DENIS SERRE

Écoulements à faible régularité pour un fluide compressible visqueux en une dimension d'espace

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 219-228
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_219_0>

ECOULEMENTS A FAIBLE REGULARITE POUR UN FLUIDE COMPRESSIBLE VISQUEUX EN UNE DIMENSION D'ESPACE

par

Denis SERRE

UMPA (UMR 128, CNRS)
ENS de Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07

Résumé : Nous considérons les équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible en dimension un d'espace. Les inconnues sont le champ de vitesse $u(x,t)$ et la longueur spécifique $v(x,t)$, inverse de la densité linéique ρ. Dans les travaux précédents, dûs à l'auteur et à d'autres aussi, l'existence globale de solutions faibles est montrée lorque les conditions initiales satisfont $u_0 \in L^2$, $\rho_0 \in L^\infty$ et $v_0 \in H^s \cap L^\infty$ pour un $s > 0$. On obtient ici le même résultat avec $s = 0$, c'est à dire $v_0 \in L^\infty$.

Je remercie vivement G.Métivier de m'avoir suggéré ce travail.

Dans une dernière partie, on décrit un problème ouvert concernant la propagation d'oscillations homogènes de grande amplitude pour de tels écoulements. On explique la difficulté du problème par le fait que, le théorème de Sard ne pouvant s'appliquer en dimension infinie, la fonctionnelle en cause présente une pathologie.

I - INTRODUCTION.

On considère les équations de Navier- Stokes pour un fluide compressible en dimension 1 d'espace. Il est pratique de travailler en coordonnées de Lagrange $(x,t) \in]0,M[\times \mathbb{R}^+$, où t est le temps et x a la dimension d'une masse. La masse totale de fluide, M, est supposée finie. Le fluide est décrit par son champ de vitesse $u(x,t)$ et sa densité linéique $\rho(x,t)$. On pose $v = \rho^{-1}$, la longeur spécifique.

Les équations qui gouvernent l'évolution sont :

$$(NS) \qquad \begin{cases} v_t = u_x \\ u_t + p(v)_x = \alpha (u_x/v)_x \end{cases} \qquad 0<x<M, t>0 \quad)$$

auxquelles s'ajoutent des conditions initiales

$$\begin{cases} v(x,0) = v_o(x) \\ u(x,0) = u_o(x) \,. \end{cases}$$

Pour compléter ces équations, on tient compte de l'une des deux conditions aux limites ci-après. Pour un fluide enfermé dans un domaine fixe aux parois imperméables, on a la condition (D) de Dirichlet, tandis que pour le problème à frontière libre, on a la condition (N) de Neumann, avec $\sigma =: \alpha\, u_x / v - p(v)$:

$$(D) \qquad u(0,t) = u(M,t) = 0,$$

$$(N) \qquad \sigma(0,t) = \sigma(M,t) = 0.$$

La résolution du problème mixte pour (NS) + (D) ou (NS) + (N) a fait l'objet d'une abondante littérature, due notamment à Hoff, Kazhikov, Shelukin et l'auteur. Dans tous les cas, la donnée initiale est supposée d'énergie finie, et notamment $u_o \in L^2(]0,M[)$, mais aussi v_0 doit être un peu régulier. La plus basse régularité qui ait jusqu'ici été exigée est $v_o \in H^s_{\mathrm{loc}}(]0,M[)$ pour un $s > 0$, étant entendu qu'on impose toujours pour des raisons physiques, v_o et $\rho_o \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,M[)$, pour éviter le vide et la concentration de masse.

Nous améliorons ici ces résultats en ne supposant plus de régularité sur la condition initiale. La suppression de cette hypothèse n'est pas qu'une coquetterie puisque l'opérateur d'évolution ne régularise pas $v(.,t)$, comme on le verra.

