YVES MEYER

L’analyse par ondelettes d’un objet multifractal : la fonction $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \sin n^2 t$ de Riemann

Publications de l’Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d’équations aux dérivées partielles », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_1_0>

L'ANALYSE PAR ONDELETTES D'UN OBJET MULTIFRACTAL :

LA FONCTION $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n^2 t$ DE RIEMANN

Yves MEYER
CEREMADE
Institut Universitaire de France

1 - Introduction.

Riemann aurait affirmé que la fonction $R(t) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n^2 t$ n'est nulle part dérivable. Weierstrass chercha en vain à établir l'assertion de Riemann et modifia alors le problème. Il considéra alors les séries lacunaires $\sum_0^{\infty} a^n \cos b^n x$, $0 < a < 1$, b entier impair, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Ce sont des fonctions continues et Weierstrass démontra qu'elles ne sont dérivables en aucun point. Ce résultat fut ensuite amélioré par Hardy qui montra que la condition $ab \geq 1$ suffit à entraîner la non-dérivabilité.

En 1916, Hardy retourne au problème de Riemann et démontre que $R(t)$ n'est pas dérivable en t_o si t_o / π est irrationnel, confirmant ainsi l'assertion de Riemann.

S. Lang avait l'habitude de citer à ses étudiants débutants le problème non résolu de la dérivabilité de la fonction $R(t)$ et, à la surprise générale, un jour, le problème fut complètement résolu par un des étudiants de S. Lang. Il s'agit de J. Gerver qui démontra que $R(t)$ est dérivable en π et que $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$. Plus généralement $R'(t_o)$ existe si et seulement si $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$ et alors $R'(t_o) = -\frac{1}{2}$.

La série de Riemann est donc dérivable en certains points. En d'autres points, elle présente des "cusps" (ou rebroussements) que l'on peut décrire explicitement et qui correspondent à un exposant de Hölder égal à $\frac{1}{2}$.

En d'autres points t_o l'exposant de Hölder $\alpha(t_o)$ est encore différent et ces fluctuations très fortes de l'exposant de Hölder $\alpha(t_o)$ font penser à un objet multifractal. Pour aller plus loin, il conviendrait de calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble $E(\alpha)$ des $t_o \in [0\ ,\ 2\ \pi]$ pour lesquels $\alpha(t_o) = \alpha$ et tracer le graphe de la fonction $E(\alpha)$ lorsque $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$ (ces deux bornes correspondent respectivement à la régularité globale qui est exactement d'exposant de Hölder $\frac{1}{2}$ et aux points les plus réguliers où l'exposant de Hölder est $\frac{3}{2}$).

L'analyse par ondelettes est considérée par certains spécialistes comme la "voie royale" permettant d'accéder au coeur même des structures multifractales.

Nous allons, sur l'exemple particulier de la fonction de Riemann $R(t)$, comparer les performances de cinq méthodes d'analyse allant des "méthodes élémentaires" (J. Gerver, H. Queffelec et S. Itatsu) aux "méthodes analytiques" (G.H. Hardy, M. Holschneider) qui utilisent les propriétés de la fonction θ de Jacobi. L'analyse par ondelettes appartient à ce second groupe.

Nous conclurons sur les avantages et les inconvénients des diverses méthodes.

2 - Rappels sur la fonction θ de Jacobi.

Si $z = x + i\,y, y > 0,\ x \in \mathbb{R}$, on pose

(2.1) $$\theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi k^2 z}$$

On a donc $|\theta(z)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 y} = \theta(i\,y)$.

La formule sommatoire de Poisson nous indique que $\sqrt{y}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 y} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2/y}$, c'est à dire que $\sqrt{y}\ \theta(i\,y) = \theta(\frac{i}{y})$ et, par prolongement analytique au demi-plan supérieur, il vient

(2.2) $$\sqrt{-iz}\ \theta(z) = \theta(-\frac{1}{z}).$$

Si $y \geq 1$, on revient à (2.1) et l'on a, par majoration brutale,

(2.3) $$|\theta(z) - 1| \leq C\,e^{-\pi y}$$

tandis que si $0 < y < 1$, on utilise $\sqrt{y}\ \theta(i\ y) = \theta(\frac{i}{y})$ pour se ramener au cas précédent et l'on a donc

$$|\theta(z)| \leq C\, y^{-1/2}. \tag{2.4}$$

Enfin $\theta(z + 2) = \theta(z)$, grâce à (2.1).

Le comportement de $\theta(z)$ au voisinage de 0 est essentiel dans la discussion qui suit.

On distingue deux cas, selon que $y > |z|^2$ (c'est à dire z appartient au disque ouvert de centre $\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$) ou que $0 < y \leq |z|^2$.

