.1.8) $\mathfrak{L}_Y f(t,x;z+y;\theta) = \mathfrak{L}_Y f(t,x;z;\theta), \quad \forall y \in Y, \ \forall\, (t,x,z,\theta) \in D \times Z \times \Psi.$

En particulier d'après (2.1.8), pour $Y = Z$, $\mathfrak{L}_Z f$ est une fonction indépendante de z et s'identifie à un élément de $\mathcal{P}_{pp}(D,\Psi)$. On notera $\mathcal{NP}(D,Z,\Psi)$ le noyau de $\mathfrak{L}_Z$, qui est alors en somme directe avec $\mathcal{P}_{pp}(D,\Psi)$:

(2.1.9) $$\mathcal{P}(D,Z,\Psi) = \mathcal{P}_{pp}(D,\Psi) \oplus \mathcal{NP}(D,Z,\Psi)$$

2.1.4 Opérateurs de moyenne

Si V est un sous-espace vectoriel de Ψ^*, on note $\mathcal{M}_V : C^0_{pp}(\Psi) \to C^0_{pp}(\Psi)$ l'opérateur défini par

(2.1.10) $$\mathcal{M}_V f(\theta) := \lim_{T \to \infty} \Big(T^{-d} \int_{TQ} f(\theta + v)\, d_{V^\perp}(v) \Big)$$

où $d = dim\ V^\perp$, $d_{V^\perp}$ est la mesure de Lebesgue dans $V^\perp$, et Q est un cube de $V^\perp$ de volume (dans $V^\perp$) unité.

L'action de l'opérateur $\mathcal{M}_V$ est celle d'un "filtre" qui ne laisse passer que les signaux dont la fréquence appartient à V. Il agit de la manière suivante sur les exponentielles :

(2.1.11) $$si\ f(\theta) = e^{i\langle \lambda,\theta\rangle}\,, \quad \mathcal{M}_V f = \begin{cases} 0 \ si\ \lambda \notin V \\ f\ si\ \lambda \in V\,. \end{cases}$$

2.1.4.1 *Moyennes pour les oscillations* ([*JMR*]).

Rappelons que $\boldsymbol{R} = \{\lambda \in \Theta^* : \langle \lambda, \vec{\varphi} \rangle \equiv 0 \ \ dans \ \ \Omega\}$ et $\Theta^{*j} := \{\lambda \in \Theta^* / \lambda_k = 0\ si\ j \neq k\}$. Alors les opérateurs de moyenne qui interviennent en (1.1.8) sont définis par

(2.1.12) $$\mathbb{E}_j f := \mathcal{M}_{\boldsymbol{R} + \Theta^{*j}}$$

où l'action des opérateurs $\mathcal{M}_V$ est étendue aux fonctions dépendant de (t,x) en considérant (t,x) comme des paramètres. L'opérateurs $\mathbb{E}_j$ applique $\mathcal{P}_{pp}(D,\Psi)$

dans $\mathcal{P}_{pp}(D,\Psi_j)$ en tenant compte des **résonances fortes** entre les phases d'oscillations $\vec{\varphi}_1,...,\vec{\varphi}_N$.

2.1.4.2 *Moyennes pour les résonances faibles.*

Soit σ une partie de Ψ^*. On définit un opérateur $\mathbb{B}^\sigma_j$ qui agit sur les exponentielles (et s'étend par linéarité aux polynômes trigonométriques) de la manière suivante :

$$si\ f(\theta)=e^{i\langle\lambda,\theta\rangle},\quad (\mathbb{B}^\sigma_j f)(t,x;z_j;\theta_j) := \begin{cases} 0\ si\ \lambda\notin\sigma\cap\mathcal{R}f_j \\ e^{i\langle\alpha_j(\lambda),\,z_j\rangle\beta_j(\lambda)}e^{i\langle\lambda\,,\,M_j\theta_j\rangle}\ si\ \lambda\in\sigma\cap\mathcal{R}f_j\,. \end{cases}$$

Le rôle de la condition RLRF est de permettre de prolonger l'opérateur $\mathbb{B}^\sigma_j$ aux fonctions presque-périodique. C'est l'objet de la proposition qui suit :

PROPOSITION 2.1.7 *Si σ vérifie la propriété de RLRF$_j$, l'opérateur $\mathbb{B}^\sigma_j$ se prolonge de manière unique en opérateur linéaire continu de $C^0_{pp}(\Psi)$ dans $C^0_b(\Omega\times Z_j:C^0_{pp}(\Theta_j))$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_j$ la famille associée à σ, stable par intersection finie (remarque 2.1.3), et ordonnée par l'inclusion. Pour $V\in\mathcal{F}_j$ notons $SM(V) := \{\, W\in \mathcal{F}_j\,,\ W\subset V,\ W\ maximal \neq V\,\}$, et introduisons les opérateurs

$$\mathbb{F}_V := \mathcal{M}_V(1-\mathbb{E}_j)\prod_{W\in SM(V)}(1-\mathcal{M}_W)\quad si\ V\neq\{0\},\qquad et\quad \mathbb{F}_{\{0\}}:=0.$$

qui opère dans $C^0_{pp}(\Psi)$. Alors si $f(\theta)=e^{i\langle\lambda,\theta\rangle}$, $\mathbb{B}^\sigma_j f$ s'écrit encore

$$(2.1.13)\qquad \mathbb{B}^\sigma_j f(t,x;z_j;\theta_j) = \sum_{V\in\mathcal{F}_j}(\mathbb{F}_V f)(Q_V(t,x;z_j)+M_j\theta_j).$$

Ensuite, comme les $\mathbb{F}_V$ se prolongent à $C^0_{pp}(\Psi)$, les $\mathbb{B}^\sigma_j$ se prolongent également avec la formule (2.1.13), ce qui démontre la proposition. En fait l'opérateur $\mathbb{B}^\sigma_j$ est l'extension à l'espace $C^0_{pp}(\Psi)$ de l'opérateur qui agit sur les fonctions exponentielles $f(\theta)=e^{i\langle\lambda,\theta\rangle}$ de la manière suivante :

$$(\mathbb{B}^\sigma_j f)(t,x;z_j;\theta_j) = \begin{cases} f(Q^V z_j+M_j\theta_j)\ si\ \lambda\in V, V\ minimal\in\mathcal{F}_j,\ \lambda\notin R+\Theta^{*j} \\ 0\ sinon\ .\blacksquare \end{cases}$$

DEFINITION 2.1.8. *Soit σ une partie de Ψ^* vérifiant la propriété de RLRF$_j$. On définit $\mathcal{E}^\sigma_j := \mathbb{E}_j + \mathbb{B}^\sigma_j$, qui opère continument de $C^0_{pp}(\Psi)$ dans $C^0_b(\Omega\times Z_j:C^0_{pp}(\Theta_j))$.*

2.2 Les résultats

On généralise un peu la donnée de Cauchy et on s'intéresse au système semilinéaire

$$(2.2.1)\qquad \begin{cases} X_1 u_1 = f_1(t,x,u,\bar{u}) \\ \vdots \\ X_N u_N = f_N(t,x,u,\bar{u}) \end{cases}$$

avec des conditions initiales

$$(2.2.2)\qquad u_j(0,x) = H_j(x\,;\,\vec{\zeta}_j^{\circ}(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\phi}_j^{\circ}(x)/\varepsilon)\ ,\ j=1,\ldots,N\ ,$$

où $H_j(x\,;z_j\,;\theta_j\,)\in\mathscr{P}\,([a\,,b]\,,Z_j\,,\Theta_j)$, Z_j désignant l'espace $\mathbb{R}^{1+m_j}$.

Suivant les notations de la proposition 2.1.6 nous noterons $\mathfrak{L}_j$ au lieu de $\mathfrak{L}_{Z_j}$ l'opérateur de moyenne qui projette $\mathscr{P}\,(D,Z_j,\Psi)$ sur $\mathscr{P}_{pp}\,(D,\Psi)$ suivant la décomposition (2.1.9).

Notons $\mathscr{V}=(\mathscr{V}_1\,,\ldots,\mathscr{V}_N\,)$ le profil oscillant fourni par le théorème 1.1.1 lorsque l'on remplace la donnée de Cauchy (2.2.2) par

$$(2.2.3)\qquad u_j(0,x) = \mathfrak{L}_j H_j\,(x\,;\,\vec{\phi}_j^{\circ}(x)/\varepsilon)\ ,\ j=1,\ldots,N\,,$$

c'est à dire que les $\mathscr{V}_j\,(t\,,x\,;\theta\,)=\mathscr{V}_j\,(t\,,x\,;\theta_j)\in\mathscr{P}_{pp}\,(\Omega_T,\Theta_j)$ sont les solutions sur un domaine Ω_τ , $\tau>0$, du système intégro différentiel

$$(2.2.4)\qquad \begin{cases} X_j\mathscr{V}_j = \mathbb{E}_j\{f_j\,(t\,,x\,,\mathscr{V},\ \bar{\mathscr{V}}\,)\},\quad \forall j\in\{1,\ldots N\} \\ \mathscr{V}_{j\,|\{t=0\}}(x\,;\theta_j) = \mathfrak{L}_j H_j(x;\theta_j\,). \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

THEORÈME 2.2.1. 1) *Supposons que* $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_N$ *sont des parties de* Ψ^* *telles que*

$$(2.2.5)\qquad \forall j\in\{1,\ldots N\},\ \ \Lambda_j\ \textit{vérifie}\ \mathit{RLRF}_j\ \ \textit{et}\ \ \Lambda(f_j(t,x,\mathscr{V},\bar{\mathscr{V}}))\subset\Lambda_j\ ,$$

alors il existe $T>0$, *et des profils* $\mathscr{U}_j\,(t\,,x\,,z_j,\theta_j)\in\mathscr{P}\,(\Omega_T,Z_j,\Theta_j)$, $j\in\{1,\ldots N\}$, *tels que la solution* u^ε *de* (2.2.1), (2.2.2) *existe sur* Ω_T *pout tout* $\varepsilon\in]0,1]$ *et vérifie*:

$$u_j^\varepsilon(t\,,x) = \mathscr{U}_j(t\,,x\,;\vec{\zeta}_j(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\phi}_j(x)/\varepsilon\,) + o(1)\ \ \textit{dans}\ \ L^\infty(\Omega_T),\ \forall j\in\{1,\ldots N\}.$$

2) *Sous l'hypothèse* (2.2.5), $\mathcal{U}_j(t,x,z_j,\theta_j)$ *est l'unique solution de l'équation intégrodifférentielle (les termes (t,x) sont sous-entendus)*:

$$(2.2.6)_j \qquad \begin{cases} X_j\mathcal{U}_j = \mathcal{E}_j^{\Lambda_j}\ \{f_j(\mathcal{V}_1,\dots,\mathcal{U}_j,\dots,\mathcal{V}_N\ ,\overline{\mathcal{V}_1},\dots,\overline{\mathcal{U}_j},\dots,\overline{\mathcal{V}_N}\ )\}, \\ \mathcal{V}_{j\,|\{t=0\}} = H_j\,. \end{cases}$$

(*dans le second membre on remplace* $\mathcal{V}_j$ *par* $\mathcal{U}_j$ *dans* $f_j(t,x,\mathcal{V},\overline{\mathcal{V}})$, *en outre on a la relation*: $\mathfrak{L}_j\mathcal{U}_j = \mathcal{V}_j$.

