PATRICK GÉRARD

Résultats de propagation pour les équations aux dérivées partielles à coefficients oscillants

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992-1993, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , exp. nº 4, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992-1993___1_A4_0>

Résultats de propagation
pour les équations aux dérivées partielles à coefficients oscillants.

séminaire à Rennes
17 Décembre 1992.

Patrick Gérard
Université de Paris-Sud

1. Introduction.

Soient $(\epsilon_n),(h_n)$ deux suites de nombres positifs tendant vers 0, X un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $\phi : X \to \mathbf{R}^p$ une submersion. Soit $p = p(x,\xi,y,h) \in C^\infty(T^*X \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R})$ un symbole polynomial en (ξ,h), à valeurs réelles, périodique en y par rapport à un réseau Γ de $\mathbf{R}^k$. On posera $\mathbf{T}^k = \mathbf{R}^k/\Gamma$. On pose

$$\tilde{p}_n(x,\xi) = p\big(x, h_n\xi, \frac{\phi(x)}{\epsilon_n}, h_n\big),$$

et on considère la suite d'opérateurs différentiels $op_n(p) = \tilde{p}_n^w(x,D)$, où $a \mapsto a^w(x,D)$ désigne la quantification de Weyl,

$$a^w(x,D)u = (2\pi)^{-d} \int\int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(\frac{x+y}{2})\, u(y)\, dy\, d\xi.$$

On se propose d'étudier les oscillations "à la fréquence $1/h_n$"des suites (u_n) bornées dans $L^2_{loc}(X)$ solutions d'une équation du type

$$op_n(p)u_n = 0\ . \tag{1}$$

On a en vue les exemples suivants, dans lesquels la variable $x \in X$ est subrepticement remplacée par $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^e$,

$$ih_n\partial_t u_n = -\frac{h_n^2}{2}\Delta u_n + V(x, \frac{\phi(x)}{\epsilon_n})u_n$$

$$\partial_t^2 v_n - \sum_{1\leq i,j\leq e} \partial_i(a_{ij}(x, \frac{\phi(x)}{\epsilon_n})\partial_j v_n) = 0, \quad (a_{ij}) \gg 0, \quad u_n = \partial_t v_n,$$

avec des données de Cauchy oscillant à la fréquence $1/h_n$, du type $a(x)\exp(iS(x)/h_n)$, par exemple.

Il s'agit donc d'étudier l'effet résultant de l'homogénéisation du milieu, liée au petit paramètre ϵ_n, et de la propagation des oscillations, liée à h_n. Il est alors naturel de distinguer a priori les trois situations suivantes :

a) $\epsilon_n << h_n$. On s'attend à ce que la prépondérance de l'effet d'homogénéisation permette de se ramener (par exemple à l'aide de développements multi-échelle à la Bensoussan–Lions–Papanicolaou [BLP]) à la propagation pour un opérateur effectif ; nous n'étudierons pas ce cas ici.

b) ϵ_n et h_n sont du même ordre. Ce cas a été étudié par divers auteurs ([BLP], [G], [MMP]) dans le cas particulier de l'équation de Schrödinger ci–dessus, pour des raisons provenant de Physique du solide. La propagation est alors décrite par une infinité dénombrable d'hamiltoniens, définis comme valeurs propres d'un opérateur elliptique sur le tore, dépendant de $(x, \xi) \in T^*\mathbf{R}^e$.

c) $\epsilon_n >> h_n$. Ce cas semble particulièrement pertinent physiquement pour l'équation des ondes (ou le système de Maxwell), puisqu'il décrit la propagation d'une onde de haute fréquence dans un milieu inhomogène périodique dont l'échelle caractéristique, bien que petite, est nettement plus grande que la longueur d'onde incidente. C'est ce dernier cas qui fait l'objet du présent exposé.

Citons deux approches de ce problème dans la littérature ; elles sont toutes deux basées sur la recherche de solutions approchées, et concernent l'équation de Schrödinger, dans le cas d'un milieu laminaire, c'est–à dire $k = 1$ (ϕ est scalaire).

