MICHÈLE ARTAUD

À propos de la transposition institutionnelle d'un objet mathématique

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1991, fascicule S6
« Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 47-52
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991___S6_47_0>

THEME 2

Travaux dirigés : *"A propos de la transposition institutionnelle d'un objet mathématique"*

par Michèle ARTAUD

I.R.E.M., Aix-Marseille (C.E.T.F.I)
163, avenue de Luminy 13009 MARSEILLE

L'objectif de cette séance de travaux dirigés était d'illustrer la troisième partie du cours de Gilbert Arsac relative à la théorie de la transposition institutionnelle.
Pour cela, nous avons choisi d'étudier un problème relevant du *champ de problèmes* suivant :

Etude de la genèse et de l'écologie d'un objet O vivant dans une institution I non mathématique, O étant regardé dans I comme un objet mathématique.

Il s'agissait pour les participants d'enquêter collectivement - tout en étant dirigés - à propos d'un problème particulier qui leur était proposé, afin de commencer de faire émerger une technique d'étude des problèmes du champ.

Nous présentons ci-après l'organisation de la séance dans une forme volontairement schématique comportant trois parties : le problème proposé ; un corrigé de ce problème ; la présentation sommaire d'une technique d'étude de ce type de problèmes.

1. *Le problème à étudier*

Soit I l'institution « recherche en économie » et soit O l'objet « matrice positive ». Ce problème a pour objet l'étude de la genèse et de l'écologie de O dans I.

Les données dont on dispose sont fournies par les documents suivants :

- *Document 1* : Ph. Michel (1988), *Cours de mathématiques pour économistes*, Economica : Chapitre 9, Matrices positives, pp. 169-195.
- *Document 2* : M. Morishima (1964), *Equilibrium Stability, and Growth*, Oxford University Press : Appendix, Generalisations of the Perron-Frobenius Theorems for Non-negative Square Matrices, pp. 195-196, et References.
- *Document 3* : G.L. Shackle (1967), *The Years of High Theory : Invention and Tradition in Economic Thought, 1926-1939*, Cambridge University Press, pp. 7-9.
- *Document 4* : Gantmacher (1966), *Théorie des matrices*, tome 2, Questions spéciales et applications, Dunod, Paris : Chapitre 13, Matrices à éléments non-négatifs, pp. 46-51, et bibliographie.
- *Document 5* : D. Gale (1989), *The Theory of Linear Economic Models*, The University of Chicago Press : Chapitre 9, Linear Models of production, pp.294-297.

1. Centre d'économie et des techniques du financement

Dans tout ce qui suit, on note E_I l'école associée à I, c'est-à-dire l'institution didactique qui forme les acteurs de I.

Première partie

1. On admettra ici que la présence dans E_I d'un objet ayant le statut d'enjeu didactique implique sa présence dans I.
 a) Montrer, en se référant principalement au document 1, que l'objet O est présent dans I, et qu'il y est reconnu comme objet mathématique.
 b) En utilisant le document 4, montrer que l'objet O est présent dans l'institution mathématique, IM.
2. A l'aide des documents 1 et 5, précisez l'écotope de I dans lequel vit O. Quelles raisons ont amenées la présence de O dans cet écotope ?
3. Quelles raisons ont pu faire émerger O comme objet institutionnel dans I ?

Deuxième partie

On admettra que la présence de O dans I et dans IM résulte de l'un des deux processus suivants :
(TI) : L'objet O a été créé dans IM puis importé dans I. (C'est un processus de transposition institutionnelle.)
(CT) : L'objet O a été créé dans I puis repris par IM. (C'est un processus de contre-transposition.)

En argumentant votre réponse, indiquez duquel de ces deux types de processus résulte la présence de O dans I et dans IM.

Troisième partie

On admettra que c'est le processus (TI) qui explique la présence de O dans I.

1. Montrer, à l'aide du document 2, que le passage de l'objet O de IM dans I s'est accompagné d'un travail spécifique de cet objet de la part de I.
2. Quelles raisons ont pu motiver ce travail de création institutionnelle accompagnant le processus de transposition institutionnelle ?
3. Que pouvez-vous dire des acteurs de I qui ont effectué ce travail ?

Quatrième partie

Dans cette partie nous étudions le processus de transposition didactique (c'est-à-dire d'importation de I dans E_I) dont O a été l'objet.