3) *En particulier, si*

(2.2.7) $\quad \Lambda^0 := Vect\,(\,\Lambda(H_1)\cup\dots\cup\Lambda(H_N))$ *vérifie* RLRF$_j$ *pour tout* j

alors (2.2.5) *est vérifié avec* $\Lambda_1=\Lambda_2=\dots=\Lambda_N=\Lambda^0$ *et les* 1) *et* 2) *s'appliquent*.

REMARQUE 2.2.2.● On peut écrire les équations $(2.2.6)_j$ autrement en écrivant $\mathcal{U}_j$ sous la forme $\mathcal{U}_j = \mathcal{V}_j + \mathcal{W}_j$ où $\mathcal{W}_j \in \mathcal{N}(\Omega_T,Z_j,\Theta_j)$ et en faisant porter l'équation sur l'inconnue $\mathcal{W}_j$. Pour cela on note $G_j(t,x,u,\bar{u},w,\bar{w})$ la fonction C^∞ de ses arguments ($u\in\mathbb{C}^N$, $w\in\mathbb{C}$) à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie par (on note $w' := (w'_1,\dots,w'_N)$ où $w'_k = 0$ si $k\neq j$ et $w'_j = w_j$) l'égalité

$$f_j(t,x,u+w',\bar{u},\bar{w}') - f_j(t,x,u,\bar{u}) = (w,\bar{w})\,G_j(t,x,u,\bar{u},w,\bar{w}).$$

THEORÈME 2.2.3. *Sous les hypothèses du théorème* 2.2.1 *l'équation* $(2.2.6)_j$ *est équivalente à l'équation suivante*

$$\begin{cases} X_j\mathcal{W}_j - \mathcal{E}_j^{\Lambda_j}\ \{G_j(\mathcal{V}_1,\dots,\mathcal{V}_N\ ,\overline{\mathcal{V}_1},\dots,\overline{\mathcal{V}_N},\mathcal{W}_j,\overline{\mathcal{W}_j})\} = \mathbb{B}_j^{\Lambda_j}\ \{f_j(t,x,\mathcal{V},\overline{\mathcal{V}})\}, \\ \mathcal{V}_{j\,|\{t=0\}} = H_j\,. \end{cases}$$

En particulier, on déduit du théorème 2.2.3, le résultat suivant. On note $\mathcal{C}_{j,x_0} := \{\,\gamma_{j,x_0}(s),\ s\in[0,\dots]\}$ la courbe intégrale de X_j.

COROLLAIRE 2.2.4. *Sous les hypothèses du théorème* 2.2.1:

1) *Si* $\mathbb{B}_j^{\Lambda_j}\{\,f_j(t,x,\mathcal{V},\overline{\mathcal{V}})\} = 0$ *et si* $H_j = \mathfrak{L}_j\,H_j$, *alors* $\mathcal{W}_j = 0$.

2) *Si* $\mathbb{B}_j^{\Lambda_j}\{\,f_j(t,x,\mathcal{V},\overline{\mathcal{V}})\}_{|\mathcal{C}_{j,x_0}} = 0$ *et si* $(H_j - \mathfrak{L}_j\,H_j)(x_0) = 0$, *alors* $\mathcal{W}_{j\,|\mathcal{C}_{j,x_0}} = 0$.●

REMARQUE 2.2.5. • Dans le(s) théorème(s) qui précède(ent), les équations des profils $(2.2.6)_j$ supposent connus les $\mathscr{V}_j$ ainsi que les ensembles spectraux $\Lambda_j := \Lambda(f_j(t,x,\mathscr{V},\overline{\mathscr{V}}))$. Cependant, on peut obtenir $\mathscr{U}$ comme la solution d'un système analogue à (1.1.8) :

THEORÈME 2.2.6. *Dans le théorème* 2.2.1 *le profil* $\mathscr{U} = (\mathscr{U}_1(t,x;z_1;\theta_1), \ldots, \mathscr{U}_N(t,x;z_N;\theta_N))$ *est également l'unique solution du système intégrodifférentiel suivant*:

$$(2.2.9) \quad \begin{cases} X_1\mathscr{U}_1 = \mathscr{E}_1^{\Lambda_1}\{f_1(\mathscr{U}_1, \mathfrak{L}_2\mathscr{U}_2, \ldots, \mathfrak{L}_N\mathscr{U}_N, \overline{\mathscr{U}_1}, \ldots, \mathfrak{L}_2\overline{\mathscr{U}_2}, \ldots, \mathfrak{L}_N\overline{\mathscr{U}_N})\}, \\ \ldots \\ X_N\mathscr{U}_N = \mathscr{E}_N^{\Lambda_N}\{f_1(\mathfrak{L}_1\mathscr{U}_1, \ldots, \mathfrak{L}_{N-1}\mathscr{U}_{N-1}, \mathscr{U}_N, \mathfrak{L}_1\overline{\mathscr{U}_1}, \ldots, \mathfrak{L}_{N-1}\overline{\mathscr{U}_{N-1}}, \overline{\mathscr{U}_N})\}, \end{cases}$$

avec les données initiales: $\mathscr{U}_{j\,|\{t=0\}} = H_j \;, \quad \forall j \in \{1,\ldots N\}$.•

REMARQUE 2.2.7. • Le profil $\mathscr{U}_j$ s'écrit $\mathscr{V}_j + \mathscr{W}_j$, où $\mathscr{W}_j = \mathscr{N}_{Z_j}\mathscr{U}_j$ est la "partie" qui dépend de z_j dans $\mathscr{U}_j$, suivant la décomposition de $\mathscr{P}(\Omega_T, Z_j, \Psi_j)$ écrite en (2.1.9). Le théorème (2.2.3) montre que les équations des profils pour les $\mathscr{W}_j$ se découplent, ce qui s'interprète en disant qu'*il n'y a pas d'interaction entre les "pics" propagés par* u_k^ε *et ceux de* u_ℓ^ε *si* $k \neq \ell$. •

Concernant la durée de vie des solutions continues, on a le résultat qui suit. On note T_ε la durée de vie de u^ε, et t^* la borne supérieure de l'ensemble des T tels que le profil $\mathscr{U}$ solution des équations $(2.2.6)_j$ existe sur $[0,T]$.

THEORÈME 2.2.8. *Sous les hypothèses du théorème* 2.2.1, *pour tout réel* t *tel que* $0 < t < t^*$ *il existe* $\varepsilon_0 > 0$, *tel que* $T_\varepsilon \geq t$ *lorsque* $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

Dans l'esprit du crollaire 2.2.4, on peut également donner une description précise de la solution **le long des courbes intégrales des champs X_j**.

Pour cela, étant donné $x \in [a,b]$, notons $\mathscr{F}_{j,x}$ le sous espace vectoriel de $C^\infty([0,T];\mathbb{R})$ engendré par les restrictions de toutes les phases $\varphi_{k,\ell}$ à $\mathscr{C}_{j,x}$:

$$\mathscr{F}_{j,x} := Vect\,\{\varphi_{1,1}(\gamma_{j,x}(s)), \ldots, \varphi_{N,n_N}(\gamma_{j,x}(s))\ \}.$$

Puisque $\vec{\varphi}_j$ est une phase de X_j, la fonction $\vec{\varphi}_j(\gamma_{j,x}(s))$ est un vecteur constant de $\mathbb{R}^{n_j}$ égal à $\vec{\varphi}_j(\gamma_{j,x}(0)) = \vec{\varphi}_j^{\,\circ}(x)$. Si $\vec{\varphi}_j^{\,\circ}(x) \neq 0$, $\mathscr{F}_{j,x}$ contiendra toutes les constantes. Si au contraire $\vec{\varphi}_j^{\,o}(x) = 0$, il *est possible* que $\mathcal{F}_{j,x}$ ne contienne pas de constantes non nulles. Autrement dit, l'espace $\mathcal{F}_{j,x}+\mathbb{R}$ est égal à $\mathcal{F}_{j,x}$ où à $\mathcal{F}_{j,x}\oplus\mathbb{R}$. De manière à englober ces deux cas, nous choisissons une base $(\Phi_1(s),\dots,\Phi_\nu(s),1)$ de $\mathcal{F}_{j,x}+\mathbb{R}$, où on a noté $\nu+1$ $(=\nu(j,x)+1)$ la dimension de $\mathcal{F}_{j,x}+\mathbb{R}$. Alors des fonctions $\mathcal{V}_j(\gamma_{j,x}(s);\vec{\varphi}_j(\gamma_{j,x}(s))/\varepsilon)$ s'écrivent, en notant $\vec{\Phi}:=(\Phi_1(s),\dots,\Phi_\nu(s))$

$$\mathcal{V}_j(\ \gamma_{j,x}(s)\ ;\ \vec{\varphi}_j(\gamma_{j,x}(s))/\varepsilon\ ) = \mathbb{V}_{j,x}(\ s\ ;\ \vec{\Phi}(s)/\varepsilon\ ;\ 1/\varepsilon\ )$$

où la fonction $\mathbb{V}_{j,x}(s;\alpha;\omega)$, $\alpha\in\mathbb{R}^\nu$, $\omega\in\mathbb{R}$, est dans l'espace des fonctions presque périodiques $C^0([0,T]:C^0_{pp}(\mathbb{R}^{\nu+1}))$. Notons $\mathfrak{M}\{\mathbb{V}\}$ la moyenne en α d'une telle fonction $\mathbb{V}$ presque-périodique

$$\mathfrak{M}\{\mathbb{V}\}(s;w) := \lim_{T\to\infty}\ (\ T^{-\nu}\int_{TQ}\mathbb{V}(s;\alpha;\omega)\,d\alpha\ )\quad (\,vol(Q)=1).$$

On a alors le résultat suivant qui donne le profil de u_j^ε le long du rayon $\mathcal{C}_{j,x}$

THEORÈME 2.2.9. *Fixons* $j\in\{1,\dots N\}$, $x\in[a,b]$. *Il existe* $\tau>0$ *et une fonction* $\sigma_{j,x}(s,\omega)\in C^0([0,\tau]:C^0_{pp}(\mathbb{R}))$ *telle que*

$$u_j^\varepsilon(\ \gamma_{j,x}(s)\ ) - \sigma_{j,x}(s;1/\varepsilon) = o(1)\ \textit{dans}\ L^\infty([0,\tau]),\ \textit{quand}\ \varepsilon\to 0\,.$$

Le profil $\sigma_{j,x}(s;\omega)$ *est l'unique solution de l'équation intégrodifférentielle suivante, dont le second membre est obtenu en remplaçant* $\mathbb{V}_j$ *par* $\sigma_{j,x}$ *dans l'expression* $\mathfrak{M}\{f_j(\ \gamma_{j,x}\ ,\mathbb{V}_1,\dots,\mathbb{V}_N)\}$. *On note* $\varkappa^0=\mathbb{R}.\vec{\zeta}_j(0,x)$ *et* $\xi^0=\vec{\varphi}_j(0,x)$:

$$(2.2.10)\quad \begin{cases} \dfrac{d\sigma_{j,x}}{ds}(s;\omega) = \mathfrak{M}\{\,f_j(\ \gamma_{j,x}(s)\ ,\mathbb{V}_1(s;\alpha;\omega)\,,\dots,\sigma_{j,x}(s;\omega)\,,\dots,\mathbb{V}_N(s;\alpha;\omega)\,)\,\} \\ \\ \sigma_{j,x}(0;\omega)=(\mathfrak{L}_{\varkappa^0}H_j)(x;\omega.\xi^0)\quad . \end{cases}$$

REMARQUE 2.2.10.• L'hypothèse RLRF n'est pas systématiquement vérifiée. Il est donc intéressant de donner des résultats qui ne demandent pas de vérifier les hypothèses RLRF_j. Par exemple en se plaçant dans un cadre analytique avec des profils dans des espaces du type *Fourier-L*1, un des points essentiels étant de définir l'opérateur de moyenne. Ces résultats feront l'objet d'un prochain exposé.•

§3 Exemples.