THEOREME. *Soit (u_0,v_0) une donnée initiale d'énergie finie. On suppose de plus que ρ_o, $v_o \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,M[)$. Alors les problèmes de Cauchy mixtes (avec la condition (D) ou bien la condition (N)) possèdent une solution faible d'énergie finie et telle que*

$$\rho, v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,M[\times [0,+\infty[\,) \,;$$

$$u_x \in L^2_{\mathrm{loc}}(]0,M[\times [0,+\infty[\,) \,.$$

■

NOTA. Au moment où je termine d'écrire cet exposé, je reçois de A.A. Amoscov et A.A. Zlotnik un reprint en russe contenant ce théorème (Doklady Akad. Nouk SSSR 1988, T 299, n° 6, p. 1303-1307).

II - DEMONTRATION DU THEOREME.

1) En régularisant la donnée v_o , on peut considérer une suite v_{on} dans $L^\infty_{\mathrm{loc}} \cap H^s_{\mathrm{loc}}$ pour un $s > 0$, telle que $\rho_{on} = v_{on}^{-1}$ soit dans L^∞_{loc} également, et telle que

i) Pour tout compact K de $]0,M[$, la suite $\sup\{v_{on}(x)\,;\, x \in K\}$ soit bornée.

ii) $v_{on}(x)$ converge vers $v_o(x)$ pour presque tout $x \in\,]0,M[$, quand $n \to \infty$.

iii) L'énergie totale de (u_o, v_{on}) est une suite bornée.

D'après [$S1$], le problème mixte (avec (D) ou (N)) dont la donnée initiale est (u_o,v_{on}) possède une solution, qu'on notera (u^n,v^n), qui satisfait des estimations indépendantes de n.

2) L'énergie d'une solution est, au temps t , le nombre

$$I[u,v;t] = \int_0^M \left(\frac{1}{2}\, u(x,t)^2 + E(v(x,t))\right) dx,$$

où $E' = -p$. Dans tous les cas physiques, on peut supposer que E est une fonction positive satisfaisant $E(0) = +\infty$.

Les solutions construites en [$S1$] satisfont

$$\frac{dI}{dt} + \alpha \int_0^M \frac{u_x^2}{v}\, dx \le 0,$$

où on a utilisé l'une des conditions aux limites. On a donc

(2.1) $$I[u^n,v^n;t] \le I[u_o,v_{on}] \le C_1,$$

(2.2) $$\alpha \int_0^\infty \int_0^M \frac{u_x^2}{v}\, dx\, dt \le I[u_o,v_{on}] \le C_1.$$

Ci-dessus, et dans tout l'article, C_1, C_2, ... désignent des constantes indépendantes de n. Lorsque C_K dépendra du temps ou d'un autre paramètre, cela sera indiqué clairement à la première apparition.

3) La fonction auxiliaire essentielle dans l'étude de (NS) est la suivante

$$h(x,z,t) =: \int_z^x u(y,t)\,dy - \alpha \operatorname{Log} \frac{v(x,t)}{v(z,t)} ,$$

pour $0 < z < x < M$, $t \geq 0$. Pour la solution (u^n,v^n), on notera h_n. On calcule facilement

$$\text{(2.3)} \qquad \frac{\partial h_n}{\partial t} = p(v^n(x,t)) - p\,(v^n(z,t)),$$

ce qui permet [S1] d'établir des estimations a priori ponctuelles de $v_n\,(x,t)$ ainsi qu'une estimation de dérivées, même fractionnaires, de v_n. L'estimation L^∞ revêt deux formes, selon la condition aux limites. Dans le cas à frontière libre, le fluide peut s'étaler et donc la densité tendre vers zéro lorsque le temps va à l'infini :

$$\text{(2.4.N)} \qquad C_2\, v_{on}(x) \leq v^n(x,t) \leq v_{on}(x) \exp(C_3 + \frac{t}{\alpha}\; q(C_1\, v_{on}(x)),$$

où $q(.)$ est une fonction décroissante qui majore la pression $p(.)$; si p est décroissante (cas d'un gaz), on peut prendre $q = p$.