1. A propos du livre de Gale (document 5), P. A. Samuelson, prix Nobel en 1970, a écrit : « Gale's *Linear Economic Models* instructed past generations of economists. Today's beginners and experts will want it handy on their library shelves - that's canny personal finance ! ».
En vous aidant de cette observation, dites pourquoi on peut situer le point de départ du processus de transposition didactique dans la noosphère de I.
2. Montrer que le travail transpositif engagé dans la noosphère de I provoque l'apparition d'un nouvel objet, celui de matrice productive.
3. Montrer que l'objet mathématique étudié dans le document 1 n'est pas l'objet O = « matrice positive » mais bien l'objet O' = « matrice productive ».
4. Pourquoi le document 1 s'intitule-t-il pourtant *matrices positives* ?
(On admettra ici que l'objet O' n'est pas reconnu par IM).

2. *Corrigé*

Première Partie

1. a) L'objet O, matrice positive, apparaît dans un chapitre du *Cours de mathématiques pour économistes* de Ph. Michel [document 1] ; il en est, semble-t-il, l'objet d'étude puisque ce chapitre s'intitule « Matrices positives ». O est donc présent, en tant qu'objet mathématique, dans l'école associée à I, E_I. Or la présence dans E_I de O comme enjeu didactique implique sa présence dans I, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé.
b) Dans la *Théorie des matrices* de Gantmacher [document 4], l'auteur consacre un chapitre aux matrices non négatives. L'objet est donc présent dans l'institution mathématique.

2. Dans le document 1, sous le titre du chapitre, Ph. Michel écrit : « En économie, les matrices de coefficients techniques (définissant les consommations intermédiaires dans un système de production linéaire) sont des matrices à termes positifs ou nuls. » L'objet O intervient donc dans la modélisation des systèmes de productions linéaires. Ceci est confirmé par le document 5, dans lequel l'auteur écrit (p. 295) : « A *consumption* matrix A for a simple linear model may be any non-negative square matrix ».
L'écotope de I dans lequel vit O est donc le domaine des modèles linéaires de production.
La modélisation, en termes de production, est la suivante [document 1 et document 5]. On considère une économie qui est divisée en n industries, chaque industrie produisant un bien et un seul et consommant le produit des autres industries (elle-même comprise). Appelons x_i la quantité de bien i produit par l'industrie i (x_i est positif ou nul), et a_{ij} la quantité de bien i nécessaire pour produire une unité de bien j (a_{ij} est positif ou nul). On fait alors l'hypothèse que la production est linéaire, soit encore que la quantité de bien i consommé par l'économie sera $\Sigma_j\, a_{ij}x_j$, ou, en écriture matricielle, AX, où les matrices A et X sont positives. C'est donc l'hypothèse de linéarité du modèle de production qui suscite l'apparition des matrices. Les coefficients de ces matrices étant positifs, l'objet en jeu est alors l'objet « matrice positive ».

3. On peut distinguer deux raisons principales pour lesquelles O a été identifié par I. La première est que l'objet « matrice » est bien identifié par IM. On peut donc penser que I a reconnu l'objet « matrice », éventuellement dans le but d'accroître la reconnaissance de l'économie comme science, la spécification « matrices positives » venant du fait que leurs coefficients sont tous positifs.
La seconde tient à la modélisation elle-même [document 1 et document 5]. L'économiste cherche à obtenir un programme de production X qui soit tel que l'économie soit productive, c'est-à-dire qu'elle produise plus qu'elle ne consomme. Ce qui s'écrit, en termes matriciels, qu'il faut trouver $X \geq 0$ tel que $X - AX = C \geq 0$, soit X tel que $X(I - A) = C \geq 0$. La problématique dans laquelle est engagé l'objet O engendre donc des problèmes à propos de O. Il est alors normal qu'il soit identifié, pour pouvoir être travaillé.

Deuxième partie

La présence de O dans I et IM peut s'expliquer de plusieurs manières.
O peut avoir été créé dans IM puis importé dans I quand le besoin s'en est fait sentir (quand on a commencé à étudier les modèles de production linéaires). Dans ce cas, un processus de transposition institutionnelle aurait importé O de IM dans I. C'est le processus (TI).
2. O peut avoir été créé dans I puis repris par IM. Dans ce cas, c'est un phénomène de contre-transposition que nous aurons à étudier. (On peut citer ici, comme cas célèbre de contre-transposition, la fonction δ de Dirac, créée en physique, qui a été reprise par IM

dans le cadre de la théorie des distributions.) C'est le processus (CT). (2)

D'après le document 4, il apparaît que, dans IM, les premiers résultats importants liés aux matrices à coefficients positifs ont été obtenus par Perron en 1907, puis Frobenius de 1908 à 1912.
Le document 3 attribue à Leontief, et à son modèle d'input-output, l'introduction du calcul matriciel en économie, dans les années 1930. De plus, le document 2 montre que les travaux liés à O dans I ont débuté dans les années 1950.
C'est donc dans IM que O est d'abord apparu, avant de faire résurgence dans I. La présence de O dans I résulte donc d'un processus de transposition institutionnelle (TI).