– Dans [P], A. Pyatnitskii introduit une méthode de l'optique géométrique adaptée à ce contexte, la solution approchée étant localement de la forme suivante (en supposant, pour simplifier, $h_n = \epsilon_n^2$)

$$u_n(t,x) = a(x, \frac{\phi(x)}{\epsilon_n}, \epsilon_n) \exp[\frac{i}{h_n}\big(S(t,x) + \epsilon_n \Sigma(t, x, \frac{\phi(x)}{\epsilon_n})\big)],$$

la quantité $\phi(x)/\epsilon_n$ intervenant toujours comme argument de fonctions périodiques. Une telle méthode est limitée au cas d'une donnée de Cauchy à support dans le complémentaire des points x pour lesquels $V(x,y)$ dépend effectivement de y. Cela oblige d'ailleurs Pyatnitskii à prolonger sa solution par des représentations intgrales de Fourier, dans l'esprit de Maslov[M].

– Une méthode un peu plus générale (mais demandant plus de vérifications techniques au lecteur) a été ensuite proposée par Berlyand et Dobrokhotov dans [BD]. Toujours en supposant $h_n = \epsilon_n^2$, il s'agit de se ramener à une équation d'évolution pseudodifférentielle à coefficients non oscillants, en conjuguant par un opérateur intégral de Fourier stationnaire à phase oscillante. Pour simplifier, plaçons–nous en dimension 1 d'espace avec $\phi(x) = x$. Notons $a(x, \xi, y, \epsilon)\, exp(i\Sigma(x, \xi, y)/\epsilon)$ une fonction propre asymptotique pour l'opérateur différentiel $(\xi + \epsilon D_y)^2/2 + V(x,y)$ sur le tore $\mathbf{T}^1$, $\lambda(x, \xi, \epsilon)$ étant la valeur propre associée ; on remarque alors que, en posant

$$u_n = I_n f_n, \quad I_n = \exp[\frac{i}{\epsilon_n}(\Sigma(x, h_n D_x, \frac{x}{\epsilon_n})]\, a(x, h_n D_x, \frac{x}{\epsilon_n}, \epsilon_n),$$

on est ramené (au moins formellement) à l'équation d'évolution

$$i h_n \partial_t f_n = \lambda(x, h_n D_x, \epsilon_n) f_n.$$

Le problème est que l'étude de l'opérateur I_n, en particulier son inversibilité et son action sur les oscillations d'ordre $1/h_n$, n'est nullement évidente.

Dans cet exposé, on propose une approche générale du phénomène de propagation, basée sur des identités d'énergie microlocales, les oscillations des solutions étant décrites par des

mesures de Radon dans l'espace des phases $T^*X \times \mathbf{T}^k$, dans l'esprit des "mesures semi–classiques" introduites dans [G],[GL],[LP] ; le phénomène de propagation est alors mis en évidence par des équations de transport dont sont solutions ces mesures. Hélas, là encore cette approche n'est menée à bien que dans le cas d'un milieu laminaire. Néanmoins, elle présente l'avantage d'une description géométrique systématique de la propagation des oscillations, et permet peut–être de mieux cerner les difficultés qui font obstacle à une généralisation à plusieurs phases ($k > 1$).
Les détails de ce travail apparaîtront dans un article en préparation.

