MONIQUE SABLÉ TOUGERON

Optique géométrique faiblement non linéaire pour le problème mixte

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992-1993, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , exp. n° 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992-1993___1_A7_0>

Optique géométrique faiblement non linéaire pour le problème mixte

par

Monique Sablé Tougeron
(Université de Nice)

Rappelons d'abord le résultat de Di Perna - Majda concernant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = 0 \,,\ t>0 \,, x \in \mathbb{R} \\ u^\varepsilon(0,x) = \underline{u} + \varepsilon v(x) \,,\ x \in \mathbb{R} \,, \end{cases}$$

où $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$ est un état constant, supp v est compact, le flux $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est régulier et $Df(\underline{u})$ possède N valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ qui sont vraiment non linéaires ; $r_i \in \ker\,(Df(\underline{u}) - \lambda_i I)$ étant normalisé par la condition de Lax $d_u \lambda_i(\underline{u}).\, r_i = 1$ et $\sigma_i(\tau, \theta)$, $1 \le i \le N$, désignant la solution entropique du problème de Cauchy à loi de Burger

$$\begin{cases} \partial_t \sigma_i + \partial_\theta \dfrac{\sigma_i^2}{2} = 0 \,,\ \tau > 0 \,, \theta \in \mathbb{R} \\ \sigma_i(0,\theta) = \ell_i . v(\theta) \,,\ \theta \in \mathbb{R} \,,\ \text{avec}\ \ \ell_i . r_j = \delta_{i,j} \,, \end{cases}$$

une solution exacte u^ε, globale en temps, obtenue pour $\varepsilon > 0$ petit par une méthode de Glimm équidistribuée et l'approximation formelle de l'optique géométrique

$$u_f^\varepsilon(t,x) \equiv \underline{u} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(\varepsilon t, x - \lambda_i t)\, r_i$$

satisfont

$$\sup_{t>0} \left| u^\varepsilon(t,x) - u_f^\varepsilon(t,x) \right|_{L_x^1} = O(1)\, \varepsilon^2 \,.$$

La méthode de Glimm s'adapte pour résoudre le problème mixte

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = 0 \quad t>0 \,, x<0 \\ p_W f(u^\varepsilon(t,0)) = p_W f(\underline{u}) + \varepsilon h(\varepsilon t, t), \quad t>0 \\ u^\varepsilon(0,x) = \underline{u} + \varepsilon v(\varepsilon x, x), \quad x<0 \,, \end{cases}$$

pour des données à variation bornée et ε petit. Ici p_W est le projecteur orthogonal sur un sous-espace fixe W, de dimension $N' = \operatorname{card}\,\{\lambda_i < 0\}$ et tel que p_W est injectif sur vect $\{r_1, \ldots, r_{N'}\}$. L'ajout de variables lentes dans les données est naturel car le calcul formel, qui s'effectue avec

$$u_f^\varepsilon \equiv \underline{u} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(\varepsilon t, \varepsilon x, t - \frac{x}{\lambda_i})\, r_i \,,$$

conduit aux problèmes

$$i > N' \text{ (Sortants)} \quad \begin{cases} \text{(I)} \ (\partial_\tau + \lambda_i \partial_\xi)\sigma_i - \lambda_i^{-1} \partial_\theta \dfrac{\sigma_i^2}{2} = 0\,, \quad \xi<0\,,\ \tau>0\,, \theta \in \mathbb{R} \\ \text{(i)} \ \sigma_i(0,\xi,\theta) = \ell_i \,.\, v(\xi, -\lambda_i \theta),\ \xi<0\,,\ \theta\in\mathbb{R}\,, \end{cases}$$

$$i \leq N' \text{ (Entrants)} \quad \begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(b)} \ \sigma_i(\tau,0,\theta) = P_i\big(h(\tau,\theta) - \sum\limits_{k>N'} \overline{\sigma}_k(\tau,0,\theta)(\lambda_k p_W r_k)\big),\ \tau>0\,, \theta\in\mathbb{R}\,, \\ \text{(i)} \end{cases}$$