Dans le cas à frontière fixe, il en va bien sûr différemment. Pour tout compact K de $]0,M[$:

$$\text{(2.4.}D\text{)} \qquad C_2\, \frac{v_{on}(x)}{1+v_{on}(x)} \leq v^n(x,t) \leq C_3(K)\, v_{on}(x), \quad x \in K, t \geq 0 ,$$

où C_3 ne dépend que du produit

$$\sup_{x\in K} v_{on}(x) \,.\, \sup_{x\in K} \rho_{on}(x) ,$$

qui reste borné quand n tend vers l'infini.

4) De (2.4.N ou D), on déduit que la suite $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty_{\text{loc}}(]0,M[\times[0,+\infty[)$ ainsi que la suite $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$. De (1.1) et (1.2), on déduit alors que $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0,T;H^1_{\text{loc}}]0,M[)$ pour tout temps T. Utilisant alors l'équation (N-S 2) et un lemme de compacité à la Aubin, on obtient la compacité de la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(0,T;L^2_{\text{loc}}(]0,M[))$.

5) Il reste à obtenir la compacité de la suite $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans L^p_{loc} avec $p < +\infty$, mais c'est plus subtil que ce qui précède. Pour cela, on réutilise (2.3). Soit K un intervalle compact de $]0,M[$ et $T > 0$. D'après l'alinéa 3), la fonction p (qui est

toujours supposée très régulière) est Lipschitzienne sur l'ensemble des valeurs prises par $v^n(x,t)$ quand $n \in \mathbb{N}$ et $(x,t) \in K \times [0,T]$. On a donc, si $x, z \in K$ et $t \in T$:

$$\left|\frac{\partial h_n}{\partial t}\right| \leq C_4(K,T) \left|\mathrm{Log}\, v^n(x,t) - \mathrm{Log}\, v^n(z,t)\right|$$

$$\leq C_5(K,T) \left| \int_z^x u^n(y,t)\,dy - h_n \right|.$$

C'est à dire, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

(2.5) $$\left|\frac{\partial h_n}{\partial t}\right| \leq C_5(K,T) \{ |h_n| + (2\, C_1 \; |x - z|)^{1/2} \}.$$

On déduit de (2.5) une inégalité de Gronwall

(2.6) $$|h_n\,(x,z;t)| \leq \{ |h_n(x,z;0)| + C_6(K,T) \; |x - z|^{1/2} \} \exp(TC_5).$$

Utilisant à nouveau les mêmes arguments (le logarithme est localement Lipschitzien ; l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation d'énergie), on obtient :

(2.7) $$|v^n(x,t) - v^n(z,t)| \leq C_7(K,T) \{ |h_n(x,z;0)| + |x - z|^{1/2} \}$$

$$\leq C_8(K,T) \{ |v_{on}(x) - v_{on}(z)| + |x - z|^{1/2} \}.$$

Il s'ensuit, puisqu'on peut supposer que v_{on} tend vers v_o dans L^1_{loc} et vérifie donc le critère de compacité de Kolmogorov, que la famille $(v^n(.,t))_{n\in\mathbb{N},0\leq t\leq T}$ satisfait ce même critère.

On peut donc, quitte à extraire une sous-suite, supposer que la suite $(v^n(.,t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1_{\mathrm{loc}}(]0,M[)$ vers une limite $w(t)$, pour tout t appartenant à une partie dénombrable dense Q de $[0,T]$. De plus, $w(.)$ prend ses valeurs dans un compact de $L^1_{\mathrm{loc}}(]0,M[)$.

Or, d'après (N-S.1), la suite $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathscr{C}^{1/2}(0,T;L^2_{\mathrm{loc}}(]0,M[))$, de sorte que d'une part $w \in \mathscr{C}^{1/2}(0,T;L^1_{\mathrm{loc}})$, et d'autre part v^n tend vers w dans cet espace d'après le théorème d'Ascoli.

6) Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut donc supposer que v^n converge presque partout vers w , sur $]0,M[\ \times\ \mathbb{R}^+$. Le passage à la limite dans

(N-S) est alors immédiat avec u_x^n convergeant dans L^2_{loc} faiblement. Ainsi $(u,w) = \lim_{n\to\infty} (u^n,v^n)$ satisfait (N-S). Les conditions aux limites ou initiales s'obtiennent en écrivant (N-S_n) sous forme intégrée contre des fonctions tests dont l'une est à support compact mais pas l'autre, puis en passant à la limite. Par exemple, pour (D) :

$$\int_0^{+\infty}\int_0^M (v^n\,\varphi_t - u^n\,\varphi_x)\,dx\,dt + \int_0^M v_{on}(x)\,\varphi(x,0)\,dx = 0$$

fournit

$$\int_0^{+\infty}\int_0^M (w\,\varphi_t - u\,\varphi_x)\,dx\,dt + \int_0^M v_o(x)\,\varphi(x,0)\,dx = 0\,,$$

d'où

$$w\,(.,t=0) = v_o\,(.) \quad \text{et} \quad u(0,.) = u(M,.) = 0.$$

III - A PROPOS DES OSCILLATIONS DE GRANDE AMPLITUDE.

Dans [S2] (voir aussi W. E [E]), on étudie le comportement, quand ε tend vers zéro, de la solution $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ de (N-S) associée à la donnée initiale oscillante ($\varepsilon << 1$)

(3.1) $$u_\varepsilon\,(x,0) = U_0(x,\frac{x}{\varepsilon}),\quad v_\varepsilon\,(x,0) = V_0\,(x,\,\frac{x}{\varepsilon})\,.$$

On peut, pour fixer les idées, supposer que U_0 et V_0 sont régulières et périodiques, de période 1, par rapport à la dernière variable.

Les estimations a priori du paragraphe précèdent suggèrent le développement asymptotique suivant :

(3.2) $$\begin{aligned} u_\varepsilon(x,t) &= u(x,t) + \varepsilon\,u_1\,(x,\frac{x}{\varepsilon},t) + \dots\,, \\ v_\varepsilon(x,t) &= V(x,\frac{x}{\varepsilon},t) + \varepsilon\,v_1 + \dots\,, \end{aligned}$$

qui sera valable sauf dans un voisinage de l'instant initial puisqu'il y a une régularisation de u_ε en un temps de l'ordre de ε.

En introduisant le développement (3.2) dans les équations (N-S), on trouve facilement le système d'évolution qui gouverne (u,V). Celui-ci est justifié rigoureusement dans [S2], au moyen de la compacité par compensation :

$$\text{(NSR)}\qquad \begin{cases} \alpha \dfrac{\partial V}{\partial t} = \left\{ p(V) + \dfrac{\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \int Vp(V)}{\int V} \right\} V, \ x \in]0,M[, t>0 \text{ et } y \in \mathbb{T}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \partial_x \left\{ \dfrac{\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \int Vp(V)}{\int V} \right\}, \ x \in]0,M[, t>0 . \end{cases}$$

Ci-dessus, la notation $\int f(V)$ désigne la valeur moyenne de la fonction périodique $y \longrightarrow f(V(x,y,t))$. La donnée initiale est

$$\text{(3.1.R)}\qquad V(x,y,0) = V_0(x,y), \quad u(x,0) = \int U_0(x,y)\, dy.$$

On s'intéresse à la condition aux limites de Dirichlet. Les oscillations de grande amplitude apparaissent naturellement lorsque le fluide peut revêtir deux états stables distincts, le gaz et le liquide, séparés par un état instable, la phase spinodale. Mathématiquement, cela signifie que la fonction d'état $v \to p(v)$ est décroissante sur $]0,\beta[\cup]\gamma,+\infty[$, croissante sur $]\beta,\gamma[$. On peut penser à une loi d'état de Van der Waals. Considérer une donnée initiale de la forme (3.1) consiste donc à perturber un état non oscillant $(\int V_0, \int U_0)$, dans $L^\infty(]0,M[)$ pour la topologie faible - étoile.

