X. SAINT RAYMOND

Le problème des poches de tourbillon en dimension trois d’espace

Publications de l’Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992-1993, fascicule 1
« Fascicule d’équations aux dérivées partielles », , exp. n° 8, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992-1993___1_A8_0>

LE PROBLÈME DES POCHES DE TOURBILLON EN DIMENSION TROIS D'ESPACE

Exposé de Séminaire, par X. Saint Raymond

Avant de commencer, il nous faut préciser que les résultats décrits ci-dessous ont éte obtenus en collaboration avec **Pascal Gamblin** du Centre de Mathématiques pures de l'Ecole Polytechnique, et que leurs preuves sont détaillées dans [2].

1. Le système d'Euler incompressible

Le système d'Euler incompressible est un système d'équations aux dérivées partielles modélisant le mouvement d'un fluide parfait incompressible. Parfait ou non-visqueux signifie qu'il n'y a pas d'échange de chaleur, et incompressible signifie que la densité est constante (cas des liquides par opposition aux gaz).

Nous noterons $t \in \mathbf{R}$ la variable de temps, et $x \in \mathbf{R}^d$ les variables d'espace (d dimensions). L'inconnue est alors un champ de vitesses $v(t,x)$ valeurs dans $\mathbf{R}^d$ solution du système

$$\begin{cases} (\partial_t + \langle v, \nabla \rangle)v = -\nabla p, \\ \langle \nabla, v \rangle = 0 \end{cases}$$

où la première équation (principe fondamental de la mécanique) est une équation vectorielle tandis que la deuxième équation (condition d'incompressibilité) est scalaire. La quantité

$$\langle \nabla, v \rangle = \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

est la divergence (spatiale) du champ de vecteurs v ; de même l'opérateur

$$\partial_t + \langle v, \nabla \rangle = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

est l'opérateur de dérivation par rapport au temps **en suivant les particules dans leur mouvement**, et ∇p est le gradient de la pression, lequel est complètement déterminé dans le cas incompressible par la solution v, si bien que l'équation $= -\nabla p$ signifie simplement que le rotationnel du membre de gauche est nul.

Nous nous intéressons à la résolution de ce système non-linéaire avec la donnée initiale v^0 sur $t = 0$. Une condition nécessaire d'existence est bien évidemment que $\langle \nabla, v^0 \rangle = 0$. Pour donner des conditions suffisantes d'existence, on rappelle la définition des **espaces de Hölder** : si $0 < s < 1$, on dit que $v \in \mathrm{C}^s$ si $v \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ et si

$$|v(x) - v(y)| \leq \mathrm{C}|x - y|^s$$

pour une constante C et tous x, $y \in \mathbf{R}^d$. On démontre alors qu'avec l'opérateur pseudodifférentiel $\Lambda^s = (\chi(D) - \Delta)^{s/2}$ défini pour $s \in \mathbf{R}$ par

$$\Lambda^s v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} (\chi(\xi) + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{v}(\xi) d\xi$$

(où $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\chi \geq 0$ et $\chi(0) = 1$), on a pour toute $v \in \mathcal{S}'$,

$$v \in \mathrm{C}^s \iff \Lambda^{s-(1/2)} v \in \mathrm{C}^{1/2},$$

si bien que cette propriété peut être prise comme définition de l'espace de Hölder C^s pour tout $s \in \mathbf{R}$. La norme de v dans l'espace C^s sera notée $\|v\|_s$, et on a le résultat classique suivant.

Théorème A. *Soient* $1 < p < \infty$ *et* $s > 1$. *Alors pour toute donnée* $v^0 \in \mathrm{L}^p \cap \mathrm{C}^s$ *à divergence nulle, il existe* $T > 0$ *et une unique solution* $v \in \mathrm{L}^\infty([0, T]; \mathrm{C}^s) \cap \mathrm{Lip}([0, T]; \mathrm{L}^p)$ *du système d'Euler incompressible avec la donnée* v^0 *sur* $t = 0$.

Ce théorème conduit très naturellement aux deux questions suivantes :

(i) Peut-on prolonger les solutions trouvées à des intervalles de temps plus grands ? De quoi dépendra le temps d'existence de la solution ?