Dans le premier cas $-\frac{1}{z} = u + i\, v$ et $v > 1$. On utilise alors (2.3) et il vient, si $y > |z|^2$,

$$\theta(z) = \sqrt{\frac{i}{z}} + 0\, [|z|^{-\frac{1}{2}}\ exp\, (-\pi\, y\, |z|^{-2})]\ . \tag{2.5}$$

Si $0 < y \leq |z|^2$, la même méthode fournit

$$\theta(z) = O\, (\frac{|z|}{y})^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

que l'on peut d'ailleurs écrire $\sqrt{\frac{i}{z}} + O\, (\frac{|z|}{y})^{\frac{1}{2}}$ puisque le second terme englobe le premier.

Finalement on a dans les deux cas

$$\theta(z) = \sqrt{\frac{i}{z}} + \rho\, (z) \tag{2.7}$$

où $$\rho\, (z) = O\, [|z|^{-\frac{1}{2}}\ exp\, (-\pi\, y\, |z|^{-2})] \quad si\ \ y > |z|^2$$

et $$\rho\, (z) = O\, (\frac{|z|}{y})^{\frac{1}{2}} \quad si\ \ 0 < y \leq |z|^2.$$

On en déduit que l'on a, dans tous les cas,

$$|\rho(z)| \leq C\, y^{\alpha-1}\, |z|^{\sigma} \quad si \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2},\ \ \sigma = \frac{3}{2} - 2\,\alpha. \tag{2.8}$$

Il vient alors $\theta\,(1 + z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2(1+z)} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n\ e^{i\pi n^2 z}$

$$= 2 \sum_{-\infty}^{\infty} e^{4 i \pi n^2 z} - \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z} = 2\,\theta\,(2\,z) - \theta\,(z).$$

Il vient donc

Lemme 1.

Il existe une constante C telle que, si $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ *et* $\sigma = \frac{3}{2} - 2\,\alpha$, *on ait*

(2.9) $$|\theta\,(1+z)| \;\le\; C\,y^{\alpha-1}\,|z|^{\sigma}$$

pour tout $z = x + i\,y,\ y > 0$.

Nous allons ensuite vérifier que l'on peut remplacer 1 par n'importe quel nombre $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$ ($p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$) et conserver (du moins localement) la conclusion du lemme 1.

Pour cela on observe que si $|\theta\,(t_o + z)| \le C\ y^{\alpha-1}\,|z|^{\sigma}$ lorsque $|z| \le r_o$ ($r_o > 0$), $z = x + i\,y$, la même estimation sera vraie pour $t_1 = t_o + 2$ (grâce à la périodicité de θ) et pour $t_2 = -\frac{1}{t_o}$ (grâce à (2.2)). Dans ce dernier cas, il conviendra de changer $r_o > 0$ en $r_2 > 0$ et de modifier la constante C. Finalement l'ensemble S des t_o réels pour lesquels l'estimation est vérifiée possède les propriétés suivantes : S contient 1 ; si $t_o \in S$, alors $t_o + 2 \in S$; si $t_o \in S$, alors $-\frac{1}{t_o} \in S$. Il en résulte que tous les rationnels $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$ appartiennent à S.

Nous venons d'établir le résultat suivant.

Lemme 2.

Pour tout rationnel t_o *de la forme* $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, *il existe une constante* C_o *et un nombre réel* $r_o > 0$ *tels que, pour tout* $z = x + i\,y$ *vérifiant* $y > 0$ *et* $|z| < r_o$, *on ait*

(2.10) $$|\theta\,(t_o + z)| \;\le\; C_o\,y^{\alpha-1}\,|z|^{\sigma}$$

lorsque $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{3}{2} - 2\,\alpha$.

En appliquant la formule de Cauchy sur un cercle centré en $t_o + z$ et de rayon $\frac{y}{2}$, on déduit de (2.10) une majoration du même type des dérivées $\theta'(t_o + z)$, $\theta''(t_o + z)$, à savoir

(2.11) $$|\theta'(t_o + z)| \;\le\; 2\,C_o\,y^{\alpha-2}\,|z|^{\sigma}$$

$$(2.12) \qquad |\theta''(t_o + z)| \leq 4\, C_o\, y^{\alpha-3}\, |z|^{\sigma}.$$

La même méthode (ou une majoration brutale) fournit

$$(2.13) \qquad |\theta'(z)| \leq C y^{-1} \exp(-\pi y) \quad si\ y \geq 1,\ z = x + i y$$

$$(2.14) \qquad |\theta''(z)| \leq C y^{-2} \exp(-\pi y) \quad si\ y \geq 1,\ z = x + i y.$$

3 - La dérivabilité de $R(t) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin n^2 t}{n^2}$ en $\pi \frac{2p+1}{2q+1}$ par "la méthode de Lusin".

On considère la fonction holomorphe $f(z) = \sum_1^{\infty} n^{-2} e^{i\pi n^2 z}$ où $z = x + i y$, $y > 0$. On a évidemment $f'(z) = i\,\pi \sum_1^{\infty} e^{i\pi n^2 z} = \frac{i\pi}{2}(\theta(z) - 1)$.

