PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

R. REGBAOUI

Ensembles nodaux des solutions des équations elliptiques

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 205-207
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_205_0>

ENSEMBLES NODAUX DES SOLUTIONS DES EQUATIONS ELLIPTIQUES
(D'APRES R.HARDT ET L.SIMON)

PAR R.REGBAOUI

1.Introduction et énoncés des résultats

Le but de cet exposé est de décrire un résultat de R.Hardt et L.Simon[2] concernant les ensembles nodaux des solutions de quelques équations elliptiques.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, on considère des équations de la forme

$$(1.1) \qquad \sum a_{ij}(x)D_i D_j\, u(x) + b_j(x)D_j\, u(x) + c(x)\, u(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où a_{ij} sont des fonctions Lipschitziennes et b_j , c des fonctions bornées.On supposera que la matrice (a_{ij}) est reèlle symetrique définie positive .

Pour une solution u de (1.1) de classe $C^1 \cap H^2$ on veut étudier l'ensemble $u^{-1}(\{0\})$ au voisinage d'un point x_o (localement).Comme on ne s'intéresse qu'aux solutions non triviales de (1.1) on peut supposer que l'ordre d'annulation de u en x_o est fini , c'est à dire qu'il existe un $d>0$

tel que $R^{-d}\int_{B(x_o,R)} |u|^2\,dx$ ait une limite supérieure strictement positive,car sinon ,en utilisant des théorèmes du prolongement unique (voir Hormander [3]) on aurait u identiquement nulle dans Ω.

Le résultat principal de cet exposé est que l'on peut donner une borne supérieure de la mesure d'Hausdorff d'ordre $n-1$ de l'ensemble $u^{-1}(\{0\})$ en fonction de n , d ,μ ,ν ,σ avec $\mu = \operatorname{Sup}_{x\in\Omega} b_j(x)$, $\nu = \operatorname{Sup}_{x\in\Omega} c(x)$ et σ est la constante de Lipschitz des fonctions a_{ij} ;

THEOREME 1.1

Il existe une constante $C=C(n)>0$,il existe un $\rho_o>0$ qui dépend de (n,d,μ,ν,σ) tel que :

a) $H^{n-1}(B(x_o,\rho)\cap u^{-1}(\{0\})) \le C\, d\, \rho^{n-1}$ pour tout $\rho \le \rho_o$.

b) $dim\ B(x_o,\rho)\cap u^{-1}(\{0\})\cap |Du|^{-1}(\{0\}) \le n-2$

où H^{n-1} désigne la mesure d'Hausdorff d'ordre $n-1$, dim : la dimension d'Hausdorff et Du désigne le gradient de u.

REMARQUE 1.2

a) D'aprés le b) du théorème 1.1 onpeut décomposer $B(x_o, \rho) \cap u^{-1}(\{0\})$ en une sous-variété de dimension $n-1$ et de classe C^1 qui est : $B(x_o, \rho) \cap u^{-1}(\{0\}) \cap \{|Du| > 0\}$ ayant une mesure d'Hausdorff finie et un ensemble fermé :$B(x_o, \rho) \cap u^{-1}(\{0\}) \cap |Du|^{-1}(\{0\})$ de dimension $n-2$.

b) Les résultats du héorème 1.1 restent valables pour des équations non lineaires de la forme :

$$\Sigma \ a_{ij}(x, u, Du, D^2u)D_i D_j u + b_j(x, u, Du, D^2u) D_j u + C(x, u, Du, D^2u)u = 0$$

avec $u \in C^2$, a_{ij} Lipschitz et b_j, C brnées.

Maintenant on va donner une déscription précise de la structure de l'ensemble $u^{-1}(\{0\})$ dans le cas C^∞.En fait on a le théorème suivant qui est un corllaire du théorème 1.1 :

THEOREME 1.2

Supposons que $a_{ij}, b_j, C \in C^\infty(\Omega)$ et soit u une solution non constante de (1.1) .Alors $u^{-1}(\{0\})$ se décompose en une sous-variété de dimension $n-1$ ayant une mesure d'Hausdorff de dimension $n-1$ finie sur chaque sous ensemble compact de Ω et un ensemble fermé dénombrablement réctifiable de dimension $n-2$.

2.Applications

Soit M une variété Riemannienne de classe C^∞ et soit $0 = \lambda_o < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ la suite des valeurs propres du Laplacien associé à M. Soit Φ_j une fonction propre associée à la valeur propre λ_j.

Dans [1] H.Donnelly et C.Fefferman ont montré que l'ordre d'annulation de Φ_j en un point de M est $\sqrt{\lambda_j}$, plus précisement ils ont montré que

$\|\Phi_j\|_{L^2(B(x_o,\rho))} \leq 2^{C\sqrt{\lambda_j}} \|\Phi_j\|_{L^2(B(x_o,\rho/2))}$ pour tout $\rho \leq R$ où $C > 0$ ne dépend que de la courbure et le diamètre de M, R ne dépend que de la courbure et où $B(x_o, \rho)$ désigne la boule geodésique de centre x_o et de rayon ρ.

Lorsque la variété M est analytique H.Donnelly et C.Fefferman [1] donnent une borne inf et une borne sup de $H^{n-1}(\Phi_j^{-1}(\{0\}))$ .En fait ils démontrent le théorème suivant:

THEOREME 2.1

Supposons que M est analytique alors on a:

$C_1\sqrt{\lambda_j} \leq H^{n-1}(\Phi_j^{-1}(\{0\})) \leq C_2\sqrt{\lambda_j}$ où : C_1 , C_2 ne dépendent que de la geométrie de M.

REMARQUE 2.2

Dans le théorème 2.1 la borne $\sqrt{\lambda_j}$ est optimale, on a qu'à prendre M = $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ et les fonctions propres: $Sin(k_1x_1)\ Sin(k_2x_2)$. $\ldots Sin(k_nx_n)$

Dans le cas où la variété M est seulement C^∞ ,S.T.Yau a conjecturé que les résultats du théorème 2.1 restsent valables.

Si on applique les résultats du théorème 1.1 on arrive à donner une borne supérieure de $H^{n-1}(\Phi_j^{-1}(\{0\}))$ mais elle est plus grande que $\sqrt{\lambda_j}$:

***THEOREME* 2.3**

Supposons que M est C^∞ ,alors on a :

$H^{n-1}(\Phi_j^{-1}(\{0\})) \leq C\,\lambda_j^{C\sqrt{\lambda_j}}$ où C est une constante qui dépend seulement de la courbure et du diamètre de M .

REFERENCES

[1] H.Donnelly and C.Fefferman ,Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds , Inv. Math. 93,161-183 (1988).

[2] R.Hardt and L.Simon ,nodal sets for solutions of elliptic equations,J. Diff.Geometry,30 (1989).

[3] L.Hormander ,Uniqueness theorems for 2nd-order elliptic operators , Comm.P.D.E , 8 (1983).

R.REGBAOUI
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
35042 RENNES .