Pour la commodité du lecteur nous commençons par illustrer la notion de résonance "forte":

EXEMPLE 1: *un cas sans résonances faibles.*

Considérons le système suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} (\partial_t - \partial_x) u_1 = 0 \\ (\partial_t + \partial_x) u_2 = 0 \\ \partial_t u_3 = u_1 u_2 \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$(2)\qquad u_1(0,x) = e^{i\,x/\varepsilon},\ u_2(0,x) = e^{i\,2x/\varepsilon},\ u_3(0,x) = a\,e^{i\,3x/\varepsilon},\quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

Dans cet exemple $N=3$, $X_1 \equiv \partial_t - \partial_x$, $X_2 \equiv \partial_t + \partial_x$, $X_3 \equiv \partial_t$. Les phases sont scalaires $\vec{\phi}_1 = \varphi_1 = (t+x)$, $\vec{\phi}_2 = \varphi_2 = (t-x)$, $\vec{\phi}_3 = \varphi_3 = x$ et $\Theta = \mathbb{R}^3$. il n'y a qu'une seule relation de résonance $\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3 = 0$ et les hypothèses (1.1.6) à (1.1.9) sont vérifiées.

La solution de (1)-(2) dans $\{t \geq 0\}$ est

$$\begin{cases} u_1(t,x) = e^{i\,(t+x)/\varepsilon}, \\ u_2(t,x) = e^{i\,-2(t-x)/\varepsilon}, \\ u_3(t,x) = a\,t\,e^{i\,3x/\varepsilon} + \varepsilon\, i\, e^{i(2x-t)/\varepsilon} \end{cases} \qquad (\textit{dans } t \geq 0)$$

de sorte que la composante u_3 est de la forme $a\ te^{i3x/\varepsilon} + o(1)$ et les seules oscillations de la solution sont celles qui figurent "déjà" dans les données de Cauchy : il n'y a pas de <u>création</u> d'oscillations. En particulier :

$$(3)\qquad a = 0 \ \Rightarrow\ u_3 = o(1)\ \ (\textit{quand } \varepsilon \to 0).$$

Considérons maintenant le même système (1), avec les conditions initiales suivantes :

$$(4)\qquad u_1(0,x) = e^{i\,x/\varepsilon},\ u_2(0,x) = e^{i\,x/\varepsilon},\ u_3(0,x) = 0.$$

Le système clos des phases en jeu est toujours le même, mais la solution de (1)-(4) dans $\{t \geq 0\}$ est cette fois :

$$(5)\qquad \begin{cases} u_1(t,x)=e^{i\,(t+x)/\varepsilon}, \\ u_2(t,x)=e^{i\,-(t-x)/\varepsilon}, \qquad \textit{(dans } t\geq 0\,) \\ u_3(t,x)=t\,e^{i2x/\varepsilon}. \end{cases}$$

et la propriété (3) n'a plus lieu. Il y a *formation* d'une oscillation sur la composante u_3: il s'agit d'un phénomène de *résonance* (forte).

EXEMPLE 2: *une résonance faible.*

Considérons le système

$$(6)\qquad \begin{cases} (\partial_t-\partial_x)u_1=0 \\ (\partial_t+\partial_x)u_2=u_1u_3 \\ \partial_t u_3=0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$(7)\qquad u_1(0,x)=e^{i\,x^2/\varepsilon},\ \ u_2(0,x)=a\,e^{i\,x^2/\varepsilon}, a\in\mathbb{R},\ \ u_3(0,x)=e^{-4i\,x^2/\varepsilon}.$$

Les phases en jeu sont (scalaires) $\varphi_1=(t+x)^2$, $\varphi_2=(t-x)^2$, $\varphi_3=x^2$ et $\Theta=\mathbb{R}^3$. Il n'y a aucune relation de résonance. Les hypothèses *Hyp.*1, *Hyp.*2, *Hyp.*3 sont vérifiées.

Cependant, la propriété (1.1.9) n'est pas vérifiée pour ce système de phases. En effet $\varphi_1-\varphi_2=4\,tx$, ce qui entraine :

$$(8)\qquad X_3\,(\varphi_1-\varphi_2)\,|_{\{\varphi_3=0\}}=0.$$

On a des relations similaires pour les autres champs :

$$(9)\qquad \begin{cases} \varphi_2-4\varphi_3=(t+x)(t-3x)\Rightarrow X_1(\varphi_2-4\varphi_3)\,|_{\{\varphi_1=0\}}=0, \\ \varphi_1-4\varphi_3=(t-x)(t+3x)\Rightarrow X_2(\varphi_1-4\varphi_3)\,|_{\{\varphi_2=0\}}=0. \end{cases}$$

On vérifie que les cônes de résonances faibles $\mathcal{R}f_1$, $\mathcal{R}f_2$, $\mathcal{R}f_3$, sont

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}f_1=\{(a,b,-4b),a,b\in\mathbb{R}\}, \\ \mathcal{R}f_2=\{(a,b,-4a),a,b\in\mathbb{R}\}, \\ \mathcal{R}f_3=\{(a,-a,b)\ a,b\in\mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Les phases de bumps sont: $\zeta_{1,1}(t,x)=(t+x)$, $\zeta_{2,1}(t,x)=(t-x)$, et $\zeta_{3,1}(t,x)=x$. *On rappelle que l'on a noté systématiquement* $\zeta_{j,0}\equiv 1$; *mais dans cet exemple la phase constante n'intervient pas.* Elles satisfont aux définitions de (2.1.4). On constate que pour tout $j=1,2,3$, l'ensemble $\sigma\equiv\mathcal{R}f_j$ est un plan et entre dans le cas 3. de l'exemple 2.1.4 : la propriété RLRF$_j$ est donc vérifiée.

Le calcul de la solution donne $u_1^\varepsilon(t,x)=e^{i\varphi_1/\varepsilon}$, $u_3^\varepsilon(t,x)=e^{-4i\varphi_3/\varepsilon}$, puis $X_2 u_2^\varepsilon= u_1^\varepsilon u_3^\varepsilon=e^{i(\varphi_1-4i\varphi_3)/\varepsilon}=e^{i(t+3x)(t-x)/\varepsilon}$ et en intégrant il vient :

$$u_2^\varepsilon(t,x) \;=\; a e^{i\varphi_2/\varepsilon} + \varepsilon\,\frac{(e^{i(t+3x)(t-x)/\varepsilon}-e^{-i\,3(t-x)^2/\varepsilon})}{4i(t-x)}, \qquad si\ x\neq t,$$

et :

$$u_2^\varepsilon(t,t) = a + t \ , \qquad (cas\ \ x=t\ (\Leftrightarrow \varphi_2=0)).$$

On a donc $|u^\varepsilon_2(t,x)-ae^{i\varphi_2/\varepsilon}| \leq \varepsilon/|x-t|$, et pour toute partie $D_\alpha=\{|x-t|>\alpha\}$ de $\mathbb{R}^2$ avec $\alpha>0$, il en résulte que : $u^\varepsilon_3\to 0$ dans $L^\infty(D_\alpha)$. Cependant, le long de la courbe $\{x=t\}$, la fonction $u_2^\varepsilon(t,x)-\text{a}\,e^{i\varphi_2/\varepsilon}$ ne tend pas vers zéro.

La composante $u_2^\varepsilon(t,x)$ est donc la superposition d'une onde oscillante ($ae^{i\varphi_2/\varepsilon}$) et d'une onde solitaire dont la "crête" est portée à l'instant t par le point $x=t$.

En outre, la composante $u_2^\varepsilon(t,x)$ s'écrit (on écrit ζ_2 *au lieu de* $\zeta_{2,1}$ *et* z_2 *au lieu de* $z_{2,1}$) avec les notations introduites au §2 :

$$u_2^\varepsilon(t,x) = \mathcal{V}_2(t,x;\varphi_2/\varepsilon) + \mathcal{W}_2(t,x;\zeta_2/\varepsilon;\varphi_2/\varepsilon)+o(1)\ \ dans\ \ L^\infty,$$

où $\mathcal{V}_2(t,x;\theta_2)=ae^{i\theta_2}$ *et* $\mathcal{W}_2(t,x;z_2;\theta_2)=\dfrac{(e^{i(t+3x)\,z_2}-e^{-i(t-x)z_2})}{4iz_2}$,

Sur cet exemple, $\mathcal{W}_2$ est indépendant de θ_2 et comme z_2 est une variable scalaire, $\mathcal{W}_2$ est simplement dans l'espace $C^0(\Omega\times\widehat{\mathbb{R}};\mathbb{R})$, *avec* $\mathcal{W}_2(t,x;\infty)=0$.

EXEMPLE 3 . *Application du théorème* 2.2.1: *une interaction créant une résonance faible sur chaque mode.*

Considérons cette fois le système suivant

$$(11) \qquad \begin{cases} (\partial_t-\partial_x)u_1=u_2\,u_3 \\ (\partial_t+\partial_x)u_2=u_1\,u_3 \\ \partial_t u_3=u_1\,\overline{u}_2 \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

(12) $u_1(-2,x)=\chi(x-2)\,e^{i\,x^2/\varepsilon}$, $\quad u_2(-2,x)=\chi(x+2)\,e^{i\,x^2/\varepsilon}$, $\quad u_3(-2,x)=\chi(x)e^{-4i\,x^2/\varepsilon}$,

où $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(\tau)=\chi(-\tau)$ avec $\chi(\tau)=0$ si $|\tau|\geq 1$, et $\chi(\tau)=1$ si $|\tau|\leq 1/2$.

Le rôle de la fonction χ dans (12) est de permettre de présenter l'exemple comme une évolution de trois trains d'ondes oscillants qui s'ignorent dans $\{t<-2\}$, se rencontrent à l'instant $t=-2$ et *"interagissent"* dans $\{t\geq -2\}$. Les conditions initiales portent sur l'instant $t=-2$, de façon que l'interaction des trois ondes se produise au voisinage de l'origine, c'est à dire dans la région où peuvent se manifester simultanément les résonances faibles de chacun des champs, lesquelles sont localisées sur les droites $\{x=0\}$, $\{t=x\}$, $\{t=-x\}$ qui se croisent justement à l'origine.