(ii) Qu'obtient-on pour des données moins régulières ? Il y a pour ce deuxième problème de sérieuses motivations physiques (cf. Majda [3]), et on cherchera aussi à décrire ce que deviennent les singularités lorsque les singularités des données présentent certains motifs d'intérêt physique. C'est à ce type de question que se rattache le problème des poches de tourbillon. Une méthode classique pour aborder ce problème consiste à régulariser les données initiales, à en déduire une suite de solutions approchées v_n, puis à passer à la limite pour $n \to \infty$; il faut alors pouvoir s'assurer que les v_n sont définies sur un intervalle de temps commun, et on est ainsi ramené à la question (i) ci-dessus que nous étudierons donc en premier.

2. Tourbillon et prolongement des solutions

Par définition, le tourbillon est le rotationnel du champ des vitesses v, c'est-à-dire le tenseur antisymétrique $\omega_{jk} = \partial_j v_k - \partial_k v_j$. En dimension $d = 2$ d'espace, c'est une distribution scalaire $\omega = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$, en dimension $d = 3$ d'espace, c'est le champ de vecteurs

$$\omega = \nabla \wedge v = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix},$$

en dimension $d = 4$ d'espace, c'est une distribution à valeurs dans $\mathbf{R}^6$, etc. Le tourbillon a la dimension de l'inverse d'un temps, si bien que la quantité $\int_0^T \|\omega(s)\|_{\mathrm{L}^\infty} ds$ qui intervient dans l'énoncé ci-dessous est un coefficient sans dimension.

Théorème B. *Soient $1 < p, q < \infty$, $s > 1$ et $v^0 \in \mathrm{L}^p \cap \mathrm{C}^s$ une donnée à divergence nulle et à tourbillon $\omega^0 \in \mathrm{L}^q$. Notons T^* la borne supérieure des T tels que le système d'Euler incompressible possède une solution définie sur $[0,T]$ comme au Théorème A. Alors $T^* = \infty$ ou $\int_0^{T^*} \|\omega(s)\|_{\mathrm{L}^\infty} ds = \infty$.*

Ce théorème, dû à Beale-Kato-Majda, et dans le cadre Höldérien utilisé ici à Bahouri-Dehman, montre combien il est utile d'étudier l'évolution du tourbillon. Dans ce but, regardons ce que devient l'équation d'Euler lorsque nous en prenons le rotationnel.

En dimension $d = 2$, nous trouvons

$$(\partial_t + \langle v, \nabla \rangle)\omega = 0$$

si bien que tant que v reste lipschitzien, $\|\omega(s)\|_{\mathrm{L}^\infty}$ est conservée, et l'intégrale $\int_0^{T^*} \|\omega(s)\|_{\mathrm{L}^\infty} ds$ ne peut diverger : il y a donc **existence globale**. On peut alors aborder l'étude du problème à donnée singulière par la méthode indiquée à la fin de la section précédente, et de cette façon, Yudovitch a montré l'existence d'une solution $v \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+; \mathrm{C}^1_*)$ lorsque le tourbillon initial vérifie $\omega^0 \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{comp}}$ (c'est ce qu'on peut appeler une **poche de tourbillon**). L'avantage de la classe de Zygmund C^1_* trouvée ici, c'est qu'elle est formée de fonctions quasilipschitziennes, ce qui permet d'affirmer que le champ v possède un flot bien défini, puis de décrire le tourbillon à l'instant t, $\omega(t)$, à l'aide du tourbillon initial ω^0 et du flot de v.

En dimension $d \geq 3$, l'équation du tourbillon devient

$$(\partial_t + \langle v, \nabla \rangle)\omega = B_d(\omega, \nabla \otimes v)$$

où B_d est bilinéaire (pour d=3, on a $B_3(\omega, \nabla \otimes v) = (\nabla \otimes v)\omega = \langle \omega, \nabla \rangle v$), et la situation est complètement différente. Elle est tellement différente qu'on ne sait toujours pas aujourd'hui si toute solution régulière se prolonge indéfiniment. Signalons cependant un cas où la symétrie du problème permet de conclure. On dit qu'un champ de vitesses v dans $\mathbf{R}^3$ est **axisymétrique** s'il est invariant par les symétries orthogonales relatives à tous les plans passant par un axe donné δ. Alors le tourbillon est invariant par toutes les rotations d'axe δ, et il est dirigé perpendiculairement aux plans passant par δ. Si de plus $(1 + \mathrm{dist}^{-1}(x, \delta))\omega^0 \in \mathrm{L}^2 \cap \mathrm{L}^\infty$, on montre que $\|\omega(t)\|_{\mathrm{L}^\infty}$ augmente au plus exponentiellement, ce qui implique que $\int_0^T \|\omega(s)\|_{\mathrm{L}^\infty} ds$ est convergente pour tout $T > 0$, d'où l'**existence globale** dans ce cas (cf. [4]).

