

FRANÇOIS ROUVIÈRE

Ondes sur un espace symétrique

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992-1993, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , exp. n° 1, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992-1993__1_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ONDES SUR UN ESPACE SYMÉTRIQUE

François ROUVIÈRE

Un éclair ou une percussion est perçu par un observateur, après un temps de propagation, comme un signal lumineux ou acoustique instantané. Mais si on jette un pavé dans la mare, on engendre à la surface de l'eau un train d'ondes qui ne s'atténue que progressivement. Les solutions de l'équation des ondes ont donc des propriétés de supports bien différentes en dimension 3 et 2. On dit que le principe de Huygens est valable dans \mathbb{R}^3 , mais non dans \mathbb{R}^2 ; c'est ce qui permet, dans notre espace usuel, d'apprécier la musique ou la poésie d'un feu clignotant.

En 1923, Hadamard a proposé de rechercher tous les cas de validité de ce principe, pour un opérateur différentiel hyperbolique (cf. Günther [3]). Ce problème est loin d'être entièrement résolu, mais une intéressante classe d'exemples a été considérée récemment (Helgason 1984 [6], Branson, Ólafsson, Schlichtkrull 1991-92 [7][8][9]), à l'aide de l'analyse de Fourier sur un espace symétrique. Le problème de Hadamard servira ici de prétexte pour entrevoir, sur deux exemples, les liens profonds entre analyse harmonique et propagation des ondes.

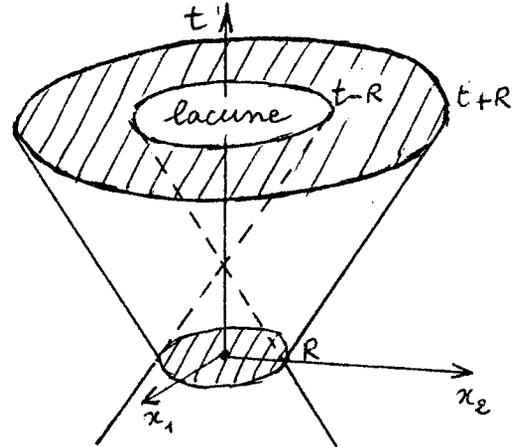
1. PRINCIPE DE HUYGENS SUR \mathbb{R}^n .

a) Revoyons d'abord en détail le cas de \mathbb{R}^n , qui servira d'inspiration pour d'autres situations. On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes (linéaire), à l'inconnue $u = u(t, x)$ avec $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$(1) \quad \partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \quad , \quad u(0, x) = g(x) \quad , \quad \partial_t u(0, x) = f(x),$$

où $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$ est le laplacien de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , et les données de Cauchy (g, f) sont supposées C_c^∞ sur \mathbb{R}^n , à support contenu dans la boule $\|x\| \leq R$ (pour la norme euclidienne). On dit que le principe de Huygens est valable pour (1) si, à l'instant t , le support en x de $u(t, x)$ est contenu dans la couronne

$$|t| - R \leq \|x\| \leq |t| + R .$$



b) Parmi les nombreuses méthodes d'étude de

(1), nous choisissons d'effectuer une transformation de Fourier partielle en x :

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-i\xi \cdot x} dx ,$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$. Pour simplifier l'écriture, supposons dans la suite $g = 0$; on peut toujours se ramener à ce cas (si u vérifie (1) avec données de Cauchy $(0, f)$, alors $\partial_t u$ le vérifie avec données $(f, 0)$, d'où le cas général par superposition). Le problème (1) se transforme en

$$(2) \quad \partial_t^2 \hat{u} + \|\xi\|^2 \hat{u} = 0 \quad , \quad \hat{u}(0, \xi) = 0 \quad , \quad \partial_t \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi) \quad ,$$

une équation différentielle ordinaire en la variable t ; la clef de cette simplification est essentiellement l'égalité

$$(3) \quad \Delta(e^{-i\xi \cdot x}) = - \|\xi\|^2 e^{-i\xi \cdot x} \quad ,$$

qui exprime que $e^{-i\xi \cdot x}$ est fonction propre du laplacien. Le problème (2) se résout immédiatement en

$$(4) \quad \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \frac{\sin t \|\xi\|}{\|\xi\|} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad .$$