La solution de (11)-(12) dans le "passé" $\{t \leq -2\}$ est

$$(13)\qquad \begin{cases} u_1(t,x)=\chi(t+x)e^{i\,(t+x)^2/\varepsilon}, \\ u_2(t,x)=\chi(t-x)e^{i\,(t-x)^2/\varepsilon}, \\ u_3(t,x)=\chi(x)e^{-4i\,x^2/\varepsilon}, \end{cases} \qquad (\textit{dans } t\leq -2\ )$$

et $supp\, u_i \cap supp\, u_j = \emptyset$ *dans* $\{t<-2\}$ *si* $i\neq j$.

Lorsque $t\geq -2$, les supports (oscillants) de u_1 et de u_2 et ceux de u_2 et u_3 *se* rencontrent: le système (11) est réellement couplé et le problème et de décrire l'évolution de l'onde dans le futur.

Le système des phases est le même que dans l'exemple 2. Il n'y a pas de résonances fortes, le système qui donne la *profil oscillant* $\mathscr{V}$ est:

$$(14)\qquad \begin{cases} (\partial_t-\partial_x)\mathscr{V}_1=\mathbb{E}_1(\mathscr{V}_2\,\mathscr{V}_3)=\mathbb{E}_1(\mathscr{V}_2)\mathbb{E}_1(\mathscr{V}_3) \\ (\partial_t+\partial_x)\mathscr{V}_2=\mathbb{E}_2(\mathscr{V}_1\,\mathscr{V}_3)=\mathbb{E}_2(\mathscr{V}_1)\mathbb{E}_2(\mathscr{V}_3) \\ \partial_t\mathscr{V}_3=\mathbb{E}_3(\mathscr{V}_1\,\overline{\mathscr{V}_2}\,)=\mathbb{E}_3(\mathscr{V}_1)\mathbb{E}_3(\,\overline{\mathscr{V}_2}\,), \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(15)\quad \mathscr{V}_1|_{\{t=-2\}}\equiv\chi(x-2)e^{i\theta_1},\quad \mathscr{V}_2|_{\{t=-2\}}\equiv\chi(x+2)e^{i\theta_2},\quad \mathscr{V}_3|_{\{t=-2\}}\equiv\chi(x)\,e^{-4i\theta_3}.$$

Si l'on note maintenant $\mathfrak{a}=\mathbb{E}_2(\mathscr{V}_1)=\mathbb{E}_3(\mathscr{V}_1)$, $\mathfrak{b}=\mathbb{E}_1(\mathscr{V}_2)=\mathbb{E}_3(\mathscr{V}_2)$ et $\mathfrak{c}=\mathbb{E}_1(\mathscr{V}_3)=\mathbb{E}_2(\mathscr{V}_3)$, en moyennant la $j^{ème}$ équation de (13) par rapport à θ_j et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} (\partial_t-\partial_x)\,\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \\ (\partial_t+\partial_x)\,\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\ \mathfrak{c} \qquad \textit{avec}\quad \mathfrak{a}|_{\{t=-2\}}=\mathfrak{b}|_{\{t=-2\}}=\mathfrak{c}|_{\{t=-2\}}=0, \\ \partial_t\,\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{b}}\,. \end{cases}$$

ce qui entraine $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\equiv 0$. En revenant alors au système (14) dont les membres de droite sont en fait nuls, on obtient :

$$(14)\qquad \mathscr{V}_1\equiv\chi(t+x)\,e^{i\theta_1},\qquad \mathscr{V}_2\equiv\chi(t-x)e^{i\theta_2},\qquad \mathscr{V}_3\equiv\chi(x)\,e^{-4i\theta_3}.$$

Les résonances faibles sont toujours données par (10) et $\Re f_1$, $\Re f_2$, $\Re f_3$ vérifient RLRF$_{1,\dots,3}$ respectivement, et l'on peut appliquer le théorème 2.2.1 avec $\Lambda_j = \Re f_j$.

Le profil $\mathcal{U}_1$ est donc solution de l'équation suivante où l'on a noté $\chi_1(t,x)$ la fonction $\chi(t-x)\chi(x)$:

$$\begin{cases} (\partial_t-\partial_x)\mathcal{U}_1=\mathcal{E}_1^{\Lambda_1}\ \{\mathcal{V}_2\overline{\mathcal{V}_3}\}=\mathcal{E}_1^{\Lambda_1}\{\chi_1.e^{i(\theta_2-4\theta_3)}\}=\chi_1(t,x)e^{i(t-3x)z_1} \\ \mathcal{U}_1(-2,x;z_1;\theta_1)=\chi(x-2)e^{i\theta_1}, \end{cases}$$

et l'on en déduit que

$$(15) \qquad \mathcal{U}_1(t,x;z_1;\theta_1) = \chi(t+x)e^{i\theta_1} + 1/2\int_{-4-t-x}^{t-x}\chi(s)\chi(\tfrac{t+x-s}{2})\,e^{i(2s-t-x)z_1}\,ds$$

$$=\chi(t+x)e^{i\theta_1} + e^{-3i(t+x)z_1}\,.\int_{-2}^{t}\alpha(\sigma,t,x)e^{4i\sigma z_1}\,d\sigma\,,$$

où $\alpha\equiv\chi(2\sigma-t-x)\chi(t+x-\sigma)$. Puisque $\mathcal{U}_j=\mathcal{V}_j+\mathcal{W}_j$, Le profil (15) correspond à

$$(16) \qquad \mathcal{W}_1(t,x;z_1)=e^{-3i(t+x)z_1}\,.\int_{-2}^{t}\alpha(\sigma,t,x)e^{4i\sigma z_1}\,d\sigma,$$

et une intégration par parties montre que la fonction $\mathcal{W}_1$ est dans $C^0(\Omega\times\widehat{\mathbb{R}};\mathbb{R})$ avec $\mathcal{W}_1(t,x;\infty)=0$.

Le profil $\mathcal{U}_2$ est donné par l'équation suivante où $\chi_2(t,x)$ désigne la fonction $\chi(t+x)\chi(x)$:

$$\begin{cases} (\partial_t+\partial_x)\mathcal{U}_2=\mathcal{E}_2^{\Lambda_2}\ \{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_3\}=\mathcal{E}_2^{\Lambda_2}\{\chi_2.e^{i(\theta_1-4\theta_3)}\}=\chi_2(t,x)e^{i(t+3x)z_2} \\ \mathcal{U}_2(-2,x,z_2,\theta_2)=\chi(x+2)e^{i\theta_2}, \end{cases}$$

et l'on en déduit que

$$(17) \qquad \mathcal{U}_2(t,x;z_2;\theta_2) = \chi(x-t)e^{i\theta_2} + e^{4i(x-t)z_2}\,.\int_{-2}^{t}\beta(\sigma,t,x)e^{6i\sigma z_2}\,d\sigma\,,$$

où $\beta\equiv\chi(2\sigma-t+x)\chi(\sigma+x-t)$, et le profil (17) correspond à

(18) $$\mathcal{W}_2(t,x;z_2) = e^{4i(x-t)z_2} \, . \int_{-2}^{t} \beta(\sigma,t,x)\, e^{6i\sigma z_2}\, d\sigma ,$$

et le profil $\mathcal{W}_2$ est dans $C^0(\Omega\times\hat{\mathbb{R}};\mathbb{R})$ avec $\mathcal{W}_2(t,x;\infty) = 0$.

L'équation pour $\mathcal{U}_3$ est, avec $\chi_3(t,x) = \chi(t+x)\chi(t-x)$

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}_3 = \mathcal{E}_3^{\Lambda_3}\ \{\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2\} = \mathcal{E}_2^{\Lambda_2}\, \{e^{i(\theta_1-\theta_2)}\} = \chi_3(t,x) e^{i\,4t\,z_3} \\ \mathcal{U}_3(-2,x;z_3;\theta_3) = \chi(x) e^{-4i\theta_3}, \end{cases}$$

et l'on obtient

(19) $$\mathcal{U}_3(t,x;z_3;\theta_3) = \chi(x)\ e^{-4i\theta_3} + \int_{-1}^{t} \chi_3(\sigma,x)\, e^{i\,4\sigma\, z_3}\, d\sigma ,$$

soit encore :

(20) $$\mathcal{W}_3(t,x;z_3) = \int_{-1}^{t} \chi_3(\sigma,x)\, e^{i\,4\sigma\, z_3}\, d\sigma,$$

qui vérifie $\mathcal{W}_3 \in C^0(\Omega\times\hat{\mathbb{R}};\mathbb{R})$ et $\mathcal{W}_3(z_3{=}\infty) = 0$.

Les théorèmes du §2 permettent d'affimer que pour tout ensemble Ω borné de $\mathbb{R}^2$

$$u_1^\varepsilon(t,x) - \mathcal{U}_1(t,x\,;\ \frac{(t-x)}{\varepsilon}\ ;\ \frac{(t-x)^2}{\varepsilon}\ ) = o(1) \ \ \textit{dans}\ \ L^\infty(\Omega),$$

$$u_2^\varepsilon(t,x) - \mathcal{U}_2(t,x\,;\ \frac{(t+x)}{\varepsilon}\ ;\ \frac{(t+x)^2}{\varepsilon}\ ) = o(1) \ \ \textit{dans}\ \ L^\infty(\Omega),$$

$$u_3^\varepsilon(t,x) - \mathcal{U}_3(t,x\,;\ \frac{x}{\varepsilon}\ ;\ \frac{x^2}{\varepsilon}\ ) = o(1) \ \ \textit{dans}\ \ L^\infty(\Omega),$$

Pour bien voir l'influence des profils $\mathcal{W}_j$, on peut étudier le comportement de <u>la restriction de u_j^ε à une courbe intégrale de X_j</u>. Observons d'abord que les relations (16), (18) et (20) entrainent que

(21) $$\mathcal{W}_1|_{(z_1=0,\,t+x=0)} \equiv \mathcal{W}_2|_{(z_2=0,\,t-x=0)} \equiv \int_{-2}^{t} \chi(2\sigma)\,\chi(\sigma)\, d\sigma =: \mathrm{p}(t),$$

$$\textit{et}\quad \mathcal{W}_3|_{(z_3=0,\,x=0)} \equiv \int_{-1}^{t} \chi(\sigma)^2\, d\sigma =: \mathrm{q}(t).$$

Fixons deux réels quelconques $-2 < t_1 < t_2$. Les relations (20) et (21) montrent maintenant que :

$$(22)\quad u_1^\varepsilon(t,x)_{|\{t+x=c\}} = \begin{cases} \chi(c)e^{ic^2/\varepsilon} + o(1) \; dans \; L^\infty([t_1,t_2]) \; si \;\; c \neq 0, \\ 1 + \mathrm{p}(t) + o(1) \; dans \; L^\infty([t_1,t_2]) \; si \; c = 0. \end{cases}$$

$$(23)\quad u_2^\varepsilon(t,x)_{|\{t-x=c\}} = \begin{cases} \chi(c)e^{ic^2/\varepsilon} + o(1) \; dans \; L^\infty([t_1,t_2]) \; si \;\; c \neq 0, \\ 1 + \mathrm{p}(t) + o(1) \; dans \; L^\infty([t_1,t_2]) \; si \; c = 0. \end{cases}$$

$$(24)\quad u_3^\varepsilon(t,x)_{|\{x=c\}} = \begin{cases} \chi(c)e^{-4ic^2/\varepsilon} + o(1) \; dans \; L^\infty([t_1,t_2]) \; si \;\; c \neq 0, \\ 1 + \mathrm{q}(t) + o(1) \; dans \; L^\infty([t_1,t_2]) \; si \; c = 0. \end{cases}$$

On observe sur cet exemple que chaque composante de la solution exacte du système (11) est uniformément approchée par la superposition d'une onde oscillante et d'une *onde solitaire*. Cette dernière tend vers zéro (quand $\varepsilon \to 0$) en dehors d'une courbe intégrale du champ de vecteur correspondant (dans l'exemple traité cette courbe est $\{ \zeta_j = 0\}$), mais prend de grandes valeurs le long de cette courbe ($\mathrm{p}(t)$ ou $\mathrm{q}(t)$). Les développements obtenus en (22), (23), (24) correspondent au point de vue du théorème 2.2.9, et montrent que l'application $x \to \sigma_{j,x}(.,.)$ peut être <u>discontinue</u>.