3. Le problème des poches de tourbillon

Se plaçant en dimension $d = 2$, Majda [3] rappelle le résultat de Yudovitch, fait observer qu'une **poche de tourbillon constant**, i.e.

$$\omega^0(x) = \overline{\omega} \quad \text{si} \quad x \in \Omega^0, \qquad \omega^0(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin \Omega^0$$

où $\overline{\omega}$ est une constante et Ω^0 un domaine borné du plan, reste de même nature

$$\omega(t, x) = \overline{\omega} \quad \text{si} \quad x \in \Omega(t), \qquad \omega(t, x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin \Omega(t),$$

et pose le problème de déterminer la régularité de $\partial\Omega(t)$ connaissant celle de $\partial\Omega^0$. Cette question a été récemment résolue par Chemin [1] qui a montré que si le bord de Ω^0 est régulier, alors la solution v est lipschitzienne et le bord de $\Omega(t)$ conserve la même régularité que celui de Ω^0 (dans les espaces de Hölder C^s pour $s > 1$).

Comme nous allons discuter le même problème en dimension $d = 3$ d'espace, examinons rapidement la preuve de Chemin [1]. On peut y distinguer, de façon un peu arbitraire, quatre étapes :

(i) On commence par construire des solutions globales v_n en résolvant le problème pour des données régularisées $v_n^0 = v^0 * \chi_n \in \mathrm{L}^p \cap \mathrm{C}^2$ grâce aux théorèmes A et B.

(ii) Pour pouvoir passer à la limite, on établit des estimations sur les quantités $v_n(t)$, et on remarque que les estimations d'évolution font sortir un facteur $\exp\left(\int_0^t \|v_n(s)\|_{\mathrm{Lip}} ds\right)$. Le point clé consistera donc à montrer que les v_n forment une suite bornée dans $\mathrm{L}^\infty([0, T]; \mathrm{Lip})$ pour tout $T > 0$.

(iii) Pour cela, on construit un espace $\mathcal{E}^0$ adapté au domaine Ω^0 qui contient le tourbillon constant dans Ω^0 ainsi que ses régularisés, qui se propage bien (toujours avec le facteur $\exp\left(\int_0^t \|v_n(s)\|_{\mathrm{Lip}} ds\right)$), et qui contrôle la norme Lipschitz de v_n. En combinant ces propriétés, on obtient que v_n est bornée dans $\mathrm{L}^\infty([0, T]; \mathrm{Lip})$ pour tout $T > 0$.

(iv) On peut alors passer à la limite dans l'équation, ce qui donne une solution lipschitzienne, et la régularité du bord s'obtient alors aisément.

Dans le problème analogue en dimension $d = 3$, nous rencontrerons les difficultés suivantes :

(i) Il n'y a pas de poche de tourbillon **constant** : le champ de vecteurs ω étant à divergence nulle, il doit être tangent à ses surfaces de discontinuités.

(ii) Il n'y a pas de résultat d'existence globale permettant d'affirmer que nos solutions approchées v_n existent sur un intervalle de temps commun.

(iii) La loi d'évolution du tourbillon possède maintenant un second membre, ce qui compliquera les estimations d'évolution.

Pour surmonter ces difficultés, nous devrons donc construire un espace (que nous appellerons $C^{r,W}$) possédant les mêmes propriétés que l'espace $\mathcal{E}$ évoqué plus haut, notamment la propriété de propagation bien que l'équation du tourbillon possède maintenant un second membre, et contrôlant en outre le temps d'existence de la solution.