P_i désignant le i$^{\text{ème}}$ projecteur dans la somme directe $W = \bigoplus\limits_{1\leq k\leq N'} \mathbb{R}(\lambda_k\, p_W\, r_k)$; même si v et h ne sont fonction que de variables rapides, les profils entrants sont génériquement fonction de ξ. D'après Bardos-Leroux-Nédélec les problèmes mixtes scalaires (S) et (E) possèdent une unique solution entropique globale en temps pour des données BV ; on montre alors le

Théorème : Si v et h sont régulières, à support compact dans la seconde variable θ et si leurs prolongements dans $\theta > 0$ et $\theta < 0$ respectivement satisfont une relation de compatibilité $(R.\ C)$, on a

$$\textbf{i)}\ \left| u^\varepsilon(t,x) - u_f^\varepsilon(t,x) \right|_{L^1(x<0)} = 0(1)\varepsilon^2(1+\varepsilon t),\quad t>0\,,$$

$$\textbf{ii)}\ \sup_{t>0} \left| u^\varepsilon(t,x) - \Big(\underline{u} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(\varepsilon t, \lambda_i \varepsilon t, t - \frac{x}{\lambda_i})\, r_i \Big) \right|_{L^1(x<0)} = 0(1)\,\varepsilon^2$$

$$\textbf{iii)}\ \sup_{t>0} \Big| u^\varepsilon(t,x) - \Big(\underline{u} + \varepsilon \sum_{i>N'} \sigma_i(\varepsilon t, \varepsilon x, t - \frac{x}{\lambda_i})\, r_i + $$

$$+\, \varepsilon \sum_{i\leq N'} \sigma_i\,(\varepsilon t, \chi^\varepsilon_{i,\varepsilon t}(\varepsilon x), t - \frac{x}{\lambda_i})\, r_i \Big) \Big|_{L^1(x<0)} = 0(1)\,\varepsilon^2$$

où $\chi^\varepsilon_{i,\tau}(\xi) = (\lambda_i\,\tau - c_0\varepsilon)\, 1_{\xi<\lambda_i\tau - c_0\varepsilon} + \xi\,.\ 1_{|\xi-\lambda_i\tau|\leq c_0\varepsilon} + (\lambda_i\,\tau + c_0\varepsilon)\, 1_{\xi>\lambda_i\tau+c_0\varepsilon}$ et $c_0 > 0$.

Remarques.

1) La non validité d'une asymptotique en $0(1)\varepsilon^2$ en $i)$ vient de l'indépendance des variables ξ et θ dans le problème mixte définissant les profils entrants, alors que ces variables sont dépendantes dans la définition de la solution exacte u^ε. Le même phénomène apparait dans la justification de l'optique géométrique pour un problème de Cauchy en présence de variables lentes ; de plus des N-ondes explicites montrent que i) ne peut pas être amélioré.

2) Après un temps t de l'ordre d'un constante, les profils sortants sont nuls : la condition de causalité de Majda-Artola est bien vérifiée.
3) Le théorème s'étend à des données de Cauchy de la forme

$$v(\xi,\theta)=\sum_{1\le i\le N} v_{i,\ell}(\xi)v_{i,r}(\theta)r_i\,,\quad \xi<0\,,\theta\in\mathbb{R}$$

$$h(\xi,\theta)=\sum_{1\le i\le N'} h_{i,\ell}(\tau)h_{i,r}(\theta)(\lambda_i p_W r_i)\,,\quad \tau>0\,,\theta\in\mathbb{R}\,,$$

où $v_{i,\ell}$, $h_{i,\ell}$ sont lipschitziennes, $v_{i,r}$, $h_{i,r}$ sont BV et vérifient la compatibilité

$$(R.C)\quad \ell_i\,.\,v(0,-\lambda_i\,\theta)\;=\;P_i(h(0,\theta)-\sum_{k>N'}\ell_k\,.\,v(0,-\lambda_k\theta)\,(\lambda_k p_W r_k))\,,\ \forall\, i\le N'.$$