Troisième partie

1. Dans l'appendice de son ouvrage *Stability Equilibrium, and Growth* [document 2], M. Morishima fait le point des généralisations des théorèmes de Perron-Frobenius portant sur les matrices carrées non-négatives, et note que les théorèmes originaux ont été travaillés par nombre de mathématiciens et d'*économistes mathématiciens* (*mathematical economists*). Il cite Solow, Debreu et Herstein, ainsi que J.T. Schwartz. Il y a donc eu un travail à propos de O effectué par des économistes.

2. Le travail que nous avons mentionné ci-dessus porte sur les propriétés mathématiques de O, en particulier ses propriétés spectrales. La manipulation de O dans I a engendré des besoins (3) qui n'étaient pas satifaits par les résultats déjà existant dans IM. I a donc dû affiner ces résultats afin de répondre à ses propres besoins. Dans l'appendice déjà cité, Morishima note : « Recently Solow and Samuelson have been concerned with a non-linear eigen-vector problem, $\lambda V_i = H_i(V_1, ..., V_n)$ $(i = 1, ..., n)$, where the functions H_i are all homogeneous of the first degree. ».

3. Les acteurs de I qui se sont chargés de ce travail [document 2] sont les mathématiciens de l'institution (ceux que Morishima nomme *mathematical economists*), c'est-à-dire les acteurs de I comptables des mathématiques dans I.

Quatrième partie

1. Le traité de Gale [document 5] est produit en 1960 dans un écotone, zone intermédiaire entre I et IM, qui est la noosphère de I. Il fait partie de ces traités qui font le point sur la question des modèles de production linéaires et (re)composent à cette occasion le texte du savoir relatif à ce sujet. C'est dans ces traités, ainsi que le souligne P.A. Samuelson, que les économistes d'alors ont appris les éléments de la théorie des modèles linéaires. Le traité de Gale est aujourd'hui, nous dit encore Samuelson, un livre destiné aux commençants (*beginners*). Il représente donc le point de départ du processus de transposition didactique de ces questions.

2. Dans son traité, Gale introduit dans le dernier chapitre consacré aux modèles linéaires de production, la notion de matrice productive. Dans le premier paragraphe, après avoir présenté la modélisation, il donne la définition suivante :

> « A simple linear model with consumption matrix A will be called *productive* if there exists a nonnegative vector $\underline{x}$ such that $\underline{x} > \underline{x}A$. We shall also say in this case that the matrix A itself is *productive.* »

---

2. Il se peut également que nous ne soyons dans aucun des deux cas précédents : O a pu être créé par une autre institution par exemple, puis importé dans I sans passer par IM.

3. En particulier, les questions liées à l'inversibilité de la matrice I - A et à la positivité de la matrice $(I - A)^{-1}C$ sont au coeur du travail mené par les économistes (document 2 et document 5).

Gale établit ensuite des théorèmes sur les matrices productives, dont plusieurs concernent l'inverse de la matrice I - A.

3. Après quelques définitions et propriétés élémentaires des matrices positives, l'auteur travaille sur les matrices productives, qui sont des matrices positives particulières. Le théorème de Frobenius lui-même est présenté comme un résultat de l'étude des matrices productives :

> « Le théorème de Frobenius donne une propriété importante des matrices positives : il existe un plus grand nombre positif $\hat{a}$ tel que la matrice A - $\hat{a}$I ne soit pas inversible et il existe une matrice colonne positive P non nulle telle que AP = $\hat{a}$P. (...) b = 1/$\hat{a}$ peut être défini comme la borne supérieure des nombres positifs α tels que αA soit productive. *Sous cette forme, le résultat s'intègre à l'étude des matrices productives.* » (4)

Dans le paragraphe de compléments sur les matrices posititives nilpotentes, les résultats donnés sont tous en rapport avec les matrices productives.