4. Le théorème d'existence en dimension d = 3

Nous commençons par construire notre espace $C^{r,W}$. Un système $W = (w^1, w^2, \cdots, w^N)$ de N champs continus est dit **admissible** si $\sum_{\mu<\nu} |w^\mu \wedge w^\nu|^2 \geq \epsilon > 0$ dans $\mathbf{R}^n$ (système uniformément de rang ≥ 2). Puis si $0 < r < 1$ et si W est un système admissible de champs de classe C^r, on dit que $\omega \in C^{r,W}$ si $\omega \in L^\infty$ et si $\langle \nabla, w^\nu \otimes \omega \rangle (= \sum_j \partial_j (w_j^\nu \omega)$ par définition$) \in C^{r-1}$ pour tout $\nu \leq N$. Cet espace est muni de la norme

$$\|\omega\|_{r,W} = N\|\omega\|_{L^\infty} + \|[W]^{-1}\|_{L^\infty} \sum_\nu \Big(\|w^\nu\|_r \|\omega\|_{L^\infty} + \|\langle \nabla, w^\nu \otimes \omega \rangle\|_{r-1} \Big).$$

Notre premier soin est de vérifier que pour tout domaine Ω à bord de classe C^{1+r}, on peut construire un système admissible de champs de classe C^r et tangents au bord de ce domaine. Et en effet, si $f = 0$ est une équation de $\partial\Omega$ avec $f \in C^{1+r}$ et si $\chi \in C_0^\infty$ avec $\chi = 1$ près de $\partial\Omega$ et $\mathrm{supp}\chi$ proche de $\partial\Omega$, le système W

$$w^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_3 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix}, \quad w^2 = \begin{pmatrix} \partial_3 f \\ 0 \\ -\partial_1 f \end{pmatrix}, \quad w^3 = \begin{pmatrix} -\partial_2 f \\ \partial_1 f \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$w^4 = \begin{pmatrix} 1-\chi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

est un système admissible de champs de classe C^r, et pour tout $\omega \in C^{r,W}$, $\omega_n = \chi_n * \omega$ est une suite bornée de $C^{r,W}$.

Notre résultat principal est alors le suivant.

Théorème 1. *Soient $1 < p < \infty$, $1 \leq q < 3$, $0 < r < 1, W^0$ un système admissible de champs de classe C^r, et $v^0 \in \mathrm{L}^p$ une donnée à divergence nulle telle que $\omega^0 \in \mathrm{L}^q \cap \mathrm{C}^{r,W^0}$. Alors le système d'Euler incompressible possède une unique solution $v \in \mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{Lip}) \cap \mathrm{Lip}([0,T];\mathrm{L}^p)$ pour un $T > 0$. De plus, si chaque champ w^ν évolue suivant la loi*

$$\begin{cases} (\partial_t + \langle v, \nabla\rangle)w^\nu = \langle w^\nu, \nabla\rangle v \\ w^\nu{}_{|t=0} = w^{\nu,0} \in W^0, \end{cases}$$

le système $W(t)$ reste un système admissible de champs de classe C^r et on a $\omega(t) \in \mathrm{L}^q \cap \mathrm{C}^{r,W(t)}$. Enfin, si la donnée v^0 est axisymétrique et si $(1 + \mathrm{dist}^{-1}(x,\delta))\omega^0 \in \mathrm{L}^q \cap \mathrm{L}^\infty$, ces résultats sont valables pour tout $T > 0$.

La démonstration de ce théorème repose principalement sur les deux estimations fondamentales suivantes.

Proposition 2. *Si W est un système admissible de champs de classe C^r, si $v \in \mathrm{L}^p$ et si $\omega \in \mathrm{L}^q \cap \mathrm{C}^{r,W}$, alors $v \in \mathrm{Lip}$ et*

$$\|v\|_{\mathrm{Lip}} \leq \mathrm{C}_1\|\omega\|_{q,r,W} = \mathrm{C}_1\left(\|\omega\|_{\mathrm{L}^q} + \|\omega\|_{\mathrm{L}^\infty}\mathrm{Log}\left(2 + \frac{\|\omega\|_{r,W}}{\|\omega\|_{\mathrm{L}^\infty}}\right)\right)$$

où C_1 ne dépend que de q et r.