Idée de la preuve

1. Analyse des σ_i

Les moyennes symétriques des profils $\overline{\sigma}_k\left(\tau,\xi,\dfrac{\tau-\lambda_i^{-1}\xi}{\varepsilon}\right)$ sur les plans $\tau-\dfrac{\xi}{\lambda_i}=\varepsilon\theta$ ne sont pas solution de problèmes conservatifs et ne peuvent pas être utilisées directement pour approcher u^{ε}. Par contre leurs traces $q^{\pm}_{i,\eta}(\tau,\theta)$ sur les plans caractéristiques $\xi=\lambda_i\,\tau+\eta$, $\eta\in\mathbb{R}$, sont solutions entropiques de problèmes de Cauchy

$$\begin{cases}\partial_\tau\, q\sigma-\lambda_i^{-1}\,\partial_\theta\dfrac{q^2}{2}=0\\ q^{\pm}_{i,\eta}(0,\theta)=\ell_i\,.\,v(\eta,-\lambda_i\theta)\ \text{ si }\ i>N'\ \text{ ou }(i\le N'\ \text{ et }\ \eta<0)\\ q^{\pm}_{i,\eta}(0,\theta)=P_i\,(h(-\eta/\lambda_i,\theta)-\displaystyle\sum_{k>N'}\overline{q}_{k,\eta\lambda_k/\lambda_i}(-\eta/\lambda_i,\theta)\,(\lambda_k p_W\,r_k))\,,\ \text{si }\ i\le N'\ \text{ et }\eta>0,\end{cases}$$

pour une même donnée : on en déduit $q^{+}_{i,\eta}=q^{-}_{i,\eta}\equiv q_{i,\eta}$ dans chacun de cas ci-dessus avec la gain $q_{i,\eta}\in BV$. Pour $i\le N'$ et $\eta=0$ on a

$$q^{-}_{i,0}(0,\theta)=\ell_i\,.\,v(0,-\lambda_i\,\theta)$$

$$q^{+}_{i,0}(0,\theta)=P_i(h(0,\theta)-\sum_{k>N'}\ell_k\,.\,v(0,-\lambda_k\,\theta)\,(\lambda_k p_W\,r_k))\,,$$

et la relation de compatibilité est exactement $q^{+}_{i,0}(0,.)=q^{-}_{i,0}(0,.)$; on en déduit encore $q^{+}_{i,0}=q^{-}_{i,0}\equiv q_{i,0}\in BV$. De plus le régularité lipschitz de v et h dans la première variable conduit à

$$\left|\bar{q}_{i,\eta}(\tau,\theta)-\bar{q}_{i,\eta'}(\tau',\theta)\right|_{L^1_\theta} \leq \text{cte}\,(|\tau-\tau'|+|\eta-\eta'|), \ \ \forall\, i$$

$$\bar{q}_{i,\eta}(\tau,\theta)=\bar{\sigma}_i(\tau,\lambda_i\,\tau+\eta,\theta) \ \text{ presque partout sur } \tau=\text{cste}, \ \forall\, i$$

$$\bar{q}_{i,-\lambda_i\tau}(\tau,\theta)=\bar{\sigma}_i(\tau,0,\theta) \ \text{ presque partout sur } \xi=0, \ \forall\, i>N'.$$

En particulier la trace $(\gamma_0\,\sigma_i)\,(\tau,\theta)\equiv\bar{\sigma}_i(\tau,0,\theta)$ des profils sortants sur le bord $\xi=0$, qui intervient dans la condition au bord des profils entrants, est feuilletée à feuilletage lipschitzien en τ à valeurs L^1_θ et à feuilles BV. De même la trace $\sigma_{i,\tau}$ de chaque σ_i sur le plan τ = cste est feuilletée à feuilletage lipschitzien en ξ à valeurs L^1_θ et à feuilles BV.