Il nous faut maintenant savoir lire les supports sur les transformées de Fourier, ce que donne le

Théorème de Paley-Wiener de \mathbb{R}^n . Les transformées de Fourier des fonctions C_c^∞ sur \mathbb{R}^n , à support contenu dans la boule $\|x\| \leq R$, sont les fonctions entières F sur

\mathbb{C}^n telles que pour tout entier N il existe une constante C_N telle que

$$(5) \quad |F(\xi + i\eta)| \leq C_N (1 + \|\xi\| + \|\eta\|)^{-N} e^{R\|\eta\|},$$

pour tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

(Dans un sens: si $F = \hat{f}$ avec $\text{supp } f$ dans la boule, on voit que F se prolonge en une fonction entière et il suffit de majorer l'intégrale de Fourier des dérivées de f . Pour la réciproque, on définit f par

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int F(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi,$$

et le théorème de Cauchy permet de décaler cette intégrale dans \mathbb{C}^n , en ajoutant à ξ une partie imaginaire constante η d'où, grâce à (5),

$$|f(x)| \leq C e^{R\|\eta\| - \eta \cdot x}$$

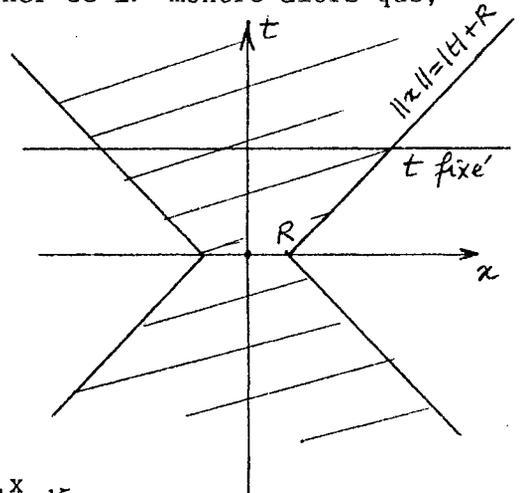
prendre $\eta = tx$, avec $t \rightarrow +\infty$, donne $f(x) = 0$ pour $\|x\| > R$).

Dans (4), \hat{f} vérifie donc la majoration (5), et le facteur

$$\frac{\sin t \|\xi\|}{\|\xi\|} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^k$$

se prolonge en fonction entière de $\xi + i\eta \in \mathbb{C}^n$, dont le module est majoré par $|t| e^{t\|\eta\|}$ (exercice !). Le théorème de Paley-Wiener de \mathbb{R}^n montre alors que,

à t fixé, le support en x de $u(t,x)$ est contenu dans la boule $\|x\| \leq |t| + R$, pour tout $n \geq 1$.



c) L'inégalité $|t| - R \leq \|x\|$ du principe de Huygens s'obtient de manière analogue, mais un peu plus subtile. On écrit, par inversion de Fourier,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \frac{\sin t \|\xi\|}{\|\xi\|} e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

Il est alors naturel d'introduire des coordonnées sphériques $\xi = p\omega$, avec $p \in \mathbb{R}$ et $\|\omega\| = 1$. Avec ces notations, la transformation de Fourier et sa formule

d'inversion s'écrivent :

$$(6) \quad \hat{f}(p\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ip\omega \cdot x} dx$$

$$(7) \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int_0^\infty p^{n-1} dp \int_{S^{n-1}} \hat{f}(p\omega) e^{ip\omega \cdot x} d\omega ,$$

puisque $d\xi = p^{n-1} dp d\omega$, où $d\omega$ est la mesure sphérique. Par suite, pour $n \geq 2$,

$$(8) \quad u(t, x) = \int_0^\infty \varphi(p, x) p^{n-2} \sin tp dp ,$$

en notant

$$(9) \quad \varphi(p, x) = (2\pi)^{-n} \int_{S^{n-1}} \hat{f}(p\omega) e^{ip\omega \cdot x} d\omega .$$