Démonstration. Les conditions

$$\langle\nabla, v\rangle = 0, \quad \nabla \wedge v = \omega, \quad v \in \mathrm{L}^p \quad \text{et} \quad \omega \in \mathrm{L}^q$$

permettent d'exprimer v comme la convolution de ω avec le gradient de la solution fondamentale du Laplacien (loi de Biot-Savart). Notre estimation résulte de cette formule et d'une étude géométrique soigneuse des conditions W admissible et $\omega \in \mathrm{C}^{r,W}$. ∎

Proposition 3. *Soient $v \in \mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{C}^{1+r})$ une solution du système d'Euler incompressible et W^0 un système admissible de champs de classe C^r. Si on fait évoluer les champs w^ν comme dans l'énoncé du théorème 1, alors le système $W(t)$ reste pour tout $t \leq T$ un système admissible de champs de classe C^r, et on a*

$$\frac{\|\omega(t)\|_{r,W(t)}}{\|\omega(t)\|_{\mathrm{L}^\infty}} \leq \frac{\|\omega^0\|_{r,W^0}}{\|\omega^0\|_{\mathrm{L}^\infty}} \exp\left(\mathrm{C}_2\int_0^t \|v(s)\|_{\mathrm{Lip}}ds\right)$$

où C_2 ne dépend que de r.

Démonstration. L'existence d'une solution $w^\nu \in L^\infty([0,T];C^r)$ du système d'évolution écrit dans l'énoncé du théorème 1 découle immédiatement d'arguments d'équations différentielles ordinaires si l'on suit les caractéristiques, et on a alors aussi $\langle\nabla, w^\nu\otimes\omega\rangle \in L^\infty([0,T];C^{r-1})$. Cependant les normes $\|w^\nu(t)\|_r$ et $\|\langle\nabla, w^\nu\otimes\omega\rangle\|_{r-1}$ s'estiment alors par des fonctions de $\|v(s)\|_{1+r}$ pour $0\le s\le t$. Pour obtenir l'estimation en fonction de $\|v(s)\|_{\mathrm{Lip}}$ seulement, il nous faut établir que w^ν et $u^\nu = \Lambda^{-1}\langle\nabla, w^\nu\otimes\omega\rangle$ sont solutions d'un système

$$\begin{cases} (\partial_t + \langle v,\nabla\rangle)w^\nu = \mathcal{A}w^\nu + \mathcal{B}u^\nu \\ (\partial_t + \langle v,\nabla\rangle)u^\nu = \mathcal{C}w^\nu + \mathcal{D}u^\nu \end{cases}$$

où les opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et $\mathcal{D}$ sont continus sur l'espace C^r avec des normes ne dépendant que de $\|v\|_{\mathrm{Lip}}$. Alors nos estimations s'obtiennent immédiatement par des arguments d'équations différentielles ordinaires. ■

Pour démontrer le théorème 1, nous combinons les estimations des propositions 2 et 3 avec un argument du type de Gronwall, ce qui nous permet, grâce au théorème B, de minorer le temps d'existence de la solution approchée v_n obtenue à partir de la donnée $v_n^0 = \chi_n * v^0$ par

$$T_n \ge \frac{C_3}{\|\omega_n^0\|_{q,r,W^0}} \ge T_0$$

où $T_0 > 0$ est indépendant de n puisque la suite ω_n^0 est bornée dans $L^q\cap C^{r,W^0}$, et d'établir que la suite v_n est bornée dans $L^\infty([0,T_0];\mathrm{Lip})$. Il en résulte que la limite v des v_n, qui existe en un sens faible, est lipschitzienne, et qu'elle est solution du système d'Euler incompressible.

Le théorème 1 annonce aussi que le système $W(t)$ reste admissible et qu'on a $\omega(t)\in C^{r,W(t)}$ pour tout $t\le T$. Pour établir cela, on introduit le système $W_n(t)$ qui évolue à partir de W^0 en suivant la solution approchée v_n. Le résultat annoncé provient alors simplement d'un passage à la limite pour $n\to\infty$ dans les résultats de la proposition 3, mais ce passage à la limite reste assez compliqué techniquement, et nous n'en dirons rien de plus ici.

5. Théorèmes de régularité

Retournant à notre problème initial des poches de tourbillon à bord régulier, nous voulons associer de façon intrinsèque au bord $\Sigma = \partial\Omega$ un espace $C^{r,\Sigma}$ de distributions conormales ω qui évoluent en gardant leur régularité.