EXEMPLE 4: *Explosion par résonance faible.*

Cet exemple est analogue au contre-exemple donné dans [JMR] aux théorèmes 1.1.3 et 1.1.4 lorsque l'*hypothèse de forte transversalité* (1.1.9) est violée, c'est à dire lorsque les phases en présence *admettent des résonances faibles*.

Considérons le système

$$(25)\qquad \begin{cases} (\partial_t - \partial_x) u_1 = 0 \\ (\partial_t + \partial_x) u_2 = 0 \\ \partial_t u_3 = (u_3)^2 + u_1 u_2 \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(26)\qquad u_1(0,x) = e^{ix^3/\varepsilon},\; u_2(0,x) = e^{ix^3/\varepsilon},\; u_3(0,x) = e^{ix^3/\varepsilon}\,.$$

Les phases en présence sont scalaires, $\varphi_1 \equiv (x+t)^3$, $\varphi_2 \equiv (x-t)^3$, $\varphi_3 \equiv x^3$. Il n'y a aucune résonance forte de sorte que les profils *oscillants* $\mathcal{V}_j$ vérifient la relation $\mathbb{E}_3(\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2) = \mathbb{E}_3(\mathcal{V}_1)\mathbb{E}_3(\mathcal{V}_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, si $\mathfrak{a} = \mathbb{E}_1\mathcal{V}_1$, $\mathfrak{b} = \mathbb{E}_2\mathcal{V}_2$, $\mathfrak{c} = \mathbb{E}_2\mathcal{V}_2$. Le système donnant les $\mathcal{V}_j$ est

$$(27) \qquad \begin{cases} (\partial_t-\partial_x)\mathcal{V}_1=0, (\partial_t+\partial_x)\mathcal{V}_2=0, \partial_t\mathcal{V}_3=\mathbb{E}_3(\mathcal{V}_1)\mathbb{E}_3(\mathcal{V}_2) \\ \mathcal{V}_1|_{\{t=0\}}=e^{i\theta_1},\ \mathcal{V}_2|_{\{t=0\}}=e^{i\theta_2},\ \mathcal{V}_3|_{\{t=0\}}=0. \end{cases}$$

En moyennant chaque équation on obtient

$$(\partial_t-\partial_x)\mathfrak{a}=0,\ (\partial_t+\partial_x)\mathfrak{b}=0,\ \partial_t\,\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}|_{\{t=0\}}=\mathfrak{b}|_{\{t=0\}}=\mathfrak{c}|_{\{t=0\}}=0,$$

dont on déduit $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=0$, et par suite $\mathcal{V}_1 \equiv e^{i\theta_1}$, $\mathcal{V}_2 \equiv e^{i\theta_2}$, $\mathcal{V}_3 \equiv 0$. On note en particulier que le système (27) admet une solution globale tout à fait régulière.

Cependant le calcul montre que la solution exacte du système d'origine (25) "explose" au point ($t=\pi/2, x=0$) pour tout $\varepsilon>0$. En effet, les équations (25) et (26) impliquent $u_1^\varepsilon = e^{i(t+x)^3/\varepsilon}$, $u_2^\varepsilon = e^{i(x-t)^3/\varepsilon}$ et

$$(28) \qquad \partial_t u_3^\varepsilon(t,x) = (u_3^\varepsilon)^2 + e^{i(2x^3-6xt^2)/\varepsilon}\ ,\ u_3^\varepsilon(0,x)=0.$$

Alors $\sigma(t) := u_3^\varepsilon(t,0)$ vérifie $\sigma'(t) = 1+\sigma^2(t)$ et $\sigma(0)=0$, donc $u^\varepsilon_3(t,0) = tang(t)$, ce qui démontre l'affirmation.

Ce phénomène est du à l'existence d'une résonance faible sur $X_3 \equiv \partial_t$, qui fait apparaitre la phase $\zeta_3(x)=x$:

$$(29) \qquad \varphi_1+\varphi_2 = 2\,(x^2-3t^2)\,x = 2\,(x^2-3t^2)\,\zeta_3(x) \Rightarrow X_3\,(\varphi_1+\varphi_2)|_{\{x=0\}} = 0\,.$$

Comme dans l'exemple 3, on a des relations analogues pour les autres champs, qui font apparaître les phases $\zeta_1=x+t$ (*pour* X_1) , $\zeta_2=x-t$ (*pour* X_2), et l'on vérifie que les hypothèses *hyp*1,2,3 sont vérifiées ainsi que la propriété RLRF$_j$ par l'ensemble $\mathcal{R}f_j$, j=1,2,3 de sorte que l'on peut appliquer les résultats du §2. Les autres résonances ne sont pas exitées par le système (25), (26) car les équations pour les profils $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont

$$(\partial_t-\partial_x)\mathcal{U}_1 = 0\ ,\ \mathcal{U}_1|_{\{t=0\}} = e^{i\theta_1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{V}_1\,,$$

$$(\partial_t+\partial_x)\mathcal{U}_2 = 0\ ,\ \mathcal{U}_2|_{\{t=0\}} = e^{i\theta_2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_2 \equiv \mathcal{V}_2\,.$$

Au contraire, alors que $\mathcal{V}_3$ *est nul*, le profil $\mathcal{U}_3$ (t,x,z_3) (qui ici ne dépend pas de θ_3 et se confond avec $\mathcal{W}_3$) est solution *non nulle* de l'équation suivante

$$(30) \qquad \partial_t\,\mathcal{U}_3 = (\mathcal{U}_3)^2 + e^{2i(x^2-3t^2)z_3}\ ,\ \mathcal{U}_3(0,x)=0,$$

et contient une nouvelle information. La restriction de (30) à $\{z_3=0\}$ donne

(31) $$\mathcal{W}_3(t,x,0)=\mathcal{U}_3(t,x,0)=tang(t).$$

Sur cet exemple, on voit que la solution exacte problème de Cauchy oscillant (25) explose en temps fini ($t=\pi/2$) car il se produit une *résonance faible* qui engendre un *profil d'onde solitaire qui explose en temps fini* (31). Au contraire, la partie "purement oscillante" du profil ($\mathcal{V}$) existe et reste régulière pour tout temps.

Un réel $t>0$ étant fixé, la composante u^{ε}_3 a donc le comportement suivant lorsque $\varepsilon\to 0$:

(32) $$u_3^{\varepsilon}(t,x)|_{\{x=c\}} = \begin{cases} o(1)\ dans\ L^{\infty}([0,t])\ si\ \ c\neq 0, \\ tang(t)\ pour\ 0\leq t<\pi/2\ \ si\ c=0. \end{cases}$$

EXEMPLE 5: *Accumulations et ensembles denses de résonances faibles.*

Dans tous les exemples qui précèdent les résonances faibles présentent les caractères suivants :

- d'une part les phases de bumps sont *scalaires* c'est à dire que $m_j = 2$ (ou ≤ 2) et que la phase constante $\zeta_{j,0}\equiv 1$ n'intervient pas, de sorte que *la seule phase de bumps en présence est la fonction* $\zeta_{j,1}$,

- d'autre part, les supports des résonances faibles forment une *famille finie et fixée* de courbes qui ne dépend pas du profil $(H_1,\dots,H_N)$ de la donnée de Cauchy: cette famille ne dépend que du système de phases en jeu. Par exemple, dans l'exemple 3, la seule analyse des résonances faibles entre les phases nous assure que : s'il se produit effectivement des résonances faibles pour ∂_t (*resp.*: $\partial_t-\partial_x$,$\partial_t+\partial_x$) dans la solution de (11) (12), elles seront nécéssairement supportées par la droite $\{x=0\}$ (*resp.*: $\{t+x=0\},\{t-x=0\}$).

Cependant, il peut se produire que la géométrie des supports des résonances faibles éventuelles de la solution, ne soit pas déterminée par avance. En particulier il peut se faire que *toutes les courbes intégrales* des champs X_j soient le support d'au moins une relation de résonance faible entre les phases d'oscillation. Autrement dit : n'importe quelle courbe intégrale peut être le support d'une résonance faible de la solution du problème de Cauchy; le fait qu'elle le soit ou non, dépend alors directement du spectre de la fonction $f(\mathcal{V}_1,\dots,\mathcal{V}_N)$ (théorème 2.2.3) qui dépend lui même du *profil* de la donnée de Cauchy. Cette situation se rencontre en particulier lorsque les phases en jeu sont *vectorielles*. Nous donnons maintenant un exemple d'une telle répartition des résonances faibles.

Considérons problème de Cauchy suivant, que l'on étudie dans un voisinage du point ($t=0$, $x=1$), où le système est strictement hyperbolique :

$$
(33) \qquad \begin{cases} (\partial_t - \partial_x) u_1 = 0 \\ (\partial_t + \partial_x) u_2 = 0 \\ (2x\partial_t + \partial_x) u_3 = 0 \\ (2x\partial_t - \partial_x) u_4 = 0 \\ \partial_t u_5 = -1 + e^{u_1 - u_2 + u_3 - u_4} \end{cases}
$$

avec les conditions initiales :

$u_1(0,x) = e^{i x^2/\varepsilon}$, $u_2(0,x) = e^{i x^2/\varepsilon}$, $u_3(0,x) = e^{i x^4/\varepsilon}$, $u_4(0,x) = e^{i x^4/\varepsilon}$, $u_5(0,x) = 0$.