Enfin un calcul de Cheverry donne

$$i>N' \quad \begin{cases} \left|\bar{\sigma}_{i,\tau}(\lambda_i(\tau-\varepsilon\theta),\theta)-\bar{q}_{i,0}(\tau,\theta)\right|_{L^1(\varepsilon^{-1}\tau,\infty)}=O(1)\varepsilon \\ \left|(\bar{\gamma}_0\,\sigma_i)(\varepsilon\theta,\theta)-(\bar{\gamma}_0\,\sigma_i)(0,\theta)\right|_{L^1(0,\infty)}=0(1)\varepsilon \end{cases}$$

$$i\leq N' \quad \begin{cases} \left|\bar{\sigma}_{i,\tau}(\lambda_i(\tau-\varepsilon\theta),\theta)-\bar{q}_{i,0}(\tau,\theta)\right|_{L^1(-\infty,\varepsilon^{-1}\tau)}=0(1)\varepsilon(1+\tau) \quad \text{et pas mieux} \\ \left|\bar{\sigma}_{i,\tau}\,(\chi^{\varepsilon}_{i,\tau}(\lambda_i(\tau-\varepsilon\theta)),\theta)-\bar{q}_{i,0}(\tau,\theta)\right|_{L^1(-\infty,\varepsilon^{-1}\tau)}=O(1)\varepsilon \end{cases}$$

2. Des ε-profils intermédiaires.

Ils peuvent être comparés à la fois aux σ_i et à la solution exacte. Ils sont solution de

$$(S)_\varepsilon \quad \begin{cases} (I_\varepsilon)\ (\partial_\tau+\lambda_i\partial_\xi)\sigma^{\varepsilon}_i+(\varepsilon\partial_\xi-\lambda_i^{-1}\,\partial_\theta)\,\dfrac{(\sigma^{\varepsilon}_i)^2}{2}=0\,, \quad \tau>0,\xi<0,\theta\in\mathbb{R} \\ (i_\varepsilon)\ \ \sigma^{\varepsilon}_i(0,\xi,\theta)=\ell_i\,.\,v(\xi,-\lambda_i\,\theta) \end{cases}$$

$$(E)_\varepsilon \quad \begin{cases} (I_\varepsilon) \\ (b_\varepsilon)\ \ \sigma^{\varepsilon}_i(\tau,0,\theta)=P_i(h(\tau,\theta)-\displaystyle\sum_{k>N'}\sigma(\tau,0,\theta)(\lambda_k p_W\, r_k)) \\ (i_\varepsilon) \end{cases}$$

Leur moyenne symétrique sur les plans caractéristiques $\tau-\dfrac{\xi}{\lambda_i}=\varepsilon\,\theta$ sont solution entropique des problème conservatifs :

en variable (τ,ξ), $(\varepsilon\,p^{\varepsilon}_i)(\tau,\xi)\equiv\varepsilon\;\bar{\sigma}^{\varepsilon}_i\left(\tau,\xi,\dfrac{\tau-\lambda_i^{-1}\xi}{\varepsilon}\right)$ résout

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\partial_\tau(\varepsilon p_i^\varepsilon)+\partial_\xi\left(\lambda_i(\varepsilon p_i^\varepsilon)+\dfrac{(\varepsilon p_i^\varepsilon)^2}{2}\right)=0\\ (\varepsilon p_i^\varepsilon)(0,\xi)=\varepsilon\ell_i\,.\,v(\xi,\xi/\varepsilon)\end{array}\right\}\ \xi\in\mathbb{R}\ \text{si}\ i>N',\ \xi<0\ \text{si}\ i\le N'\\ (\varepsilon p_i^\varepsilon)(\tau,0)=P_i(\varepsilon h(\tau,\tau/\varepsilon)-\sum\limits_{k>N'}\varepsilon(\overline{\gamma}_0\sigma_k)(\tau,\tau/\varepsilon)(\lambda_k p_W r_k)),\ \tau>0\ \text{seulement si}\ i\le N'\ ;\end{array}\right.$$

(le coefficient 1 du terme quadratique n'est autre que $\ell_i\,.\,f''(\underline{u})\,(r_i,r_i)$) ;

en variable (τ,θ), $q_i^\varepsilon(\tau,\theta)\equiv\overline{\sigma}_i^\varepsilon(\tau,\lambda_i(\tau-\varepsilon\theta),\theta)$ résout