Le premier résultat est le suivant : si on suppose que Σ^0 est une sous-variété compacte de dimension 2 et de classe C^{1+r}, que $\omega^0\in L^\infty$ et que $\langle\nabla, w\otimes\omega^0\rangle\in C^{r-1}$ pour tout champ w de classe C^r à divergence nulle et tangent à Σ^0, alors la sous-variété $\Sigma(t)$ image de Σ^0 par le flot associé à la solution du système d'Euler incompressible construite au théorème 1 reste de classe C^{1+r} pour tout $t \leq T$. Pour le montrer, il suffit d'établir qu'une équation $\varphi(t,x) = 0$ de $\Sigma(t)$ vérifie $\varphi \in L^\infty([0,T]; C^{1+r})$. Or l'équation naturelle de $\Sigma(t)$ s'obtient en résolvant le problème

$$\begin{cases} (\partial_t + \langle v, \nabla \rangle)\varphi = 0 \\ \varphi_{|t=0} = f \end{cases}$$

où $f(x) = 0$ est une équation C^{1+r} de Σ^0, et on peut montrer qu'avec les champs w^ν déjà introduits au paragraphe précédent, on a

$$\nabla\varphi(t) = \sum \frac{(\partial_\lambda f) \circ \Psi_t^{-1}}{|(\nabla f) \circ \Psi_t^{-1}|^2} \big(w^\mu(t) \wedge w^\nu(t)\big),$$

la somme portant sur toutes les permutations circulaires (λ, μ, ν) de (1,2,3), et Ψ_t désignant le flot associé à v. Comme le membre de droite est de classe C^r, il en résulte que $\varphi(t) \in C^{1+r}$, du moins près de $\Sigma(t)$.

Enfin, pour pouvoir montrer que $\langle \nabla, w \otimes \omega(t) \rangle \in C^{r-1}$ pour tout champ w de classe C^r à divergence nulle et tangent à $\Sigma(t)$, il nous faut rajouter une hypothèse, ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition. *Soit Σ une sous-variété compacte de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 et de classe C^{1+r}. On note $\Sigma_\epsilon = \{x; \operatorname{dist}(x, \Sigma) \leq \epsilon\}$, et on dit que $\omega \in C^{r,\Sigma}$ si $\omega \in L^\infty$, si $\langle \nabla, w \otimes \omega \rangle \in C^{r-1}$ pour tout champ $w \in C^r$ à divergence nulle et tangent à Σ, et si*

$$\|\omega\|_{C^r(\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma_\epsilon)} \leq C\epsilon^{-r} \qquad \textit{pour} \qquad 0 < \epsilon < 1.$$

Alors nous pouvons démontrer le résultat suivant.

Théorème 4. *Soient Σ^0 une sous-variété compacte de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 et de classe C^{1+r}, et $v^0 \in L^p$ une donnée à divergence nulle telle que $\omega^0 \in L^q \cap C^{r,\Sigma^0}$. Alors la sous-variété $\Sigma(t)$ image de Σ^0 par le flot associé à la solution du système d'Euler incompressible construite au théorème 1 reste de classe C^{1+r}, et on a $\omega(t) \in C^{r,\Sigma(t)}$ pour tout $t \leq T$.*

Démonstration. Le point essentiel consiste à établir que tout champ $w(t) \in C^r$ provient d'un champ initial $w^0 \in L^\infty$ vérifiant $\|w^0\|_{C^r(\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma^0_\epsilon)} \leq C\epsilon^{-r}$ pour $0 < \epsilon < 1$. En utilisant ce résultat, on montre alors que tout champ $w(t) \in C^r$ à divergence nulle et tangent à $\Sigma(t)$ provient d'un champ initial $w^0 \in C^r$ à divergence nulle et tangent à Σ^0, et la propriété $\langle \nabla, w \otimes \omega(t) \rangle \in C^{r-1}$ résulte alors du théorème 1. ∎

Références bibliographiques

[1] Chemin J.-Y. : *Persistance de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels*, à paraître.

[2] Gamblin P. & Saint Raymond X. : *On three dimensional vortex patches*, à paraître.

[3] Majda A. : *Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow*, C.P.A.M. **39**, S187-S220 (1986).

[4] Saint Raymond X. : *Remarks on axisymmetric solutions of the incompressible Euler system*, à paraître.

En plus de ces articles, on pourra consulter leurs bibliographies.