Le calcul de la solution donne

$u_1^\varepsilon(t,x) = e^{i (t+x)^2/\varepsilon}$, $u_2^\varepsilon(t,x) = e^{i (t-x)^2/\varepsilon}$, $u_3^\varepsilon(t,x) = e^{i (x^2-t)^2/\varepsilon}$, $u_4^\varepsilon(t,x) = e^{i (x^2+t)^2/\varepsilon}$,

et en développant en série l'exponentielle :

$$
\partial_t u_5^\varepsilon = \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{N}} \frac{1}{a!b!c!d!} e^{i \{a(t+x)^2 - b(t-x)^2 + c\,(x^2-t)^2 - d\,(x^2+t)^2\}/\varepsilon}
$$

$$
= -1 + \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{N}} \frac{1}{a!b!c!d!} e^{i\{t^2(a-b+c-d) + 2tx(a+b) - 2tx^2(c+d) + x^2(a-b) + x^4(c-d)\}/\varepsilon}.
$$

Pour intégrer, on cherche les quadruplets $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4$ qui correspondent à des résonances faibles pour $X_5 \equiv \partial_t$, c'est à dire que l'on cherche l'ensemble Γ_5 introduit en 2.1.5. On aura alors :

$$
u_5^\varepsilon(t,x) = -1 + \sum_{\substack{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4 \\ \text{Résonace} \\ \text{faible}}} \frac{1}{a!b!c!d!} \int_0^t e^{i \{a(s+x)^2 - b(s-x)^2 + c\,(x^2-s)^2 - d\,(x^2+s)^2\}/\varepsilon} ds \; + o(1)
$$

Une résonance faible pour ∂_t revient à résoudre

$$
(34) \quad \partial_t \{ t^2(a-b+c-d) + 2tx(a+b) - 2tx^2(c+d) + x^2(a-b) + x^4(c-d) \}|_{x=x_0} = 0
$$

pour les inconnues a,b,c,d, et x_0. C'est à dire

$$
2t\,(a-b+c-d) + 2x_0\,(\,(a+b) - (c+d)x_0\,) = 0\ ,\ \forall t \in \mathbb{R},
$$

$$
\Leftrightarrow \quad a-b+c-d = 0 \quad et \quad (a+b) - (c+d)x_0 = 0.
$$

On a donc sur cet exemple:

$$(35)\quad \boxed{\begin{array}{c} (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \textit{ résonance faible sur } X_4 \Leftrightarrow a-b+c-d=0 \textit{ et } (a+b)\neq 0 \textit{ ou } (c+d)\neq 0 \\ \textit{et le support de la résonance est la droite d'équation :} \\ x=(a+b)/(c+d) \textit{ si } c+d\neq 0, \quad \textit{et } x=0 \textit{ si } c+d=0 \end{array}}$$

Puisque dans le cas de l'exemple a,b,c,d sont des entiers naturels on a :

$$u_5^\varepsilon(t,x) = \sum_{\substack{(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4 \\ a-b+c-d=0 \\ a+b+c+d\neq 0 \text{ ou}}} \frac{1}{a!b!c!d!} e^{i\{x^2(a-b)+x^4(c-d)\}} \int_0^t e^{2is\{x(a+b)-x^2(c+d)\}/\varepsilon} ds + o(1)$$

soit

$$u_5^\varepsilon(t,x) = \sum_{\substack{(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4 \\ a-b+c-d=0 \\ a+b+c+d\neq 0}} \frac{1}{a!b!c!d!} \frac{e^{2it\{x(a+b)-x^2(c+d)\}/\varepsilon}-1}{2i\{x(a+b)-x^2(c+d)\}/\varepsilon} e^{i\{x^2(a-b)+x^4(c-d)\}/\varepsilon} + o(1)$$

Sur cet exemple u_5^ε est approché dans L^∞ par une somme infinie d'ondes solitaires. Avec les notations du §2, on a les phases *vectorielles* suivantes

$$\vec{\varphi}_5(x)=(x^2,x^4) \quad , \quad \vec{\zeta}_5(x)=(1,x,x^2) \quad\Rightarrow\quad \Theta_5=\mathbb{R}^2 \ \textit{et}\ Z_5:=\mathbb{R}^3$$

mais dans cet exemple encore, la phase constante $\zeta_{5,0}\equiv 1$ (ainsi que la variable $z_{5,0}$) n'intervient pas.

Le profil de u_5^ε est :

$$\mathcal{U}_5(t,x;z_5;\theta_5) = \mathcal{W}_5(t,x;z_5;\theta_5) =$$

$$\sum_{\substack{(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4 \\ a-b+c-d=0 \\ a+b+c+d\neq 0}} \frac{1}{a!b!c!d!} \frac{e^{2it\{(a+b)z_{5,1}-(c+d)z_{52}\}}-1}{2i\{(a+b)z_{5,1}-(c+d)z_{5,2}\}} e^{i\{(a-b)\theta_{5,1}+(c-d)\theta_{5,2}\}}$$

On peut encore écrire $\mathcal{U}_5$ de la manière suivante

$$\mathcal{U}_5 = \sum_{\substack{\nu=(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4 \\ a-b+c-d=0 \\ a+b+c+d\neq 0}} f_\nu(t,x;\langle\alpha_\nu,z_5\rangle;\theta_5)$$

où $\alpha_\nu:=(0,a+b,-c-d)$ *et* $f_\nu(t,x;\rho;\theta_5):=\dfrac{1}{a!b!c!d!}\dfrac{e^{2it\rho}-1}{2i\rho}\, e^{i\{(a-b)\theta_{5,1}+(c-d)\theta_{5,2}\}}$, ce qui montre que $\mathscr{U}_5$ est bien un élément de l'espace $\mathscr{P}(\Omega, Z_5, \Theta_5)$ introduit dans la définition 2.1.5. En outre, on se rend compte sur cet exemple que l'espace $\mathscr{P}(\Omega, Z_5, \Theta_5)$ apparait de manière naturelle dans ces problèmes.

Si l'on étudie le comportement de $u_5^\varepsilon{}_{|x=x_0}$ on observe deux comportements différents suivant que $x_0 \in \mathbb{Q}$ ou $x_0 \notin \mathbb{Q}$:

1) *Si* $x_0 \notin \mathbb{Q}$, $u_5^\varepsilon(t, x_0) \to 0$ *dans* $L^\infty([0,t])$, *pour tout* $t > 0$, *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

2) *Si* $x_0 \in \mathbb{Q}$, $u_5^\varepsilon(t, x_0)$ *oscille. De façon précise* $u_5^\varepsilon(t, x_0) = \sigma(t; 1/\varepsilon) + o(1)$ *dans* $L^\infty([0,t])$, *pour tout* $t > 0$, *lorsque* $\varepsilon \to 0$, *où*

$$\sigma(t,\omega) = t \,.\sum_{\substack{(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4 \\ a-b+c-d=0 \\ a+b/c+d=x_0}} \frac{1}{a!\,b!\,c!\,d!} \; e^{i(a-b)x_0^2(1-x_0^2)\,\omega}$$

EXEMPLE 6 . *Résonances faibles où intervient la phase* $\zeta_{j,0} \equiv 1$.

Cet exemple, qui est dans le même esprit que le précédent, montre le rôle de la phase constante dans les résonances faibles.

Fixons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arbitraire de nombres réels. On considère le problème suivant

$$(25) \qquad \begin{cases} (\partial_t - \partial_x) u_1 = 0 \\ (\partial_t + \partial_x) u_2 = 0 \\ \partial_t u_3 = u_1 u_2 \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(26) \qquad u_1(0,x) = e^{-ix^2/\varepsilon} . \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, e^{i a_k x/\varepsilon}, \qquad u_2(0,x) = e^{i(x^2-x)/\varepsilon}, \qquad u_3(0,x) = 0.$$

On a donc: $u_1^\varepsilon(t,x) = e^{-i(t+x)^2/\varepsilon} . \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, e^{i a_k (t+x)/\varepsilon}$, $u_2^\varepsilon(0,x) = e^{i(t-x)/\varepsilon} e^{i(t-x)^2/\varepsilon}$,

et $\partial_t u_3^\varepsilon(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \; \frac{e^{-4it(x-b_k)/\varepsilon} - 1}{-4(x-b_k)/\varepsilon} \, . \, e^{4 i b_k x/\varepsilon}$ *où* $b_k = (1+a_k)/4$.

Cette fois, il y a encore une infinité de résonances faibles dans la composante u_3^ε dont les supports sont les *droites* $\{x = b_k\}$, et pour $t_1 < t_2$ on a :

$$u_3^\varepsilon(t,x)_{|\{x=c\}} = \begin{cases} o(1)\ dans\ L^\infty([t_1,t_2])\ si\ \ c \notin \{b_k\ ,\ k \in \mathbb{N}\}\ , \\ k^{-2}.\ e^{4\,i\,b_k c/\varepsilon} + o(1)\ dans\ L^\infty([t_1,t_2])\ si\ c = b_k\ . \end{cases}$$

Dans cet exemple on peut par exemple choisir comme système de phases

$$\vec{\varphi}_1(x) = ((t+x), (t+x)^2)\ , \quad \vec{\varphi}_2(x) = ((t-x), (t-x)^2)\ , \quad \vec{\varphi}_3(x) = (x\ , x^2)$$

et l'étude des résonances faibles en ∂_t conduit à chercher les $\lambda = (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ pour lesquels il existe $x_\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\partial_t \langle \lambda\ , \vec{\varphi} \rangle_{|x=x_\lambda} = \partial_t\ \{\ a(t+x_\lambda) + b(t+x_\lambda)^2 + c\ (t-x_\lambda) + d(t-x_\lambda)^2\ \}$$

$$= 2t\ (b+d) + 2x_\lambda\,(b-d) + a + c \equiv 0.$$

L'équation de $\mathfrak{R}f_3$ est donc $\{b+d=0,\ et\ b-d\neq 0\}$, le support de $\lambda \in \mathfrak{R}f_3$ est la droite $x = x_\lambda = \dfrac{a+c}{d-b}$ et

$$\langle \lambda\ , \vec{\varphi} \rangle_{|x=x_\lambda} = t\ (2x\,(b-d) + a + c\ ) \quad + termes\ en\ x...$$

$$= 2t\,(b-d)\,(x - x_\lambda\,) \quad + termes\ en\ x....$$

Les termes $(x - x_\lambda\,)$ peuvent faire penser qu'une infinité de phases *scalaires* interviennent dans le problème : *les* $\zeta_{3,\alpha} := x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Au contraire, le terme $2x\,(b-d) + a+c$ doit s'interprèter comme $\langle \alpha_3(\lambda),\ \vec{\zeta}_3 \rangle$, où $\vec{\zeta}_3 = (1,x)$ et $\alpha_3(\lambda) = (b-d\,, a+c) \in \mathbb{R}^2$. On voit que la phase constante 1 doit être introduite pour tenir compte des effets de *déphasage* qui autrement conduiraient à considérer des familles infinies (non dénombrables) de phases.

§4. Schémas des preuves

4.1 Le résultat fondamental

Dans ce paragraphe D est un fermé de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\{a \leq x \leq b,\ 0 \leq t \leq T(x)\}$ où T est une fonction lipschitzienne.

Etant données des fonctions $U_j(t,x,z_j,\theta_j) \in \mathcal{P}(D,Z_j,\Theta_j)$ pour $0 \leq j \leq N$, ainsi qu'une fonction $F \in C^\infty(D \times \mathbb{R}^N;\mathbb{R})$, notons $f(t,x,z,\theta) := F(t,x,U_1,...,U_N)$ où l'on a noté $z := (z_1,...,z_N)$ la variable de $Z_1 \times ... \times Z_N$. Alors f est dans $C^0(D \times Z : C^0_{pp}(\Theta))$ et l'on a le théorème qui suit. On suppose pour simplifier l'énoncé que $X_j = \partial_t$ et par conséquent les phases $\vec{\zeta}_j$ et $\vec{\varphi}_j$ ne dépendent que de la variable x.