Naturellement cette série dérivée divergerait si l'on remplaçait brutalement z par $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$ mais on a cependant $\lim_{y \downarrow 0} \theta(t_o + i y) = 0$. Ceci ne suffit pas à assurer la dérivabilité de $f(t)$ en t_o mais permet du moins de savoir que si cette dérivée existe, elle vaut nécessairement $-\frac{i\pi}{2}$.

Pour démontrer la dérivabilité de $f(t)$ en t_o, on montre un énoncé plus précis, à savoir que

$$(3.1) \qquad |f(t_o + h) - f(t_o) + i\frac{\pi}{2} h| \leq C_\beta\, |h|^\beta, \quad si\ 1 \leq \beta < \frac{3}{2}.$$

Pour établir (3.1), on commence par observer que, grâce à (2.11) et (2.13), l'intégrale $\int_0^\infty f''(t_o + i y)\, d y$ est absolument convergente. On a ensuite

$$\lambda = -i \int_0^\infty f''(t_o + i y)\, d y = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f'(t_o + i\,\varepsilon) = -i\frac{\pi}{2}.$$

Pour établir (3.1), il suffit d'écrire

$$(3.2) \qquad f(t) = -i \int_0^\infty f'(t + i y)\, d y$$

et de laisser ensuite courir sa plume.

On a donc $f(t_o + h) - f(t_o) - \lambda\, h =$

$$-i \int_0^\infty \{ f'(t_o + h + i\,y) - f'(t_o + i\,y) - h\, f''(t_o + i\,y) \}\, d\,y \;=\; I_1(h) + I_2(h) + I_3(h).$$

On a posé

$$I_1(h) \;=\; -i \int_h^\infty \{ f'(t_o + h + i\,y) - f'(t_o + i\,y) - h\, f''(t_o + i\,y) \}\, d\,y$$

$$I_2(h) \;=\; -i \int_0^h \{ f'(t_o + h + i\,y) - f'(t_o + i\,y) \}\, d\,y$$

et

$$I_3(h) \;=\; i\,h \int_0^h f''(t_o + i\,y)\, d\,y.$$

Pour majorer $\left| I_1(h) \right|$, on écrit

$$\left| f'(t_o + h + i\,y) - f'(t_o + i\,y) - h\, f''(t_o + i\,y) \right| \;\le\; \frac{h^2}{2} \sup_{o \le \tau \le h} \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^3 f(t_o + \tau + i\,y) \right|.$$

Or $\left(\frac{d}{dt}\right)^3 f(t + i\,y) = \frac{i\pi}{2}\, \theta''(t + i\,y)$ que l'on estime par (2.12) ou (2.14). On obtient ainsi, si $h \le y \le 1$, $|f'(t_o + h + i\,y) - f'(t_o + i\,y) - h\, f''(t_o + i\,y)| \le C\, h^2\, y^{-\frac{3}{2}}$ et le membre de droite peut être remplacé par $C\, h^2\, e^{-\pi y}$ si $y \ge 1$. On a donc $|I_1(h)| \le C\, h^{\frac{3}{2}}$.

Pour majorer $\left| I_2(h) \right|$, on écrit simplement

$$|f'\,(t_o + h + i\,y) - f'\,(t_o + i\,y)| \;=\; \frac{\pi}{2}\, |\theta\,(t_o + h + i\,y) - \theta\,(t_o + i\,y)|$$

$$\le \frac{\pi}{2}\, |\theta(t_o + h + i\,y)| + \frac{\pi}{2}\, |\theta(t_o + i\,y)|.$$

On applique alors le lemme 1 et il est essentiel de choisir $\alpha > 0$. On obtient alors $|I_2(h)| \le \frac{C}{\alpha}\, h^{\sigma+\alpha} = \frac{C}{\alpha}\, h^{\frac{3}{2}-\alpha}$. La majoration de $|I_3(h)|$ ne pose aucun problème et il suffit d'utiliser $|\theta'(t_o + i\,y)| \le C\, y^{-\frac{1}{2}}$ pour obtenir $|I_3(h)| \le C\, h^{\frac{3}{2}}$.

Cette approche directe et élémentaire aurait pu être utilisée par G. H. Hardy qui avait souvent utilisé la représentation (3.2). Mais Hardy avait, sans doute, trop de respect pour Riemann pour songer à mettre en doute sa conjecture.

4 - La dérivabilité de $\sum_1^{\infty} \frac{e^{i\pi n^2 t}}{n^{2\beta}}$ en $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$.

On suppose $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$ et l'on se propose de démontrer que $f_\beta(t) = \sum_1^{\infty} \frac{e^{i\pi n^2 t}}{n^{2\beta}}$ est aussi dérivable en $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$.

La démonstration est identique à celle que nous avons utilisée précédemment. On observe que

$$n^{-2\beta}\ e^{i\pi n^2 t} = C(\beta) \int_0^{\infty} e^{i\pi n^2 (t+iy)}\ y^{\beta-1}\ dy \tag{4.1}$$

ce qui conduit à la représentation

$$f_\beta(t) = C(\beta) \int_0^{\infty} (\theta(t+iy)-1)\ y^{\beta-1}\ dy. \tag{4.2}$$

Le seul changement à effectuer dans les démonstrations précédentes est de remplacer systématiquement la mesure dy par $y^{\beta-1}\, dy$.