Prenons le cas où l'état non oscillant $(\bar{v},\bar{u})$ (état moyen) est une solution stationnaire, ce qui revient à dire que $\bar{u}$ est une constante, ainsi que $p(\bar{v})$. Ici, $\bar{v}$ peut ne pas être constant puisque p n'est pas monotone. Alors, si cet état est stable, on s'attend à ce que la solution perturbée retourne à $(\bar{v},\bar{u})$ quand $t \to \infty$.

Le cas le plus simple est celui où $\bar{u}$ est constant (on peut prendre $\bar{u} = 0$ sans perte de généralité) et où V_0 ne dépend que de y, et alors $\bar{v}$ est constant. La solution de (NSR) est donc de la forme $(V(y,t),0)$. On étudie donc une perturbation homogène de grande amplitude d'un état stationnaire uniforme. L'équation d'évolution de V est maintenant

$$\text{(3.3)}\qquad \alpha \frac{\partial V}{\partial t} = \left(p(V) - \frac{\int Vp(V)}{\int V} \right) V .$$

On note, ce qui tient à la loi de conservation de la masse, que $\int V$ est constant au cours du temps. Notons $L = \int V_0$ et introduisons la nouvelle inconnue $W(.,t) = V(.,t)^{1/2}$, à valeurs dans la variété

$$X_L = \{W \in L^2\,(]0,1[)\,;\ \int_0^1 W\,(y)^2\,dy \;=\; L\,\}.$$

Alors l'équation (3.3) se réécrit sous la forme

$$(3.4) \qquad 4\,\alpha\,\frac{dW}{dt} = -\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta W},$$

où $\qquad \mathcal{E}[W] = \int_0^1 E(W\,(y)^2)\,dy$ pour $W \in X_L$.

Dans (3.4), la notation $\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta W}$ désigne le gradient de la fonctionnelle, celle-ci étant définie sur la variété hilbertienne X_L. Ce gradient est donc un élément de l'espace tangent en W à X_L.

L'état $(\bar{v},0)$ sera stable (on pense ici à la stabilité physique bien sûr) si la solution constante $V \equiv \bar{v}$ de (3.3) est stable pour cette équation différentielle en dimension infinie. On pense en général qu'un point critique de $\mathcal{E}$ sur X_L est stable si c'est un minimum local de $\mathcal{E}$. Si cela est vrai, alors cela justifie la règle Maxwell puisque le seul minimum local de $\mathcal{E}$ (à réarrangement près) est le minimum global ; il y a trois cas suivant la valeur de L :

i) $V(y) \equiv L$ $\qquad$ si $L \le v_-$

ii) $V(y) \equiv L$ $\qquad$ si $L \ge v_+$

iii) $V(y) = \begin{cases} v_- & \text{pour } 0<y<Y, \\ v_+ & \text{pour } Y<y<1, \end{cases}$

où $Y = (v_+ - L)\,/\,(v_+ - v_-)$, si $v_- \le L \le v_+$.

Ci-dessus, v_- et v_+ sont les valeurs du volume spécifique au palier de Maxwell. Ce sont les solutions uniques des équations

$$(3.8) \qquad \begin{cases} v_- < v_+, \ \ p\,(v_-) = p\,(v_+)\,, \\ E(v_+) - E(v_-) + p(v_\pm)\,(v_+ - v_-) = 0\,. \end{cases}$$

En plus de son minimum, $\mathcal{E}$ possède un grand nombre (un continuum) de points critiques, c'est-à-dire que (3.3) admet beaucoup de solutions stationnaires, L étant fixé. A réarrangement près, il y en a une pour chaque choix de la pression $\hat{p}$, qui soit de la forme

$$V(y) \in \{v_1,\, v_2\}$$

où $v_1 < v_2$ sont les solutions de $p(v_i) = \hat{p}$, $p'(v_i) < 0$, pourvu que $v_1 \leq L \leq v_2$. Si l'on accepte que V prenne des valeurs dans la phase spinodale, il y a encore beaucoup de solutions stationnaires mais comme l'instabilité des états spinodaux est facile à démontrer en examinant le spectre de $d^2 \mathcal{E}$, on se restreindra aux solutions de la forme ci-dessus.