THEORÈME 4.1.1. *Supposons que Λ une partie de Ψ^* qui vérifie la condition $RLRF_j$. Si l'on définit u^ε et $\mathcal{U}$ par les formules*

$$u^\varepsilon(t,x) = \int_0^t f(\sigma,x;\vec{\zeta}(\sigma,x)/\varepsilon;\vec{\varphi}(\sigma,x)/\varepsilon)\} \, d\sigma$$

$$\mathcal{U}(t,x,z_j,\theta_j) = \int_0^t \mathcal{E}_j^\Lambda \{F(\sigma,x,\mathfrak{L}_1U_1(\sigma,x,\bullet),...,U_j(\sigma,x,\bullet,\bullet),..., \mathfrak{L}_NU_N(\sigma,x,\bullet))\}(z_j,\theta_j)\, d\sigma$$

alors : 1) $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(D,Z_j,\Theta_j)$ *et*

2) $$\mathfrak{L}_j\mathcal{U}(t,x,\theta_j) = \int_0^t \mathbb{E}_j\{F(\sigma,x,\mathfrak{L}_1U_1(\sigma,...),...,\mathfrak{L}_NU_N(\sigma,...))\}(\theta_j)\, d\sigma$$

3) *Si de plus $\Lambda(f) \subset \Lambda$ on a l'estimation* :

$$u^\varepsilon(t,x) - \mathcal{U}(t,x;\vec{\zeta}_j(x)/\varepsilon;\vec{\varphi}_j(x)/\varepsilon) = o(1) \text{ dans } L^\infty(D). \tag{4.1.1}$$

Pour la démonstration nous supposerons que $j=1$.

LEMME 4.1.2. *Soit* $V(t,x;z_1;\theta) = \int_0^t F(\sigma,x,U_1(\sigma), \mathfrak{L}_2U_2(\sigma),..., \mathfrak{L}_NU_N(\sigma))(z_1;\theta)\,d\sigma$,

alors : $u^\varepsilon(t,x) - V(t,x;\vec{\zeta}_1(x)/\varepsilon;\vec{\varphi}(t,x)/\varepsilon) = o(1)$ *dans* $L^\infty(D)$.

Démonstration. On a $U_j = \mathfrak{L}_j U_j + W_j$ et d'après la formule de Taylor $F(U_1,...,U_N) = F(U_1,\mathfrak{L}_2 U_2,...,\mathfrak{L}_N U_N) + \sum_2^N W_k\, G_k(U_1,...,U_N, W_2,...,W_N)$ où G *est* C^∞. Puisque $G_k(U_1,...,U_N, W_2,...,W_N)$ est bornée, il suffit de montrer que $j \geq 2 \Rightarrow \int_0^t W_j(\sigma,x,\vec{\zeta}_j(\sigma,x)/\varepsilon, \vec{\varphi}_j(\sigma,x)/\varepsilon))\, d\sigma = o(1)$ *dans* $L^\infty(D)$. En approchant W_j comme dans (2.1.6) on se ramène au cas où W_j est de la forme $f(t,x,\langle\alpha,z_j\rangle,\theta_j)$ avec $f \in \mathscr{A}(D\times\hat{\mathbb{R}},\Theta_j)$ et $f(t,x,\infty,\theta_j) = 0$.■

LEMME 4.1.3. *Soit* $f \in \mathscr{A}(D\times\hat{\mathbb{R}},\Theta_j)$ *vérifiant* $f(t,x;\infty;\theta_j) = 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}^{m_j}$ *alors*:

$$\int_0^t f(\sigma,x\,,\langle\alpha\,;\vec{\zeta}_j(\sigma,x)\rangle/\varepsilon;\vec{\varphi}_j(\sigma,x)/\varepsilon))\, d\sigma = o(1) \ \ dans\ \ L^\infty(D).$$

Démonstration. On imite la preuve du lemme de phase non stationnaire de [JMR]. En approchant f par des polynômes trigonométriques

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda(t,x;z_j)\, e^{i\langle\lambda,\theta\rangle}$$

où $a_\lambda \in \mathscr{A}(D\times\hat{\mathbb{R}},\mathbb{C})$ vérifie $a_\lambda(t,x,\infty) = 0$, on se ramène au cas où f ne dépend pas de θ_j. Pour $\delta>0$, on note $A_\rho := \{\, |\langle\alpha\,,\,\vec{\zeta}_j\rangle| \leq \delta\}$ et $A_\delta(x) := \{\sigma,\ 0\leq\sigma\leq T(x):\ (\sigma,x)\in A_\delta\}$, puis $B_\delta := \{\, |\langle\alpha\,,\,\vec{\zeta}_j\rangle| \geq \delta/2\}$ et $\mu(\tau) := sup\ \{\, |f(\sigma,x,\rho)|,\ |\rho| \geq \tau\}$. On a alors

$$\int_{\sigma\in A_\delta(x)} |f(\sigma,x\,,\langle\alpha\,,\vec{\zeta}_j(\sigma,x)\rangle/\varepsilon)|\, d\sigma \leq c\,.\ mes_{\mathbb{R}}(A_\delta(x)) =: c.\, h_\delta(x)$$

$$et\quad \int_{\sigma\in B_\delta(x)} |f(\sigma,x\,,\langle\alpha\,,\vec{\zeta}_j(\sigma,x)\rangle/\varepsilon)|\, d\sigma \leq c\,.\ \sup_{|\rho|\geq\delta/\varepsilon} |f(\sigma,x,\rho)| = c.\,\mu(\delta/\varepsilon).$$

Par hypothèse $\langle\alpha\,,\,\vec{\zeta}_j\rangle \neq 0$ *p.p*, donc : pour tout $x\in[a,b]$, $h_\delta(x)\to 0$ lorsque $\delta\to 0$. En outre $h_\delta \leq h_{\delta'}$ *si* $\delta\leq\delta'$ et h_δ est *s.c.i.* La convergence uniforme de h_δ vers 0 résulte alors du lemme de Dini. En fixant d'abord δ assez petit, puis ε, on obtient le résultat (car $\mu(\delta/\varepsilon) \to 0$).■

On rappelle le lemme de phase nonstationnaire de [JMR] :

LEMME 4.1.4.([JMR]) *Soit* $h \in C^0(D;\mathbb{R})$ *vérifiant* $h \pitchfork \partial_t$. *Alors, si* $a \in C^0(D;\mathbb{R})$,

$$\int_0^t a(\sigma,x)\ e^{i\,h(\sigma,x)/\varepsilon} d\sigma = o(1)\ \ dans\ \ L^\infty(D)\ \ (\varepsilon\to 0).$$

L'estimation (4.1.1) du théorème 4.1.1 résulte maintenant du lemme 4.1.2 et du lemme suivant :

LEMME 4.1.5. *Soit* Λ *vérifiant* RLRF$_1$ *et* $f(t,x;z_1;\theta) \in \mathcal{P}(D,Z_1,\Theta)$. *Si* $\Lambda(f) \subset \Lambda$, *on a*:

$$\int_0^t f(\sigma,x\,;\vec{\zeta}_1(x)/\varepsilon;\vec{\varphi}_j(\sigma,x)/\varepsilon))\,d\sigma = \mathcal{U}(t,x\,;\vec{\zeta}_1(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\varphi}_j(x)/\varepsilon\ ) + o(1)\ \textit{dans}\ L^\infty(D),$$

où $\mathcal{U}(t,x;z_1;\theta_1) := \int_0^t (\mathcal{E}_1^\Lambda f)(t,x;z_1\,;\theta_1)\,d\sigma.$

Démonstration. En approchant f par des polynômes trigonométriques on se ramène au cas où $f = a(t,x;z_1)e^{i\langle\lambda,\theta\rangle}$. Il y a trois cas à traiter, (dont les deux premiers sont dejà traités dans [JMR]). $\star$1) $\langle\lambda,\vec{\phi}\rangle \pitchfork \partial_t$: le lemme 4.1.4 montre que l'intégrale est un o(1), or justement dans le cas présent $\mathcal{E}_1^\Lambda f = \mathbb{E}_1 f = 0$ car $\lambda \notin \boldsymbol{R}+\Theta^{\star j}$. $\star$2)$\partial_t(\langle\lambda,\vec{\varphi}\rangle)\equiv 0$, ce qui équivaut à $\lambda \in \boldsymbol{R}+\Theta^{\star j}$. Dans ce cas l'exponentielle, qui ne dépend plus de t sort de l'intégrale, or justement dans ce cas $\mathcal{E}_1^\Lambda f = \mathbb{E}_1 f = f$ et le $o(1)$ est $\equiv 0$. $\star$3) C'est le cas où $\lambda \in \mathcal{R}f_1$. Alors $\langle\lambda,\vec{\varphi}\rangle = \langle\alpha_j(\lambda),\vec{\zeta}_1(x)\rangle\,\beta_j(\lambda\,;t,x) + \langle\lambda,M_1\vec{\varphi}_1(x)\rangle$ et la définition de $\mathbb{B}_1^\Lambda f$ montre que $\mathbb{B}_1^\Lambda f = f$ et $\mathbb{E}_1 f = 0$ et dans ce cas encore le $o(1)$ est $\equiv 0$, ce qui achève la preuve du lemme.■

Il reste à montrer le point 1) du théorème:

LEMME 4.1.6. *La fonction* $\mathcal{U}(t,x;z_1;\theta_1)$ *définie dans l'énoncé du théorème* 4.1.1 *est dans* $\mathcal{P}(D,Z_1,\Theta_1)$.

Démonstration. Par approximation on se ramène au cas d'un polynôme trigonométrique et il suffit de démontrer dans le cas 3) de la démonstration précédente, c'est-à-dire pour

$$\mathcal{U} = e^{i\langle\lambda,M_1\theta_1\rangle}\int_0^t a(\sigma,x;z_1)\,e^{i\langle\alpha_1(\lambda),z_1\rangle\,\beta_1(\lambda\,;\sigma,x)}\,d\sigma.$$

où la fonction $a(t,x,z_1)$ est dans $\mathcal{P}(D,Z_1,\Theta_1)$ (comme fonction constante en θ_1). Pour t restant dans un petit voisinage fixé $[t_0-\eta,t_0+\eta]$ d'un point t_0, on approche cette intégrale par une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{\nu} e^{i\langle\lambda,M_1\theta_1\rangle}\,a(\sigma_k,x;z_1)\,g_k(t,x;\langle\alpha_1(\lambda);z_1\rangle)$$

$$où\ g_k(t,x;\rho) := \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} e^{i\rho\,\beta_1(\lambda;\sigma,x)}\,d\sigma \ \ si\ \ k<\nu\,,\quad et\quad g_\nu(t,x,\rho) := \int_{\sigma_\nu}^{t} e^{i\rho\,\beta_1(\lambda;\sigma,x)}\,d\sigma,$$

avec $\sigma_0=0 < \sigma_1 <...<\sigma_\nu=t_0-\eta$, le pas de la subdivision étant suffisamment petit. D'après le lemme 4.1.4 les g_k sont dans l'espace $C^0(D\times\widehat{\mathbb{R}},\mathbb{C})$. Comme les $a(\sigma_k, x, z_1)$ sont dans $\mathcal{P}(D,Z_1,\Theta_1)$, on voit que l'on peut approcher $\mathcal{U}$ comme dans la définition 2.1.5 et ceci démontre le lemme.∎

4.2 Preuve du théorème 1.1.5 et des résultats du §2

Nous démontrons d'abord le théorème 2.2.1 et ses corollaires.