5 - La fonction de Riemann $\sum_1^{\infty} \frac{\sin n^2 t}{n^2}$ n'est pas dérivable en d'autres points que ceux déjà mentionnés.

Nous allons démontrer un résultat plus précis. Si $0 < s < 1$, Nous dirons qu'une fonction f, définie au voisinage de t_o, appartient à $C^s_{t_o}$ s'il existe une constante C telle que l'on ait, au voisinage de t_o,

$$|f(t) - f(t_o)| \leq C\ |t - t_o|^s. \tag{5.1}$$

Nous laissons de côté le cas $s = 1$ et, si $1 < s < 2$, nous écrirons $f \in C^s_{t_o}$ s'il existe une constante λ telle que l'on ait

$$|f(t) - f(t_o) - \lambda(t - t_o)| \leq C\ |t - t_o|^s. \tag{5.2}$$

Alors f est dérivable et $f'(t_o) = \lambda$.

Si enfin $m < s < m + 1$, on demandera l'existence d'un polynôme P, de degré $\leq m$, tel que

(5.3) $$|f(t) - P(t)| \leq C\,|t - t_o|^s.$$

C'est le point de vue des développements limités.

***Définition* 1.**

Une ondelette analysante est une fonction ψ de la variable réelle t possèdant les propriétés suivantes

(5.4) $$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t - t_o|^s)\ |\psi(t)|\, d\,t < \infty$$

et

(5.5) $$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, d\,t = \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} t^m\ \psi(t)\, d\,t.$$

Pour éviter des choix absurdes tels que $\psi(t) = 0$ identiquement, il faut imposer une condition de non-dégénérescence sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Dans un souci de simplification, nous supposerons dans l'énoncé qui suit que la fonction $f(t)$ que nous cherchons à analyser vérifie (5.3) pour tout t réel. Cela signifie simplement qu'en dehors d'un voisinage de t_O, $|f(t)|$ est bornée et que $|f(t)| = 0(|t|^s)$ à l'infini. Ce sera le cas pour la fonction de Riemann (qui est continue et périodique).

On a alors

***Lemme* 3.**

Si f vérifie (5.3) *et si l'ondelette analysante ψ vérifie* (5.4) *et* (5.5), *les "coefficients d'ondelette" définis par*

(5.6) $$W(t, y) = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\overline{\psi}\,(\frac{s-t}{y})\, d\,s\,,\ \ t \in \mathbb{R},\ \ y > 0\,,$$

vérifient

(5.7) $$|W(t, y)| \leq C\,(y^s + |t - t_o|^s).$$

En effet, on peut, grâce à (5.5), remplacer $f(t)$ par $f(t) - P(t)$, ce qui conduit à majorer $|W(t\,,y)|$ par $\frac{C}{y}\int_{-\infty}^{\infty}|s'-t_o|^s\;|\psi(\frac{s'-t}{y})|\,d\,s'$. On utilise finalement $|s'-t_o|^s \le 2^{s-1}(|s'-t|^s+|t-t_o|^s)$ et l'on obtient (5.7).

Le lemme 3 nous permet d'établir que non seulement la fonction de Riemann n'est pas dérivable en d'autres points que ceux déjà mentionnés, mais encore qu'elle n'est même pas $C_{t_o}^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$ si $\varepsilon > 0$ et si t_0 n'est pas un des points où $R(t)$ est dérivable.

Pour faire cette vérification, on choisit $\psi(t)$ de sorte que $W(t\,,y) = y\,\theta(t+i\,y)$, c'est à dire $\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}(t+i)^{-2}$. On observe alors que le lemme 3 s'applique si $0 < s < 1$. Si donc la fonction de Riemann appartenait à $C_{t_o}^s$ avec $0 < s < 1$, on aurait nécessairement $|\theta(t_o+i\,y| \le C\,y^{-1+s}$ pour $y > 0$.

De deux choses l'une

(a) Si $t_o \notin \mathbb{Q}$, G. H. Hardy a démontré que $|\theta(t_o+i\,y)| \ge C(t_o)\,y^{-\frac{1}{4}}$ où $C(t_o) > 0$.

(b) Si $t_o \in \mathbb{Q}$ mais $t_o \ne \frac{2p+1}{2q+1}$, il résulte du raisonnement qui a conduit au lemme 2 que l'on a $\left|\theta(t_o+i\,y)\right| \ge C(t_o)\,y^{-\frac{1}{2}}$ où $C(t_o) > 0$.

Dans le premier cas, $\sum_1^\infty \frac{\sin\pi n^2 t}{n^2} \notin C_{t_o}^\beta$ pour $\beta > \frac{3}{4}$ et dans le second cas $\sum_1^\infty \frac{\sin\pi n^2 t}{n^2} \notin C_{t_o}^\beta$ pour $\beta > \frac{1}{2}$. En particulier la fonction de Riemann n'est pas dérivable en t_o si $t_o \ne \pi\,\frac{2p+1}{2q+1}$.