2. Densité d'énergie dans l'espace des phases.
On suppose jusqu'à la fin de l'exposé que $h_n/\epsilon_n \to 0$. Soit $M = T^*X \times \mathbf{T}^k$. On désigne par $\hat{C}_0^\infty(M)$ l'espace des fonctions C^∞ sur M qui sont de la forme

$$f(x,\xi,y) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-iv\cdot\xi} g(x,v,y)\, dv,$$

où $g \in C_0^\infty(X \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^k)$. Pour $f \in \hat{C}_0^\infty(M)$, on pose

$$op_n(f) = \tilde{f}_n(x,D), \quad \tilde{f}_n(x,\xi) = f\big(x, h_n\xi, \frac{\phi(x)}{\epsilon_n}\big).$$

On remarque que, pour n assez grand, $op_n(f) : L^2_{loc}(X) \to L^2_{comp}(X)$ avec des estimées uniformes.
Si (u_n) est une suite bornée de $L^2_{loc}(X)$, on lui associe la suite (μ_n) de formes linéaires continues sur $\hat{C}_0^\infty(M)$ définie par

$$< \mu_n, f >= (op_n(f)u_n, u_n)_{L^2}.$$

Il est clair que (μ_n) est une suite bornée du dual $(\hat{C}_0^\infty(M))'$. On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble (non vide) de ses valeurs d'adhérence pour la topologie faible. On montre alors la

Proposition 1. *Tout élément μ de $\mathcal{M}$ se prolonge en une mesure de Radon positive sur M telle que, pour tout compact K de X, on ait $\mu(T^*K \times \mathbf{T}^k) < \infty$.*

Remarque. Il est aisé de vérifier que $\int \mu(x,\xi,dy)$ est une mesure semi–classique pour (u_n) au sens de [G], [GL].
Exemple. L'ensemble $\mathcal{M}$ associé à la suite de Pyatnitskii

$$u_n(x) = a(x, \frac{\phi(x)}{\epsilon_n}) \exp[\frac{i}{h_n}(S(x) + \epsilon_n \Sigma(x, \frac{\phi(x)}{\epsilon_n}))]$$

est le singleton formé de

$$\mu(x,\xi,y) = |a(x,y)|^2\, dx\, \delta(\xi - dS(x) -{}^t\, \phi'(x).d_y\Sigma(x,y))\, dy.$$

On voit sur cet exemple comment $\mathcal{M}$ décrit les oscillations de (u_n) à la fréquence $1/h_n$ tout en précisant l'interaction avec des opérateurs oscillant avec $\phi(x)/\epsilon_n$. Le but de notre travail a été de décrire les propriétés des éléments de $\mathcal{M}$ lorsque (u_n) est solution de (1). Un premier pas dans cette direction est donné par le résultat suivant, où l'on a posé $p_0(x,\xi,y) = p(x,\xi,y,0)$.

Proposition 2. *Si (u_n) est solution de l'équation (1), tout élément μ de $\mathcal{M}$ est supporté par l'ensemble caractéristique $\Sigma = \{p_0 = 0\}$ et est invariant par le flot du champ de vecteur*

$$L^{\phi}_{p_0} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{\partial p_0}{\partial y_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}$$

En utilisant le calcul symbolique pseudodifférentiel [H,18.5] associé à la suite de métriques de Hörmander

$$g_n = \frac{dx^2}{\epsilon_n^2} + \frac{h_n^2 d\xi^2}{(1 + h_n^2 |\xi|^2)},$$

on montre aisément les formules suivantes :

$$(op_n(f) op_n(p) u_n, u_n) = (op_n(fp) u_n, u_n) + o(1),$$
$$([op_n(f), op_n(p)] u_n, u_n) = \frac{h_n}{\epsilon_n} (op_n(i L^{\phi}_{p_0} f) u_n, u_n) + o(\frac{h_n}{\epsilon_n}).$$

Or l'équation (1) entraîne que les deux membres de gauche ci-dessus sont nuls. Il suffit alors de passer à la limite quand $n \to \infty$ pour obtenir la proposition 2.