Pour simplifier les notations on omet d'écrire la dépendance en $\bar{u}$ des fonctions $f(t,x,u,\bar{u})$. On note simplement $f(t,x,u)$.

Etape 1. *Existence du profil $\mathcal{U}$ du théorème* 2.2.1

On résoud l'équation (2.2.6)$_j$ par un schéma itératif de Picard

$$(4.2.1)\qquad \begin{cases} X_j\,\mathcal{U}_j^{\nu+1} = \mathcal{E}_j^{\Lambda_j}\ \{f_j(\mathcal{V}_1,...,\mathcal{U}_j^{\nu},...,\mathcal{V}_N\ )\}, \\ \\ \mathcal{U}_j^{\nu+1}{}_{|\{t=0\}} = H_j\,. \end{cases}$$

que l'on initialise (ce choix est important) avec $\mathcal{U}_j^0 := \mathcal{V}_j$. On doit s'assurer que le schéma tourne bien dans l'espace $\mathcal{P}(D,Z_j,\Theta_j)$. Supposons que $\mathcal{U}^\nu_j$ est dans $\mathcal{P}(D,Z_j,\Theta_j)$, alors le second membre de (4.2.1) n'est plus dans $\mathcal{P}(D,Z_j,\Theta_j)$. Cependant le point 1) du théorème 4.1.1 nous assure que $\mathcal{U}_j^{\nu+1}$ est dans $\mathcal{P}(D,Z_j,\Theta_j)$. Ensuite la continuité de l'opérateur linéaire $\mathcal{E}_j^{\Lambda_j}$ dans L^∞ rend le schéma contractant sur un intervalle de temps fixe assez petit.∎

Etape 2 :

LEMME 4.2.1 $\forall\nu\in\mathbb{N}, \forall j\ : \mathfrak{L}_j\mathcal{U}_j^\nu = \mathcal{V}_j\,.$

Démonstration. C'est vrai pour $\nu=0$. Supposons $\mathfrak{L}_j\mathcal{U}_j^\nu = \mathcal{V}_j$ $(\forall j)$. Notons pour tout ν': $\mathcal{U}_j^{\nu'} = \mathcal{V}_j + \mathcal{W}_j^{\nu'}$. Alors $\mathcal{W}_j^{\nu+1}$ est la solution de

$$(4.2.2)\qquad \begin{cases} X_j\mathcal{V}_j + X_j\mathcal{W}_j^{\nu+1} = \mathcal{E}_j^{\Lambda_j}\ \{f_j(\mathcal{V}_1,...,\mathcal{V}_N\ ) + \mathcal{W}_j^\nu\, G^{(j)}(\mathcal{V},\mathcal{W}_j^\nu)\}, \\ \\ \mathcal{W}_j^{\nu+1}{}_{|\{t=0\}} = H_j - \mathfrak{L}_jH_j \end{cases}$$

On a donc d'après (2.2.4), et puisque $\mathcal{E}_j^{\Lambda_j} = \mathbb{E}_j + \mathbb{B}_j^{\Lambda_j}$:

$$(4.2.3) \qquad \begin{cases} X_j \mathcal{W}_j^{\nu+1} = \mathbb{B}_j^{\Lambda_j} \{f_j(\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_N)\} + \mathcal{E}_j^{\Lambda_j} \{\mathcal{W}_j^{\nu} G^{(j)}(\mathcal{V},\mathcal{W}_j^{\nu})\}, \\ \\ \mathcal{W}_j^{\nu+1}|_{\{t=0\}} = H_j - \mathfrak{L}_j H_j \ . \end{cases}$$

La définition de $\mathcal{E}_j^{\Lambda_j}$ entraine que $\mathcal{E}_j^{\Lambda_j} \{\mathcal{W}_j^{\nu} G^{(j)}(\mathcal{V},\mathcal{W}_j^{\nu})\} = \mathcal{W}_j^{\nu} \mathcal{E}_j^{\Lambda_j} \{G^{(j)}(\mathcal{V},\mathcal{W}_j^{\nu})\}$ qui est donc dans $\mathcal{NP}(D,Z_j,\Theta_j)$ puisque $\mathcal{W}_j^{\nu} \in \mathcal{NP}(D,Z_j,\Theta_j)$. Ensuite d'après le lemme de moyenne, le terme "$X_j^{-1}(\mathbb{B}_j^{\Lambda_j} \{f_j(\mathcal{V})\})$" est aussi dans $\mathcal{NP}(D,Z_j,\Theta_j)$, et comme la trace sur $\{t=0\}$ de $\mathcal{W}_j^{\nu+1}$ est dans $\mathcal{NP}(D,Z_j,\Theta_j)$ on en tire que $\mathcal{W}_j^{\nu+1}$ est lui-même dans $\mathcal{NP}(D,Z_j,\Theta_j)$. Cela revient à dire que $\mathfrak{L}_j \mathcal{U}_j^{\nu+1} = \mathcal{V}_j$.■

Ce lemme entraine aussi que $\mathfrak{L}_j \mathcal{U}_j = \mathcal{V}_j$ et montre que le théorème 2.2.3 et le théorème 2.2.6 résultent du théorème 2.2.1.

Etape 3. *Preuve de l'asymptotique.*

La fonction u^ε est la limite des solutions du schéma itératif

$$(4.2.4) \qquad \begin{cases} X_j u_j^{\varepsilon,\nu+1} = f_j(t,x,u_j^{\varepsilon,\nu}), \\ \\ u_j^{\varepsilon,\nu+1}|_{\{t=0\}} = H_j(x;\vec{\zeta}_j^{\circ}(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\varphi}_j^{\circ}(x)/\varepsilon),\ j=1,\ldots,N, \end{cases}$$

que l'on a initialisé avec $u_j^{\varepsilon,0} = \mathcal{U}_j(t,x;\vec{\zeta}_j(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\varphi}_j(x)/\varepsilon)$. On suppose que sur le domaine Ω_T le schéma (4.2.4) est défini et converge vers u^ε et que $\mathcal{U}_j$ est solution de $(2.2.6)_j$ sur Ω_T. On a donc en particulier:

$$u_j^{\varepsilon,0} - \mathcal{U}_j(t,x;\vec{\zeta}_j(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\varphi}_j(x)/\varepsilon) = o(1) \ \textit{dans}\ L^\infty(\Omega_T).$$

Supposons que $u_j^{\varepsilon,\nu} - \mathcal{U}_j(t,x;\vec{\zeta}_j(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\varphi}_j(x)/\varepsilon) = o(1)$ dans $L^\infty(\Omega_T)$, pour un certain entier ν. On a donc :

$$(4.2.5) \quad \begin{cases} X_j u_j^{\varepsilon,\nu+1} = f_j(t,x,\mathcal{U}_1(t,x;\vec{\zeta}_1/\varepsilon;\vec{\varphi}_1/\varepsilon),\ldots,\mathcal{U}_N(t,x;\vec{\zeta}_N/\varepsilon;\vec{\varphi}_N/\varepsilon)) + o(1), \\ u_j^{\varepsilon,\nu+1}|_{\{t=0\}} = \mathcal{U}_j(0,x;\vec{\zeta}_j^{\circ}(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\varphi}_j^{\circ}(x)/\varepsilon),\ j=1,\ldots,N., \end{cases}$$

Puis, comme $\mathcal{U}_j$ vérifie précisément

$$X_j \mathcal{U}_j = \mathcal{E}_j^{\Lambda}\{f(t,x,\mathfrak{L}_1 U_1,\ldots,U_j,\ldots,\mathfrak{L}_N U_N),$$

le théorème 4.1.1 entraine que

$$u_j^{\varepsilon,\nu+1} - \mathcal{U}_j(t,x;\vec{\zeta}_j(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\varphi}_j(x)/\varepsilon) = o(1)\ \textit{dans}\ L^\infty(\Omega_T),$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.2.1.

• Le théorème 2.2.3 s'obtient *a posteriori*, en prenant la restriction de l'équation $X_j u_j^\varepsilon = f(u^\varepsilon)$ à une courbe intégrale $\mathscr{C}_{j,x}$ de X_j. On est ramené ensuite a une équation différentielle ordinaire avec des oscillations multiphases, que l'on résoud avec l'opérateur de moyenne indiqué.

• L'intérêt du théorème 1.2.1 est qu'il ne fait intervenir *aucune hypothèse de structure* concernant les résonances faibles : on ne doit vérifier ni (2.1.3) ni (2.1.4) ni RLRF. Evidemment le théorème concerne le cas où ces résonances faibles n'interviennent justement pas dans la solution. Pour la démonstration on reprend l'étape 3 ci-dessus dans le contexte du théorème1.2.1. La fonction u^ε est cette fois la limite des solutions du schéma itératif

$$(4.2.6) \qquad \begin{cases} X_j u_j^{\varepsilon,\nu+1} = f_j(t,x,u_j^{\varepsilon,\nu}), \\ u_j^{\varepsilon,\nu+1}|_{\{t=0\}} = H_j(x;\vec{\phi}_j^\circ(x)/\varepsilon), j=1,\dots,N, \end{cases}$$

et l'on a initialise le schéma avec $u_j^{\varepsilon,0} = \mathscr{V}_j(t,x;\vec{\phi}_j(x)/\varepsilon)$. Ce choix permet de *"stabiliser"* la partie oscillante de $f_j(t,x,u_j^{\varepsilon,\nu})$ et grâce à l'hypothèse (1.2.1) et au lemme 4.1.4 on montre par récurrence que $u_j^{\varepsilon,\nu}$ vérifie

$$(4.2.5) \qquad \begin{cases} X_j u_j^{\varepsilon,\nu} = f_j(t,x,\mathscr{V}_1(t,x;\vec{\varphi}_1/\varepsilon),\dots,\mathscr{V}_N(t,x;\vec{\varphi}_N/\varepsilon)) + o(1), \\ u_j^{\varepsilon,\nu}|_{\{t=0\}} = \mathscr{U}_j(0,x;\vec{\zeta}_j^\circ(x)/\varepsilon\ ;\ \vec{\varphi}_j^\circ(x)/\varepsilon), j=1,\dots,N., \end{cases}$$

dont on déduit $u_j^{\varepsilon,\nu} = \mathscr{V}_1(t,x;\vec{\varphi}_1/\varepsilon) + o(1)$ dans L^∞, ce qui entraine le théorème.■

REFERENCES

[HMR] J. HUNTER, A. MAJDA, R. ROSALES : *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves II: several space variable*, Stud. Appl. Math., 75, (1986), 187-226.

[JMR] J.L. JOLY, G. METIVIER, J. RAUCH : *Resonant one dimensional nonlinear geometric optics*, Preprint Université de Bordeaux 1, n°9007, (1990).

[MR] A. MAJDA, R. ROSALES : *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves I: a single space variable*, Stud. Appl. Math., 71, (1984), 149-179.

[T] L. TARTAR : *Oscillations and asymptotic behaviour for two semilinear hyperbolic systems*, in DYNAMICS OF INFINITE DIMENSIONAL SYSTEMS,NATO ASI series, vol. f37, (S. N. Chow & J. K. Hale eds.) 341-356. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.