6 - L'étude de la régularité 2-microlocale de la fonction Riemann.

Les espaces 2-microlocaux ont été introduits par J.M. Bony dans [1] et [2]. Les liens entre l'analyse 2-microlocale et l'analyse par ondelettes ont été explicités par S. Jaffard. Si bien que les ondelettes constitueront une technique d'analyse dont la finalité est l'analyse 2-microlocale.

Les espaces 2-microlocaux généralisent les classes $C^s_{t_o}$ que nous avons définies au paragraphe 5. L'analyse 2-microlocale possède une souplesse que l'on ne trouve pas dans les développements limités : possibilité de dériver terme à terme, possibilité de faire agir tous les opérateurs pseudo-différentiels (classiques) quel que soit leur ordre.

Il est temps de définir les espaces 2-microlocaux $C^{s,s'}_{t_o}$. On part d'une fonction φ appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, paire, dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}(\xi)$ est égale à 1 si $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et à 0 si $|\xi| \geq 1$. On pose ensuite $\varphi_j(x) = 2^j \varphi(2^j x)$ et l'on désigne par S_j l'opérateur de convolution avec φ_j. On forme enfin $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$ et, si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une distribution tempérée arbitraire, on a

$$u(x) = S_o(u)(x) + \sum_0^\infty \Delta_j(u)(x) \tag{6.1}$$

et cette décomposition s'appelle l'analyse de Littlewood-Paley.

***Définition* 2.**

Soient s et s' deux nombres réels. On désigne par $C^{s,s'}_{t_o}$ *l'espace de Banach des distributions tempérées* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *pour lesquelles il existe une constante* $C = C(u)$ *de sorte que l'on ait*

$$|S_o(u)(x)| \leq C(1+|x|)^{-s'} \tag{6.2}$$

pour tout x réel et, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$|\Delta_j(u)(x)| \leq C\, 2^{-js}\, (1 + 2^j\, |x - t_o|)^{-s'}. \tag{6.3}$$

Il est aisé de vérifier que les conditions (6.2) et (6.3) définissent effectivement un espace de Banach de distributions tempérées et que cet espace ne dépend pas du choix de la fonction φ. On observe que $\Delta_j(u)(x) = 2^{-js}\, U_j\, (2^j(x - t_o))$ et que les fonctions U_j possèdent les propriétés (6.4) et (6.5) suivantes

(6.4) *La transformée de Fourier de U_j est nulle en dehors des deux intervalles* $[-2, -\frac{1}{2}]$ *et* $[\frac{1}{2}, 2]$,

$$|U_j(x)| \leq C\,(1+|x|)^{-s'}. \tag{6.5}$$

Il est alors immédiat de vérifier que la dérivée $\frac{d}{dx}\,U_j$ de U_j conserve les propriétés (6.4) et (6.5). Il en est de même pour la transformée de Hilbert $\tilde{U}_j$ de U_j ou de l'action de n'importe quel opérateur de dérivation ou d'intégration fractionnaire.

Revenant aux espaces $C_{t_o}^{s,s'}$ il vient

$$u \in C_{t_o}^{s,s'} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\,u \in C_{t_o}^{s-1,s'} \Leftrightarrow |D|^{\gamma}\,u \in C_{t_o}^{s-\gamma,s'} \tag{6.6}$$

où $D = -i\frac{d}{dx}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. On peut étendre ce dernier résultat au cas où γ est un nombre complexe $\gamma_1 + i\,\gamma_2$ à condition de remplacer $s-\gamma$ par $s-\gamma_1$.

Le lemme suivant, dont la preuve très simple est laissée au lecteur à titre d'exercice, nous servira à démontrer la dérivabilité de la fonction de Riemann en les rationnels $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$.

***Lemme* 4.**

Pour tout nombre réel $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$ *et pour tout* $s' > -s$, *on a*

$$C_{t_o}^{s,s'} \subset C_{t_o}^{s} \subset C_{t_o}^{s,-s}. \tag{6.7}$$

Pour démontrer qu'une fonction $f(t)$ de la variable réelle t est dérivable en t_o , il suffira donc d'établir l'existence de deux nombres réels $s > 1$ et $s' > -s$ tels que $f(t)$ appartienne à $C_{t_o}^{s,s'}$. Ce faisant, nous aurons démontré un résultat un peu plus précis : à savoir que $|D|^{\gamma} f$ est aussi dérivable en t_o lorsque $0 \leq \gamma < inf\,(s-1, s+s')$.

Une dernière observation. On a, grâce à (6.1),

$$u(t) = v_o + \sum_{0}^{\infty} u_j(t) \;\; et, \;\; si \;\; u \in C_{t_o}^{s,s'}, \;\; s > 1, \;\; s+s' > 0\,,$$

on a $$|u_j(t)| \leq C\, 2^{-js}\, (1 + 2^j\, |t - t_o|)^{-s'}$$

et $$|\tfrac{d}{dt}\, u_j(t)| \leq C\, 2^{-j(s-1)}\, (1 + 2^j\, |t - t_o|^{-s'}$$

Si $s > 1$ et $s + s' > 0$, le lemme 4 peut être complété par l'énoncé suivant.