Voici une interprétation géométrique de $L^{\phi}_{p_0}$. Pour tout $j \in \{1, ..., k\}$, soit $H_{\phi_j} = -\partial_x \phi_j \partial_\xi$ le champ hamiltonien de ϕ_j ; on introduit sur M le champ de 2–vecteurs

$$Z = \sum_{j=1}^{k} H_{\phi_j} \wedge \partial_{y_j}.$$

En tout point m de M, on peut voir $Z(m)$ comme une forme bilinéaire alternée sur $T^*_m M$. Notons que l'on a alors, pour toute 1–forme α sur M,

$$Z(\alpha, dp_0) = <\alpha, L^{\phi}_{p_0}> . \tag{2}$$

Cette dernière identité ne caractérise pas le champ $L^{\phi}_{p_0}$, car la forme bilinéaire Z est dégénérée. Appelons $KerZ$ son noyau, et désignons par V le champ de sous–espaces de TM orthogonal à $KerZ$ pour la dualité. Il est clair que V est engendré par les $2k$ champs de vecteurs $H_{\phi_j}, \partial_{y_l}$. Puisque ces champs commutent et sont partout indépendants, on définit ainsi un feuilletage, les feuilles étant les cylindres

$$F_{x_0, \xi_0} = \{(x_0, \xi_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j d\phi_j(x_0), y), \quad (t_1, ..., t_k) \in \mathbf{R}^k, y \in \mathbf{T}^k\}.$$

Sur chacune de ces feuilles, Z définit un champ de 2–vecteurs tangents, donc une forme bilinéaire alternée sur l'espace cotangent, qui cette fois est non–dégénérée ; on en déduit une 2-forme différentielle, qui n'est autre, dans les coordonnées (t, y) ci-dessus, que $\sum_j dy_j \wedge dt_j$. En résumé, la donnée de Z permet de fibrer l'espace des phases M par des variétés symplectiques isomorphes à $T^*\mathbf{T}^k$, et la formule (2) montre alors que, sur chaque fibre, $L^\phi_{p_0}$ n'est autre que le champ hamiltonien de p_0 pour cette structure symplectique.

3. Le cas d'un milieu laminaire.

Dans ce paragraphe, on suppose $k=1$. Notons $\pi : M \to T^*X/\mathbf{R}d\phi$ la fibration associée à ϕ, chaque fibre étant un cylindre symplectique de dimension 2. Alors, sous des hypothèses raisonnables de non–dégénérescence du symbole p_0, on va faire apparaître une autre invariance des éléments de $\mathcal{M}$, cette fois transversalement à la fibration π.

Soit $b_0 \in B = T^*X/\mathbf{R}d\phi$. On fait les deux hypothèses suivantes :

a) En tout point du cylindre $\pi^{-1}(b_0)$ où $p_0=0$, on a $L^\phi_{p_0} \neq 0$.

b) Sur toutes les génératrices du cylindre $\pi^{-1}(b_0)$, la fonction polynomiale p_0 est de degré maximal.

Sous ces hypothèses, on montre aisément l'existence d'un voisinage ouvert U de b_0 dans B tel que l'intersection avec $\pi^{-1}(U)$ de l'ensemble caractéristique $\{p_0=0\}$ soit une hypersurface Σ_U, sur laquelle la restriction π_Σ de π est encore submersive et est propre. Par le théorème d'Ehresmann (cf. par exemple [L]), cette restriction est donc une fibration au–dessus de U. La fibre au–dessus de chaque point de U est une variété compacte de dimension 1, donc la réunion de N courbes fermées simples . Comme $L^\phi_{p_0}$ est tangent à ces courbes et non nul, celles–ci ne peuvent être que des orbites fermées de $L^\phi_{p_0}$.

En résumé, quitte à restreindre U, on peut écrire

$$\Sigma_U = \cup_{q=1}^N V^q,$$

où les V_q sont des ouverts deux à deux disjoints et difféomorphes à $U \times \mathbf{T}$. Pour chaque $b \in U$, pour tout q, on pose $\pi_\Sigma^{-1}(b) \cap V^q = \gamma_b^q$; alors γ_b^q est une orbite fermée de $L^\phi_{p_0}$ dépendant C^∞ de b. Désignons alors par ω_b^q l'unique probabilité sur M portée par γ_b^q qui soit invariante par le flot de $L^\phi_{p_0}$. On définit alors un champ de vecteurs $K^q_{p_0}$ sur U en posant

$$K^q_{p_0}(b) = \int_{\gamma_b^q} T_m\pi.H_{p_0}(m)\,\omega_b^q(dm),$$

où H_{p_0} désigne le champ hamiltonien de p_0 pour la structure symplectique habituelle sur T^*X, étendu trivialement à M.