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_\tau\, q_i^\varepsilon-\lambda_i^{-1}\,\partial_\theta\,\dfrac{(q_i^\varepsilon)^2}{2}=0,\ \tau>0\ \text{si}\ i>N',\ \tau>\varepsilon\theta\ \text{si}\ i\le N'\\ q_i^\varepsilon(0,\theta)=\ell_i\,.\,v(-\varepsilon\lambda_i\theta,-\lambda_i\theta),\ \theta\in\mathbb{R}\ \text{si}\ i>N',\ \theta<0\ \text{si}\ i\le N'\\ q_i^\varepsilon(\varepsilon\theta,\theta)=P_i(h(\varepsilon\theta,\theta)-\sum\limits_{k>N'}(\overline{\gamma}_0\sigma_k)(\varepsilon\theta,\theta)(\lambda_k p_W r_k)),\ \theta>0\ \text{seulement si}\ i\le N'\end{array}\right.$$

3. Les dernières estimations.

3.1. Le théorème de comparaison de Volpert et sa version mixte donnent

$$\left|\overline{q}_{i,0}(\tau,\theta)-\overline{q}_i^\varepsilon(\tau,\theta)\right|_{\substack{L^1(\varepsilon^{-1}\tau,\infty)\,\text{si}\,i>N'\\ L^1(-\infty,\varepsilon^{-1}\tau)\,\text{si}\,i\le N'}}=0(1)\varepsilon\,.$$

3.2. La linéarisation donne une autre approximation dans les temps petits, autre intermédiaire qui donne

$$\forall\, i,\ \forall\, T_0>0,\ \sup_{t<T_0}\left|\ell_i\,.\,(u^\varepsilon(t,x)-\underline{u})-\varepsilon\,\overline{p}_i^\varepsilon(\varepsilon t,\varepsilon x)\right|_{L^1(-\infty,0)}=0(1)\varepsilon^2\,.$$

3.3. Pour T_0 grand on utilise les résultats suivants

i) $V(u^\varepsilon(t,.))=0(1)\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^{-1}+t}\right)^{1/2}$,

ii) il existe des cônes $C_i=\{\mu_{i-1}\,t\le x\le\mu_i\,t\}$, $0\le i\le N'+1$,

$$-\infty=\mu_{-1}<\mu_0<\lambda_1(u)-\alpha<\lambda_1(u)+\alpha<\mu_1<\ldots<\lambda_{N'}(u)+\alpha<\mu_{N'}<\mu_{N'+1}=0,$$

α petit, dans lesquels on a

$$u^\varepsilon-\underline{u}=0\ \text{dans}\ C_0$$

$$\left|u^{\varepsilon}(t,x)-R_i(\lambda_i(u^{\varepsilon}(t,x))-\lambda_i(\underline{u}),\underline{u})\right| = O(1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{-1}+t}\right)^{3/2}, \quad x \in C_i(t),$$

$s \longmapsto R_i(s,\underline{u})$ étant la courbe intégrale de $r_i(u)$ vérifiant $R_i(0,\underline{u}) = \underline{u}$.

iii) Quelques autres estimations fines mais ennuyeuses (cf : le N-ondes de Lax pour le problème mixte).

Par le calcul de Volpert sur les fonctions BV et des théorèmes de comparaison de type Volpert (avec second membre et sans condition d'entropie) on obtient

$$\sup_{t>T_0} \left|\bar{\lambda}_i(u^{\varepsilon}(t,x))-\bar{\lambda}_i(\underline{u}+\varepsilon p_i^{\varepsilon}(\varepsilon t,\varepsilon x)r_i)\right|_{L^1(C_i(t))} = O(1)\,\varepsilon^2, \quad i \le N',$$

d'où l'on déduit

$$\sup_{t>T_0} \left|u^{\varepsilon}(t,x)-\underline{u}-\varepsilon p_i^{\varepsilon}(\varepsilon t,\varepsilon x)\,r_i\right|_{L^1(C_i(t))} = O(1)\,\varepsilon^2,$$

ce qui complète la preuve du théorème.

Bibliographie

Cheverry : Séminaire Rennes 1992-93.

Di Perna - Majda : Comm. Math. Phys. 98 (1985) 313-347.

Goodman : Ph. D thesis, California University, 1982.

Majda - Artola : Analyse mathématique et applications, Gauthier Villars Paris 1988, 319-356.

Sablé - Tougeron : Prépublications Nice 1992-93.