***Lemme* 5.**

On a, si $s > 1$ *et* $s + s' > 0$,

$$\frac{d}{dt}\, u(t_o) = \frac{d}{dt}\, v_o(t_o) + \sum_0^{\infty} \frac{d}{dt}\, u_j(t_o).$$

La série de Littlewood-Paley peut donc se dériver terme à terme, sous les hypothèses du lemme 4.

Un dernier lemme nous sera particulièrement utile pour démontrer que f appartient à $C_{t_o}^{s,s'}$. Ce lemme sera démontré dans l'appendice.

***Lemme* 6.**

Soit $w \in L^1(\mathbb{R})$ *une fonction dont la transformée de Fourier ne s'annule pas sur* $[-2,-1] \cup [1,2]$. *Supposons en outre que cette transformée de Fourier* $\hat{w}(\xi)$ *soit indéfiniment dérivable au voisinage de* $[-2,-1] \cup [1,2]$. Posons $w_j(x) = 2^j\, w(2^j x)$. *Supposons* $s > 0$, $s' > 0$. *Alors toute fonction* $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ *vérifiant*

(6.9) $\quad |(f * w_j)(x)| \leq C\, 2^{-js}\, (1 + 2^j\, |x - x_o|)^{-s'}$ *pour tout* $j \geq 0$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$ *appartient nécessairement à* $C_{x_o}^{s,s'}$.

7 - Retour à la fonction de Riemann.

***Théorème* 1.**

On a $\displaystyle\sum_1^{\infty} n^{-2} \sin\, (\pi\, n^2\, t) \in C_{t_o}^{s,s'}$ *si* $s > 1$, $s' = \frac{3}{2} - 2\, s$ *et* $t_o = \frac{2p+1}{2q+1}$

Si $1 < s < \frac{3}{2}$, on aura $s' > -s$ et il en résultera que $\displaystyle\sum_1^{\infty} n^{-2} \sin\, (\pi n^2 t) \in C_{t_o}^{s}$.

A fortiori la fonction de Riemann sera dérivable en t_o.

Démontrer que $\sum_1^\infty n^{-2} \sin(\pi n^2 t) \in C_{t_o}^{s,s'}$ équivaut à établir que $\sum_1^\infty n^{-2} e^{i\pi n^2 t}$ $\in C_{t_o}^{s,s'}$ (puisque la transformation de Hilbert conserve les espaces 2-microlocaux). On désigne par $w(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} (\frac{1}{1+x^2})$ la dérivée du noyau de Poisson et on applique le lemme 6. On a alors, pour tout $y > 0$,

$$\frac{1}{y}\, w\left(\frac{x}{y}\right) * \sum_1^\infty n^{-2}\, e^{i\pi n^2 x} \;=\; i\,\pi \sum_1^\infty e^{i\pi n^2 (x+iy)} \;=\; i\,\pi\,\theta\,(x+i\,y).$$

Dès lors le lemme 2 permet de conclure.

L'intérêt que présente cette approche est de relier immédiatement entre elles toutes les fonctions $\sum_1^\infty n^{-2\beta} \sin(\pi n^2 t)$ lorsque $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$. En effet ces fonctions (que l'on note $f_\beta(t)$) se déduisent de $f_1(t)$ en appliquant l'opérateur de dérivation fractionnaire $|D|^{1-\beta}$. Alors $f_1 \in C_{t_o}^{s,s'}$ équivaut à f_β $\in C_{t_o}^{s-1+\beta,s'}$ et les conditions portant sur s et entraînant la dérivabilité sont $s - 1 + \beta > 0$ et $s - 1 + \beta + s' > 0$. On doit donc avoir $2 - \beta < s < \frac{1}{2} + \beta$ ce qui n'est possible que si $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$.

8 - L'analyse par ondelettes de la fonction de Riemann.

S. Jaffard a démontré dans sa thèse [7] que les espaces 2-microlocaux peuvent être caractérisés par des conditions très simples portant sur les coefficients d'ondelettes.

Considérons le cas particulier des ondelettes de classe C^2, à support compact, d'Ingrid Daubechies. Il existe donc deux fonctions φ et ψ, de classe C^2, à support compact, telles que la collection des fonctions φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, et $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$; on a posé $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$ et $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\, \psi(2^j x - k)$.

Le théorème de Jaffard est l'énoncé suivant : si $|s| < 2$ et $|s'| < 2$, alors $f \in C_{t_o}^{s,s'}$ si et seulement si les "coefficients d'ondelettes" $\beta_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ et $\alpha_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ vérifient

$$(8.1) \qquad |\beta_k| \leq C\,(1+|k|)^{-s'}$$

$$(8.2) \qquad |\alpha_{j,k}| \leq C\,2^{-j(s+\frac{1}{2})}\,(1+|k-2^j t_o|)^{-s'}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \in \mathbb{N}$.