Supposons maintenant que $v_- < L < v_+$. Alors l'inégalité $v_1(\hat{p}) \leq L \leq v_2(\hat{p})$ a lieu pour tout $\hat{p}$ appartenant à un intervalle I, voisinage de la valeur de Maxwell p_M. La solution stationnaire construite ci-dessus étant notée $V(.;\hat{p})$, il lui correspond un point critique $\mathrm{W}(.;\hat{p})$ de $\mathcal{E}$. L'étude du spectre de $d^2 \mathcal{E}$ en $\mathrm{W}(.;\hat{p})$ n'éclaire en rien la question de la stabilité car ce spectre est continu et il ne semble pas possible d'appliquer les théorèmes classiques concernant la stabilité des équilibres des équations différentielles ordinaires.

Bien plus, on remarque les trois propriétés suivantes, dont la simultanéité surprend mais qui ne contredit pas le théorème de Sard :

i) $\mathcal{E}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$,

ii) l'arc paramétré $\hat{p} \to \mathrm{W}(.;\hat{p})$ est continu et $d\mathcal{E}$ est nul sur cet arc,

iii) $\mathcal{E}$ n'est pas constant sur cet arc.

En fait, on peut être plus précis concernant la régularité de cet arc, il est exactement de classe $\mathscr{C}^{1/2}$, et 1/2 est la valeur maximale de α pour laquelle un arc de classe $\mathscr{C}^\alpha$ ait les propriétés ci-dessus pour une fonction appropriée $\mathcal{E}$, comme on peut le voir à l'aide de la formule de Taylor. Précisément, si $\mathcal{E}$, de classe $\mathscr{C}^2$, admet un arc de valeurs critiques, connexé de classe $\mathscr{C}^\alpha$ avec $\alpha >$ 1/2, alors $\mathcal{E}$ est constant sur cet arc.

On conçoit donc que si, comme on l'espère, les points critiques $\mathrm{W}(.;\hat{p})$ sont instables pour $\hat{p} \neq p_M$, alors cette instabilité doit être très faible (très lente).

BIBLIOGRAPHIE.

[A] A.A. Amosov, A.A. Zlotrnick : Dokl. Akad. Nauk SSSR **299** (1988) n°6, pp 1303 - 1307 (en russe).

[E] Weinam E : Propagation of oscillations in the solutions of 1-D compressible fluid equations. Preprint, courant I., New York 1991.

[H] D. Hoff : Global existence for 1-D, compressible isentropic Navier - Stokes equations with large initial data, Trans. AMS **303** (1987) pp 169 - 181.

[K] A.V Kazhikhov : Cauchy problem for viscous gas equations, Sibirskii Mat.Z. **23** (1982) pp 60 - 64.

[KS] A.V Kazhikhov, V.V. Shelukin : Unique global solution with respect to time of initial - boundary value problem for one - dimensional equations of a viscous gas, PMM **41** (1977) pp 282 - 291.

[S1] D. Serre : Solutions faibles globales des équations de Navier - Stokes pour un fluide compressible. C.R.A.S., **303** (1986) pp 639 - 642.

[S2] D. Serre : Variations de grande amplitude pour la densité d'un fluide visqueux compressible. Physica D **48** (1991) pp 113 - 128.

[S3] D. Serre : Evolution d'une masse finie de fluide en dimension 1. PDEs and their applications, collège de France seminar, vol X (1992). Longman, Londres.