4. La sphère de production des mathématiques, IM, joue le rôle d'institution de gestion sociale et de contrôle culturel des pratiques sociales à teneur mathématique. E_I étant le siège de telles pratiques, elle est soumise à ce contrôle. Les matrices productives ne sont pas reconnues par IM comme objet mathématique ; elles ne peuvent donc pas faire l'objet d'un cours de mathématiques. Pour rendre cela possible, il est nécessaire d'inclure l'objet matrice productive dans un domaine reconnu par IM : les matrices positives. Ainsi, lorsque les mathématiciens regarderont ce qui est enseigné en algèbre linéaire dans E_I, ils trouveront un chapitre sur les matrices positives - ce qui les étonnera peut-être car ce n'est pas un sujet habituellement au menu de la formation en mathématiques des mathématiciens. Ils y verront les notions de matrices positives décomposables et indécomposables, le théorème de Frobenius. Et cela suffira - c'est le pari fait par I - à les *désintéresser*. E_I pourra ainsi poursuivre, avec l'aval des mathématiciens, sa mission : l'enseignement des matrices productives.

3. *Esquisse d'une technique d'étude*

Nous consignerons ici quelques idées permettant d'aller vers une technique d'étude des problèmes du champ que nous avons commencé à étudier. Nous rassemblerons ces notations selon les deux axes du champ de problèmes : la genèse de l'objet et son écologie.

La genèse d'un objet O dans une institution I, O étant regardé dans I comme un objet mathématique (5), peut se dérouler suivant deux grands schémas.

Le premier, que nous laisserons de côté ici, voit d'abord l'émergence au sein de l'institution I de l'objet O ; reconnu et retravaillé par l'institution mathématique, O revient ensuite dans I en tant qu'objet mathématique par le biais d'une transposition didactique de IM dans E_I.

Le second schéma, dont nous avons étudié quelques aspects pour l'objet « matrice positive » dans l'institution « recherche en économie », correspond à un processus de transposition institutionnelle : il y a reconnaissance, dans le travail mené au sein de I, d'un besoin dont la satisfaction suppose l'importation d'un objet O depuis IM, dans laquelle O est supposé exister antérieurement. L'objet O ainsi importé a toute chance de ne satisfaire qu'imparfaitement les besoins de I, en particulier parce qu'il n'y a pas de raison qu'il soit adapté à son nouvel environnement. Ceci nous amène alors à étudier d'un peu plus près

4. Philippe Michel (1988) p.182. C'est moi qui souligne.

5. I n'ayant pas de puissance d'investiture de ce point de vue, c'est-à-dire ne pouvant décider de la mathématicité d'un objet, elle ne fait que reprendre le verdict de reconnaissance porté par l'institution mathématique à propos de I.

l'écologie de O dans l'institution I.

Si l'on fait l'hypothèse que O a atteint une certaine notoriété dans I, au point par exemple d'apparaître dans E_I, O sera présent dans les manuels relatifs à E_I ; et, E_I étant une école professionnelle, il y sera mis en relation avec le domaine de I dans lequel il intervient. Nous pourrons ainsi déterminer l'écotope de I dans lequel vit l'objet O, et, de là, à quels autres objets, et en particulier à quels objets institutionnels propres à I, O est associé. Plus précisément, est-ce qu'il existe un objet O', spécifique de l'institution I, qui satisfasse de manière plus adéquate les besoins de I ?

Si tel est le cas, le processus de travail transpositif de O dans des écotones de I (6) a fait émerger un objet associé, O', de sorte que O' ne soit pas critiquable du point de vue mathématique, et qu'il puisse être repris par les mathématiciens. Tant que O' n'aura pas été reconnu par l'institution mathématique, il vivra au sein de I, et de E_I, dans une certaine confidentialité.

C'est un processus de ce type que nous avons vu à l'oeuvre dans le cas de l'objet « matrice positive » : le travail des mathématiciens de l'institution I a fait surgir l'objet O' = « matrice productive », propre à I, mieux adapté que l'objet O à la satisfaction des besoins de I et de E_I, et qui n'est pas critiquable du point de vue mathématique bien que non (encore) reconnu par IM. Et c'est de ce dernier point, à savoir la non reconnaissance par IM de O', que le titre *Matrices positives* (que Philippe Michel donne au chapitre portant, en fait, sur les matrices productives) est un symptôme. Il montre en effet que l'objet O' = « matrice productive » ne peut pas apparaître sur le devant de la scène, et doit avancer masqué derrière l'objet O = « matrice positive », seul légitime d'occuper la première place.

6. Ces écotones sont constitués d'acteurs à l'interface entre I et IM.