Le changement de ω en $-\omega$, qui conserve la mesure sphérique, montre que $\varphi(p, x) = \varphi(-p, x)$. Pour n impair le facteur p^{n-2} est impair, et (8) peut donc s'écrire comme une intégrale de Fourier sur \mathbb{R} :

$$u(t, x) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p, x) p^{n-2} e^{itp} dp .$$

L'égalité (9) se prolonge à la variable complexe $p \in \mathbb{C}$; comme

$$|\hat{f}(p\omega)| \leq C_N (1+|p|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im} p|} \quad \text{et} \quad |e^{ip\omega \cdot x}| \leq e^{\|x\| |\operatorname{Im} p|}$$

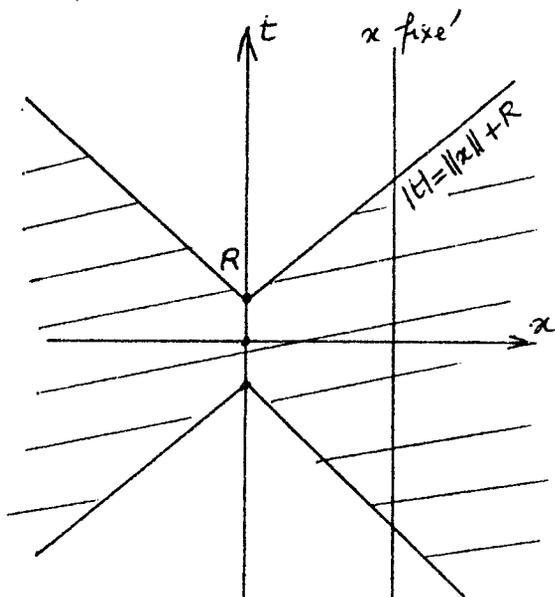
on a

$$|\varphi(p, x)| \leq C'_N (1+|p|)^{-N} e^{(\|x\|+R)|\operatorname{Im} p|}$$

et le théorème de Paley-Wiener de \mathbb{R} montre que, à x fixé, le support en t de $u(t, x)$ est contenu dans $|t| \leq \|x\| + R$, d'où le principe de Huygens pour (1) quand n est impair.

Pour n pair, une étude directe de l'intégrale (8), en intégrant n fois par parties, donne sans difficulté :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{n-1} u(t, x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy ,$$



à x fixé, où la constante $c_n > 0$ ne dépend que de n . Le second membre n'est pas nul en général, le principe de Huygens n'est donc pas valable. En un point de la mare aux canards ($n=2$), les ondes s'atténuent comme $1/t$.

Enfin le cas élémentaire $n=1$ peut s'étudier en intégrant (1) à la main.

Conclusion : Pour $n \geq 1$, le principe de Huygens est valable pour le problème (1) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si n est impair ≥ 3 .

2. L'ESPACE HYPERBOLIQUE DE DIMENSION 2 (cf. [1]).

Un modèle de cet espace X s'obtient en munissant le disque unité $|z| < 1$ du plan complexe, avec $z = x + iy$, de la métrique riemannienne définie par

$$(10) \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1-x^2-y^2)^2} .$$

Cette expression signifie que le produit scalaire de deux vecteurs $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$, tangents à X au point z est

$$(u, v)_z = (1-|z|^2)^{-2} (u_1 v_1 + u_2 v_2) .$$

Sa proportionnalité avec le produit scalaire usuel $(u_1 v_1 + u_2 v_2)$ de \mathbb{R}^2 fait que l'on a un modèle conforme : l'angle hyperbolique de u et v coïncide avec l'angle usuel de la géométrie euclidienne.