Si, en outre, ces conditions sont satisfaites pour $s > 1$ et $s+s' > 0$, alors $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_k\ \varphi_k(t) + \sum_{0}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k}\ \psi_{j,k}(t)$ est dérivable en t_o et l'on a

$$(8.3) \qquad f'(t_o) = \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_k\ \varphi_k{}'(t_o) + \sum_{0}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k}\ \psi_{j,k}{}'(t_o).$$

Observons que

$$|\alpha_{j,k}\ \psi_{j,k}{}'(t_o)| \leq C\,2^{-j(s-1)}\,(1+|k-2^j t_o|)^{-s'}\,|\psi'(2^j t_o - k)|.$$

Or le produit $(1+|x|)^{-s'}\ |\psi'(x)|$ est une fonction continue, à support compact et, pour tout $j \geq 0$ fixé, le nombre de valeurs de k qui entre en jeu ne dépasse pas une constante C. La série (8.3) est donc absolument convergente.

L'utilisation des séries d'ondelettes orthogonales est donc une des "voies royales" pour étudier la dérivabilité de la fonction de Riemann. Mais cette voie d'accès à la dérivabilité, bien que théoriquement parfaite, repose sur la possibilité d'estimer les coefficients d'ondelettes de la fonction de Riemann. L'utilisation du lemme 6 et de la fonction θ de Jacobi est le détour indispensable.

9 - Les méthodes directes : J. Gerver, H. Queffelec et S. Itatsu.

Les méthodes directes ont un double avantage : elles fournissent des résultats plus précis et elles n'utilisent pas le détour par la fonction θ de Jacobi.

Commençons par la méthode directe de S. Itatsu. Elle repose sur le calcul (élémentaire) de la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ de la fonction $f(x) = \frac{e^{ix^2}-1}{x^2}$ On observera que $f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ est une fonction continue et paire, dont le développement asymptotique quand $\xi \to +\infty$ est fourni par

(9.1) $$\hat{f}(\xi) = e^{-i\xi^2/4}\left(\frac{C_1}{\xi^2} + \frac{C_2}{\xi^4} + \ldots\right)$$

où $C_1 = \frac{1}{4}$.

Démontrons alors la dérivabilité en π de $u(x) = \sum_1^\infty n^{-2} e^{in^2x}$. On écrit $u(\pi + h) = \sum_1^\infty (-1)^n n^{-2} e^{in^2h} = \frac{1}{2} u(4h) - u(h)$.

Nous allons établir que, si $h > 0$, on a

(9.2) $$u(h) = u(0) + C\sqrt{h} - i\frac{h}{2} + O(h^{\frac{3}{2}})$$

ce qui implique

(9.3) $$u(\pi + h) = u(\pi) - \frac{i}{2}h + O(h^{\frac{3}{2}}).$$

On a, par ailleurs, $u(\pi - h) = \overline{u(\pi + h)}$ et donc (9.3) est aussi vrai si $h < 0$.

La relation (9.3) est plus précise que ce que nous avions obtenu par les méthodes utilisant la fonction θ de Jacobi. En effet les termes d'erreur étaient en $O(h^\gamma)$ où $\gamma < \frac{3}{2}$ et l'on ne pouvait obtenir $\gamma = \frac{3}{2}$.

Pour établir (9.2), il suffit d'appliquer à la fonction $f(x)$ la formule sommatoire de Poisson. Il vient, si $\tau > 0$, $\tau \sum_{-\infty}^{\infty} f(n\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{2\pi}{\tau} n)$. On choisit $\tau = h^{\frac{1}{2}}$ et alors $\tau \sum_{-\infty}^{\infty} f(n\tau) = i\tau + \frac{2}{\tau} u(h) - \frac{1}{\tau}\frac{\pi^2}{6}$. La relation (9.2) découle immédiatement de (9.1).

La seconde méthode directe est le perfectionnement que Hervé Queffelec a apporté à la démonstration originale de J. Gerver. H. Queffelec étudie la dérivabilité des séries

(9.4) $$H(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin[f(n)x]}{f(n)}$$

où $f(n)$ est soit un polynôme de degré ≥ 2, soit la restriction aux entiers d'une fonction de classe C^2 sur $[1,\infty[$ et vérifiant, en outre, les estimations suivantes

$$C_1 t^r \leq f(t) \leq C_2 t^r, \quad C_1 t^{r-1} \leq f'(t) \leq C_2 t^{r-1}, \quad C_1 t^{r-2} \leq f''(t) \leq C_2 t^{r-2}$$

où $C_2 \geq C_1 > 0$. On supposera que $f(n) \neq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On a alors [8]

***Théorème* 2.**

Soit x_o un nombre réel tel que la suite $x_o\, f(n)$ soit, modulo $2\,\pi$, périodique de période N. Alors H est dérivable en x_o si et seulement si $\sum_1^N \exp\,[i\, x_o\, f(n)] = 0$ et, dans ces conditions,

$$H'(x_o) = -\frac{1}{N}\sum_1^N n \cos\,[f(n)\, x_o]. \tag{9.5}$$

10 - Conclusion.