Théorème. *On suppose que $h_n^2/\epsilon_n^3 \to 0$ quand $n \to \infty$. Sous les hypothèses ci–dessus, la restriction μ_U de tout élément μ de $\mathcal{M}$ à $\pi^{-1}(U)$ sécrit*

$$\mu_U = \sum_{q=1}^N \int_U \omega_b^q\, \nu^q(db),$$

où, pour tout q, ν^q est une mesure de Radon positive sur U invariante par le flot de $K^q_{p_0}$, i.e. satisfaisant, au sens des distributions, à l'équation de transport

$$^tK^q_{p_0}(\nu^q) = 0.$$

La décomposition de μ_U est une conséquence facile de la proposition 2 et du théorème de désintégration des mesures. Pour obtenir l'invariance des ν^q, il suffit de remarquer, à l'aide du calcul symbolique pseudodifférentiel, que l'identité $[op_n(f), op_n(p)]u_n, u_n] = 0$ s'écrit, au sens des distributions sur M,

$$\frac{h_n}{\epsilon_n} L^{\phi}_{p_0}\mu_n + h_n H_{p_0}\mu_n + O(\frac{h_n^3}{\epsilon_n^3} + \frac{h_n^2}{\epsilon_n}) = 0.$$

Il suffit alors de localiser cette identité dans un voisinage ouvert de V^q disjoint des autres V^r, de prendre l'image directe des deux membres par π et de passer à la limite.

Remarques.

1) La condition $h_n^2/\epsilon_n^3 \to 0$ peut probablement être relaxée.

2) On voit la difficulté que présenterait une généralisation à $k > 1$: en se plaçant à nouveau dans le cas où π_Σ est une submersion propre, les fibres seraient cette fois des variétés compactes involutives de dimension au moins égale à 3, sur lesquelles il est fort délicat de caractériser les mesures invariantes par le flot de $L^{\phi}_{p_0}$.

Bibliographie.

[BD] Berlyand, L., Dobrokhotov, S. *Operational Separation of Variables in problems of short-wave asymptotic behavior,* Soviet Physics Doklady **32** (9)(1987),714–715.

[BLP] Bensoussan, A., Lions, J.-L., Papanicolaou, G. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures,* North Holland, 1978.

[FH] Frenod, E., Hamdache, K. *Homogenization of a Kinetic Equation with Periodic potential,* Prepublication CMLA, ENS Cachan, 1993.

[G] Gérard, P. *Mesures semi-classiques et ondes de Bloch,* Séminaire EDP 1990–1991, Ecole Polytechnique.

[GL] Gérard, P., Leichtnam, E. *Ergodic Properties of Eigenfunctions for the Dirichlet Problem,* Prepublication Orsay, 1992, à paraître à Duke Math. Journal.

[H] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol III,* Springer 1985.

[L] Leborgne, D. *Calcul Différentiel et Géométrie,* PUF, 1982.

[LP] Lions, P.L., Paul, T. *Sur les mesures de Wigner,* Prepublication Ceremade, à paraître à Revista Math. Iberoamer..

[MMP] Markowich, P., Mauser, N.J., Poupaud, F. *A Wignerfunction Approach to (Semi) classical limits : Electrons in a Periodic Potential,* Prepublication Nice, 1993.

[M] Maslov, V.P. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques,* Dunod, Gauthier–Villars, 1972.

[P] Pyatnitskii, A.L. *A Scattering Problem in Laminar Media,* Math. USSR Sbornik **43** (1982), 427–441.