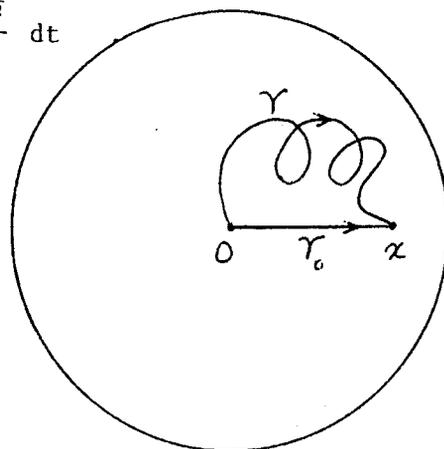
X est ainsi une variété riemannienne réelle de dimension 2. L'expression (10) permet de calculer la longueur d'un chemin $t \rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t))$, avec par exemple $0 \leq t \leq 1$; en intégrant la norme du vecteur vitesse $v = \gamma'(t)$ on a

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} \right) dt = \int_0^1 \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}}{1-x(t)^2 - y(t)^2} dt$$

Parmi les chemins qui vont de l'origine à un point réel $x > 0$, le segment de droite $\gamma_0(t) = tx$ est de longueur minimale, puisque

$$(11) \quad L(\gamma) \geq \int_0^1 \frac{x'(t) dt}{1-x(t)^2} = \text{Argth } x = L(\gamma_0) ;$$

γ_0 est une géodésique de X .



On peut en déduire toutes les géodésiques de l'espace X en faisant appel à son groupe d'isométries. Les transformations homographiques

$$z \longrightarrow g.z = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad \text{avec } a,b,c,d \in \mathbb{C} \quad , \quad ad-bc = 1 \quad , \quad d = \bar{a} \quad , \quad c = \bar{b} \quad ,$$

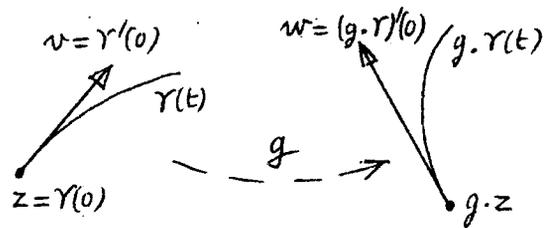
conservent en effet le cercle $|z| = 1$ et le disque $|z| < 1$ (car on vérifie que $1 - |g.z|^2 = (1 - |z|^2) |\bar{b}z + \bar{a}|^{-2}$). Elles forment un groupe de difféomorphismes de X , isomorphe au groupe matriciel

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{avec } a,b \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \quad ,$$

noté SU(1,1) (analogue, au signe près, au groupe SU(2) plus familier sans doute). On vérifie immédiatement que G agit transitivement sur X (on peut transformer 0 en un point quelconque z de X), et que le stabilisateur, ou sous-groupe d'isotropie, de 0 est le sous-groupe K de G formé des

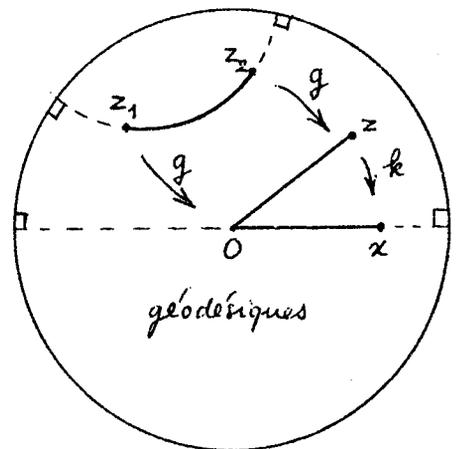
$$k = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \quad ,$$

isomorphe au groupe SO(2) des rotations autour de 0 . L'espace hyperbolique s'identifie donc à l'espace homogène $X = G/K = SU(1,1)/SO(2)$. Enfin les transformations de G préservent la structure riemannienne (isométries) : une courbe $\gamma(t)$ issue de $z = \gamma(0)$ avec vitesse initiale $v = \gamma'(0)$ est transformée par $g \in G$ en la courbe $(g.\gamma)(t)$, de vitesse initiale $w = (g.\gamma)'(0)$, et on a aisément $(w,w)_{g.z} = (v,v)_z$.