Nous avons étudié la dérivabilité de la fonction de Riemann par quatre méthodes différentes et il convient de conclure. D'un point de vue objectif, la méthode S. Itatsu paraît la meilleure si l'on se restreint au cas particulier de la fonction de Riemann originale et si le but poursuivi est l'estimation du terme d'erreur.

La méthode de Gerver-Queffelec est sans doute la meilleure si l'on vise la généralisation la plus vaste possible.

Mais mes préférences vont à la technique de la 2-microlocalisation car elle permet l'utilisation libre des opérateurs pseudo-différentiels.

Il serait très intéressant de démontrer que lorsque les fonctions $H(x)$ de Hervé Queffelec sont dérivables, elles appartiennent aux espaces 2-microlocaux définis dans la section 6.

11 - Appendice : la preuve du lemme 6.

Le lemme 6 découle du résultat plus général suivant.

Lemme 7.

Soient w et θ deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Posons $\psi = w * \theta$. La constante C_o est définie par

$$C_o = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-s'} |\theta(x)|\, dx \quad si \quad s' \leq 0$$

et

$$C_o = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1+s'} |\theta(x)| \quad si \quad s' > 0.$$

Alors toute fonction $u(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant, pour un certain $x_o \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \int u(x-y)\, 2^{nj}\, w(2^j y)\, dy \right| \leq 2^{-js} (1+2^j\, |x-x_o|)^{-s'}$$

vérifie automatiquement

$$\left| \int u(x-y)\, 2^{nj}\, \psi(2^j y)\, dy \right| \leq C_o\, 2^{-js} (1+2^j\, |x-x_o|)^{-s'}.$$

La preuve est immédiate. Elle est donnée pour la commodité du lecteur. On a $\psi(y) = \int w(y-z)\, \theta(z)\, dz$ et donc

$$2^{nj}\, \psi(2^j y) = 2^{nj} \int w(2^j y - 2^j z)\, 2^{nj}\, \theta(2^j z)\, dz.$$

Il en résulte que

$$\int u(x-y)\, 2^{nj}\, \psi(2^j y)\, dy =$$

$$2^{nj} \int \int u(x-y)\, w(2^j y - 2^j z)\, 2^{nj}\, \theta(2^j z)\, dz\, dy =$$

$$2^{nj} \int \int u(x-z-y)\, w(2^j y)\, dy\, 2^{nj}\, \theta(2^j z)\, dz.$$

Finalement

$$\left| \int u(x-y)\, 2^{nj}\, \psi(2^j y)\, dy \right| \leq$$

$$2^{-js} \int (1+2^j\, |x-z-x_o|)^{-s'}\, 2^{nj}\, |\theta(2^j z)|\, dz \leq$$

$$C_o\, 2^{-js}\, (1+2^j\, |x-x_o|)^{-s'}.$$

Revenons à l'énoncé du lemme 6. Par hypothèse, la transformée de Fourier $\hat{w}(\xi)$ de w ne s'annule pas et est indéfiniment dérivable sur $1-\delta \leq |\xi| \leq 2+2\,\delta$ $(0<\delta<1)$. Il est alors possible de construire une fonction ψ appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, paire, telle que $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 1$ $(\xi \neq 0)$ et que le support de cette transformée de Fourier $\hat{\psi}$ soit précisément inclus dans $1-\delta \leq |\xi| \leq 2+2\,\delta$.

Dans ces conditions, on a $\hat{\psi} = \hat{w}\ \hat{\theta}$ où $\hat{\theta} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Finalement $\psi = w * \theta$. On est dans les conditions du lemme 7, ce qui démontre le lemme 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] : J.M. BONY
Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations.
Taniguchi Symp. HERT. Katata (1984), 11-49.

[2] : J.M. BONY
Interaction des singularités pour l'équation de Klein–Gordon non linéaire.
Séminaire Goulaouic 1983-84, Ecole Polytechnique.

[3] : J. GERVER
The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π.
Am. J. Math., 92, (1970).

[4] : J. GERVER
More on the differentiability of the Riemann function.
Am. J. Math., 93, 33-41, (1970).

[5] : M. HOLSCHNEIDER - P. TCHAMITCHIAN
Pointwise analysis of Riemann's "non differentiable" function.
Inventiones Mathematicae, 105, (1991), 157-176.

[6] : S. ITATSU
The differentiability of the Riemann function.
Proc. Japan Acad., ser. A, Math. Sci., 57 (1981), n° 10, 492-495.

[7] : S. JAFFARD
Pointwise smoothness, two–microlocalization and wavelet coefficients
Publicacions Matemàtiques (Publicacions de la Universitat Autonoma de Barcelona), vol 35 (1991) 155-168.

[8] : H. QUEFFELEC
Dérivabilité de certaines sommes de séries de Fourier lacunaires.
Thèse (Orsay, 1971).