Le groupe G transforme donc une géodésique en une géodésique. Pour trouver un plus court chemin de z_1 à z_2 dans X , on peut alors ramener z_1 en 0 par un élément g de G , puis z_2 en un point réel $x > 0$ par un élément k de K . On voit ainsi que les géodésiques issues de 0 sont les segments de droites, et les géodésiques quelconques sont les arcs de cercles orthogonaux au cercle

$|z| = 1$ (car une homographie de \mathbb{C} transforme droite ou cercle en droite ou cercle, conserve



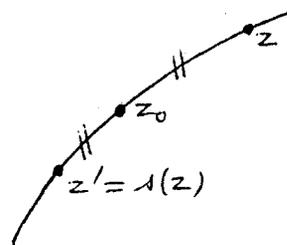
les angles, et un élément de G conserve le cercle $|z| = 1$).

La distance $d(0, z)$ de l'origine à z , calculée le long de la géodésique, est d'après (11)

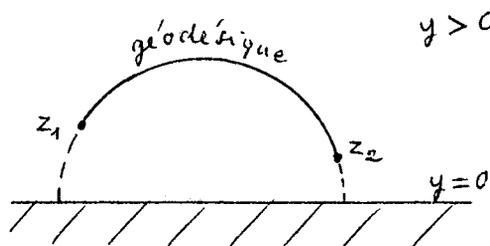
$$(12) \quad d(0, z) = \operatorname{Argth} |z| \quad .$$

Elle tend vers l'infini lorsque $|z| \rightarrow 1$; les points du cercle $|z| = 1$ jouent le rôle de points à l'infini de X , pour la distance hyperbolique.

Remarque 1. On peut montrer que les symétries géodésiques de X (z' est symétrique de z par rapport à z_0 si z_0 est milieu de zz' sur la géodésique de z à z') sont des isométries de X . Cette propriété (qui ne va pas de soi en géométrie riemannienne !) explique le nom d'espace symétrique donné à des variétés telles que \mathbb{R}^n , les espaces hyperboliques, les sphères, et bien d'autres.



Remarque 2. Un modèle équivalent de la géométrie hyperbolique s'obtient en munissant le demi-plan supérieur $y > 0$ de \mathbb{R}^2 de la métrique $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. C'est le demi-plan de Poincaré $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$, dont les géodésiques sont les arcs de cercles centrés sur la droite à l'infini $y = 0$. On passe du disque au demi-plan par inversion-symétrie de pôle i .



3. ONDES SUR L'ESPACE HYPERBOLIQUE (cf. [7]).

a) Sur toute variété riemannienne on a une notion de gradient, obtenue en identifiant la différentielle d'une fonction, forme linéaire sur l'espace tangent, à un vecteur de cet espace grâce au produit scalaire riemannien. On a aussi une notion de divergence, qui mesure, comme son nom l'indique, la variation d'un élément de volume le long du flot d'un champ de vecteurs donné. On a donc une notion de laplacien : c'est l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \quad .$$

Il commute aux isométries de la variété, et peut s'expliciter à partir d'une expression de la métrique en coordonnées locales ([1] p.245). On trouve ici

$$(13) \quad \Delta = (1 - x^2 - y^2)^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2) .$$

On peut donc poser le problème (1) de l'équation des ondes sur $\mathbb{R} \times X$, et du principe de Huygens. Il nous faut, pour calquer la méthode de Fourier partiel précédente, suffisamment de fonctions propres de Δ sur X . Or les $e^{-i\xi \cdot x}$ de \mathbb{R}^n s'interprètent physiquement comme des ondes planes, constantes sur les surfaces d'onde $\omega \cdot x = \text{constante}$ (en notant $\xi = p\omega$ comme plus haut), surfaces orthogonales au faisceau de rayons parallèles de direction ω . Rappelons que

$$\Delta_x (e^{-ip\omega \cdot x}) = -p^2 e^{-ip\omega \cdot x} ,$$

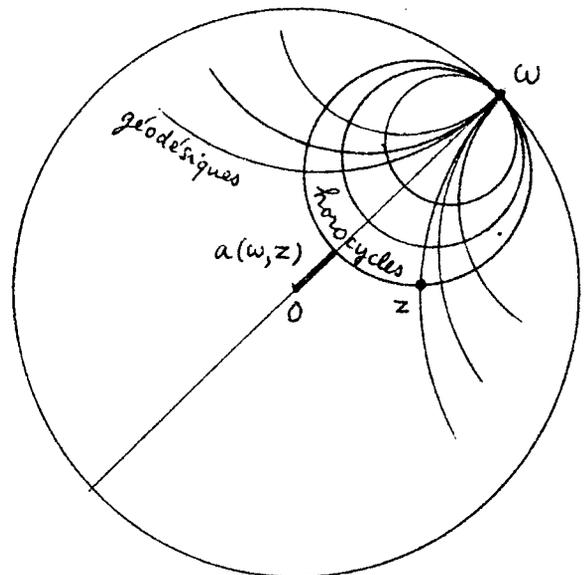
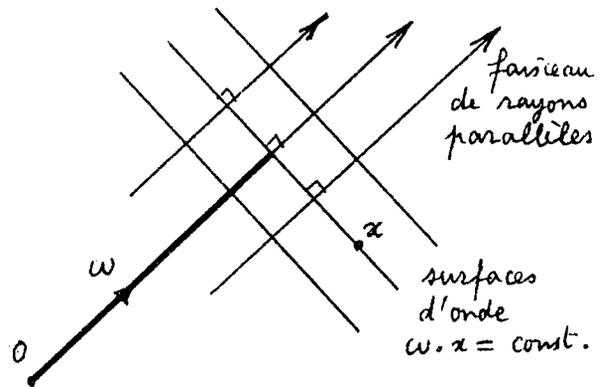
et que $\omega \cdot x$ est la distance de 0 à la surface d'onde par x .

On peut aisément adapter à X ces notions, en considérant un faisceau de géodésiques allant vers un même point à l'infini ω , et les trajectoires orthogonales de ce faisceau. Tout étudiant de Géométrie vous le dira : ces trajectoires sont ici les cercles tangents intérieurement au cercle unité, appelés horocycles.

Un bon candidat à remplacer le $\omega \cdot x$ de \mathbb{R}^n est donc la fonction $a(\omega, z) =$ distance de 0 à l'horocycle passant par z et ω (avec $|z| < 1$ et $|\omega| = 1$). Le calcul montre que

$$a(\omega, z) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1 - |z|^2}{|\omega - z|^2} ,$$

(fonction curieusement liée au noyau de Poisson du disque !) et que, pour toute



constante p , réelle ou complexe,

$$(14) \quad \Delta_z (e^{(-ip+1)a(\omega,z)}) = - (p^2+1) e^{(-ip+1)a(\omega,z)}$$

(|1| p.32 et 34). Ayant ainsi des fonctions propres du laplacien, on peut développer une analyse de Fourier sur X , analogue à celle de \mathbb{R}^2 écrite en coordonnées polaires (p,ω) , selon :

$$(15) \quad \hat{f}(p,\omega) = \int_X f(z) e^{(-ip+1)a(\omega,z)} dz ,$$

transformée de Fourier de $f \in C_c^\infty(X)$, avec la mesure riemannienne $dz = (1-x^2-y^2)^{-2} dx dy$, et

$$(16) \quad f(z) = (2\pi)^{-2} \int_0^\infty p \operatorname{th}\left(\frac{\pi p}{2}\right) dp \int_{S^1} \hat{f}(p,\omega) e^{(ip+1)a(\omega,z)} d\omega ,$$

formule d'inversion de Fourier, avec la mesure $d\omega$ sur le cercle unité S^1 , de longueur totale 2π (|1| p.33).

La principale différence avec les formules euclidiennes (6)(7) est donc, outre la difficulté des démonstrations, la présence du facteur $\operatorname{th}(\pi p/2)$ dans (16), source de divers ennuis (voir ci-dessous).

On peut cependant établir un théorème de Paley-Wiener pour X , relatif aux boules $d(0,z) \leq R$, mais sa preuve est beaucoup plus délicate que pour \mathbb{R}^2 (|1| p.44-58).

Remarque. Pour obtenir des fonctions propres de Δ invariantes par rotations autour de 0 , il suffit d'intégrer en ω la fonction $e^{-ip\omega \cdot x}$ (cas de \mathbb{R}^n), resp. $e^{(-ip+1)a(\omega,z)}$ (cas de X). Les fonctions obtenues, dites fonctions sphériques, s'expriment au moyen de la fonction de Bessel J_0 (pour \mathbb{R}^n), resp. de la fonction hypergéométrique (pour X).

b) Ces outils permettent d'étudier l'équation des ondes

$$(17) \quad \partial_t^2 u - (\Delta + 1) u = 0 , \quad u(0,z) = g(z) , \quad \partial_t u(0,z) = f(z) ,$$

avec $(t,z) \in \mathbb{R} \times X$, $u = u(t,z)$, $f, g \in C_c^\infty(X)$, (légèrement modifiée par l'addition de 1 à Δ), selon les idées du §1. En prenant $g = 0$ pour simplifier, on obtient par transformation de Fourier sur X :

$$\partial_t^2 \hat{u} + p^2 \hat{u} = 0 \quad , \quad \hat{u}(0, p, \omega) = 0 \quad , \quad \partial_t \hat{u}(0, p, \omega) = \hat{f}(p, \omega) \quad ,$$

avec $t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $\omega \in S^1$, qui se résout en

$$\hat{u}(t, p, \omega) = \hat{f}(p, \omega) \frac{\sin tp}{p} \quad .$$

Si le support de f est contenu dans la boule $d(0, z) \leq R$, on en déduit par le théorème de Paley-Wiener de X qu'à t fixé, le support en z de $u(t, z)$ est contenu dans la boule $d(0, z) \leq |t| + R$.

Pour rechercher la validité du principe de Huygens, on écrit enfin, comme p.4

$$(18) \quad u(t, z) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p, z) \operatorname{th}\left(\frac{\pi p}{2}\right) e^{itp} dp \quad ,$$

avec

$$\varphi(p, z) = (2\pi)^{-2} \int_{S^1} \hat{f}(p, \omega) e^{(ip+1)a(\omega, z)} d\omega \quad ,$$

ce que permettent ici encore des considérations de parité. Las ! Le facteur $\operatorname{th}(\pi p/2)$ n'est pas une fonction entière de p , mais a pour pôles les points $+i$, $+3i$, ... La méthode de Paley-Wiener de \mathbb{R} ne s'applique pas jusqu'au bout, mais permet seulement d'ajouter à la variable réelle p de (18) une partie imaginaire comprise entre -1 et 1 . Ceci conduit, après quelque travail, à l'inégalité

$$(19) \quad |u(t, z)| \leq C e^{d(0, z) + R - |t|}$$

(où C ne dépend que de la donnée de Cauchy f); cette inégalité ne peut pas être significativement améliorée.

Conclusion : Le principe de Huygens n'est pas valable pour l'équation des ondes (17) sur $\mathbb{R} \times X$, si X est l'espace hyperbolique de dimension 2 . Toutefois, en un point de X , la solution décroît exponentiellement avec le temps, d'après (19). Sans être parfaite, la musique est donc meilleure sur X que sur \mathbb{R}^2 .

4. COMPLÉMENTS.

a) La méthode esquissée au §3 s'étend à tout espace symétrique $X = G/K$ défini par un groupe de Lie semi-simple G et un sous-groupe compact maximal K , en

faisant appel au (formidable) outil de l'analyse harmonique sur cet espace, développé par Harish-Chandra, Helgason, ... Comme précédemment, la clef du résultat est dans le comportement de la mesure de Plancherel (facteur $p_{th}(\pi/2)$ ci-dessus, "fonction c de Harish-Chandra" en général), et son expression fait appel au jargon des algèbres de Lie semi-simples.

Pour l'équation des ondes modifiée $\partial_t^2 u - (\Delta + \lambda) u = 0$ (où λ est une certaine constante, égale à 1 ci-dessus), on peut montrer par exemple ([7]) que le principe de Huygens est

- valable pour l'espace hyperbolique $X = SO_0(2n+1,1)/SO(2n+1)$, de dimension $2n+1$, et plus généralement si $X = G/K$ est de dimension impaire et à multiplicités paires;
- non valable, avec décroissance exponentielle de la solution, pour l'espace hyperbolique $X = SO_0(2n,1)/SO(2n)$, de dimension $2n$ (le cas $n=1$ est celui esquissé plus haut) et plus généralement pour X de rang un, à multiplicités non toutes paires;
- non valable, avec décroissance de la solution comme une puissance négative de t , pour l'espace symétrique $X = SO_0(n,2)/SO(n) \times SO(2)$, de dimension $2n$ (avec $n \geq 2$) et plus généralement pour X de rang pair.

b) Sur \mathbb{R}^n comme sur $X = G/K$, l'équation des ondes peut être étudiée autrement que par l'analyse de Fourier :

- résolution par transformation de Radon, qui associe à toute fonction ses intégrales sur les surfaces d'onde ([1] p.127, [2], [9]);
 - expression de la solution à l'aide de moyennes sur des sphères ([1] p.343, [6]).
- Ces méthodes ont entre elles de nombreux liens.

c) Si on munit le disque $|z| < a$ de la métrique $ds^2 = (1 - a^{-2}|z|^2)^{-2}(dx^2 + dy^2)$, on peut évidemment faire une étude analogue à celle des §2 et 3 pour $a = 1$. Lorsque a tend vers l'infini, on constate facilement que géodésiques, surfaces d'onde, laplacien, fonctions sphériques, ... "tendent" vers les objets correspondants de l'espace euclidien \mathbb{R}^2 . Ces phénomènes sont liés à la notion de contraction de groupes de Lie : il y a ici contraction du groupe d'isométries $SU(1,1)$ vers le groupe des déplacements de \mathbb{R}^2 .

BIBLIOGRAPHIE

- |1| S. HELGASON, "Groups and geometric analysis", Academic Press, Orlando 1984
Excellente introduction élémentaire (p.1-79) aux idées et méthodes de l'analyse harmonique, sur les exemples du plan, de la sphère, et du plan hyperbolique - dont on verra analogies et différences.
- |2| S. HELGASON, "The Radon transform", Birkhäuser, Boston 1980.
Intéressant petit livre, en partie repris dans |1|. Cas de \mathbb{R}^n , application aux ondes, puis extensions à des espaces homogènes.
- |3| P. GÜNTHER, Huygens' principle and Hadamard's conjecture, The Math. Intelligencer 13, Spring 1991, p.56-63.
Article panorama sur le problème et les principaux résultats; invitation à les approfondir dans le livre |4| .
- |4| P. GÜNTHER, "Huygens' principle and hyperbolic equations", Academic Press, Boston 1988.
- |5| F. FRIEDLANDER, "The wave equation on curved space-time", Cambridge University Press, Cambridge 1975.
Construction de solution élémentaire, problème de Cauchy, propagation,... à l'aide d'outils de géométrie différentielle lorentzienne, sans intervention de structures de groupes.
- |6| S. HELGASON, Wave equations on homogeneous spaces, in Lecture Notes in Mathematics n°1077, Springer-Verlag, Berlin 1984.
L'un des premiers articles qui étudie le principe de Huygens par les outils de l'analyse harmonique non-commutative.
- |7| T. BRANSON, G. ÓLAFSSON, H. SCHLICHTKRULL, Huygens' Principle in Riemannian symmetric spaces, Prépublication, Copenhague 1992.
A servi de base à l'exposé ci-dessus. Reprend et précise certains résultats de |8| et |9|.
- |8| T. BRANSON, G. ÓLAFSSON, Equipartition of energy for waves in symmetric spaces, J. Functional Analysis 97 (1991), p.403-416.
Etudie, par l'analyse de Fourier, une question liée au principe de Huygens.
- |9| G. ÓLAFSSON, H. SCHLICHTKRULL, Wave propagation on Riemannian symmetric spaces, J. Functional Analysis 107 (1992), p.270-278.
Très lisible; fait appel à la transformation de Radon, sur \mathbb{R}^n puis sur G/K .

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
U.R.A. au C.N.R.S. n°168
Parc Valrose
06108 NICE cedex 2.